

# 1 Introduction

Let's consider a physical domain  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  ( $d = 1, 2, 3$ ) that is bounded with the boundary  $\Gamma$ . Donote  $I := (0, T)$ ,  $Q := \Omega \times I$  và  $S := \Gamma \times I$  with  $T > 0$  given.

Consider the heat equation with the initial condition

$$u_t - \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_j} \left( a_{ji}(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) = F(x, t), \quad (x, t) \in Q, \quad (1.1)$$

with the initial and Neumann conditions, respectively

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \mathcal{N}}(x, t) = \varphi(x, t), \quad (x, t) \in S, \quad (1.3)$$

where

$$\begin{aligned} a_{ij} &\in L^\infty(Q), \quad a_{ij} = a_{ji}, \quad \forall i, j \in \{1, 2, \dots, d\}, \\ \lambda_1 \|\xi\|^2 &\leq \sum_{i,j=1}^d a_{ij} \xi_i \xi_j \leq \lambda_2 \|\xi\|^2, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^d, \\ \varphi &\in L^2(S), \quad u_0 \in L^2(\Omega), \quad F \in L^2(I; H^{-1}(\Omega)), \end{aligned}$$

with  $\lambda_1$  và  $\lambda_2$  are positive constants and

$$\frac{\partial u}{\partial \mathcal{N}}(x, t) = \sum_{i,j=1}^d a_{ji}(x, t) n_j(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x, t), \quad (x, t) \in S,$$

with  $n(x, t)$  is the outer normal to  $S$ .

The direct problem:

The inverse problem:  $F(x, t) = f(x, t)q(x, t) + g(x, t)$ . This inverse problem will be investigated by the least squares method, minimize the functional

$$J_\gamma(f) = \frac{1}{2} \|u - \omega\|_{L^2(Q)}^2 + \frac{\gamma}{2} \|f - f^*\|_{L^2(Q)}^2,$$

with  $\gamma > 0$  being a regularization parameter

# 2 Variational problem

To introduce the concept of weak form, we use the standard Sobolev spaces  $H^1(\Omega)$ ,  $H_0^1(\Omega)$ ,  $H^{1,0}(Q)$  and  $H^{1,1}(Q)$ . Further, for a Banach space  $B$ , we define

$$L^2(0, T; B) = \left\{ u : u(t) \in B \text{ a.e. } t \in (0, T) \text{ and } \|u\|_{L^2(0, T; B)} < \infty \right\},$$

with the norm

$$\|u\|_{L^2(0, T; B)} = \int_0^T \|u(t)\|_B^2 dt$$

In the sequel, we shall use the space  $W(0, T)$  define as

$$W(0, T) = \left\{ u : u \in L^2(0, T; H^1(\Omega)), u_t \in L^2\left(0, T; (H^1(\Omega))'\right) \right\}$$

$$\int_Q \left[ u_t v + \sum_{i,j=1}^d a_{ji} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} \right] dx dt = \int_Q F v dx dt + \int_S \varphi v ds dt. \quad (2.1)$$

$$\|u\|_{L^2(0,T;B)} \leq c_d \left( \|F\|_{L^2(Q)} + \|u_0\|_{L^2(\Omega)} + \|\varphi\|_{L^2(S)} \right) \quad (2.2)$$

Since the solution  $u(x, t)$  depends on the function  $f(x, t)$ , so we denote it by  $u(f)$ . To identify  $f(x, t)$ , we minimize the functional

$$J_0(f) = \frac{1}{2} \|u - \omega\|_{L^2(Q)}^2,$$

Because.... Therefore we minimize the Tikhonov functional instead

$$J_\gamma(f) = \frac{1}{2} \|u - \omega\|_{L^2(Q)}^2 + \frac{\gamma}{2} \|f - f^*\|_{L^2(Q)}^2,$$

make clear parameters above.

We will prove that  $J_\gamma$  is Frechet differentiable and drive a formular for its gradient. Want to do so, we need the adjoint problem

$$\begin{cases} -p_t - \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_j} \left( a_{ji}(x, t) \frac{\partial p}{\partial x_i} \right) = \ell u(f) - \omega, & (x, t) \in Q, \\ \frac{\partial p}{\partial \mathcal{N}}(x, t) = 0, & (x, t) \in S \\ p(x, T) = 0, & x \in \Omega. \end{cases} \quad (2.3)$$

By changing the time direction, meaning  $\bar{p}(x, t) = p(x, T - t)$ , we will get a Neumann problem for parabolic equations.

**Định lý 2.1.** *The functional  $J_\gamma$  is Frechet differentiable and its gradient  $\nabla J_\gamma$  at  $f$  has the form*

$$\nabla J_\gamma(f) = q(x, t)p(x, t) + \gamma f(x, t)$$

*Chứng minh.* Taking a small variation  $\delta f \in L^2(Q)$  of  $f$  and denote  $\delta u(f) = u(f + \delta f) - u(f)$ , we have

$$\begin{aligned} J_0(f + \delta f) - J_0(f) &= \frac{1}{2} \|\ell u(f + \delta f) - \omega\|_{L^2(Q)}^2 - \frac{1}{2} \|\ell u(f) - \omega\|_{L^2(Q)}^2 \\ &= \frac{1}{2} \|\ell \delta u(f) + \ell u(f) - \omega\|_{L^2(Q)}^2 - \frac{1}{2} \|\ell u(f) - \omega\|_{L^2(Q)}^2 \\ &= \frac{1}{2} \|\ell \delta u(f)\|_{L^2(Q)}^2 + \langle \ell \delta u(f), \ell u(f) - \omega \rangle_{L^2(Q)} \end{aligned}$$

where  $\delta u(f)$  is the solution to the problem

$$\begin{cases} \delta u_t - \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_j} \left( a_{ji}(x, t) \frac{\partial \delta u}{\partial x_i} \right) = q(x, t) \delta f, & (x, t) \in Q, \\ \frac{\partial \delta u}{\partial \mathcal{N}}(x, t) = 0, & (x, t) \in S, \\ \delta u(x, 0) = 0, & x \in \Omega. \end{cases} \quad (2.4)$$

Because the priori estimate (...) for the direct problem, we have

$$\|\ell \delta u(f)\|_{L^2(Q)}^2 = o\left(\|\delta f\|_{L^2(Q)}\right) \text{ when } \|\delta f\|_{L^2(Q)} \rightarrow 0.$$

What is more, applying the Green formula for (...) and (...), we get

$$\int_Q \delta u (\ell u(f) - \omega) dx dt = \int_Q p(x, t) q(x, t) \delta f(x, t) dx dt$$

Therefore,

$$\begin{aligned} J_0(f + \delta f) - J_0(f) &= \int_Q \delta u (\ell u - \omega) ds + o\left(\|\delta f\|_{L^2(Q)}\right) \\ &= \int_Q qp \delta f dx dt + o\left(\|\delta f\|_{L^2(I)}\right) \\ &= \langle qp, \delta f \rangle_{L^2(Q)} + o\left(\|\delta f\|_{L^2(Q)}^2\right). \end{aligned} \quad (2.5)$$

