实变函数课本习题集

刘泽博

2025 年 4 月 13 日

目录

1 第一章练习题

2 try

2.1 第七题

作下列各集的一一对应:
(2) [a,b] 与 $(-\infty,\infty)$
尝试作映射使得

$$[a,b] \sim (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \sim (-\infty, \infty)$$
$$分解映射为 f \circ g$$
$$f : [a,b] \sim (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$$
作线性映射 f(x), 用待定系数法求解, 得
$$f(x) = \frac{\pi}{b-a}x + \frac{(a+b)\pi}{2(a-b)}$$
$$g : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \sim (-\infty, \infty)$$
$$g(x) = tanx$$
$$f \circ g[a,b] = (-\infty, \infty)$$

□

(2) 开区间 (0,1) 与无理数集
记无理数集为 $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$
尝试作映射使得
$$(0,1) \sim (0,\infty) \sim \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$$
$$分解映射为 f \circ g$$
$$f : (0,1) \sim (0,\infty)$$
$$f(x) = \frac{1}{x} - 1$$
$$g : (0,\infty) \sim \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$$
$$(0,\infty) 中, 有理数可列, 记为 \{q_1, q_2 \dots q_n \dots\}$$
$$g(x) = \begin{cases} x, & x \notin \mathbb{Q} \\ q_n + \frac{\pi}{n}, & x = q_n \end{cases}$$
保证 g(x) 在无理数点为无理数, 有理数点也为无理数
$$f \circ g(0,1) = \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$$

□

2.2 第九题

以有理数为端点的区间集能否与自然数集或区间 [0,1] 构成一一对应?
能
证明如下:
$$\mathbb{Q} 为可列集, 记为 \{q_1, q_2 \dots q_n \dots\}$$
区间集 A = $\{A_{1,2}, A_{2,3} \dots A_{n,n+1} \dots\}$, 其中, $A_{n,n+1}$ 为以 q_1, q_2 为端点的区间
$$易知 A$$
$$\therefore A \sim 自然数集$$

□

2.3 第十题

第十题证明整系数多项式的全体是可列的

记整系数多项式的全体为

$$P[x] = \{f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n | a_i \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}_+\}$$

记 $P[x]$ 中一真子集为

$$P'[x] = \{f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n | a_i \in \mathbb{N}_+, n \in \mathbb{N}_+\}$$

$$\text{现证明} P'[x] \text{可列}$$

$$P'[x] = \bigcup_{n=1}^{\infty} P'_n[x]$$

$$\because P'_n[x] \sim \mathbb{N}$$

$$\therefore P'_n[x] \text{可列}$$

$$\therefore P'[x] \text{可列}$$

$$\therefore P[x] \text{中真子集可列, 进而} P[x] \text{可列}$$

□

2.4 第十六题

证明任何点集的内点的全体是开集

记任意点集为 A 如果一个内点 $t_i \in A$

$$\text{则有} \exists (a_i, b_i), \text{使得} t_i \in (a_i, b_i)$$

$$(a_i, b_i) \subset A$$

$$\therefore \forall x \in (a_i, b_i) \text{均有 x 为内点}$$

$$\therefore (a_i, b_i) \text{为开集}$$

$$\text{对于内点} t_j \notin (a_i, b_i)$$

$$\text{则有} \exists (a_j, b_j) \text{使得} t_j \in (a_j, b_j) \subset A$$

$$\text{同理可证} t_j \text{所在的} (a_j, b_j) \text{为开集}$$

$$\text{由此可知,A 内点全体为开集}$$

□

2.5 第十七题

设 f(x) 是定义在 $\mathbb{R}^1$ 上只取整数值的函数, 证明它的连续点集是开集, 且不连续点集是闭集
记 S 为 f(x) 的连续点集
T 为 f(x) 的不连续点集
1. 证明连续点集是开集

$$\forall x_0 \in S$$

$$\exists \delta > 0$$

$$使得(x_0-\delta, x_0+\delta) \subset S \wedge f(x)在x_0处连续$$

$$\therefore \lim_{x \to x_0} F(x) = f(x_0)$$

$$\forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$$

$$有f(x) = f(x_0)$$

$$\therefore S为开集$$

2. 证明不连续点集是闭集

$$T = \mathbb{R}^1 - S$$

即证明如果 $\{x_n\} \subset T$

$$\lim_{n \to \infty} x_n \to x_0$$

$$有x_0 \in T$$

$$设\{x_n\} \subset T$$

$$\lim_{n \to \infty} x_n \to x_0$$

反证:

$$若x_0 \notin T$$

$$则x_0 \in S$$

$$则\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

$$\exists \delta > 0$$

$$\forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$$

$$\therefore f(x) = f(x_0)为一定值$$

$$然而$$

$$\because x_n \in T$$

$$f(x_n)$$

$$\therefore \forall \delta > 0且充分小$$

$$必然\exists x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$$

$$使得f(x) \neq f(x_0)$$

$$与f(x) = f(x_0)矛盾$$

$$\therefore x_0 \in T, T为闭集$$

□

2.6 第十八题

设点集列 $\{E_k\}$ 是有限区间 [a,b] 的渐缩列:$E_1 \supset E_2 \supset \ldots$, 且每个 E_k 均为非空闭集, 证明 $\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k$ 非空, 试着证明交集 $\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k$ 非空

$$令E_1 = [a_1, b_1] \subset [a, b]$$

$$E_2 = [a_2, b_2] \subset E_1$$

$$E_k = [a_k, b_k] \subset E_{k-1}$$

$$有a_1 < a_2 < \ldots < a_k < \ldots$$

$$b_1 > b_2 > \ldots > b_k > \ldots$$

$$构成区间列$$

$$\therefore \exists t_0为聚点$$

$$t_0 \in E_n, n = 1, 2, 3, \ldots$$

$$\therefore t_0 \in \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k$$

$$\therefore \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k非空$$

□

3 第二章练习题

3.1 第三题

设 G_1, G_2 是开集, 且 G_1 是 G_2 的真子集, 是否一定有 $mG_1 < mG_2$?

$$\because G_1 \subsetneq G_2$$

$$\therefore \exists x_0 \in G_2并且x_0 \notin G_1$$

$$\because G_1, G_2为开集$$

$$\therefore \exists \delta > 0, (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset G_2, (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \not\subset G_1$$

$$\therefore G_1 \cup (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset G_2$$

$$\therefore mG_1 + m(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \leq mG_2$$

$$\therefore mG_1 \leq mG_2 - 2\delta$$

$$\therefore mG_1 < mG_2成立$$

□

3.2 第四题

对任意开集 G, 是否有 $mG_1 < mG_2$?

1. 证明: $G \subset G'$

$$\because G\text{为开集}$$

$$\therefore \forall x \in G$$

$$\exists \delta > 0, \text{使得}(x-\delta, x+\delta) \subset G$$

$$\therefore x\text{为聚点, 而非; 孤立点}$$

$$\therefore x \in G'$$

$$\therefore G \subset G'$$

2. 证明: $G' \subset G$

$$\because G'\text{为}G\text{的导集}$$

$$\therefore \forall x \in G'$$

$$x\text{必为聚点}$$

$$\therefore x \in G$$

$$\therefore G' \subset G$$

由上可知, 如果 G 为开集, 则 $G = G'$

$$\therefore G \text{ 无孤立点，故}\overline{G} = G \cup G' = G$$

$$\therefore m\overline{G} = mG$$

□

3.3 第五题

如果把外测度定义改为:" 有界集 E 的外测度定义为包含 E 的闭集的测度的下确界", 是否合理?

不合理.

举一反例: 定义区间 $[0,1]$ 内的有理数集:

$$Q_1 = \mathbb{Q} \cap [0,1]$$

$$\text{有}m^*Q_1 = \underset{Q_1 \subset F}{inf}\, mF = m[0,1] = 1$$

$$mQ = 0$$

$$Q_1 \subset Q$$

$$mQ_1 = 0$$

$$m^* \neq mQ$$

$$\therefore \text{该定义不成立}$$

□

3.4 第六题

设 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 是 n 个互不相交的可测集，且 $E_k \subset A_k, k = 1, 2, \ldots, n$ 证明:

$$m^*(\bigcup_{k=1}^{n} E_k) = \sum_{k=1}^{n} m^* E_k$$

prove: 由外测度的半可加行性可知:

$$m^*(\bigcup_{k=1}^{n} E_k) \leq \sum_{k=1}^{n} m^* E_k$$

现, 证明:

$$m^*(\bigcup_{k=1}^{n} E_k) \geq \sum_{k=1}^{n} m^* E_k$$

$$\because A_1, A_2, \ldots, A_n\text{是 n 个互不相交的可测集，且}E_k \subset A_k, k = 1, 2, \ldots, n$$

$$\therefore E_1, E_2, \ldots, E_n\text{互不相交}$$

令 E=$\bigcup_{k=1}^{n} E_k$, 有

$$m^*(\bigcup_{k=1}^{n} E_k) = inf\{mG|G\text{为开集}, E \subset G\}$$

$$\therefore (G \cap A_k) \supset E_k \supset (G \cap E_k)$$

$$\therefore mG \geq m\bigcup_{k=1}^{n}(G \cap A_k) = \sum_{k=1}^{n} m(G \cap A_k) = \sum_{k=1}^{n} m^*(G \cap A_k) \geq \sum_{k=1}^{n} m^* E_k$$

$$\therefore m^*(\bigcup_{k=1}^{n} E_k) \geq \sum_{k=1}^{n} m^* E_k$$

□

3.5 第七题

如果把外测度定义改为"m^*E 为包含 E 的可测集的测度的下确界", 问此定义与原来的外测度定义有何关系?

两种定义等价

证明如下:

记命题 a = 原定义, 即 $m^*E = \inf\limits_{G \subset E} mG$, G 为开集

记命题 b = 新定义, 即 $m^*E = \inf\limits_{F \subset E} mF$, F 为可测集

1. 证明 a -> b

$$\because G\text{为开集}$$

$$\therefore G\text{为可测集}$$

$$\therefore b\text{成立}$$

2. 证明 b -> a

$$\inf_{F \subset E} mF = t$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists\text{可测集} F_1 \supset E = \underset{F \subset E}{inf}\, mF$$

$$\text{使得} mF_1 < t + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\because F_1\text{可测}, \exists\text{开集} G_1, \text{使得} G_1 \supset F_1 \supset E$$

$$\therefore \text{可以有} mG_1 \leq mF_1 + \frac{\varepsilon}{2} \leq t + \varepsilon$$

$$\therefore \text{开集} G_1 \leq \underset{F \subset E}{inf}\, mF + \varepsilon$$

$$\therefore a\text{成立}$$

□

3.6 第八题

设 E_k 为 $\mathbb{R}$ 中互不相交的集列 $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_K$, 证明:

$$m_* E \geq \sum_{k=1}^{\infty} E_k$$

由内测度定义可知:

$$m_* E = \sup_{F \subset E} mF$$

$$m_* E_k = \sup_{F_k \subset E_k} mF_K$$

$$\therefore \exists F, F_k \text{使得} m_* E = mF, m_* E_k = mF_k$$

下面证明 $\cup_{k=1}^{\infty} F_k \subset F$

$$\because F_k \subset E_k$$

$$E_k = \cup E_k$$

$$\therefore \cup_{k=1}^{\infty} F_k \subset E$$

$$\therefore \cup_{k=1}^{\infty} F_k \subset F$$

$$m \cup_{k=1}^{\infty} F_k = \sum_{k=1}^{\infty} mF_k$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} mF_k \leq mF$$

$$\therefore m_* E \geq \sum_{k=1}^{\infty} E_k$$

□

3.7 第九题

设 E_1, E_2 均为有界可测集, 证明:

$$m(E_1 \cup E_2) = mE_1 + mE_2 - m(E_1 \cap E_2)$$

prove:

$$\because E_1, E_2\text{有界且可测}$$

$$\therefore (E_1 \cup E_2) = E_1 \cap (E_2 - (E_1 \cap E_2))$$

$$\begin{aligned}
&\therefore m(E_1 \cup E_2) \\
&= m(E_1 \cap (E_2 - (E_1 \cap E_2))) \\
&= m(E_1) + m(E_2 - (E_1 \cap E_2)) \\
&= m(E_1) + m(E_2) - m(E_1 \cap E_2)
\end{aligned}$$

