命题证明及形式化拆解

hdmkingdom

2025 年 8 月 3 日

题目（Problem Statement）

English

Let $x_0 = 5$ and $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$.
Prove that $45 < x_{1000} < 45.1$

中文

设 $x_0 = 5$，且 $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$。
证明：$45 < x_{1000} < 45.1$。

证明（Proof Sketch）

1. 两侧平方:

$$x_{n+1}^2 = x_n^2 + \frac{1}{x_n^2} + 2 \tag{1}$$

$$x_{n+1}^2 - x_n^2 = \frac{1}{x_n^2} + 2 \tag{2}$$

2. 因为 $x_n > 0$,$x_{n+1} > x_n$, 因此:

$$x_{n+1}^2 = x_0^2 + \sum_{k=0}^{n}(x_{k+1}^2 - x_k^2) \tag{3}$$

$$= x_0^2 + \sum_{k=0}^{n}(\frac{1}{x_k^2} + 2) \tag{4}$$

$$= 25 + 2(n+1) + \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{x_k^2} \tag{5}$$

3. 确定范围取 $n = 999$

$$
\begin{aligned}
x_{1000}^2 &= 25 + 2000 + \sum_{k=0}^{999} \frac{1}{x_k^2} && (6)\\
&= 2025 + \sum_{k=0}^{999} \frac{1}{x_k^2} && (7)\\
&> 2025 && (8)\\
&= 45^2 && (9)
\end{aligned}
$$

则小值确定, 又

$$
\begin{aligned}
x_{1000}^2 &= 2025 + \sum_{k=0}^{99} \frac{1}{x_k^2} + \sum_{k=100}^{999} \frac{1}{x_k^2} && (10)\\
&< 2025 + \frac{100}{x_0^2} + \frac{900}{x_{100}^2} && (11)\\
&< 2033 && (12)\\
&< 45.1^2 && (13)
\end{aligned}
$$

则大值确定

□

形式化证明步骤（Formal Lemma Decomposition）

Lemma 1. 证明 $x_n > 0$

Lemma 2. 证明 $x_{n+1} > x_n$

Lemma 3. 由原方程处理两侧平方部分, 得到平方差式 (2)

Lemma 4. 对 x_{n+1}^2 做处理, 得到 (5)

Lemma 5. 通过 $n = 999$ 的取值, 确定 x_{1000}^2 的范围, 得到 (7)

Lemma 6. 通过 $n = 999$ 的取值, 确定 x_{1000}^2 的范围, 得到 (10)

Lemma 7. 对 (7) 做处理, 得到 $x_{1000}^2 > 2025$, 得到小值

Lemma 8. 对 (10) 做处理, 得到 $x_{1000}^2 < 2033$, 得到大值

结束