It's easy to get this

$$J_\gamma(f + \delta f) - J_\gamma(f) = \langle qp, \delta f \rangle_{L^2(Q)} + \gamma \langle f - f^*, \delta f \rangle_{L^2(Q)} + o\left(\|\delta f\|_{L^2(Q)}^2\right)$$

Hence the functional  $J_\gamma$  is Frechet differentiable and its gradient  $\nabla J_\gamma$  at  $f$  has the form (...). The theorem is proved.  $\square$

To find  $f$  satisfied (...), we use the conjugate gradient method (CG). It proceeds as follows: Assume that at the  $k$ th iteration, we have  $f^k$ . Then the next iteration is

$$f^{k+1} = f^k + \alpha_k d^k,$$

with

$$d^k = \begin{cases} -\nabla J_\gamma(f^k), & k = 0, \\ -\nabla J_\gamma(f^k) + \beta_k d^{k-1}, & k > 0, \end{cases}$$

$$\beta_k = \frac{\|\nabla J_\gamma(f^k)\|_{L^2(I)}^2}{\|\nabla J_\gamma(f^{k-1})\|_{L^2(I)}^2},$$

and

$$\alpha_k = \arg \min_{\alpha \geq 0} J_\gamma(f^k + \alpha d^k).$$

To identify  $\alpha_k$ , we consider two problems Để xác định  $\alpha_k$ , chúng ta sẽ xét hai bài toán sau

**Bài toán 2.1.** Denote the solution of this problem is  $u[f]$

$$\begin{cases} u_t - \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_j} \left( a_{ji}(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) = f(t)h(x, t), & (x, t) \in Q, \\ \frac{\partial u}{\partial N}(x, t) = 0, & (x, t) \in S, \\ u(x, 0) = 0, & x \in \Omega. \end{cases}$$

**Bài toán 2.2.** Denote the solution of this problem is  $u(u_0, \varphi)$

$$\begin{cases} u_t - \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_j} \left( a_{ji}(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) = g(x, t), & (x, t) \in Q, \\ \frac{\partial u}{\partial \mathcal{N}}(x, t) = \varphi(x, t), & (x, t) \in S, \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \Omega. \end{cases}$$

If so, the observation operators have the form  $\ell u(f) = \ell u[f] + \ell u(u_0, \varphi) = Af + \ell u(u_0, \varphi)$ , with  $A$  being bounded linear operators from  $L^2(Q)$  đến  $L^2(Q)$ .

We have

$$\begin{aligned} J_\gamma(f^k + \alpha d^k) &= \frac{1}{2} \|\ell u(f^k + \alpha d^k) - \omega\|_{L^2(S_1)}^2 + \frac{\gamma}{2} \|f^k + \alpha d^k - f^*\|_{L^2(I)}^2 \\ &= \frac{1}{2} \|\alpha Ad^k + Af^k + \ell u(u_0, \varphi) - \omega\|_{L^2(S_1)}^2 + \frac{\gamma}{2} \|f^k + \alpha d^k - f^*\|_{L^2(I)}^2 \\ &= \frac{1}{2} \|\alpha Ad^k + \ell u(f^k) - \omega\|_{L^2(S_1)}^2 + \frac{\gamma}{2} \|f^k + \alpha d^k - f^*\|_{L^2(I)}^2. \end{aligned}$$

Taking differentiating  $J_\gamma(f^k + \alpha d^k)$  with respect to  $\alpha$ , we get

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_\gamma(f^k + \alpha d^k)}{\partial \alpha} &= \alpha \|Ad^k\|_{L^2(S_1)}^2 + \langle Ad^k, \ell u(f^k) - \omega \rangle_{L^2(S_1)} \\ &\quad + \gamma \alpha \|d^k\|_{L^2(I)}^2 + \gamma \langle d^k, f^k - f^* \rangle_{L^2(I)}. \end{aligned}$$

Từ điều kiện của cực trị  $\frac{\partial J_\gamma(f^k + \alpha d^k)}{\partial \alpha} = 0$ , chúng ta thu được

$$\begin{aligned} \alpha_k &= - \frac{\langle Ad^k, \ell u(f^k) - \omega \rangle_{L^2(S_1)} + \gamma \langle d^k, f^k - f^* \rangle_{L^2(I)}}{\|Ad^k\|_{L^2(S_1)}^2 + \gamma \|d^k\|_{L^2(I)}^2} \\ &= - \frac{\langle d^k, A^* (\ell u(f^k) - \omega) \rangle_{L^2(I)} + \gamma \langle d^k, f^k - f^* \rangle_{L^2(I)}}{\|Ad^k\|_{L^2(S_1)}^2 + \gamma \|d^k\|_{L^2(I)}^2} \\ &= - \frac{\langle d^k, A^* (\ell u(f^k) - \omega) + \gamma (f^k - f^*) \rangle_{L^2(I)}}{\|Ad^k\|_{L^2(S_1)}^2 + \gamma \|d^k\|_{L^2(I)}^2} \\ &= - \frac{\langle d^k, \nabla J_\gamma(f^k) \rangle_{L^2(I)}}{\|Ad^k\|_{L^2(S_1)}^2 + \gamma \|d^k\|_{L^2(I)}^2}. \end{aligned}$$

Vì  $d^k = r^k + \beta_k d^{k-1}$ ,  $r^k = -\nabla J_\gamma(f^k)$  và  $\langle r^k, d^{k-1} \rangle_{L^2(I)} = 0$  nên

$$\alpha_k = \frac{\|r^k\|_{L^2(I)}^2}{\|Ad^k\|_{L^2(S_1)}^2 + \gamma \|d^k\|_{L^2(I)}^2}.$$

**CG algorithm**

1. Set  $k = 0$ , initiate  $f^0$ .
2. Calculate  $r^0 = -\nabla J_\gamma(f^0)$  and set  $d^0 = r^0$ .

3. Calculate

$$\alpha_0 = \frac{\|r^0\|_{L^2(I)}^2}{\|Ad^0\|_{L^2(S_1)}^2 + \gamma \|d^0\|_{L^2(I)}^2},$$

$$f^1 = f^0 + \alpha_0 d^0.$$

4. For  $k = 1, 2, \dots$  Calculate

$$r^k = -\nabla J_\gamma(f^k),$$

$$d^k = r^k + \beta_k d^{k-1}, \quad \beta_k = \frac{\|r^k\|_{L^2(I)}^2}{\|r^{k-1}\|_{L^2(I)}^2}.$$

5. Calculate

$$\alpha_k = \frac{\|r^k\|_{L^2(I)}^2}{\|Ad^k\|_{L^2(S_1)}^2 + \gamma \|d^k\|_{L^2(I)}^2}.$$

Update

$$f^{k+1} = f^k + \alpha_k d^k.$$

### 3 Finte element method

We rewrite the Tikhonov functional

$$\begin{aligned} J_\gamma(f) &= \frac{1}{2} \|\ell u[f] + \ell u(u_0, \varphi) - \omega\|_{L^2(S_1)}^2 + \frac{\gamma}{2} \|f - f^*\|_{L^2(I)}^2 \\ &= \frac{1}{2} \|Af + \ell u(u_0, \varphi) - \omega\|_{L^2(S_1)}^2 + \frac{\gamma}{2} \|f - f^*\|_{L^2(I)}^2 \\ &= \frac{1}{2} \|Af - \hat{\omega}\|_{L^2(S_1)}^2 + \frac{\gamma}{2} \|f - f^*\|_{L^2(I)}^2, \end{aligned}$$

with  $\hat{\omega} = \omega - \ell u(u_0, \varphi)$ .

