实变函数课本习题集

刘泽博

2025 年 4 月 15 日

目录

1 第二章练习题

1.1 第三题

设 G_1, G_2 是开集, 且 G_1 是 G_2 的真子集, 是否一定有 $mG_1 < mG_2$?

$$\because G_1 \subsetneq G_2$$

$$\therefore \exists x_0 \in G_2\text{并且}x_0 \notin G_1$$

$$\because G_1, G_2\text{为开集}$$

$$\therefore \exists \delta > 0, (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset G_2, (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \not\subset G_1$$

$$\therefore G_1 \cup (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset G_2$$

$$\therefore mG_1 + m(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \leq mG_2$$

$$\therefore mG_1 \leq mG_2 - 2\delta$$

$$\therefore mG_1 < mG_2\text{成立}$$

□

1.2 第四题

对任意开集 G, 是否有 $mG_1 < mG_2$?

1. 证明: $G \subset G'$

$$\because G\text{为开集}$$

$$\therefore \forall x \in G$$

$$\exists \delta > 0, \text{使得}(x-\delta, x+\delta) \subset G$$

$$\therefore x\text{为聚点, 而非; 孤立点}$$

$$\therefore x \in G'$$

$$\therefore G \subset G'$$

2. 证明: $G' \subset G$

$$\because G'\text{为}G\text{的导集}$$

$$\therefore \forall x \in G'$$

$$x\text{必为聚点}$$

$$\therefore x \in G$$

$$\therefore G' \subset G$$

由上可知, 如果 G 为开集, 则 $G = G'$

$$\therefore G \text{ 无孤立点，故}\overline{G} = G \cup G' = G$$

$$\therefore m\overline{G} = mG$$

□

1.3 第五题

如果把外测度定义改为:” 有界集 E 的外测度定义为包含 E 的闭集的测度的下确界”, 是否合理?
不合理.
举一反例: 定义区间 $[0, 1]$ 内的有理数集:

$$Q_1 = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$$

$$\text{有}m^*Q_1 = \underset{Q_1 \subset F}{inf}\ mF = m[0, 1] = 1$$

$$mQ = 0$$

$$Q_1 \subset Q$$

$$mQ_1 = 0$$

$$m^* \neq mQ$$

$$\therefore \text{该定义不成立}$$

□

1.4 第六题

设 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 是 n 个互不相交的可测集，且 $E_k \subset A_k, k = 1, 2, \ldots, n$ 证明:

$$m^*(\bigcup_{k=1}^{n} E_k) = \sum_{k=1}^{n} m^* E_k$$

prove: 由外测度的半可加行性可知:

$$m^*(\bigcup_{k=1}^{n} E_k) \leq \sum_{k=1}^{n} m^* E_k$$

现, 证明:

$$m^*(\bigcup_{k=1}^{n} E_k) \geq \sum_{k=1}^{n} m^* E_k$$

$$\because A_1, A_2, \ldots, A_n 是 \text{ n } 个互不相交的可测集，且 E_k \subset A_k, k = 1, 2, \ldots, n$$

$$\therefore E_1, E_2, \ldots, E_n 互不相交$$

令 E=$\bigcup_{k=1}^{n} E_k$, 有

$$m^*(\bigcup_{k=1}^{n} E_k) = inf\{mG | G 为开集, E \subset G\}$$

$$\therefore (G \cap A_k) \supset E_k \supset (G \cap E_k)$$

$$\therefore mG \geq m \bigcup_{k=1}^{n} (G \cap A_k) = \sum_{k=1}^{n} m(G \cap A_k) = \sum_{k=1}^{n} m^*(G \cap A_k) \geq \sum_{k=1}^{n} m^* E_k$$

$$\therefore m^*(\bigcup_{k=1}^{n} E_k) \geq \sum_{k=1}^{n} m^* E_k$$

□

1.5 第七题

如果把外测度定义改为"m^*E 为包含 E 的可测集的测度的下确界", 问此定义与原来的外测度定义有何关系?

两种定义等价

证明如下:

记命题 a = 原定义, 即 $m^*E = \inf_{G \subset E} mG$, G 为开集

记命题 b = 新定义, 即 $m^*E = \inf_{F \subset E} mF$, F 为可测集

1. 证明 a -> b

$$\because G 为开集$$

$$\therefore G 为可测集$$

$$\therefore b 成立$$

2. 证明 b -> a

$$\inf_{F \subset E} mF = t$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists 可测集F_1 \supset E = \underset{F \subset E}{inf}\, mF$$

$$使得mF_1 < t + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\because F_1可测, \exists 开集G_1, 使得G_1 \supset F_1 \supset E$$

$$\therefore 可以有mG_1 \leq mF_1 + \frac{\varepsilon}{2} \leq t + \varepsilon$$

$$\therefore 开集G_1 \leq \underset{F \subset E}{inf}\, mF + \varepsilon$$

$$\therefore a成立$$

□

1.6 第八题

设 E_k 为 $\mathbb{R}$ 中互不相交的集列 $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_K$, 证明:

$$m_* E \geq \sum_{k=1}^{\infty} E_k$$

由内测度定义可知:

