TRƯỜNG ĐH CÔNG NGHỆ THÔNG TIN

BÀI GIẢNG GIẢI TÍCH

Giảng viên: TS PHÙNG MINH ĐỨC

(Bộ môn Toán Lý)

Nội dung môn học

1. Chương 0: Ôn tập và bổ sung một số kiến thức về phép tính vi phân và tích phân hàm một biến
2. Chương 1: Lý thuyết chuỗi
3. Chương 2: Phép tính vi phân hàm nhiều biến
4. Chương 3: Phép tính tích phân hàm nhiều biến
5. Chương 4: Tích phân đường - Tích phân mặt
6. Chương 5: Phương trình vi phân

0.1.1 Giới hạn

Định nghĩa 1.1

(a) *Ta nói rằng dãy số* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *có giới hạn là a (hữu hạn), viết* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ *hay* $x_n \to a$ *khi* $n \to \infty$, *nếu* $\forall \epsilon > 0, \exists n_\epsilon \in \mathbb{N}$ *sao cho* $\forall n > n_\epsilon$ *ta đều có*

$$|x_n - a| < \epsilon.$$

0.1.1 Giới hạn

Định nghĩa 1.1

(a) *Ta nói rằng dãy số* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *có giới hạn là a (hữu hạn), viết* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ *hay* $x_n \to a$ *khi* $n \to \infty$, *nếu* $\forall\epsilon > 0, \exists n_\epsilon \in \mathbb{N}$ *sao cho* $\forall n > n_\epsilon$ *ta đều có*

$$|x_n - a| < \epsilon.$$

(b) *Ta nói rằng dãy số* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *có giới hạn là* ∞, *viết* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ *hay* $x_n \to \infty$ *khi* $n \to \infty$, *nếu* $\forall M > 0, \exists n_M \in \mathbb{N}$ *sao cho* $\forall n > n_M$ *ta đều có*

$$|x_n| > M.$$

0.1.1 Giới hạn

Định nghĩa 1.2

(a) *Cho hàm số* $f(x)$ *xác định trên tập* $D \subset \mathbb{R}$ *và* $x_0 \in D$. *Ta nói rằng* $f(x)$ *có giới hạn* L *(hữu hạn) khi* x *dần tới* x_0, *viết* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$, *nếu* $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ *sao cho*

$$\forall x \in D, |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon.$$

0.1.1 Giới hạn

Định nghĩa 1.2

(a) *Cho hàm số $f(x)$ xác định trên tập $D \subset \mathbb{R}$ và $x_0 \in D$. Ta nói rằng $f(x)$ có giới hạn L (hữu hạn) khi x dần tới x_0, viết $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$, nếu $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ sao cho*

$$\forall x \in D, |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon.$$

(b) *Cho hàm số $f(x)$ xác định trên tập $D \subset \mathbb{R}$ và $x_0 \in D$. Ta nói rằng $f(x)$ có giới hạn ∞ khi x dần tới x_0, viết $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$, nếu $\forall M > 0, \exists \delta > 0$ sao cho*

$$\forall x \in D, |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)| > M.$$

0.1.1 Giới hạn

Định nghĩa 1.2

(a) *Cho hàm số $f(x)$ xác định trên tập $D \subset \mathbb{R}$ và $x_0 \in D$. Ta nói rằng $f(x)$ có giới hạn L (hữu hạn) khi x dần tới x_0, viết $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$, nếu $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ sao cho*

$$\forall x \in D, |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon.$$

(b) *Cho hàm số $f(x)$ xác định trên tập $D \subset \mathbb{R}$ và $x_0 \in D$. Ta nói rằng $f(x)$ có giới hạn ∞ khi x dần tới x_0, viết $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$, nếu $\forall M > 0, \exists \delta > 0$ sao cho*

$$\forall x \in D, |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)| > M.$$

Ta có ĐN tương đương:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \{x_n\} \text{ mà } \lim_{n \to \infty} x_n = x_0 \text{ thì } \lim_{n \to \infty} f(x_n) = L.$$

0.1.2 Vô cùng bé và vô cùng lớn

Định nghĩa 1.3

(a) *Hàm số $f(x)$ được gọi là một vô cùng bé khi $x \to x_0$ (viết tắt là VCB) nếu*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0.$$