The solution  $f^\gamma$  of the minimization problem (..) is characterized by the first-order optimality condition

$$\nabla J_\gamma(f^\gamma) = A^*(Af^\gamma - \hat{\omega}) + \gamma(f^\gamma - f^*) = 0, \quad (3.1)$$

with  $A^* : L^2(Q) \rightarrow L^2(Q)$  is the adjoint operator of  $A$  defined by  $A^*\phi = p$  where  $\phi = \ell u - \omega$  and  $p$  is the solution of the adjoint problem (...).

Difficulty of finding  $A$  and  $A^*$  so....

#### 3.1 Finite element approcimate of $A, A^*$

Các toán tử  $A$  và  $A^*$  thường rất khó để xác định chính xác, thay vào đó chúng ta phải tìm xấp xỉ  $A_h$  và  $A_h^*$  của  $A$  và  $A^*$  tương ứng. Trước khi xấp xỉ các toán tử trên, chúng ta có đánh giá sai số nghiệm theo phương pháp không gian-thời gian, xem chứng minh ở [1].

**Định lý 3.1.** *Giả sử  $u(x, t)$  và  $u_h(x, t)$  lần lượt là nghiệm và nghiệm xấp xỉ theo phương pháp phần tử hữu hạn không gian-thời gian của bài toán thuận, ta có đánh giá sai số*

$$\|u - u_h\|_{L^2(Q)} \leq \|u - u_h\|_{L^2(I; H^1(\Omega))} \leq c_2 h_{xt} |u|_{H^2(\Omega)}. \quad (3.2)$$

với  $h_{xt}$  là bước lưới và

$$\|u\|_{W(I)} \leq c \left[ \|F\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))} + \|u_0\|_{L^2(\Omega)} + \|\varphi\|_{L^2(S)} \right]. \quad (3.3)$$

Gọi  $u_h[f]$  và  $u_h(u_0, \varphi)$  là nghiệm xấp xỉ của **Bài toán 2.1** và **Bài toán 2.2** bằng phương pháp phần tử hữu hạn không gian-thời gian. Ta định nghĩa toán tử xấp xỉ  $A_h$  của  $A$  là  $A_h f = \ell u_h[f]$  và  $\hat{\omega}_h = \omega - \ell u_h(u_0, \varphi)$ . Chúng ta có

$$\|(A - A_h) f\|_{L^2(S_1)} = \|u[f] - u_h[f]\|_{L^2(S_1)} \leq \|u[f] - u_h[f]\|_{L^2(Q)} \leq c_3 h_{xt}, \quad (3.4)$$

và

$$\begin{aligned} \|\hat{\omega} - \hat{\omega}_h\|_{L^2(S_1)} &= \|u(u_0, \varphi) - u_h(u_0, \varphi)\|_{L^2(S_1)} \\ &\leq \|u(u_0, \varphi) - u_h(u_0, \varphi)\|_{L^2(Q)} \leq c_4 h_{xt}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Sử dụng các xấp xỉ  $u_h[f]$  và  $u_h(u_0, \varphi)$ , ta xét bài toán tối ưu rời rạc

$$J_{\gamma,h}(f) = \frac{1}{2} \|A_h f - \hat{\omega}_h\|_{L^2(S_1)}^2 + \frac{\gamma}{2} \|f - f^*\|_{L^2(I)}^2 \rightarrow \min.$$

Giả sử  $f_h^\gamma$  là nghiệm của bài toán này thỏa mãn điều kiện tối ưu sau

$$\nabla J_{\gamma,h}(f_h^\gamma) = A_h^*(A_h f_h^\gamma - \hat{\omega}_h) + \gamma(f_h^\gamma - f^*) = 0, \quad (3.6)$$

trong đó  $A_h^*$  là toán tử liên hợp của toán tử  $A_h$ . Nhưng trong thực tế, chúng ta khó có thể tìm được  $A_h^*$  từ  $A_h$ , thay vào đó chúng ta định nghĩa một xấp xỉ  $\hat{A}_h^*$  của toán tử  $A^*$ . Thật vậy, ta có  $\hat{A}_h^* q = \int_{\Omega} p_h h dx$ , với  $p_h$  là nghiệm xấp xỉ của bài toán liên hợp (??). Vì vậy phương trình biến phân (3.6) sẽ trở thành

$$\nabla J_{\gamma,h}(f_h^\gamma) \simeq \nabla J_{\gamma,h}(\hat{f}_h^\gamma) = \hat{A}_h^*(A_h \hat{f}_h^\gamma - \hat{\omega}_h) + \gamma(\hat{f}_h^\gamma - f^*) = 0, \quad (3.7)$$

Hơn nữa, trên thực tế khi quan sát và đo đạc, kết quả quan sát có thể bị nhiễu do máy đo nên thay vì nhận được quan sát chính xác  $\omega(x, t)$ , chúng ta chỉ thu được quan sát có nhiễu  $\omega^\delta(x, t)$  thỏa mãn

$$\|\omega - \omega^\delta\|_{L^2(S_1)} \leq \delta.$$

Vì vậy, thay vì nhận kết quả  $\hat{f}_h^\gamma$  thỏa mãn phương trình (3.7), ta chỉ nhận được  $\hat{f}_h^{\gamma,\delta}$  thỏa mãn

$$\nabla J_{\gamma,h}(\hat{f}_h^{\gamma,\delta}) = \hat{A}_h^*(A_h \hat{f}_h^{\gamma,\delta} - \hat{\omega}_h^\delta) + \gamma(\hat{f}_h^{\gamma,\delta} - f^*) = 0, \quad (3.8)$$

với  $\hat{\omega}_h^\delta = \omega^\delta - \ell u_h(u_0, \varphi)$ . Hơn nữa, chúng ta có

$$\begin{aligned} \|(A^* - \hat{A}_h^*) q\|_{L^2(I)}^2 &= \int_I \left( \int_{\Omega} h(p - p_h) dx \right)^2 dt \leq \|h\|_{L^2(Q)}^2 \|p - p_h\|_{L^2(Q)}^2 \\ &\Rightarrow \|(A^* - \hat{A}_h^*) q\|_{L^2(I)} \leq c_5 h_{xt}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