$$m_* E = \sup_{F \subset E} mF$$

$$m_* E_k = \sup_{F_k \subset E_k} mF_K$$

$$\therefore \exists F, F_k 使得m_* E = mF, m_* E_k = mF_k$$

下面证明 $\cup_{k=1}^{\infty} F_k \subset F$

$$\because F_k \subset E_k$$

$$E_k = \cup E_k$$

$$\therefore \cup_{k=1}^{\infty} F_k \subset E$$

$$\therefore \cup_{k=1}^{\infty} F_k \subset F$$

$$m \cup_{k=1}^{\infty} F_k = \sum_{k=1}^{\infty} mF_k$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} mF_k \leq mF$$

$$\therefore m_* E \geq \sum_{k=1}^{\infty} E_k$$

□

1.7 第九题

设 E_1, E_2 均为有界可测集, 证明:

$$m(E_1 \cup E_2) = mE_1 + mE_2 - m(E_1 \cap E_2)$$

prove:

$$\because E_1, E_2\text{有界且可测}$$

$$\therefore (E_1 \cup E_2) = E_1 \cap (E_2 - (E_1 \cap E_2))$$

$$\begin{aligned}
&\therefore m(E_1 \cup E_2) \\
&= m(E_1 \cap (E_2 - (E_1 \cap E_2))) \\
&= m(E_1) + m(E_2 - (E_1 \cap E_2)) \\
&= m(E_1) + m(E_2) - m(E_1 \cap E_2)
\end{aligned}$$

□

1.8 第十题

设 E 为 $\mathbb{R}$ 中的可测集,A 为任意集, 证明

$$m^*(E \cup A) + m^*(E \cap A) = mE + m^*A$$

当 E 不可测时, 上式如何.

prove:

$$A \cup E \cap E = E$$

$$A \cup E \cap E^c = A \cap E^c$$

$$m^*E = mE$$

由 Caratheodory 条件:A 为任意集,E 为 $\mathbb{R}$ 中的可测集

$$m^*A =^* (A \cap E) + m^*(A \cap E^c)$$

$$m^*(A \cup E) = m^*(A \cup E \cap E) + m^*(A \cup E \cap E^c)$$

$$m^*(A \cup E) = m^*E + m^*(A \cap E^c)$$

$$\therefore m^*(E \cup A) + m^*(E \cap A) = m^*E + m^*A$$

$$\therefore m^*(E \cup A) + m^*(E \cap A) = mE + m^*A$$

□

1.9 第十一题

设E_n 为 [0,1] 中的集列, 满足:

$$\sum_{n=1}^{\infty} m^*E_n = \infty$$

问是否有 $m * (\overline{\lim}_n E_n) > 0$?

1.10 第十二题

设 E 为可测集, 问下列是否成立?

(i)$m\overline{E} = mE$

(ii)$mE^{\circ} = mE$

(i) 不成立, 反例:$E = [0,1] \cap \mathbb{Q}$

$$\therefore \overline{E} = [0,1]$$
$$\therefore mE = 0$$
$$\therefore m\overline{E} = 1$$
$$m\overline{E} \neq mE$$

(ii) 不成立, 反例:$E = [0,1] - \mathbb{Q}$

$$\therefore E^{\circ} = \emptyset$$
$$\therefore mE^{\circ} = 0$$
$$\therefore mE = 1$$
$$mE^{\circ} \neq mE$$

1.11 第十四题

设 $E_1 \subset E_2 \subset \cdots E_n \subset \cdots$, 试着证明

$$m^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \lim_{x \to \infty} m^* E_n$$

prove:

数学归纳法: 得到 $m^*(\bigcup_{n=1}^{n} E_n) = m^* E_n$:

1. 当 n=1 时, 显然成立.
2. 当 n=2 时, 有

$$\because E_k\text{递增}$$
$$\therefore m^*(E_1 \cup E_2) = m^* E_2$$

3. 假设当 n=k 时成立, 即

$$m^*(\bigcup_{n=1}^{k} E_n) = m^* E_n$$

4. 当 n=k+1 时, 有

$$m^*(\bigcup_{n=1}^{k} E_n \cup E_{k+1}) = m^*(E_n \cup E_{k+1}) = m^* E_{k+1}$$

均成立

$$\therefore m^*(\bigcup_{n=1}^{n} E_n) = m^* E_n$$

两侧去极限, 有

$$\therefore \lim_{n \to \infty} m^*(\bigcup_{n=1}^{n} E_n) = \lim_{n \to \infty} m^* E_n$$
$$m^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \lim_{x \to \infty} m^* E_n$$

□

1.12 第二十题

试作一个闭集 $F \subset [0,1]$, 使得 F 中不含任何开区间, 而 $mF = 1/2$

思路类似构造一个 Cantor 集, 不过取得区间不一样

首先, 已知 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}$ 而且, 令 $G = (0,1) - F$

$mF = m((0,1) - G) = 1 - mG$

所以, 在尝试构造 Cantor 集 F 的时候, 扣去的开区间应该符合级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}}$

$$令 F_0 = [0,1], 记剩余的区间数量和为 \text{ n}$$

$$对 F_0 四等分, 去除中间的 \frac{1}{4}$$

$$得到 F_1, mG = \frac{1}{4}$$

$$对 F_1 剩余的两个区间, 各自去除中间的 (\frac{1}{4})^2$$

$$得到 F_2, mG = \frac{1}{4} + (\frac{1}{4})^2 \times 2$$

以此类推...

得到 F, 并且扣去的 G 有 $mG = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}$

$$因此, mF = \frac{1}{2}, 且不含任何开区间$$

□