

# 命题证明及形式化拆解

hdmkingdom

2025 年 8 月 11 日

## 题目 (Problem Statement)

### English

Let  $x_0 = 5$  and  $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n}$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ).

Prove that  $45 < x_{1000} < 45.1$ .

### 中文

设  $x_0 = 5$ , 且  $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n}$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ).

证明:  $45 < x_{1000} < 45.1$ .

## 证明 (Proof Sketch)

1. 两侧平方:

$$x_{n+1}^2 = x_n^2 + \frac{1}{x_n^2} + 2 \quad (1)$$

$$x_{n+1}^2 - x_n^2 = \frac{1}{x_n^2} + 2 \quad (2)$$

2. 因为  $x_n > 0, x_{n+1} > x_n$ , 因此:

$$x_{n+1}^2 = x_0^2 + \sum_{k=0}^n (x_{k+1}^2 - x_k^2) \quad (3)$$

$$= x_0^2 + \sum_{k=0}^n \left( \frac{1}{x_k^2} + 2 \right) \quad (4)$$

$$= 25 + 2(n+1) + \sum_{k=0}^n \frac{1}{x_k^2} \quad (5)$$

3. 此处可得到一系列不等式

$$\because x_n > 0, x_{n+1} > x_n$$

$$\therefore \sum_{k=0}^n \frac{1}{x_k^2} > 0$$

$$\therefore x_{n+1}^2 > 25 + 2(n+1) \quad (6)$$

$$\therefore x_n^2 > 25 + 2n \quad (7)$$

$$\therefore \sum_{k=0}^n \frac{1}{x_k^2} < \sum_{k=0}^n \frac{1}{25+2k} \leq \frac{1+\ln n}{2} \quad (8)$$

$$\therefore \sum_{k=0}^n \frac{1}{x_k^2} < \frac{1+\ln n}{2} \quad (9)$$

因此可以得到下列不等式:

$$x_n^2 = 25 + 2n + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{x_k^2} \quad (10)$$

$$> 25 + 2n \quad (11)$$

$$(12)$$

$$x_n^2 = 25 + 2n + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{x_k^2} \quad (13)$$

$$< 25 + 2n + \frac{1+\ln(n-1)}{2} \quad (14)$$

$$(15)$$

4. 确定范围取  $n = 1000$

$$x_{1000}^2 = 25 + 2000 + \sum_{k=0}^{999} \frac{1}{x_k^2} \quad (16)$$

$$= 2025 + \sum_{k=0}^{999} \frac{1}{x_k^2} \quad (17)$$

$$> 2025 \quad (18)$$

$$= 45^2 \quad (19)$$

则小值确定, 又

$$x_{1000}^2 = 2025 + \sum_{k=0}^{999} \frac{1}{x_k^2} \quad (20)$$

$$< 2025 + \frac{1+\ln(999)}{2} \quad (21)$$

$$< 2029 \quad (22)$$

$$< 45.1^2 \quad (23)$$

则大值确定

□

## 形式化证明步骤 (Formal Lemma Decomposition)

### 1. 第一部分: $x_n$ 的基本性质

**Lemma 1.** 非负性, 证明  $x_n > 0$

**Lemma 2.** 单调性, 证明  $x_{n+1} > x_n$

**Lemma 3.** 单调性的传递性, 证明  $x_n x_m$

**Lemma 4.** 严格单调性的传递性, 证明  $x_n < x_m$

### 2. 第二部分: 对 $x_n$ 做初步整理以及抽象

**Lemma 5.** 平方公式, 由原方程处理两侧平方部分, 得到平方公式 (2)

**Lemma 6.** 累加公式, 对  $x_{n+1}^2$  做处理, 得到 (5)

**Lemma 7.** 求和倒数平方对数不等式, 得到 (9)

### 3. 第三部分, $x_{1000}^2$ 下界证明

**Lemma 8.**  $x_{1000}^2$  下界不等式, 通过  $n = 999$  的取值, 确定  $x_{1000}^2$  的范围, 得到 (17)

**Lemma 9.**  $x_{1000}^2 > 2025$ , 通过 (17) 的处理, 得到小值 18

### 4. 第四部分, $x_{1000}^2$ 上界证明

**Lemma 10.**  $\ln 1000 < 7$  约束

**Lemma 11.**  $x_{1000}^2$  下界不等式通过对 (21) 做处理, 得到上界 (22)

### 5. 第五部分, 组合引理

**theorem 1.** 定理的综合, 结合上述平方上下届证明, 得到  $x_{1000}^2$  的范围

结束