### 3.2 Convergence results

**Định lý 3.2.** Giả sử  $f^\gamma$  và  $\hat{f}_h^\gamma$  lần lượt là nghiệm của bài toán biến phân (4.8) và bài toán biến phân xấp xỉ (4.13). Khi đó với  $\gamma > 0$ , ta có đánh giá sai số

$$\left\| f^\gamma - \hat{f}_h^\gamma \right\|_{L^2(I)} \leq c_6 h_{xt}. \quad (3.10)$$

*Chứng minh.* Từ phương trình (3.1) và (3.7), ta suy ra được

$$\begin{aligned} \gamma \left( f^\gamma - \hat{f}_h^\gamma \right) &= \hat{A}_h^* \left( A_h \hat{f}_h^\gamma - \hat{\omega}_h \right) - A^* \left( A f^\gamma - \hat{\omega} \right) \\ &= \left( \hat{A}_h^* - A^* \right) \left( A_h \hat{f}_h^\gamma - \hat{\omega}_h \right) + A^* A_h \left( \hat{f}_h^\gamma - f^\gamma \right) \\ &\quad + A^* \left( A_h - A \right) f^\gamma + A^* \left( \hat{\omega} - \hat{\omega}_h \right) \end{aligned}$$

Theo (3.4), (3.5) và (3.9), ta có

$$\begin{aligned} \left\| \left( \hat{A}_h^* - A^* \right) \left( A_h \hat{f}_h^\gamma - \hat{\omega}_h \right) \right\|_{L^2(I)} &\leq c_7 h_{xt}, \\ \left\| A^* \left( A_h - A \right) f^\gamma \right\|_{L^2(I)} &\leq c_8 h_{xt}, \\ \left\| A^* \left( \hat{\omega} - \hat{\omega}_h \right) \right\|_{L^2(I)} &\leq c_9 h_{xt}. \end{aligned}$$

Ta phân tích

$$A^* A_h \left( \hat{f}_h^\gamma - f^\gamma \right) = A^* \left( A_h - A \right) \left( \hat{f}_h^\gamma - f^\gamma \right) + A^* A \left( \hat{f}_h^\gamma - f^\gamma \right).$$

Hơn nữa, chúng ta có

$$\begin{aligned} \left\langle A^* \left( A_h - A \right) \left( \hat{f}_h^\gamma - f^\gamma \right), f^\gamma - \hat{f}_h^\gamma \right\rangle_{L^2(I)} &\leq c_{10} h_{xt}^2 \left\| f^\gamma - \hat{f}_h^\gamma \right\|_{L^2(I)}^2, \\ \left\langle A^* A \left( \hat{f}_h^\gamma - f^\gamma \right), f^\gamma - \hat{f}_h^\gamma \right\rangle_{L^2(I)} &= - \left\| A \left( f^\gamma - \hat{f}_h^\gamma \right) \right\|_{L(S_1)}^2 < 0. \end{aligned}$$

Từ đó suy ra điều phải chứng minh.  $\square$

**Chú ý 3.1.** Giả sử  $f^\gamma$  và  $\hat{f}_h^{\gamma, \delta}$  lần lượt là nghiệm của bài toán biến phân (3.1) và bài toán biến phân xấp xỉ (3.8). Khi đó với  $\gamma > 0$ , ta có đánh giá sai số

$$\left\| f^\gamma - \hat{f}_h^{\gamma, \delta} \right\|_{L^2(I)} \leq c_{11} (h_{xt} + \delta). \quad (3.11)$$

## 4 Space-time finite element method

### 4.1 Variational problem

Nhân cả hai vế phương trình thứ nhất của (??) với hàm thử  $v(x, t) \in L^2(I; H^1(\Omega))$  và lấy tích phân trên miền  $Q$ , áp dụng công thức Green [2], ta sẽ thu được

$$\int_Q \left[ u_t v + \sum_{i,j=1}^d a_{ji} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} \right] dx dt = \int_Q F v dx dt + \int_S \varphi v ds dt.$$

Từ phương trình biến phân trên, ta sẽ có bài toán yếu của bài toán truyền nhiệt biên Neumann được định nghĩa như sau.

**Định nghĩa 4.1.** (*Bài toán yếu*) Tìm hàm  $u(x, t) \in W(I)$  thỏa mãn

$$\begin{cases} \alpha(u, v) = L(v), & \forall v \in L^2(I; H^1(\Omega)), \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \Omega, \end{cases} \quad (4.1a)$$

$$(4.1b)$$

trong đó

$$\begin{aligned} \alpha(u, v) &= \langle u_t, v \rangle_{L^2(Q)} + \int_Q \sum_{i,j=1}^d a_{ji} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx dt, \\ L(v) &= \langle f, v \rangle_{L^2(Q)} + \langle \varphi, v \rangle_{L^2(S)}. \end{aligned}$$

## 4.2 Sự tồn tại nghiệm yếu

Trước khi chứng minh sự tồn tại duy nhất nghiệm của bài toán biến phân (4.1a) - (4.1b), chúng ta xét phương trình sau với  $\phi(x, t)$ ,  $\forall t \in I$  cho trước

$$\begin{cases} - \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_j} \left( a_{ji}(x, t) \frac{\partial w(x, t)}{\partial x_i} \right) = \phi(x, t), & x \in \Omega, \\ \frac{\partial w}{\partial \mathcal{N}}(x, t) = 0, & x \in \Gamma. \end{cases}$$

Phương trình biến phân tương ứng, tìm  $w \in L^2(I; H^1(\Omega))$  sao cho

$$\int_Q \sum_{i,j=1}^d a_{ji} \frac{\partial w}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx dt = \int_Q \phi v dx dt, \quad (4.2)$$

với mọi  $v \in L^2(I; H^1(\Omega))$ , với  $\phi(x, t) \in L^2(I; H^{-1}(\Omega))$  cho trước.

Chúng ta sẽ sử dụng chuẩn tương đương, chúng ta có

$$\begin{aligned} \|w\|_{L^2(I; H^1(\Omega))}^2 &= \int_Q \sum_{i,j=1}^d a_{ij} \frac{\partial w}{\partial x_i} \frac{\partial w}{\partial x_j} dx dt \\ &= \int_Q \phi w dx dt \leq \|\phi\|_{L^2(I; H^{-1}(\Omega))} \|w\|_{L^2(I; H^1(\Omega))} \cdot \\ &\Rightarrow \|w\|_{L^2(I; H^1(\Omega))} \leq \|\phi\|_{L^2(I; H^{-1}(\Omega))} \cdot \end{aligned}$$

Nghiệm của phương trình biến phân (4.2) là  $w \in L^2(I; H^1(\Omega))$  duy nhất với mỗi hàm  $\phi \in L^2(I; H^{-1}(\Omega))$ .

