1 Legi de Compoziție (operație internă)

Exemplu:

$$* : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$(x, y) \to x * y = x + y + 10$$

$\boxed{1}$ **Asociativitate**

$$(x * y) * z = x * (y * z), \forall x, y, z \in \mathbb{R}$$

$\boxed{2}$ **Comutativitate**

$$x * y = y * x, \forall x, y \in \mathbb{R}$$

$\boxed{3}$ **Existența Elementului Neutru**

$$\exists e \in \mathbb{R} \text{ astfel încât} \to x * e = e * x = x, \forall x \in \mathbb{R}$$

e nu depinde de x

Obs.: Atunci cand există element neutru, acesta este unic.

$\boxed{4}$ **Elemente Simetrizabile**

Def.: Spunem ca $x \in M$ este simetrizabil în raport cu operația "$*$" daca $\exists x' \in M$ astfel încât $x * x' = x' * x = e$
x' se numește simetricul lui x în raport cu "$*$"

- Dacă o lege este asociativă atunci simetricul unui element este unic atunci când există.
- Mulțimea elementelor simetrizabile ale lui M în raport cu operația "$*$" se notează cu $U(M, *)$

$\boxed{5}$ **Parte Stabilă**

$$(M, *)$$

$$H \subseteq M \text{ - submulțime}$$

Def.: Spunem că H este parte stabilă a lui M în raport cu operația "$*$" dacă $\forall x, y \in H$ atunci $x * y \in H$

1.1 Semigrup (comutativ)

$(M, *)$ este un semigrup (comutativ) dacă sunt îndeplinite condițiile:

1. M este Parte Stabilă
2. "$*$" este Asociativă
3. ("$*$" este Comutativă)

1.2 Monoid (comutativ)

$(M, *)$ este un monoid (comutativ) dacă sunt îndeplinite condițiile:

1. M este Semigrup (comutativ)
2. $\exists$ Element Neutru

1.3 Grup (comutativ)

Grup Comutativ = Grup Abelian
$(M, *)$ este un grup (comutativ) dacă sunt îndeplinite condițiile:

1. M este Monoid (comutativ)
2. Orice Element din M este Simetrizabil

1.4 Inel (comutativ)

$(A, *, \circ)$

1. $(A, *)$ - Grup Abelian
2. $(A, \circ)$ - Monoid (comutativ)
3. operația "$\circ$" este distributivă la stânga și la dreapta față de "$*$"

$(\mathbb{Z}, +, \cdot)$

1. $(\mathbb{Z}, +)$ - Grup Abelian
2. $(\mathbb{Z}, \cdot)$ - Monoid comutativ
3. operația "$\cdot$" este distributivă față de "$+$"

- $O_A = e_*$ - element neutru pe "$*$" - elementul nul al inelului A
- simetricul oricărui element din A față de "$*$" se notează cu "$-x$" - opusul lui x
- $1_A = e_0$ - element neutru din $(A, \circ)$ - element unitate
- simetricul oricărui element din A față de "$\circ$" - inversul elementului în inel

1.5 Corp (comutativ)

$$(K, *, \circ)$$

- $(K, *)$ - Grup Abelian
- $(K^*, \circ)$ - Grup (abelian)
- "$\circ$" este distributiv la stânga și la dreapta față de "$*$"

$\boxed{\text{Examen-p23/30}}$

Precizați valoarea de adevăr a propozițiilor matematice:

$\boxed{p_1}$

$$\exists A \in M_2(\mathbb{R}) \text{ astfel încât } A \cdot X = X, \forall X \in M_2(\mathbb{R})$$

Avem $I_2 \cdot A = A \Leftrightarrow A \cdot I_2 = A$ ✓

$\boxed{p_2}$

$$\forall A \in M_2(\mathbb{R}), \exists B \in M_2(\mathbb{R}) \text{ astfel încât } A \cdot B = I_2$$

Oricare ar fi A voi găsi mereu un B astfel încât $A \cdot B = I_2$

Dar Propoziția este falsă deoarece nu orice matrice este inversabilă ci doar cele ce au determinantul nenul! $\times$

$\boxed{p_3}$

$$\exists A \in M_2(\mathbb{R}) \text{ astfel încât } A \cdot B = I_2, \forall B \in M_2(\mathbb{R})$$

Pe premisa de mai sus Propoziția este falsă $\times$

$\boxed{p_4}$

$$\exists A \in M_4(\mathbb{R}) \text{ astfel încât } A \cdot X + X \cdot A = X, \forall X \in M_4(\mathbb{R})$$

Avem $A = \frac{1}{2} I_4 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \underbrace{I_4 \cdot X}_{=X} + \frac{1}{2} \cdot \underbrace{X \cdot I_4}_{=X} = X \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}X + \frac{1}{2}X = X \qquad \checkmark$$

$\boxed{p_5}$

$$\exists A \in M_n(\mathbb{R}) \text{ astfel încât } A \cdot X + \frac{1}{2} \cdot X \cdot A = X, \forall X \in M_4(\mathbb{R})$$

