实变函数课本习题集

刘泽博

2025 年 4 月 10 日

目录

1 第二章练习题

1.1 第六题

设 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 是 n 个互不相交的可测集，且 $E_k \subset A_k, k = 1, 2, \ldots, n$ 证明:

$$m^*(\bigcup_{k=1}^{n} E_k) = \sum_{k=1}^{n} m^* E_k$$

prove: 由外测度的半可加行性可知:

$$m^*(\bigcup_{k=1}^{n} E_k) \le \sum_{k=1}^{n} m^* E_k$$

现, 证明:

$$m^*(\bigcup_{k=1}^{n} E_k) \ge \sum_{k=1}^{n} m^* E_k$$

$$\because A_1, A_2, \ldots, A_n \text{是 n 个互不相交的可测集，且} E_k \subset A_k, k = 1, 2, \ldots, n$$

$$\therefore E_1, E_2, \ldots, E_n \text{互不相交}$$

令 E=$\bigcup_{k=1}^{n} E_k$, 有

$$m^*(\bigcup_{k=1}^{n} E_k) = inf\{mG|G\text{为开集}, E \subset G\}$$

$$\therefore (G \cap A_k) \supset E_k \supset (G \cap E_k)$$

$$\therefore mG \ge m\bigcup_{k=1}^{n}(G \cap A_k) = \sum_{k=1}^{n} m(G \cap A_k) = \sum_{k=1}^{n} m^*(G \cap A_k) \ge \sum_{k=1}^{n} m^* E_k$$

$$\therefore m^*(\bigcup_{k=1}^{n} E_k) \ge \sum_{k=1}^{n} m^* E_k$$

□

1.2 第十题

设 E 为 $\mathbb{R}$ 中的可测集,A 为任意集, 证明

$$m^*(E\cup A)+m^*(E\cap A)=mE+m^*A$$

当 E 不可测时, 上式如何.

prove:

$$A\cup E\cap E=E$$

$$A\cup E\cap E^c=A\cap E^c$$

$$m^*E=mE$$

由 Caratheodory 条件:A 为任意集,E 为 $\mathbb{R}$ 中的可测集

$$m^*A=^*(A\cap E)+m^*(A\cap E^c)$$

$$m^*(A\cup E)=m^*(A\cup E\cap E)+m^*(A\cup E\cap E^c)$$

$$m^*(A\cup E)=m^*E+m^*(A\cap E^c)$$

$$\therefore m^*(E\cup A)+m^*(E\cap A)=m^*E+m^*A$$

$$\therefore m^*(E\cup A)+m^*(E\cap A)=mE+m^*A$$

□

1.3 第十一题

设E_n 为 [0,1] 中的集列, 满足:

$$\sum_{n=1}^{\infty}m^*E_n=\infty$$

问是否有 $m*(\overline{\lim}_n E_n)>0$?

1.4 第十四题

设 $E_1\subset E_2\subset\cdots E_n\subset\cdots$, 试着证明

$$m^*(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n)=\lim_{x\to\infty}m^*E_n$$

prove:

数学归纳法: 得到 $m^*(\bigcup_{n=1}^{n}E_n)=m^*E_n$:

1. 当 n=1 时, 显然成立.

2. 当 n=2 时, 有

$$\because E_k\text{递增}$$

$$\therefore m^*(E_1\cup E_2)=m^*E_2$$

3. 假设当 n=k 时成立, 即

$$m^*(\bigcup_{n=1}^{k}E_n)=m^*E_n$$

4. 当 n=k+1 时, 有

$$m^*(\bigcup_{n=1}^{k} E_n \cup E_{k+1}) = m^*(E_n \cup E_{k+1}) = m^* E_{k+1}$$

均成立

$$\therefore m^*(\bigcup_{n=1}^{n} E_n) = m^* E_n$$

两侧去极限, 有

$$\therefore \lim_{n\to\infty} m^*(\bigcup_{n=1}^{n} E_n) = \lim_{n\to\infty} m^* E_n$$

$$m^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \lim_{x\to\infty} m^* E_n$$

□