Ta định nghĩa toán tử Newton

$$N\phi = w, \quad N : L^2(I; H^{-1}(\Omega)) \rightarrow L^2(I; H^1(\Omega)).$$

Theo định nghĩa chuẩn đối ngẫu, ta có

$$\begin{aligned} \|\phi\|_{L^2(I; H^{-1}(\Omega))} &= \sup_{0 \neq v \in L^2(I; H^1(\Omega))} \frac{\langle \phi, v \rangle_Q}{\|v\|_{L^2(I; H^1(\Omega))}} \\ &= \sup_{0 \neq v \in L^2(I; H^1(\Omega))} \frac{1}{\|v\|_{L^2(I; H^1(\Omega))}} \int_Q \sum_{i,j=1}^d a_{ji} \frac{\partial w}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx dt \\ &\leq \|w\|_{L^2(I; H^1(\Omega))} \cdot \end{aligned}$$



Kết hợp hai bất đẳng thức trên, ta thu được

$$\|w\|_{L^2(I; H^1(\Omega))} = \|\phi\|_{L^2(I; H^{-1}(\Omega))} = \|N\phi\|_{L^2(I; H^1(\Omega))}. \quad (4.3)$$

Đẳng thức này dẫn đến

$$\begin{aligned} \|\phi\|_{L^2(I; H^{-1}(\Omega))}^2 &= \|w\|_{L^2(I; H^1(\Omega))}^2 = \int_Q \sum_{i,j=1}^d a_{ij} \frac{\partial w}{\partial x_i} \frac{\partial w}{\partial x_j} dx dt \\ &= \int_Q \phi w dx dt = \langle \phi, w \rangle_{L^2(Q)}. \end{aligned}$$

Do đó, chúng ta thu được

$$\|\phi\|_{L^2(I; H^{-1}(\Omega))}^2 = \langle \phi, w \rangle_{L^2(Q)} = \langle \phi, N\phi \rangle_{L^2(Q)}, \forall \phi \in L^2(I; H^{-1}(\Omega)) \quad (4.4)$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz và Holder, chúng ta có

$$\alpha(u, v) = \int_Q \left[ u_t v + \sum_{i,j=1}^d a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} \right] dx dt \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} &\leq \left[ \|u_t\|_{L^2(I; H^{-1}(\Omega))} + \|u\|_{L^2(I; H^1(\Omega))} \right] \|v\|_{L^2(I; H^1(\Omega))} \\ &\leq \sqrt{2} \sqrt{\|u_t\|_{L^2(I; H^{-1}(\Omega))}^2 + \|u\|_{L^2(I; H^1(\Omega))}^2} \|v\|_{L^2(I; H^1(\Omega))} \\ &= \sqrt{2} \|u\|_{W(I)} \|v\|_{L^2(I; H^1(\Omega))}, \end{aligned} \quad (4.6)$$

với mọi  $u \in W(I)$  và  $v \in L^2(I; H^1(\Omega))$ , trong đó chúng ta đã sử dụng chuẩn đã định nghĩa ở (??)

$$\begin{aligned} \|u\|_{W(I)}^2 &= \|u_t\|_{L^2(I; H^{-1}(\Omega))}^2 + \|u\|_{L^2(I; H^1(\Omega))}^2 \\ &= \|Nu_t\|_{L^2(I; H^1(\Omega))}^2 + \|u\|_{L^2(I; H^1(\Omega))}^2. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Để chứng minh sự tồn tại nghiệm duy nhất của bài toán biên phân Galerkin-Petrov (4.1a) - (4.1b), chúng ta xét điều kiện ổn định bằng định lý sau.

**Định lý 4.1.** *Giả sử  $u \in W(I)$ , thỏa mãn  $u(x, 0) = 0, \forall x \in \Omega$ , ta có đánh giá sự ổn định sau*

$$\frac{1}{2\sqrt{2}} \|u\|_{W(I)} \leq \sup_{0 \neq v \in L^2(I; H^1(\Omega))} \frac{\alpha(u, v)}{\|v\|_{L^2(I; H^1(\Omega))}}. \quad (4.8)$$

*Chứng minh.* Với mỗi giá trị  $u \in W(I)$ , thỏa mãn  $u(x, 0) = 0, \forall x \in \Omega$ , chúng ta chọn  $v$  sao cho  $v = u + Nu_t \in L^2(I; H^1(\Omega))$ , lúc đó ta có

$$\alpha(u, u + Nu_t) = \alpha(u, u) + \alpha(u, Nu_t)$$

Đối với thành phần thứ nhất, vì  $u(x, 0) = 0, \forall x \in \Omega$  nên ta có

$$\begin{aligned} \alpha(u, u) &= \int_Q \left[ u_t u + \sum_{i,j=1}^d a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right] dx dt \\ &= \frac{1}{2} \int_I \frac{d}{dt} \|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt + \|u\|_{L^2(I; H^1(\Omega))}^2 \\ &= \frac{1}{2} \|u(T)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u\|_{L^2(I; H^1(\Omega))}^2 \geq \|u\|_{L^2(I; H^1(\Omega))}^2. \end{aligned}$$

Đối với thành phần thứ hai, sử dụng (4.3), (4.4) và bất đẳng thức Cauchy - Schwarz, ta thu được

$$\begin{aligned}
\alpha(u, Nu_t) &= \int_Q \left[ u_t Nu_t + \sum_{i,j=1}^d a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial Nu_t}{\partial x_j} \right] dx dt \\
&\geq \langle u_t, Nu_t \rangle_{L^2(Q)} - \|u\|_{L^2(I; H^1(\Omega))} \|Nu_t\|_{L^2(I; H^1(\Omega))} \\
&\geq \|u_t\|_{L^2(I; H^{-1}(\Omega))}^2 - \frac{1}{2} \|u\|_{L^2(I; H^1(\Omega))}^2 - \frac{1}{2} \|Nu_t\|_{L^2(I; H^1(\Omega))}^2 \\
&= \frac{1}{2} \|u_t\|_{L^2(I; H^{-1}(\Omega))}^2 - \frac{1}{2} \|u\|_{L^2(I; H^1(\Omega))}^2.
\end{aligned}$$

Vì vậy, chúng ta có

$$\begin{aligned}
\alpha(u, u + Nu_t) &\geq \frac{1}{2} \|u_t\|_{L^2(I; H^{-1}(\Omega))}^2 + \frac{1}{2} \|u\|_{L^2(I; H^1(\Omega))}^2 \\
&= \frac{1}{2} \|u\|_{W(I)}^2.
\end{aligned}$$