Înlocuim X cu $I_n \Rightarrow$

$$A \cdot I_n + \frac{1}{2} \cdot I_n \cdot A = I_n$$

$$A + \frac{1}{2} \cdot A = I_n$$

$$A \cdot (1 + \frac{1}{2}) = I_n$$

$$\frac{3}{2} \cdot A = I_n$$

$$\boxed{A = I_n \cdot \frac{2}{3}}$$

Verificare:

$$\frac{2}{3} \cdot \underbrace{I_n \cdot X}_{=X} + \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}}{3} \underbrace{X \cdot I_n}_{=X} = X$$

$$\frac{2}{3}X + \frac{1}{3}X = X \qquad \checkmark$$

$\boxed{\text{Examen-p25/30}}$

Fie legea de compoziție $x * y = \frac{3xy-4x-4y+6}{2xy-3x-3y+5}$, pentru orice $x, y \in (1,2)$. Elementul neutru al acestei legi este:

$$\exists e \in (1,2) \text{ astfel încât } x * e = e * x = x, \forall x \in (1,2)$$

Presupunem comutativitatea acestei legi.

$$x * e = \frac{3xe - 4x - 4e + 6}{2xe - 3x - 3e + 5} = x, \forall x \in (1,2)$$

Dăm valori lui x:

$$x = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{3 \cdot \frac{3}{2}e - 4 \cdot \frac{3}{2} - 4e + 6}{2 \cdot \frac{3}{2} - 3 \cdot \frac{3}{2} - 3e + 5} = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{9e - \cancel{12} - 8e + \cancel{12}}{\cancel{2}}}{\frac{\cancel{6e} - 9 - \cancel{6}3 + 10}{\cancel{2}}} = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{e = \frac{3}{2}}$$

1.6 Morfism și Izomorfism

$$(G, \star) \xrightarrow{\text{functia } f} (G', 0)$$
$$x \in G \to f(x) \in G'$$
$$y \in G \to f(y) \in G'$$
$$f \text{ morfism de grupuri } \Leftrightarrow f(x \star y) = f(x) \circ f(y)$$
$$\left.\begin{array}{l} f \text{ injectivă} \\ f \text{ surjectivă} \end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ bijectivă}$$
$$\left.\begin{array}{l} f\text{morifsm de grupuri} \\ f\text{bijectivă} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ izomorfism}$$

Examen-p26/30

Se consideră legea "$\star$" indicată la exercițiul precedent (25/30). Valoarea parametrului m pentru care funcția $f : (0, +\infty) \to (1, 2), f(x) = \frac{x+m}{x+1}$, realizează izomorfismul între grupurile $((1, 2), \star)$ și $((0, +\infty), \cdot)$ este:

Avem astfel $e_\star = \frac{3}{2}$ elementul neutru pe operația "$\star$" de la exercițiul anterior și $e_\circ = 1$ elementul neutru pe operația "$\cdot$"

$\boxed{f(e_\star) = e_\circ}$ $\to$ pentru orice morifsm de grupuri

Din $f : (0, +\infty) \to (1, 2) \Rightarrow$ și grupurile $((0, +\infty), \cdot)$, $((1, 2), \star)$ rezultă în cazul nostru (datorită ordonării grupurilor în definiția funcției) $\boxed{f(e_\circ) = e_\star}$

$$f(1) = \frac{3}{2} \Rightarrow$$
$$f(1) = \frac{1+m}{1+1} = \frac{m+1}{2 \Rightarrow}$$

Rezultat:

$$\frac{m+1}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow$$
$$\boxed{m = 2}$$

Examen-p27/30

Se consideră mulțimea matricilor de ordinul trei $H = \{ \begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} | x \in \mathbb{R}\}$ înzestrată cu operația de înmulțire ("$\cdot$"). Simetricul matricii $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ în H este:

$$\begin{cases} \textbf{!!!}\text{Orice matrice este inversabilă} \leftrightarrow \text{determinantul ei este nenul} \\ \text{Aplicabilă doar cand In este elementul neutru} \end{cases}$$

Luăm o înmulțire pentru a găsi o operație:

$$A(x) \cdot A(y) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & y+x+1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A(x+y+1)$$

Aflăm elementul neutru (comutativitatea se poate observa mai sus):

$$\exists A(e) \text{ astfel încât } A(x) \cdot A(e) = A(e) \cdot A(x) = A(x), \forall x \in \mathbb{R}$$

Din operația de mai sus avem:

$$A(x+e+1) = A(x) \Rightarrow$$

$$x+e+1 = x \Rightarrow$$

$$\boxed{e = -1 \Rightarrow}$$

$$\text{Elementul neutru: } \boxed{A(-1)}$$

Aflăm simetricul matricei date (ce se poate nota cu $A(-2)$):

$$A(-2) \cdot A(x') = A(-1) \Rightarrow$$

$$A(-2+x'+1) = A(-1) \Rightarrow$$

$$-2+x'+1 = -1 \Rightarrow$$

$$\boxed{x' = 0} \Rightarrow$$

$$\text{Simetricul este: } \boxed{A(0)}$$

Rezultat:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{Examen-p30/30}}$

Fie legea de compoziție $f : \mathbb{R}^2 -> \mathbb{R}, f(x,y) = xy + 2x + 2y + 2$. Existența soluției
$\exists x \in \mathbb{R}$, astfel încât $-|f(x,y) - x)| \geq 0, \forall y \in \mathbb{R}$
este justificată de:

Pentru ca $-|f(x,y) - x)| \geq 0$ să fie adevarată $\Rightarrow f(x,y) - x = 0$

$$xy + 2x + 2y + 2 - x = 0$$

$$xy + x + 2y + 2 = 0$$

$$x(y+1) + 2(y+1) = 0$$

$$(x+2) \cdot (y+1) = 0$$

$$\Rightarrow x + 2 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{x = -2}$$