□

3.8 第十题

设 E 为 $\mathbb{R}$ 中的可测集,A 为任意集, 证明

$$m^*(E \cup A) + m^*(E \cap A) = mE + m^*A$$

当 E 不可测时, 上式如何.

prove:

$$A \cup E \cap E = E$$

$$A \cup E \cap E^c = A \cap E^c$$

$$m^*E = mE$$

由 Caratheodory 条件:A 为任意集,E 为 $\mathbb{R}$ 中的可测集

$$m^*A =^* (A \cap E) + m^*(A \cap E^c)$$

$$m^*(A \cup E) = m^*(A \cup E \cap E) + m^*(A \cup E \cap E^c)$$

$$m^*(A \cup E) = m^*E + m^*(A \cap E^c)$$

$$\therefore m^*(E \cup A) + m^*(E \cap A) = m^*E + m^*A$$

$$\therefore m^*(E \cup A) + m^*(E \cap A) = mE + m^*A$$

□

3.9 第十一题

设E_n 为 [0,1] 中的集列, 满足:

$$\sum_{n=1}^{\infty} m^* E_n = \infty$$

问是否有 $m * (\overline{\lim}_n E_n) > 0$?

3.10 第十二题

设 E 为可测集, 问下列是否成立?

(i)$m\overline{E} = mE$

(ii)$mE^\circ = mE$

(i) 不成立, 反例:$E = [0,1] \cap \mathbb{Q}$

$$\therefore \overline{E} = [0,1]$$

$$\therefore mE = 0$$

$$\therefore m\overline{E} = 1$$

$$m\overline{E} \neq mE$$

(ii) 不成立, 反例:$E = [0,1] - \mathbb{Q}$

$$\therefore E^\circ = \emptyset$$

$$\therefore mE^\circ = 0$$

$$\therefore mE = 1$$

$$mE^\circ \neq mE$$

3.11 第十四题

设 $E_1 \subset E_2 \subset \cdots E_n \subset \cdots$, 试着证明

$$m^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \lim_{x\to\infty} m^* E_n$$

prove:

数学归纳法: 得到 $m^*(\bigcup_{n=1}^{n} E_n) = m^* E_n$:

1. 当 n=1 时, 显然成立.

2. 当 n=2 时, 有

$$\because E_k\text{递增}$$

$$\therefore m^*(E_1 \cup E_2) = m^* E_2$$

3. 假设当 n=k 时成立, 即

$$m^*(\bigcup_{n=1}^{k} E_n) = m^* E_n$$

4. 当 n=k+1 时, 有

$$m^*(\bigcup_{n=1}^{k} E_n \cup E_{k+1}) = m^*(E_n \cup E_{k+1}) = m^* E_{k+1}$$

均成立

$$\therefore m^*(\bigcup_{n=1}^{n} E_n) = m^* E_n$$

两侧去极限, 有

$$\therefore \lim_{n\to\infty} m^*(\bigcup_{n=1}^{n} E_n) = \lim_{n\to\infty} m^* E_n$$

$$m^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \lim_{x\to\infty} m^* E_n$$

□

3.12 第二十题

试作一个闭集 $F \subset [0,1]$, 使得 F 中不含任何开区间, 而 $mF = 1/2$

思路类似构造一个 Cantor 集, 不过取得区间不一样

首先, 已知 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}$ 而且, 令 $G = (0,1) - F$

$mF = m((0,1) - G) = 1 - mG$

所以, 在尝试构造 Cantor 集 F 的时候, 扣去的开区间应该符合级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}}$

$$令F_0 = [0,1], 记剩余的区间数量和为\ \mathrm{n}$$

$$对F_0四等分, 去除中间的\frac{1}{4}$$

$$得到F_1, mG = \frac{1}{4}$$

$$对F_1剩余的两个区间, 各自去除中间的(\frac{1}{4})^2$$

$$得到F_2, mG = \frac{1}{4} + (\frac{1}{4})^2 \times 2$$

以此类推...

得到 F, 并且扣去的 G 有 $mG = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}$

$$因此, mF = \frac{1}{2}, 且不含任何开区间$$

□