Hơn nữa, vì

$$\begin{aligned}
\|u + Nu_t\|_{L^2(I; H^1(\Omega))}^2 &\leq 2 \left[ \|u\|_{L^2(I; H^1(\Omega))}^2 + \|Nu_t\|_{L^2(I; H^1(\Omega))}^2 \right] \\
&= 2 \left[ \|u\|_{L^2(I; H^1(\Omega))}^2 + \|u_t\|_{L^2(I; H^{-1}(\Omega))}^2 \right] \\
&= 2 \|u\|_{W(I)}^2,
\end{aligned}$$

nên chúng ta thu được

$$\alpha(u, u + Nu_t) \geq \frac{1}{2\sqrt{2}} \|u\|_{W(I)} \|u + Nu_t\|_{L^2(I; H^1(\Omega))},$$

từ đây suy ra điều kiện ổn định (4.8) được chứng minh.  $\square$

Bởi vì bài toán ban đầu có điều kiện (??), do đó chúng ta tách  $u(x, t) = \bar{u}(x, t) + \bar{u}_0(x, t)$  với  $(x, t) \in Q$  và  $\bar{u}_0 \in W(I)$  là thác triển của  $u_0 \in H^1(\Omega)$ . Vì vậy chúng ta phải tìm hàm  $\bar{u} \in W(I)$  sao cho  $\bar{u}(x, 0) = 0$ ,  $x \in \Omega$  và

$$\alpha(\bar{u}, v) = \beta(v) - \alpha(\bar{u}_0, v), \quad \forall v \in L^2(I; H^1(\Omega)), \quad (4.9)$$

Bài toán thỏa mãn điều kiện ổn định (4.8), vì vậy bài toán biến phân Galerkin-Petrov có nghiệm duy nhất theo [2, Định lý 3.7, trang 50].

Ta đặt

$$X := \{v \in W(I) : v(x, 0) = 0, x \in \Omega\}, \quad Y := L^2(I; H^1(\Omega)).$$

**Hệ quả 4.1.** Giả sử  $\bar{u}_0 \in W(I)$  là thác triển của  $u_0 \in H^1(\Omega)$ ,  $f \in L^2(I; H^{-1}(\Omega))$ . Dạng song tuyến tính  $\alpha(u, v)$  dưới dạng (4.5) thỏa mãn (4.6) và điều kiện ổn định (4.8) thì luôn tồn tại một nghiệm duy nhất  $\bar{u} \in X$  của bài toán biến phân (4.9) thỏa mãn [3, trang 150]

$$\|\bar{u}\|_{W(I)} \leq c \left[ \|f\|_{L^2(I; H^{-1}(\Omega))} + \|\bar{u}_0\|_{W(I)} + \|\varphi\|_{L^2(S)} \right]. \quad (4.10)$$

### 4.3 Phương pháp phần tử hữu hạn

Giả sử  $X_h \subset X$  và  $Y_h \subset Y$  là các không gian hữu hạn chiều. Dễ dàng nhận thấy  $X \subset Y$  và chúng ta giả sử  $X_h \subset Y_h$ . Tìm  $u_h \in X_h$  của phương trình biến phân (4.9) sao cho

$$\alpha(\bar{u}_h, v_h) = \beta(v_h) - \alpha(\bar{u}_0, v_h), \quad \forall v_h \in Y_h. \quad (4.11)$$

Trước khi chúng ta chứng minh tính duy nhất nghiệm của bài toán biến phân (4.11) cũng như sai số, ta xét rời rạc Galerkin của bài toán biến phân (4.2) tìm  $w_h \in Y_h$  thỏa mãn

$$\int_Q \sum_{i,j=1}^d a_{ji} \frac{\partial w_h}{\partial x_i} \frac{\partial v_h}{\partial x_j} dx dt = \int_Q \phi v_h dx dt, \quad \forall v_h \in Y_h. \quad (4.12)$$

Tương tự (4.2), phương trình biến phân (4.12) cũng có nghiệm duy nhất, chúng ta định nghĩa xấp xỉ toán tử Newton như sau

$$N_h \phi = w_h, \quad N_h : L^2(I; H^{-1}(\Omega)) \rightarrow Y_h \subset L^2(I; H^1(\Omega)).$$

Sử dụng (4.3) và (4.12), chúng ta có

$$\begin{aligned} \|w_h\|_{L^2(I; H^1(\Omega))}^2 &= \int_Q \sum_{i,j=1}^d a_{ji} \frac{\partial w_h}{\partial x_i} \frac{\partial w_h}{\partial x_j} dx dt = \int_Q \phi w_h dx dt \\ &= \int_Q \sum_{i,j=1}^d a_{ji} \frac{\partial w}{\partial x_i} \frac{\partial w_h}{\partial x_j} dx dt \leq \|w\|_{L^2(I; H^1(\Omega))} \|w_h\|_{L^2(I; H^1(\Omega))}, \end{aligned}$$

từ đó ta suy ra

$$\|N_h \phi\|_{L^2(I; H^1(\Omega))} \leq \|N \phi\|_{L^2(I; H^1(\Omega))}, \quad \forall \phi \in L^2(I; H^1(\Omega)). \quad (4.13)$$

Thay vì sử dụng chuẩn ở (4.7), chúng ta sẽ dùng chuẩn năng lượng phụ thuộc lưới

$$\|u\|_{X_h}^2 = \|N_h u_t\|_{L^2(I; H^1(\Omega))}^2 + \|u\|_{L^2(I; H^1(\Omega))}^2. \quad (4.14)$$

Từ (4.7), (4.13), (4.14), ta suy ra được

$$\|u\|_{X_h} \leq \|u\|_X, \quad \forall u \in X.$$

Bây giờ chúng ta sẽ chứng minh điều kiện ổn định rời rạc

**Định lý 4.2.** *Giả sử  $X_h \subset X, Y_h \subset Y$  và  $X_h \subset Y_h$ , chúng ta có đánh giá ổn định rời rạc như sau*

$$\frac{1}{2\sqrt{2}} \|u_h\|_{X_h} \leq \sup_{0 \neq v \in Y_h} \frac{\alpha(u_h, v_h)}{\|v_h\|_{L^2(I; H^1(\Omega))}}. \quad (4.15)$$

*Chứng minh.* Chứng minh tương tự **Định lý 4.1** đối với trường hợp liên tục. Vì  $u_h \in X_h \subset X$ , chúng ta định nghĩa  $N_h u_{t,h} = w_h \in Y_h$  là nghiệm duy nhất của phương trình biến phân Galerkin (4.12)

$$\int_Q \sum_{i,j=1}^d a_{ji} \frac{\partial w_h}{\partial x_i} \frac{\partial v_h}{\partial x_j} dx dt = \int_Q u_{t,h} v_h dx dt, \quad v_h \in Y_h,$$

$$\|u_h\|_{X_h}^2 = \|w_h\|_{L^2(I; H^1(\Omega))}^2 + \|u_h\|_{L^2(I; H^1(\Omega))}^2.$$

Bởi vì  $X_h \subset Y_h$ , chúng ta có  $u_h + w_h \in Y_h$  thỏa mãn

$$\|u_h + w_h\|_{L^2(I; H^1(\Omega))}^2 \leq 2 \left[ \|u_h\|_{L^2(I; H^1(\Omega))}^2 + \|w_h\|_{L^2(I; H^1(\Omega))}^2 \right] = 2 \|u_h\|_{X_h}^2.$$

