

实变函数课本习题集

刘泽博

2025 年 4 月 19 日

目录

1 第三章练习题	1
1.1 第一题	1
1.2 四月 18 小习题 1	2

1 第三章练习题

1.1 第一题

$f(x), g(x)$ 为 E 上的可测函数, 证明 $E(f > g)$ 为可测集?

prove:

$\because f, g$ 为可测函数

$\therefore \forall \alpha > 0$

$E(f > \alpha)$ 为可测函数集, 即 $E(f > \alpha) = \{x \in E | f(x) > \alpha\}$

$E(g > \alpha)$ 为可测函数集, 即 $E(g > \alpha) = \{x \in E | g(x) > \alpha\}$

对 $E(g > \alpha)$ 来说, $E(g \geq \alpha) = E(g > \alpha)^C$

$\therefore E(g \geq \alpha)$ 为可测集

$\forall x \in E(f > g)$

$\exists \alpha$

s.t. $x \in E(f > \alpha) \cap E(g \geq \alpha)$

$\therefore E(f > g) = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} (E(f > r) \cap E(g \geq r))$

$\because E(f > \alpha) \cap E(g \geq \alpha)$ 可测

$\therefore \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} (E(f > r) \cap E(g \geq r))$ 可测

$\therefore E(f > g)$ 可测

□

1.2 四月 18 小习题 1

f 定义在可测集 E 上的广义实函数

若 f^2 可测, 且 $E(f > 0)$ 可测

Q_1 : 证明 f 可测?

Q_2 : 证明 f 可测 $\Leftrightarrow f^3$ 可测?

prove:

Q_1

欲证 $E(f \leq 0) = \{x | x \in E, f(x) \leq 0\}$ 可测

即 $\forall x \in E$

$$f(x) \leq 0$$

$$f^2(x) \geq 0$$

$\therefore f^2$ 为可测函数

$\therefore E(f^2 \geq 0)$ 可测

$$\therefore E(f \leq 0) \subset E(f^2 \geq 0)$$

$\therefore E(f \leq 0)$ 可测

$E(f \geq 0)$ 与 $E(f \leq 0)$ 均可测

$\therefore E(f > a) (\forall a \in \mathbb{R})$ 可测

Q_2