1 Ecuația Căldurii

$$u'_t - a^2 \cdot u''_{xx} = 0$$

1.1 Problema Cauchy pentru Ecuația Căldurii

Fie $a > 0$, $l > 0$, $u_0 \in C^1\mathbb{R}$. Se caută $u = u(t, x)$ astfel încât:

$$\begin{cases} u'_t - a^2 \cdot u''_{xx} = 0, x \in [0, l] \\ u(0, x) = u_0(x) \\ u(t, 0) = u(t, l) = 0 \end{cases}$$

Soluția este:

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cdot e^{-(\frac{k\pi a}{l})^2 \cdot t} \sin(\frac{k\pi x}{l})$$

unde coeficienții c_k se determină din condiția inițială:

$$u(0, x) = u_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cdot \sin(\frac{k\pi x}{l})$$

Exemple:

$\boxed{1}$ Date: $u_0(x) = \frac{1}{2}\sin(4x)$; $a = \frac{1}{2}$; $l = \pi$

Avem soluția generală:

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cdot e^{-(\frac{k\pi a}{l})^2 \cdot t} \sin(\frac{k\pi x}{l})$$

Înlocuim:

$$\left.\begin{matrix} a = \frac{1}{2} \\ l = \pi \end{matrix}\right\} \to \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cdot e^{-(\frac{k\pi \frac{1}{2}}{\pi})^2 \cdot t} \cdot \sin(\frac{k\pi x}{\pi}) \to \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cdot e^{-(\frac{k}{2}) \cdot t} \cdot \sin(kx)$$

Astfel $u(0, x)$ este:

$$u(0, x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cdot \sin(kx)$$

Egalăm $u(0, x)$ obținut mai sus cu cel din datele inițiale:

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \cdot \sin(kx) = \frac{1}{2}\sin(4x)$$

De unde reiese:

$$c_4 = \frac{1}{2}, c_k = 0, \forall k \in \mathbb{N} \backslash \{4\}$$

Rezultat:

$$\boxed{u(t,x) = \frac{1}{2} \cdot e^{-4t} \cdot \sin(4x)}$$

Verificare:

$$u(t,0) = \frac{1}{2} \cdot e^{-4t} \cdot \sin(4 \cdot 0) \xrightarrow{\sin(0)=0} u(t,0) = 0 \qquad \checkmark$$

$$u(t,\pi) = \frac{1}{2} \cdot e^{-4t} \cdot \sin(4\pi) \xrightarrow{\sin(4\pi)=0} u(t,\pi) = 0 \qquad \checkmark$$

$$\left.\begin{array}{l} u'_t = \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \sin(4x)}_{\text{constant}} \cdot (-4 \cdot e^{-4t}) \to u'_t = -2 \cdot e^{-4t} \cdot \sin(4x) \\ u'_x = \underbrace{\frac{1}{2} \cdot e^{-4t}}_{\text{constnat}} \cdot [4 \cdot \cos(4x)] = 2 \cdot e^{-4t} \cdot \cos(4x) \\ u''_{xx} = \underbrace{2 \cdot e^{-4t}}_{constant} \cdot [4 \cdot -\sin(4x)] = -8 \cdot e^{-4t} \cdot \sin(4x) \end{array}\right\} \to u'_t - \frac{1}{4} \cdot u''_{xx} = 0 \qquad \checkmark$$

$\boxed{2}$ Date: $\begin{cases} u'_t - u''_{xx} = 0 \\ u(0,t) = \sin(x) \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0 \end{cases}$

Din date $\Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ l = \pi \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cdot e^{-(\frac{k\pi \cdot 1}{\pi})^2 \cdot t} \cdot \sin(\frac{k\pi x}{\pi}) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cdot e^{-(k)^2 \cdot t} \cdot \sin(kx)$$

Aflam $u(0,x)$:

$$u(0,x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cdot \sin(kx)$$

Egalăm $u(0,x)$ obținut mai sus cu cel din datele inițiale:

