ReSTIR Path Tracing: Shift Mappings

November 15, 2025

1 Shift Mappings

Shift mapping의 핵심 요구 조건은 다음과 같다.

1. Shift mapping은 결정적이어야 한다. 즉, 주어진 입력 경로는 타겟 도메인에서 최대 하나의 경로로만 사상된다.
2. 두 서로 다른 입력 경로가 동일한 출력 경로로 매핑되어서는 안 된다. 이는 shift mapping이 일대일 대응 함수임을 의미하며, 이에 따라 역변환(inverse shift)이 항상 정의될 수 있어야 한다.
3. 모든 경로가 반드시 shift 가능할 필요는 없다.

집합 A와 B에 대하여, shift mapping T는 A의 부분집합 $D(T) \subseteq A$에서 B의 부분집합 $I(T) \subseteq B$로 정의된 전단사 함수

$$T : D(T) \to I(T)$$

를 의미한다. 즉, shift mapping은 일반적으로 $A \to B$ 전체에 대한 함수가 아니라, 입력 집합의 적절한 부분 영역에서만 정의되며, 그 상(image) 역시 B의 전부를 포함할 필요는 없다.

2 도메인간 샘플 재사용

다음은 shift mapping이 포함된 RIS 과정을 다시 정리한 것이다.

1. 입력 샘플들 $(X_1, \ldots, X_M)$을 각자의 도메인 Ω_i로부터 가져온다.
2. 각 샘플에 shift mapping을 적용하여 타겟 도메인Ω의 원소 $Y_i = T_i(X_i)$로 정의한다.
3. 모든 Y_i에 대해 resampling MIS 가중치 $m_i(Y_i)$를 계산한다.
4. 모든 i에 대해 resampling weight를 아래와 같이 계산한다.

   $$w_i = m_i(Y_i)\,\hat{p}(Y_i) W_{X_i} |T_i'(X_i)|$$

   이때 T_i'는 shift mapping의 야코비안(Jacobian)이다.
5. w_i에 비례하여 Y_i 중 하나를 확률적으로 선택하고, 이를 출력 샘플 Y로 한다.
6. 선택된 Y의 unbiased contribution weight는 다음과 같다.

   $$W_Y = \frac{1}{\hat{p}(Y)} \sum_{j=1}^{M} w_j$$

3 Shift mapping을 이용한 m_i의 유도

입력 도메인 Ω_i의 PDFp_{X_i}가 주어졌다고 가정하자. 각 입력 도메인에서 타겟 도메인으로 가는 shift mapping을

$$T_i : \Omega_i \longrightarrow \Omega, \qquad x \longmapsto y = T_i(x)$$

로 정의하자. T_i의 Jacobian determinant는 $|T_i'(x)|$이다.

이때 타겟 도메인 Ω 위의 한 지점 y에서의 resampling MIS weight는

$$m_i : \Omega \to [0,1], \qquad m_i(y) = \frac{p_{Y_i}(y)}{\sum_{j=1}^{M} p_{Y_j}(y)}, \qquad y \in \Omega$$

로 정의된다.

PDF transformation rule에 의해, 타겟 도메인에서의 PDF $p_{Y_i}(y)$는 다음과 같이 입력 도메인의 PDF $p_{X_i}(x)$로부터 얻어진다.

$$p_{Y_i}(y) = \frac{p_{X_i}(x)}{|T_i'(x)|}, \qquad y = T_i(x).$$

T_i는 shift mapping이므로, $T_i{}^{-1}(y) = x$가 되게 하는 T_i의 역변환 $T_i{}^{-1}$이 존재한다. 이때 inverse function theorem에 의해 다음이 성립한다.

$$(T_i^{-1})'(y) = \frac{1}{T_i'(x)} = \frac{1}{T_i'(T_i^{-1}(y))} \implies \left|T_i^{-1\prime}(y)\right| = \frac{1}{\left|T_i'(T_i^{-1}(y))\right|} = \frac{1}{|T_i'(x)|}$$

따라서 $p_{Y_i}(y)$를 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$p_{Y_i}(y) = p_{X_i}(x) \cdot \left|T_i^{-1\prime}(y)\right| = p_{X_i}(T_i{}^{-1}(y)) \cdot \left|T_i^{-1\prime}(y)\right|$$

이를 이용하면 다음과 같은 $m_i(y)$를 얻을 수 있다.

$$m_i(y) = \frac{p_{X_i}(T_i^{-1}(y)) \cdot \left|T_i^{-1\prime}(y)\right|}{\displaystyle\sum_{j=1}^{M} (p_{X_j}(T_j^{-1}(y)) \cdot \left|T_j^{-1\prime}(y)\right|)}, \qquad y \in \Omega.$$

4 PDF를 모를 때의 MIS 가중치

단일 도메인에서 RIS를 시행하는 경우, X_i들은 각자에 대응된 타겟 함수 $\hat{p}_i$에 대략 비례하는 분포로 분포하게 된다. 따라서 우리는 실제 PDF p_i 대신, 타겟 함수 $\hat{p}_i$를 p_i대신 사용하여 일반화된 generalized balance heuristic을 정의하였다.

마찬가지로 서로 다른 도메인에서 만들어진 샘플들로 RIS를 시행하는 경우에도 타겟함수$\hat{p}_{\leftarrow i}$를 다음과 같이 새로 정의한다.

$$\hat{p}_{\leftarrow i}(y) = \begin{cases} \hat{p}_i\big(T_i^{-1}(y)\big)\left|T_i^{-1\prime}(y)\right|, & y \in T_i(\operatorname{supp} X_i), \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

이때 $\operatorname{supp} X_i$의 정의는 다음과 같다. 이때 c_i는 confidence weights를 나타낸다.

$$\operatorname{supp} X_i = \operatorname{cl}\{x \in \Omega_i : T_i(x) \neq 0\}$$

즉 y가 입력 도메인으로 제대로 되돌아갈 수 없거나, 되돌린 점의 PDF가 0일때 0을 반환하는 함수이다.

이를 이용해 도메인 간 MIS weight $m_i(x)$를 다음과 같이 정의한다.

$$m_i(x) = \frac{c_i \cdot \hat{p}_{\leftarrow i}(y)}{\displaystyle\sum_{j=1}^{M} c_j \cdot \hat{p}_{\leftarrow j}(y)}.$$