第 2 章习题

刘泽博

2025 年 3 月 31 日

第三题, 设 G_1, G_2 是开集, 且 G_1 是 G_2 的真子集, 是否一定有 $mG_1 < mG_2$?

$$\because G_1 \subsetneq G_2$$

$$\therefore \exists x_0 \in G_2 \text{并且} x_0 \notin G_1$$

$$\because G_1, G_2 \text{为开集}$$

$$\therefore \exists \delta > 0, (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset G_2, (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \not\subset G_1$$

$$\therefore G_1 \cup (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset G_2$$

$$\therefore mG_1 + m(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \leq mG_2$$

$$\therefore mG_1 \leq mG_2 - 2\delta$$

$$\therefore mG_1 < mG_2 \text{成立}$$

□

第四题, 对任意开集 G, 是否有 $mG_1 < mG_2$?

1. 证明: $G \subset G'$

$$\because G \text{为开集}$$

$$\therefore \forall x \in G$$

$$\exists \delta > 0, \text{使得} (x - \delta, x + \delta) \subset G$$

$$\therefore x \text{为聚点, 而非; 孤立点}$$

$$\therefore x \in G'$$

$$\therefore G \subset G'$$

2. 证明: $G' \subset G$

$$\because G' \text{为} G \text{的导集}$$

$$\therefore \forall x \in G'$$

$$x\text{必为聚点}$$

$$\therefore x \in G$$

$$\therefore G' \subset G$$

由上可知, 如果 G 为开集, 则 $G = G'$

$$\therefore G \text{ 无孤立点，故} \overline{G} = G \cup G' = G$$

$$\therefore m\overline{G} = mG$$

□

第五题，如果把外测度定义改为:" 有界集 E 的外测度定义为包含 E 的闭集的测度的下确界", 是否合理?

不合理.

举一反例: 定义区间 $[0,1]$ 内的有理数集:

$$Q_1 = \mathbb{Q} \cap [0,1]$$

$$\text{有} m^* Q_1 = \underset{Q_1 \subset F}{inf}\, mF = m[0,1] = 1$$

$$mQ = 0$$

$$Q_1 \subset Q$$

$$mQ_1 = 0$$

$$m^* \neq mQ$$

$$\therefore \text{该定义不成立}$$

□

第七题, 如果把外测度定义改为"m^*E 为包含 E 的可测集的测度的下确界", 问此定义与原来的外测度定义有何关系?

两种定义等价

证明如下:

记命题 a = 原定义, 即 $m^*E = \underset{G \subset E}{inf}\, mG$，G 为开集

记命题 b = 新定义, 即 $m^*E = \underset{F \subset E}{inf}\, mF$，F 为可测集

1. 证明 a -> b

$$\because G\text{为开集}$$

$$\therefore G\text{为可测集}$$

$$\therefore b\text{成立}$$

2. 证明 b -> a

$$\underset{F\subset E}{inf}\, mF = t$$

$$\forall\varepsilon>0, \exists\text{可测集}F_1 \supset E = \underset{F\subset E}{inf}\, mF$$

$$\text{使得}mF_1 < t+\frac{\varepsilon}{2}$$

$$\because F_1\text{可测}, \exists\text{开集}G_1, \text{使得}G_1 \supset F_1 \supset E$$

$$\therefore \text{可以有}mG_1 \leq mF_1 + \frac{\varepsilon}{2} \leq t+\varepsilon$$

$$\therefore \text{开集}G_1 \leq \underset{F\subset E}{inf}\, mF + \varepsilon$$

$$\therefore a\text{成立}$$

□

第八题, 设 E_k 为 $\mathbb{R}$ 中互不相交的集列 $E=\bigcup_{k=1}^{\infty} E_K$, 证明:

$$m_*E \geq \sum_{k=1}^{\infty} E_k$$

由内测度定义可知:

$$m_*E = \sup_{F\subset E} mF$$

$$m_*E_k = \sup_{F_k\subset E_k} mF_K$$

$$\therefore \exists F, F_k\text{使得}m_*E = mF, m_*E_k = mF_k$$

下面证明 $\cup_{k=1}^{\infty} F_k \subset F$

$$\because F_k \subset E_k$$

$$E_k = \cup E_k$$

$$\therefore \cup_{k=1}^{\infty} F_k \subset E$$

$$\therefore \cup_{k=1}^{\infty} F_k \subset F$$

$$m\cup_{k=1}^{\infty} F_k = \sum_{k=1}^{\infty} mF_k$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} mF_k \leq mF$$

$$\therefore m_*E \geq \sum_{k=1}^{\infty} E_k$$

□

第二十题, 试作一个闭集 $F \subset [0,1]$, 使得 F 中不含任何开区间, 而 $mF = 1/2$

思路类似构造一个 Cantor 集, 不过取得区间不一样

首先, 已知 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}$ 而且, 令 $G = (0,1) - F$

$mF = m((0,1) - G) = 1 - mG$

所以, 在尝试构造 Cantor 集 F 的时候, 扣去的开区间应该符合级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}}$

$$令F_0 = [0,1], 记剩余的区间数量和为 \text{ n}$$

$$对F_0四等分, 去除中间的\frac{1}{4}$$

$$得到F_1, mG = \frac{1}{4}$$

$$对F_1剩余的两个区间, 各自去除中间的(\frac{1}{4})^2$$

$$得到F_2, mG = \frac{1}{4} + (\frac{1}{4})^2 \times 2$$

以此类推...

得到 F, 并且扣去的 G 有 $mG = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}$

$$因此, mF = \frac{1}{2}, 且不含任何开区间$$

□