0.1.2 Vô cùng bé và vô cùng lớn

Định nghĩa 1.3

(a) *Hàm số $f(x)$ được gọi là một vô cùng bé khi $x \to x_0$ (viết tắt là VCB) nếu*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0.$$

(b) *Hàm số $f(x)$ được gọi là một vô cùng lớn khi $x \to x_0$ (viết tắt là VCL) nếu*

$$\lim_{x \to x_0} |f(x)| = +\infty.$$

So sánh các vô cùng bé và vô cùng lớn

Định nghĩa 1.4

Giả sử $f(x), g(x)$ *là hai VCB khi* $x \to x_0$. *Khi đó ta nói rằng*

(a) f *có bậc cao hơn* g, *viết* $f(x) = o(g(x)), x \to x_0$, *nếu* $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$.

So sánh các vô cùng bé và vô cùng lớn

Định nghĩa 1.4

Giả sử $f(x), g(x)$ *là hai VCB khi* $x \to x_0$. *Khi đó ta nói rằng*

(a) f *có bậc cao hơn* g, *viết* $f(x) = o(g(x)), x \to x_0$, *nếu* $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$.

(b) f *và* g *cùng bậc, viết* $f(x) = O(g(x)), x \to x_0$, *nếu* $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = C \neq 0$.

So sánh các vô cùng bé và vô cùng lớn

Định nghĩa 1.4

Giả sử $f(x), g(x)$ là hai VCB khi $x \to x_0$. Khi đó ta nói rằng

(a) *f có bậc cao hơn g, viết $f(x) = o(g(x)), x \to x_0$, nếu* $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0.$

(b) *f và g cùng bậc, viết $f(x) = O(g(x)), x \to x_0$, nếu* $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = C \neq 0.$

Nếu $C = 1$ thì ta nói f và g là các VCB tương đương khi $x \to x_0$.

So sánh các vô cùng bé và vô cùng lớn

Định nghĩa 1.4

Giả sử $f(x), g(x)$ *là hai VCB khi* $x \to x_0$. *Khi đó ta nói rằng*

(a) f *có bậc cao hơn* g, *viết* $f(x) = o(g(x)), x \to x_0$, *nếu* $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$.

(b) f *và* g *cùng bậc, viết* $f(x) = O(g(x)), x \to x_0$, *nếu* $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = C \neq 0$.

Nếu $C = 1$ *thì ta nói* f *và* g *là các VCB tương đương khi* $x \to x_0$.

Định nghĩa 1.5

Giả sử $f(x), g(x)$ *là hai VCL khi* $x \to x_0$. *Khi đó ta nói rằng*

(a) f *có bậc cao hơn* g *nếu* $\lim\limits_{x \to x_0} \left|\dfrac{f(x)}{g(x)}\right| = +\infty$.

So sánh các vô cùng bé và vô cùng lớn

Định nghĩa 1.4

Giả sử $f(x), g(x)$ là hai VCB khi $x \to x_0$. Khi đó ta nói rằng

(a) *f có bậc cao hơn g, viết $f(x) = o(g(x)), x \to x_0$, nếu $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$.*

(b) *f và g cùng bậc, viết $f(x) = O(g(x)), x \to x_0$, nếu $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = C \neq 0$.*

Nếu $C = 1$ thì ta nói f và g là các VCB tương đương khi $x \to x_0$.

Định nghĩa 1.5

Giả sử $f(x), g(x)$ là hai VCL khi $x \to x_0$. Khi đó ta nói rằng

(a) *f có bậc cao hơn g nếu $\lim\limits_{x \to x_0} \left|\dfrac{f(x)}{g(x)}\right| = +\infty$.*

(b) *f và g cùng bậc nếu $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = C \neq 0$.*

So sánh các vô cùng bé và vô cùng lớn

Định nghĩa 1.4

Giả sử $f(x), g(x)$ là hai VCB khi $x \to x_0$. Khi đó ta nói rằng

(a) *f có bậc cao hơn g, viết $f(x) = o(g(x)), x \to x_0$, nếu $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$.*

(b) *f và g cùng bậc, viết $f(x) = O(g(x)), x \to x_0$, nếu $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = C \neq 0$.*

Nếu $C = 1$ thì ta nói f và g là các VCB tương đương khi $x \to x_0$.