Hơn nữa, do  $u_h(x, 0) = 0$ , ta có

$$\begin{aligned} \alpha(u_h, u_h) &= \int_Q \partial_t u_h u_h dx dt + \int_Q \sum_{i,j=1}^d a_{ij} \frac{\partial u_h}{\partial x_i} \frac{\partial u_h}{\partial x_j} dx dt \\ &= \frac{1}{2} \|u_h(T)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u_h\|_{L^2(I; H^1(\Omega))}^2 \geq \|u_h\|_{L^2(I; H^1(\Omega))}^2. \end{aligned}$$

Ta lại có

$$\begin{aligned} \alpha(u_h, w_h) &= \int_Q u_{t,h} w_h dx dt + \int_Q \sum_{i,j=1}^d a_{ji} \frac{\partial u_h}{\partial x_i} \frac{\partial w_h}{\partial x_j} dx dt \\ &= \int_Q \sum_{i,j=1}^d a_{ji} \frac{\partial w_h}{\partial x_i} \frac{\partial w_h}{\partial x_j} dx dt + \int_Q \sum_{i,j=1}^d a_{ji} \frac{\partial u_h}{\partial x_i} \frac{\partial w_h}{\partial x_j} dx dt \\ &\geq \|w_h\|_{L^2(I; H^1(\Omega))}^2 - \|u_h\|_{L^2(I; H^1(\Omega))} \|w_h\|_{L^2(I; H^1(\Omega))} \\ &\geq \|w_h\|_{L^2(I; H^1(\Omega))}^2 - \frac{1}{2} \|u_h\|_{L^2(I; H^1(\Omega))}^2 - \frac{1}{2} \|w_h\|_{L^2(I; H^1(\Omega))}^2 \\ &= \frac{1}{2} \|w_h\|_{L^2(I; H^1(\Omega))}^2 - \frac{1}{2} \|u_h\|_{L^2(I; H^1(\Omega))}^2. \end{aligned}$$

Vì vậy,

$$\begin{aligned} \alpha(u_h, u_h + w_h) &\geq \frac{1}{2} \left[ \|w_h\|_{L^2(I; H^1(\Omega))}^2 + \|u_h\|_{L^2(I; H^1(\Omega))}^2 \right] = \frac{1}{2} \|u_h\|_{X_h}^2 \\ &\geq \frac{1}{2\sqrt{2}} \|u_h\|_{X_h} \|u_h + w_h\|_{L^2(I; H^1(\Omega))}. \end{aligned}$$

Từ đó ta có điều phải chứng minh. □

Điều kiện ổn định rời rạc (4.15) suy ra sự tồn tại nghiệm duy nhất của bài toán biến phân (4.11). Kết hợp bài toán biến phân Galerkin (4.11) với (4.9) và  $Y_h \subset Y$ , chúng ta có tính trực giao Galerkin như sau

$$\alpha(u - u_h, v_h) = 0, \quad \forall v_h \in Y_h. \quad (4.16)$$

**Định lý 4.3.** *Giả sử  $\bar{u} \in X$  và  $\bar{u}_h \in X_h$  lần lượt là nghiệm duy nhất của phương trình biến phân (4.12) và (4.10) tương ứng, ta có đánh giá sai số như sau*

$$\|u - u_h\|_{X_h} \leq 5 \inf_{z_h \in X_h} \|u - z_h\|_{X_h}$$

*Chứng minh.* Từ điều kiện ổn định (4.15), sử dụng tính trực giao Galerkin (4.16) và bất đẳng thức

(4.6), với mọi  $z_h \in X_h$  ta có

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\sqrt{2}} \|u_h - z_h\|_{X_h} &\leq \sup_{0 \neq v_h \in Y_h} \frac{\alpha(u_h - z_h, v_h)}{\|v_h\|_{L^2(I; H^1(\Omega))}} \\ &\leq \sup_{0 \neq v_h \in Y_h} \frac{\alpha(u_h - u, v_h) + \alpha(u - z_h, v_h)}{\|v_h\|_{L^2(I; H^1(\Omega))}} \\ &= \sup_{0 \neq v_h \in Y_h} \frac{\alpha(u - z_h, v_h)}{\|v_h\|_{L^2(I; H^1(\Omega))}} \leq \sqrt{2} \|u - z_h\|_X. \end{aligned}$$

Mặt khác

$$\|u - u_h\|_{X_h} \leq \|u - z_h\|_{X_h} + \|z_h - u_h\|_{X_h}.$$

Từ đó suy ra điều phải chứng minh.  $\square$

Chúng ta có không gian phần tử hữu hạn không thời gian  $X_h \subset Y_h$  và miền của nó  $Q = \Omega \times I \subset \mathbb{R}^{d+1}$ . Xét miền rời rạc  $Q_h$  từ các phần tử địa phương  $q_l$ , với  $q_l$  là các tam giác ( $d = 1$ ) và các tứ diện ( $d = 2$ ),

$$Q_h = \cup_{l=1}^N \bar{q}_l.$$

Ký hiệu  $\{(x_k, t_k)\}_{k=1}^M$  là tọa độ các đỉnh với  $(x_k, t_k) \in \mathbb{R}^{d+1}$ . Phần tử tham chiếu  $q \in \mathbb{R}^{d+1}$  được ánh xạ từ phần tử địa phương  $q_l$ , với  $q$  là duy nhất

$$\begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_k \\ t_k \end{pmatrix} + J_l \begin{pmatrix} \xi \\ \tau \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \xi \\ \tau \end{pmatrix} \in q.$$

Diện tích (Thể tích)  $\Delta_l = |q_l|$  của phần tử  $q_l$  được tính như sau

$$\Delta_l = \int_{q_l} dx dt = \det J_l \int_q d\xi d\tau = |q| \det J_l,$$

và độ dài lưới địa phương

$$h_l = \Delta_l^{\frac{1}{d+1}}, \quad h_{xt} := \max_{l=1, \dots, N} h_l.$$

Và chúng ta có

$$|q| = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{với } d = 1, \\ \frac{1}{6}, & \text{với } d = 2. \end{cases}$$

Chúng ta định nghĩa một không gian phần tử hữu hạn không thời gian  $S_h^1(Q_h) = \text{span}\{\varphi_k\}_{k=1}^M$  với  $\varphi$  là các hàm liên tục và tuyến tính từng khúc. Chúng ta định nghĩa các không gian hữu hạn  $X_h, Y_h$  thỏa mãn **Định lý 4.2** như sau

$$X_h = S_h^1(Q_h) \cap X, \quad Y_h = S_h^1(Q_h) \cap Y.$$

Theo **Định lý 4.3**, chúng ta có đánh giá sai số như sau

**Định lý 4.4.** *Giả sử  $\bar{u} \in X$  và  $\bar{u}_h \in X_h = S_h^1(Q_h) \cap X$  lần lượt là nghiệm duy nhất của phương trình biến phân (4.9) và (4.11). Giả sử  $\bar{u} \in H^2(Q)$ . Ta có đánh giá sai số sau*

$$\|\bar{u} - \bar{u}_h\|_{L_2(I, H^1(\Omega))} \leq ch_{xt} |\bar{u}|_{H^2(Q)}, \quad (4.17)$$

với  $h_{xt}$  là bước lưới.