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \cdot \sin(kx) = \sin(x)$$

$$\Rightarrow c_1 = 1, c_k = 0, \forall k \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$$

$$\Rightarrow u(t,x) = 1 \cdot e^{-(1)^2 \cdot t} \cdot \sin(1 \cdot x)$$

<u>Rezultat:</u>

$$\Rightarrow \boxed{u(t,x) = e^{-t} \cdot \sin(x)}$$

Verificare:

$$u(t,0) = e^{-t} \cdot \sin(0) \xrightarrow{\sin(0)=0} u(t,0) = 0 \qquad \checkmark$$

$$u(t,\pi) = e^{-t} \cdot \sin(\pi) \xrightarrow{sin(\pi)=0} u(t,\pi) = 0 \qquad \checkmark$$

$$\left.\begin{array}{l} u'_t = -\sin(x) \cdot e^{-t} \\ u'_x = e^{-t} \cdot \cos(x) \\ u''_{xx} = -\sin(x) \cdot e^{-t} \end{array}\right\} \Rightarrow u'_t - u''_{xx} = 0 \qquad \checkmark$$

2 Ecuația Coardei Finite

$$u''_{tt} - a^2 \cdot u''_{xx} = 0, a > 0$$

2.1 <u>Problema mixtă</u> pentru Ecuația Coardei Finite

Se caută $u = u(t,x)$ astfel încât:

$$\left\{\begin{array}{l} u''_{tt} - a^2 \cdot u''_{xx} = 0 \\ u(0,x) = u_0(x) \\ u'_t(0,x) = u_1(x) \\ u(t,0) = u(t,l) = 0 \end{array}\right. .$$

Soluția este:

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cdot \cos(kat) + b_k \cdot \sin(kat)] \cdot \sin(\frac{k\pi x}{l})$$

Exemple:

$\boxed{1}$ Date: $\left\{\begin{array}{l} u''_{tt} - U''_{xx} = 0 \\ u(0,x) = u_0(x) = \sin(2x) \\ u'_t(0,x) = u_1(x) = \sin(3x) \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0 \end{array}\right.$

Din date $\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 1 \\ l = \pi \end{array}\right. \Rightarrow$

$$\Rightarrow u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty}[a_k \cdot \cos(kt) + b_k \cdot \sin(kt)] \cdot \sin(kx)$$

Aflam $u(0,x)$:

$$u(0,x) = \sum_{k=1}^{\infty}[\underbrace{a_k \cdot 1}_{\cos(0)=1} + \underbrace{0}_{sin(0)=0}] \cdot \sin(kx)$$

$$u(0,x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot \sin(kx)$$

Egalăm $u(0,x)$ obținut mai sus cu cel din datele inițiale:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot \sin(kx) = \sin(2x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{a_2 = 1}, a_k = 0, \forall k \in \mathbb{N}\backslash\{2\}$$

Aflam $u'_t(t,x)$:

$$u'_t(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty}[a_k \cdot k \cdot -\sin(kt) + b_k \cdot k \cdot \cos(kt)] \cdot \sin(kx)$$

Aflam $u'_t(0,x)$:

$$u'_t(0,x) = \sum_{k=1}^{\infty}[\underbrace{0}_{\sin(0)=0} + b_k \cdot k \cdot 1] \cdot \sin(kx) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u'_t(0,x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cdot k \cdot \sin(kx)$$

Egalăm $u'_t(0,x)$ obținut mai sus cu cel din datele inițiale:

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \cdot k \cdot \sin(kx) = \sin(3x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b_3 \cdot 3 \cdot \sin(3x) = \sin(3x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{b_3 = \frac{1}{3}}, b_k = 0, \forall k \in \mathbb{N}\backslash\{3\}$$

Obținem astfel:

$$u(t,x) = [a_2 \cdot \cos(2t) + b_2 \cdot \sin(2t)] \cdot \sin(2x) + [a_3 \cdot \cos(3t) + b_3 \cdot \sin(3t)] \cdot \sin(3x)$$