Định nghĩa 1.5

Giả sử $f(x), g(x)$ là hai VCL khi $x \to x_0$. Khi đó ta nói rằng

(a) *f có bậc cao hơn g nếu $\lim\limits_{x \to x_0} \left|\dfrac{f(x)}{g(x)}\right| = +\infty$.*

(b) *f và g cùng bậc nếu $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = C \neq 0$.*

Nếu $C = 1$ thì ta nói f và g là các VCL tương đương khi $x \to x_0$.

0.1.3 Hàm liên tục

Định nghĩa 1.6

Cho hàm số $f(x)$ xác định trên đoạn $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Hàm f được gọi là

- *liên tục tại x_0 nếu*
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$
- *liên tục tại a (tương ứng tại b) nếu*
$$\lim_{x > a, x \to a} f(x) = f(a), \qquad \lim_{x < b, x \to b} f(x) = f(b).$$

Hàm f được gọi là liên tục trên $[a, b]$ nếu nó liên tục tại mọi điểm trong $[a, b]$.

0.1.3 Hàm liên tục

Định nghĩa 1.6

Cho hàm số $f(x)$ xác định trên đoạn $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Hàm f được gọi là

- *liên tục tại x_0 nếu*
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$
- *liên tục tại a (tương ứng tại b) nếu*
$$\lim_{x>a, x\to a} f(x) = f(a), \qquad \lim_{x<b, x\to b} f(x) = f(b).$$

Hàm f được gọi là liên tục trên $[a,b]$ nếu nó liên tục tại mọi điểm trong $[a,b]$.

Điểm x_0 tại đó hàm f không liên tục thì gọi là điểm gián đoạn.

- Nếu $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$ thì x_0 gọi là điểm gián đoạn loại một.

0.1.3 Hàm liên tục

Định nghĩa 1.6

Cho hàm số $f(x)$ xác định trên đoạn $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Hàm f được gọi là

- *liên tục tại x_0 nếu*
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$
- *liên tục tại a (tương ứng tại b) nếu*
$$\lim_{x > a, x \to a} f(x) = f(a), \qquad \lim_{x < b, x \to b} f(x) = f(b).$$

Hàm f được gọi là liên tục trên $[a,b]$ nếu nó liên tục tại mọi điểm trong $[a,b]$.

Điểm x_0 tại đó hàm f không liên tục thì gọi là điểm gián đoạn.

- Nếu $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$ thì x_0 gọi là điểm gián đoạn loại một.
- Những điểm gián đoạn không phải loại một thì gọi là là loại hai.

0.1.4 Đạo hàm và vi phân

Định nghĩa 1.7

Hàm số $f(x)$ xác định trên khoảng (a, b) được gọi là khả vi tại $x_0 \in (a, b)$ nếu tồn tại giới hạn hữu hạn

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Giá trị giới hạn hữu hạn đó gọi là đạo hàm của f tại x_0, ký hiệu là $f'(x_0)$.
Hàm f được gọi là khả vi trên (a, b) nếu nó khả vi tại mọi điểm trong (a, b).

0.1.4 Đạo hàm và vi phân

Định nghĩa 1.7

Hàm số $f(x)$ xác định trên khoảng (a, b) được gọi là khả vi tại $x_0 \in (a, b)$ nếu tồn tại giới hạn hữu hạn

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Giá trị giới hạn hữu hạn đó gọi là đạo hàm của f tại x_0, ký hiệu là $f'(x_0)$.
Hàm f được gọi là khả vi trên (a, b) nếu nó khả vi tại mọi điểm trong (a, b).

Nếu f khả vi tại $x \in (a, b)$ thì

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

từ đó suy ra

$$f(x + \Delta x) - f(x) = f'(x)\Delta x + o(\Delta x).$$

Đại lượng $df = f'(x)\Delta x$ được gọi là *vi phân* của f tại x.

0.1.4 Đạo hàm và vi phân

Định nghĩa 1.7

Hàm số $f(x)$ xác định trên khoảng (a, b) được gọi là khả vi tại $x_0 \in (a, b)$ nếu tồn tại giới hạn hữu hạn

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Giá trị giới hạn hữu hạn đó gọi là đạo hàm của f tại x_0, ký hiệu là $f'(x_0)$.
Hàm f được gọi là khả vi trên (a, b) nếu nó khả vi tại mọi điểm trong (a, b).

