实变函数课本习题集

刘泽博

2025 年 4 月 15 日

目录

1 第一章练习题

1.1 第七题

作下列各集的一一对应:

(2) [a,b] 与 $(-\infty,\infty)$

尝试作映射使得

$$[a,b]\sim(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})\sim(-\infty,\infty)$$
$$\text{分解映射为} f\circ g$$
$$f:[a,b]\sim(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$$
$$\text{作线性映射 f(x), 用待定系数法求解, 得}$$
$$f(x)=\frac{\pi}{b-a}x+\frac{(a+b)\pi}{2(a-b)}$$
$$g:(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})\sim(-\infty,\infty)$$
$$g(x)=tanx$$
$$f\circ g[a,b]=(-\infty,\infty)$$

□

(2) 开区间 (0,1) 与无理数集

记无理数集为 $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$

尝试作映射使得

$$(0,1)\sim(0,\infty)\sim\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$$

$$分解映射为f\circ g$$

$$f:(0,1)\sim(0,\infty)$$

$$f(x)=\frac{1}{x}-1$$

$$g:(0,\infty)\sim\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$$

$$(0,\infty)中,\ 有理数可列,\ 记为\{q_1,q_2\ldots q_n\ldots\}$$

$$g(x)=\begin{cases}x, & x\notin\mathbb{Q}\\ q_n+\frac{\pi}{n}, & x=q_n\end{cases}$$

保证 g(x) 在无理数点为无理数, 有理数点也为无理数

$$f\circ g(0,1)=\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$$

□

1.2 第九题

以有理数为端点的区间集能否与自然数集或区间 [0,1] 构成一一对应?
能
证明如下:

$$\mathbb{Q}为可列集,\ 记为\{q_1,q_2\ldots q_n\ldots\}$$

$$区间集\ \mathrm{A}=\{A_{1,2},A_{2,3}\ldots A_{n,n+1}\ldots\},其中,A_{n,n+1}为以q_1,q_2为端点的区间$$

$$易知A$$

$$\therefore A\sim 自然数集$$

□

1.3 第十题

第十题证明整系数多项式的全体是可列的
记整系数多项式的全体为

$$P[x]=\{f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n|a_i\in\mathbb{Z},n\in\mathbb{N}_+\}$$

记 $P[x]$ 中一真子集为

$$P'[x]=\{f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n|a_i\in\mathbb{N}_+,n\in\mathbb{N}_+\}$$

$$现证明P'[x]可列$$

$$P'[x]=\bigcup_{n=1}^{\infty}P'_n[x]$$

$$\because P'_n[x]\sim\mathbb{N}$$

$$\therefore P'_n[x]可列$$

$$\therefore P'[x]可列$$

$$\therefore P[x]中真子集可列,\ 进而P[x]可列$$

□

1.4 第十六题

证明任何点集的内点的全体是开集

记任意点集为 A 如果一个内点 $t_i \in A$

$$\text{则有}\exists(a_i,b_i),\text{使得}t_i \in (a_i,b_i)$$

$$(a_i,b_i) \subset A$$

$$\therefore \forall x \in (a_i,b_i)\text{均有 x 为内点}$$

$$\therefore (a_i,b_i)\text{为开集}$$

$$\text{对于内点}t_j \notin (a_i,b_i)$$

$$\text{则有}\exists(a_j,b_j)\text{使得}t_j \in (a_j,b_j) \subset A$$

$$\text{同理可证}t_j\text{所在的}(a_j,b_j)\text{为开集}$$

$$\text{由此可知,A 内点全体为开集}$$

□

1.5 第十七题

设 f(x) 是定义在 $\mathbb{R}^1$ 上只取整数值的函数, 证明它的连续点集是开集, 且不连续点集是闭集

记 S 为 f(x) 的连续点集

T 为 f(x) 的不连续点集

1. 证明连续点集是开集

$$\forall x_0 \in S$$

$$\exists\delta > 0$$

$$\text{使得}(x_0-\delta,x_0+\delta) \subset S \wedge f(x)\text{在}x_0\text{处连续}$$

$$\therefore \lim_{x\to x_0} F(x) = f(x_0)$$

$$\forall x \in (x_0-\delta,x_0+\delta)$$

$$\text{有}f(x) = f(x_0)$$

$$\therefore S\text{为开集}$$

2. 证明不连续点集是闭集

$$T = \mathbb{R}^1 - S$$

即证明如果 $\{x_n\} \subset T$

$$\lim_{n\to\infty} x_n \to x_0$$

$$\text{有}x_0 \in T$$

$$\text{设}\{x_n\} \subset T$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n \to x_0$$

反证:

$$\text{若}x_0 \notin T$$

$$则x_0 \in S$$

$$则\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

$$\exists \delta > 0$$

$$\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

$$\therefore f(x) = f(x_0)为一定值$$

$$然而$$

$$\because x_n \in T$$

$$f(x_n)$$

$$\therefore \forall \delta > 0且充分小$$

$$必然\exists x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

$$使得f(x) \neq f(x_0)$$

$$与f(x) = f(x_0)矛盾$$

$$\therefore x_0 \in T, T为闭集$$

□

1.6 第十八题

设点集列 $\{E_k\}$ 是有限区间 [a,b] 的渐缩列:$E_1 \supset E_2 \supset \dots$, 且每个 E_k 均为非空闭集, 证明 $\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k$ 非空, 试着证明交集 $\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k$ 非空

$$令E_1 = [a_1, b_1] \subset [a, b]$$

$$E_2 = [a_2, b_2] \subset E_1$$

$$E_k = [a_k, b_k] \subset E_{k-1}$$

$$有a_1 < a_2 < \dots < a_k < \dots$$

$$b_1 > b_2 > \dots > b_k > \dots$$

$$构成区间列$$

$$\therefore \exists t_0为聚点$$

$$t_0 \in E_n, n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\therefore t_0 \in \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k$$

$$\therefore \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k非空$$

□