Rezultat:

$$\left.\begin{array}{l} a_2 = 1, b_2 = 0 \\ a_3 = 0, b_3 = \frac{1}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{u(t,x) = \cos(2t)\cdot\sin(2x) + \frac{1}{3}\cdot\sin(3t)\cdot\sin(3x)}$$

Verificare:

$$u(t,0) = \underbrace{0}_{\sin(0)=0} + \underbrace{0}_{\sin(0)=0} \Rightarrow u(t,0) = 0 \qquad \checkmark$$

$$u(0,x) = \sin(2x) + 0 \Rightarrow u(0,x) = sin(2x) \qquad \checkmark$$

$$u'_t(t,x) = 2\cdot -\sin(2t)\cdot\sin(2x) + \frac{1}{3}\cdot 3\cdot\cos(3t)\cdot\sin(3x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u'_t(t,x) = -2\cdot\sin(2t)\cdot\sin(2x) + \cos(3t)\cdot\sin(3x)$$

$$u'_t(0,x) = 0 + \sin(3x) \Rightarrow u'_t(0,x) = \sin(3x) \qquad \checkmark$$

$$u''_{tt}(t,x) = -2\cdot 2\cdot\cos(2t)\cdot\sin(2x) + 3\cdot -\sin(3t)\cdot\sin(3x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u''_{tt}(t,x) = -4\cdot\cos(2t)\cdot\sin(2x) - 3\cdot\sin(3t)\cdot\sin(3x) \qquad 1$$

$$u'_x(t,x) = \cos(2t)\cdot 2\cdot\cos(2x) + \frac{1}{3}\cdot\sin(3t)\cdot 3\cdot\cos(3x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u'_x(t,x) = 2\cdot\cos(2t)\cdot\cos(2x) + \sin(3t)\cdot\cos(3x)$$

$$u''_{xx}(t,x) = 2\cdot\cos(2t)\cdot 2\cdot -\sin(2x) + \sin(3t)\cdot 3\cdot -\sin(3x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u''_{xx}(t,x) = -4\cdot\cos(2t)\cdot\sin(2x) - 3\cdot\sin(3t)\cdot\sin(3x) \qquad 2$$

$$\text{din} \left.\begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array}\right\} \Rightarrow u''_{tt} - u''_{xx} = 0 \qquad \checkmark$$

$\boxed{\text{Examen-p16/30}}$

Soluția $u = u(t,x)$ a problemei Cauchy mixte:

$$\begin{cases} u''_{tt} - u''_{xx} = 0 \\ u(0,x) = \sin(x) \\ u'_t(0,x) = 0 \\ u(t,0) = 0 = u(t,\pi) \end{cases}$$

$$\text{Din date} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ l = \pi \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty}[a_k\cdot\cos(kt) + b_k\cdot\sin(kt)]\cdot\sin(kx)$$

Aflam $u(0, x)$:

$$u(0, x) = \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cdot 1 + \underbrace{b_k \cdot \sin(0)}_{=0}] \cdot \sin(kx) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u(0, x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot \sin(kx)$$

Egalăm $u(0, x)$ obținut mai sus cu cel din datele inițiale:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot \sin(kx) = \sin(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{a_1 = 1}, a_k = 0, \forall k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$$

Aflam $u'_t(t, x)$:

$$u'_t(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cdot k \cdot -\sin(kt) + b_k \cdot k \cdot \cos(kt)] \cdot \sin(kx)$$

Aflam $u'_t(0, x)$:

$$u'_t(0, x) = \sum_{k=1}^{\infty} [\underbrace{a_k \cdot k \cdot -\sin(0)}_{=0} + b_k \cdot k \cdot 1] \cdot \sin(kx) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u'_t(0, x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cdot k \cdot \sin(kx)$$

Egalăm $u'_t(0, x)$ obținut mai sus cu cel din datele inițiale:

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \cdot k \cdot \sin(kx) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b_k = 0, \forall k \in \mathbb{N}$$

