

2.1 习题

刘泽博

2025 年 3 月 27 日

第三题, 设 G_1, G_2 是开集, 且 G_1 是 G_2 的真子集, 是否一定有 $mG_1 < mG_2$?

$$\because G_1 \subsetneq G_2$$

$$\therefore \exists x_0 \in G_2 \text{ 并且 } x_0 \notin G_1$$

$$\because G_1, G_2 \text{ 为开集}$$

$$\therefore \exists \delta > 0, (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset G_2, (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \not\subset G_1$$

$$\therefore G_1 \cup (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset G_2$$

$$\therefore mG_1 + m(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \leq mG_2$$

$$\therefore mG_1 \leq mG_2 - 2\delta$$

$$\therefore mG_1 < mG_2 \text{ 成立}$$

□

第四题, 对任意开集 G , 是否有 $mG_1 < mG_2$?

1. 证明: $G \subset G'$

$$\because G \text{ 为开集}$$

$$\therefore \forall x \in G$$

$$\exists \delta > 0, \text{ 使得 } (x - \delta, x + \delta) \subset G$$

$$\therefore x \text{ 为聚点, 而非; 孤立点}$$

$$\therefore x \in G'$$

$$\therefore G \subset G'$$

2. 证明: $G' \subset G$

$$\because G' \text{ 为 } G \text{ 的导集}$$

$$\therefore \forall x \in G'$$

x 必为聚点

$$\therefore x \in G$$

$$\therefore G' \subset G$$

由上可知, 如果 G 为开集, 则 $G = G'$

$$\therefore G \text{ 无孤立点, 故 } \overline{G} = G \cup G' = G$$

$$\therefore m\overline{G} = mG$$

□

第二十题, 试作一个闭集 $F \subset [0, 1]$, 使得 F 中不含任何开区间, 而 $mF = 1/2$

思路类似构造一个 Cantor 集, 不过取得区间不一样

首先, 已知 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}$ 而且, 令 $G = (0, 1) - F$

$$mF = m((0, 1) - G) = 1 - mG$$

所以, 在尝试构造 Cantor 集 F 的时候, 扣去的开区间应该符合级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}}$

令 $F_0 = [0, 1]$, 记剩余的区间数量和为 n

对 F_0 四等分, 去除中间的 $\frac{1}{4}$

$$\text{得到 } F_1, mG = \frac{1}{4}$$

对 F_1 剩余的两个区间, 各自去除中间的 $(\frac{1}{4})^2$

$$\text{得到 } F_2, mG = \frac{1}{4} + (\frac{1}{4})^2 \times 2$$

以此类推...

得到 F , 并且扣去的 G 有 $mG = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}$

因此, $mF = \frac{1}{2}$, 且不含任何开区间

□