*Chứng minh.* Từ định nghĩa chuẩn năng lượng và **Định lý** 4.3, chúng ta sẽ có

$$\|\bar{u} - \bar{u}_h\|_{L_2(I; H^1(\Omega))} \leq \|\bar{u} - \bar{u}_h\|_{X_h} \leq 5 \inf_{z_h \in X_h} \|\bar{u} - z_h\|_X.$$

Giả sử  $z_h = P_h \bar{u} \in X_h$  với phép chiếu  $P_h : X_h \rightarrow X_h$ , ta có

$$\int_Q \left[ P_h \bar{u}_t v_{t,h} + \sum_{i,j=1}^d a_{ji} \frac{\partial P_h \bar{u}}{\partial x_i} \frac{\partial v_h}{\partial x_j} \right] dx dt = \int_Q \left[ \bar{u}_t v_{t,h} + \sum_{i,j=1}^d a_{ji} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_i} \frac{\partial v_h}{\partial x_j} \right] dx dt,$$

$\forall v_h \in X_h.$

Ta sử dụng chuẩn năng lượng sau, chú ý rằng  $v(x, 0) = 0$ ,  $x \in \Omega$  và  $\frac{\partial v}{\partial \mathcal{N}}(x, t) = 0$ ,  $x \in \Gamma$

$$\|v\|_{H^1(Q)}^2 := \int_Q \left[ |v_t|^2 + \sum_{i,j=1}^d a_{ji} \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} \right] dx dt.$$

Ta sử dụng *Bổ đề Cea*, ta có

$$\|\bar{u} - P_h \bar{u}_h\|_{L_2(I; H^1(\Omega))} \leq \|\bar{u} - P_h \bar{u}_h\|_{H^1(Q)} \leq \inf_{v_h \in X_h} \|\bar{u} - v_h\|_{H^1(Q_h)} \leq ch_{xt} |\bar{u}|_{H^2(Q)}.$$

Hơn nữa

$$\begin{aligned} \|\bar{u}_t - P_h \bar{u}_{t,h}\|_{L_2(I; H^{-1}(\Omega))} &= \sup_{0 \neq v \in L_2(I; H^1(\Omega))} \frac{\langle \bar{u}_t - P_h \bar{u}_{t,h}, v \rangle_Q}{\|v\|_{L_2(I; H_0^1(\Omega))}} \\ &\leq \sup_{0 \neq v \in L_2(I; H^1(\Omega))} \frac{\|\bar{u}_t - P_h \bar{u}_{t,h}\|_{L_2(Q)} \|v\|_{L_2(Q)}}{\|v\|_{L_2(I; H^1(\Omega))}} \\ &\leq \|\bar{u}_t - P_h \bar{u}_{t,h}\|_{L_2(Q)} \leq \|\bar{u} - P_h \bar{u}_h\|_{H^1(Q)} \leq ch_{xt} |\bar{u}|_{H^2(Q)}. \end{aligned}$$

Chúng ta có

$$\begin{aligned} \|\bar{u} - \bar{u}_h\|_{L_2(I; H^1(\Omega))} &\leq c \|\bar{u} - z_h\|_X = c \|\bar{u} - P_h \bar{u}_h\|_{L_2(I; H^1(\Omega))} \\ &\quad + c \|\bar{u}_t - P_h \bar{u}_{t,h}\|_{L_2(I; H^{-1}(\Omega))} \leq ch_{xt} |\bar{u}|_{H^2(Q)}. \end{aligned}$$

Vậy định lý được chứng minh. □

**Hệ quả 4.2.** *Giả sử  $\bar{u} \in X$  và  $\bar{u}_h \in X_h = S_h^1(Q_h) \cap X$  lần lượt là nghiệm duy nhất của phương trình biến phân (4.10) và (4.12). Giả sử rằng  $\bar{u} \in H^s(Q)$  với  $s \in [1, 2]$ . Khi đó, ta có đánh giá sai số sau đây*

$$\|\bar{u} - \bar{u}_h\|_{L_2(I; H_0^1(\Omega))} \leq ch_{xt}^{s-1} |\bar{u}|_{H^s(Q)}. \quad (4.18)$$

## 5 Numerical results

Chọn miền  $\Omega = [0, 1]^2$ ,  $T = 1$  và  $a(x, t) = 1 + x^2 + y^2 + t^2$ . Giả sử chúng ta muốn mô phỏng và đánh giá sai số bài toán xác định nguồn nhiệt trong quá trình truyền nhiệt với nhiệt độ cho bởi

$$u(x, t) = e^t \sin(\pi x) \sin(\pi y).$$

Quan sát trên biên

$$\omega(x, t)|_{x=0} = (2 - t^2) \sin(\pi t), \quad \omega(x, t)|_{x=1} = (1 - t^2) \sin(\pi t).$$

Về phải có dạng sau

$$F(x, t) = f(x, t)h(x, t) + g(x, t),$$

với

$$h(x, t) = 2 + x^2 + y^2 + t^2.$$

Chia đều trục không gian và thời gian với số bước là 64, lúc đó ta có bước thời gian là  $\Delta t = \Delta x = 1/64$ .

Ta chọn  $f^* = 0$ ,  $\gamma = 10^{-5}$ .

Chúng ta mô phỏng các ví dụ tìm lại các hàm  $f(x, t)$  sau:

$$f(x, t) = \phi(t) \sin(\pi x) \sin(\pi y)$$

với

- Ví dụ 1:  $\phi(t) = \sin(\pi t)$
- Ví dụ 2:  $\phi(t) = \begin{cases} 2t, & t \in [0, 0.5], \\ 2(1 - t), & t \in [0.5, 1], \end{cases}$
- Ví dụ 3:  $\phi(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0.25, 0.75], \\ 0, & t \notin [0.25, 0.75], \end{cases}$

## 6 Conclusion



## Tài liệu

- [1] Dinh Nho Hao, Phan Xuan Thanh, D. Lesnic, and B.T. Johansson. A boundary element method for a multi-dimensional inverse heat conduction problem. *International Journal of Computer Mathematics*, 89:1540–1554, 2012.
- [2] Olaf Steinbach. *Numerical approximation methods for elliptic boundary value problems. Finite and boundary elements*. Springer, New York, 2008.
- [3] Fredi Tröltzsch. *Optimal Control of Partial Differential Equations: Theory, Methods, and Applications*. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2010.