Obținem astfel:

$$u(t, x) = [a_1 \cdot \cos(t) + b_1 \cdot \sin(t)] \cdot \sin(x)$$

Rezultat:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = 1 \\ b_1 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{u(t, x) = \cos(t) \cdot \sin(x)}$$

2.2 Problema Cauchy pentru Ecuația Coardei Infinite

$$\begin{cases} u''_{tt} - a^2 \cdot u''_{xx} = 0, x \in \mathbb{R}, x \in [0,T], T > 0, a > 0 \\ u(0,x) = u_0(x) \\ u'_t(0,x) = u_1(x) \end{cases}$$

Soluția este:

$$u(t,x) = \frac{1}{2}[u_0(x-at) + u_0(x+at)] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} u_1(s)ds$$

$\boxed{\text{Examen-p14/30}}$

Soluția $u = u(t,x)$ a problemei Cauchy atașată ecuației coardei infinite:

$$\begin{cases} u''_{tt} - u''_{xx} = 0 \\ u(0,x) = \sin(x) = u_0(x) \\ u'_t(0,x) = \cos(x) = u_1(x) \end{cases}$$

Din date $\Rightarrow a = 1$
Aplicăm soluția și înlocuim cu datele oferite:

$$u(t,x) = \frac{1}{2}[u_0(x-t) + u_0(x+t)] + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} u_1(s)ds$$

$$= \frac{1}{2}[\sin(x-t) + \sin(x+t)] + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \cos(s)ds$$

$$= \frac{1}{2}[\sin(x-t) + \sin(x+t) + sin(s)|_{x-t}^{x+t}]$$

$$= \frac{1}{2}[\cancel{\sin(x-t)} + \sin(x+t) + \sin(x+t) - \cancel{\sin(x-t)}]$$

$$s$$

$$= \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2}\sin(x+t)$$

Rezultat:

$$\boxed{u(t,x) = sin(x+t) = \sin(x)\cos(t) + \sin(t)\cos(x)}$$

3 Ecuația lui Laplace

$$\Delta u = 0$$
$$\Delta u = u''_{xx} + u''_{yy}$$

3.1 Problema Dirichlet pentru Ecuația lui Laplace pentru disc

Fie $R > 0$ și $r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 < R^2\}$

$$u(\rho, \theta) = \sum_{k=0}^{\infty} [a_k \cdot \sin(k\theta) + b_k \cdot \sin(k\theta)] \cdot \rho^k$$
$$u(R, \theta) = \sum_{k=0}^{\infty} [a_k \cdot \sin(k\theta) + b_k \cdot \cos(k\theta)] \cdot R^k$$

Examen-p23/30

Soluția $u = u(\rho, \theta)$ a problemei Dirichlet interioare pentru disc:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \\ u(1, \theta) = \cos(2\theta) \end{cases}$$

Aflăm $u(1, \theta)$:

$$u(1, 0) = \sum_{k=0}^{\infty} [a_k \cdot \sin(k\theta) + b_k \cdot \cos(k\theta)] \cdot 1$$

Egalăm $u(1, \theta)$ cu cel din datele inițiale:

$$\sum_{k=0}^{\infty} [a_k \cdot \sin(k\theta) + b_k \cdot \cos(k\theta)] = \cos(2\theta) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a_2 \cdot \sin(2\theta) + b_2 \cdot \cos(2\theta) = \cos(2\theta) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \begin{cases} a_2 = 0, a_k = 0, \forall k \in \mathbb{N} \backslash \{2\} \\ b_2 = 1, b_k = 0, \forall k \in \mathbb{N} \backslash \{2\} \end{cases}$$

Rezultat:

$$\left.\begin{array}{l} a_2 = 0 \\ b_2 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow u(\rho, \theta) = [0 + 1 \cdot \cos(2\theta)] \cdot \rho^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{u(\rho, \theta) = \cos(2\theta) \cdot \rho^2}$$