

IMO 2009; B1 EX15

Problem: Let n be a positive integer and let a_1, \dots, a_k ($k \geq 2$) be distinct integers in the set $\{1, \dots, n\}$ such that

$$n \mid a_i(a_{i+1} - 1) \quad \text{for } i = 1, \dots, k-1.$$

Prove that

$$n \nmid a_k(a_1 - 1).$$

设 n 是一个正整数, $n > 1$, a_0, \dots, a_k ($k \geq 1$) 是集合 $\{1, \dots, n\}$ 中的互不相同的整数, 满足 $n \mid a_i(a_{i+1} - 1)$, 其中 $i = 0, \dots, k-1$ 。证明: $n \nmid a_k(a_0 - 1)$ 。

Lean New Proof

Lean New Proof:

避免 $i, i+1$ 范围混乱令 $t = i+1$, $i = 0, \dots, k-1; t = 1, \dots, k$,

1. 根据条件 $n \mid a_i(a_t - 1)$, $i = 0, \dots, k-1, t = i+1$ 我们有: $n \mid a_0(a_1 - 1)$ 因此令 $(n, a_0) = p, q = \frac{n}{p}$ 亦为整数, 则有 $n = pq$, 并且 $p \mid a_0, q \mid a_1 - 1$. 故 $(q, a_1) = 1$.

2. 由 $q \mid a_1 - 1$, 可得 $q \mid a_2 - 1$, 通过归纳法, 我们可以证明对于所有 $t = 1, \dots, k$, 都有 $q \mid a_t - 1$ 。因此对于任意的 $i = 1, \dots, k$, 都有 $q \mid a_i - 1$ 。特别的, 因为 $q \mid a_0$, 所以 $n = pq \mid a_0(a_k - 1)$ 。

3. 反之, 若结论不成立, 则 $n \mid a_k(a_0 - 1)$, 与 $n = pq \mid a_0(a_k - 1)$ 相减可得 $n \mid (a_k - a_0)$ 。矛盾总上述, $n \nmid a_k(a_0 - 1)$ 。

Lean New Proof

Lean New Proof: 1. 根据条件 $n \mid a_i(a_{i+1} - 1)$, $i = 0, \dots, k-1$ 我们有: $n \mid a_0(a_1 - 1)$ 因此令 $(n, a_0) = p, q = \frac{n}{p}$ 亦为整数, 则有 $n = pq$, 并且 $p \mid a_0, q \mid a_1 - 1$. 故 $(q, a_1) = 1$.

2. 由 $q \mid a_1 - 1$, 可得 $q \mid a_2 - 1$, 通过归纳法, 我们可以证明对于所有 $i = 1, \dots, k$, 都有 $q \mid a_i - 1$ 。因此对于任意的 $i = 1, \dots, k$, 都有 $q \mid a_i - 1$ 。特别的, 因为 $q \mid a_0$, 所以 $n = pq \mid a_0(a_k - 1)$ 。

3. 反之, 若结论不成立, 则 $n \mid a_k(a_0 - 1)$, 与 $n = pq \mid a_0(a_k - 1)$ 相减可得 $n \mid (a_k - a_0)$ 。矛盾总上述, $n \nmid a_k(a_0 - 1)$ 。

Lean New Proof

Lean New Proof:

1. 根据条件 $n \mid a_i(a_{i+1} - 1)$, 我们有: $n \mid a_1(a_2 - 1)$ 因此令 $(n, a_1) = p, q = \frac{n}{p}$ 亦为整数, 则有 $n = pq$, 并且 $p \mid a_1, q \mid a_2 - 1$. 故 $(q, a_2) = 1$.

2. 由 $q \mid a_2 - 1$, 可得 $q \mid a_3 - 1$, 通过归纳法, 我们可以证明对于所有 $i = 2, \dots, k$, 都有 $q \mid a_i - 1$ 。因此对于任意的 $i = 2, \dots, k$, 都有 $q \mid a_i - 1$ 。特别的, 因为 $q \mid a_1$, 所以 $n = pq \mid a_1(a_k - 1)$ 。

3. 反之, 若结论不成立, 则 $n \mid a_k(a_1 - 1)$, 与 $n = pq \mid a_1(a_k - 1)$ 相减可得 $n \mid (a_k - a_1)$ 。矛盾总上述, $n \nmid a_k(a_1 - 1)$ 。

Proof

Proof:

反证法: 假设 $n \mid a_k(a_1 - 1)$ 。令 $n = pq$, 其中 p 和 q 是互质正整数。

步骤 1: 分析整除条件。 根据条件 $n \mid a_i(a_{i+1} - 1)$, 我们有: $p \mid a_i$ 且 $q \mid a_{i+1} - 1$, 其中 $i = 1, \dots, k-1$ 。由于 $q \mid a_2 - 1$, 可得 $\gcd(q, a_2) = 1$, 因此 $q \mid a_3 - 1$ 。通过归纳法, 我们有: $q \mid a_i - 1$, 对于所有 $i = 2, \dots, k$ 。

步骤 2: 对 a_1 的推论。 由 $p \mid a_1$ 和 $q \mid a_1 - 1$, 可得 $\gcd(p, q) = 1$ 。因此: $p \mid a_k$ 且 $q \mid a_k - 1$ 。

步骤 3: 矛盾。 整数 a_1, a_2, \dots, a_k 是互不相同的, 并且位于集合 $\{1, 2, \dots, n\}$ 中。然而, 条件 $p \mid a_i$ 和 $q \mid a_i - 1$ 表明, 在该范围内至多只有一个整数 a_i 同时满足这两个条件。这与假设 $k \geq 2$ 矛盾。

因此, 我们的假设 $n \mid a_k(a_1 - 1)$ 是错误的。由此可得: $n \nmid a_k(a_1 - 1)$ 。

Lean Proof lemma

Lean Proof:

下面是使用 Lean 证明的代码片段:

1. 根据条件 $n \mid a_i(a_{i+1} - 1)$, 我们有: $p \mid a_i$ 且 $q \mid a_{i+1} - 1$, 其中 $i = 1, \dots, k-1$ 。
2. 通过归纳法, 我们可以证明对于所有 $i = 2, \dots, k$, 都有 $q \mid a_i - 1$ 。
3. 由 $p \mid a_1$ 和 $q \mid a_1 - 1$, 可得 $\gcd(p, q) = 1$
4. $p \mid a_k$ 且 $q \mid a_k - 1$
5. 条件 $p \mid a_i$ 和 $q \mid a_i - 1$ 表明, 在该范围内至多只有一个整数 a_i 同时满足这两个条件. 即 $p \mid a_1, q \mid a_1 - 1$ 或 $p \mid a_k, q \mid a_k - 1$