Nếu f khả vi tại $x \in (a, b)$ thì

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

từ đó suy ra

$$f(x + \Delta x) - f(x) = f'(x)\Delta x + o(\Delta x).$$

Đại lượng $df = f'(x)\Delta x$ được gọi là *vi phân* của f tại x.
Do hàm $f(x) = x$ có $f'(x) = 1$ nên vi phân của nó tại x là $dx = df = \Delta x$. Vì vậy ta viết $df = f'(x)dx$.

0.1.4 Đạo hàm và vi phân

Đạo hàm và vi phân cấp cao

Cho hàm f xác định trong khoảng (a, b).

- Giả sử f khả vi trên (a, b) và có đạo hàm f' cũng khả vi trên (a, b). Khi đó ta nói f khả vi 2 lần trên (a, b), và đạo hàm của f' gọi là đạo hàm cấp 2 của f, ký hiệu là f'' hay $f^{(2)}$. Như vậy

$$f'' = (f')'.$$

0.1.4 Đạo hàm và vi phân

Đạo hàm và vi phân cấp cao

Cho hàm f xác định trong khoảng (a, b).

- Giả sử f khả vi trên (a, b) và có đạo hàm f' cũng khả vi trên (a, b). Khi đó ta nói f khả vi 2 lần trên (a, b), và đạo hàm của f' gọi là đạo hàm cấp 2 của f, ký hiệu là f'' hay $f^{(2)}$. Như vậy

$$f'' = (f')'.$$

- Một cách quy nạp, giả sử f khả vi $n-1$ lần trên (a, b) và đạo hàm $f^{(n-1)}$ cũng khả vi trên (a, b). Khi đó ta nói f khả vi n lần trên (a, b), và đạo hàm của $f^{(n-1)}$ gọi là đạo hàm cấp n của f, ký hiệu là $f^{(n)}$. Như vậy

$$f^{(n)} = (f^{(n-1)})'.$$

0.1.4 Đạo hàm và vi phân

Đạo hàm và vi phân cấp cao

Cho hàm f xác định trong khoảng (a, b).

- Giả sử f khả vi trên (a, b) và có đạo hàm f' cũng khả vi trên (a, b). Khi đó ta nói f khả vi 2 lần trên (a, b), và đạo hàm của f' gọi là đạo hàm cấp 2 của f, ký hiệu là f'' hay $f^{(2)}$. Như vậy

$$f'' = (f')'.$$

- Một cách quy nạp, giả sử f khả vi $n-1$ lần trên (a, b) và đạo hàm $f^{(n-1)}$ cũng khả vi trên (a, b). Khi đó ta nói f khả vi n lần trên (a, b), và đạo hàm của $f^{(n-1)}$ gọi là đạo hàm cấp n của f, ký hiệu là $f^{(n)}$. Như vậy

$$f^{(n)} = (f^{(n-1)})'.$$

Tương tự, ta cũng có vi phân cấp cao của hàm f như sau:

$$d^2 f = d(df), \ldots, d^n f = d(d^{n-1} f).$$

0.1.5 Các định lý giá trị trung bình

Định nghĩa 1.8

Cho hàm f xác định trên $D \subset \mathbb{R}$. *Điểm* $c \in D$ *được gọi là một điểm cực đại (cực tiểu) của f nếu* $\exists \delta > 0$ *sao cho* $(c - \delta, c + \delta) \subset D$ *và* $\forall x \in (c - \delta, c + \delta)$, *ta có*

$$f(x) \le f(c) \quad (\textit{tương ứng } f(x) \ge f(c)).$$

0.1.5 Các định lý giá trị trung bình

Định nghĩa 1.8

Cho hàm f xác định trên $D \subset \mathbb{R}$. Điểm $c \in D$ được gọi là một điểm cực đại (cực tiểu) của f nếu $\exists \delta > 0$ sao cho $(c-\delta, c+\delta) \subset D$ và $\forall x \in (c-\delta, c+\delta)$, ta có

$$f(x) \leq f(c) \quad (\textit{tương ứng } f(x) \geq f(c)).$$

Định lý 1.1

(Định lý Fermat) Nếu hàm f đạt cực trị tại $c \in D$ và f khả vi tại c thì $f'(c) = 0$.

0.1.5 Các định lý giá trị trung bình

Định nghĩa 1.8

Cho hàm f xác định trên $D \subset \mathbb{R}$. Điểm $c \in D$ được gọi là một điểm cực đại (cực tiểu) của f nếu $\exists \delta > 0$ sao cho $(c-\delta, c+\delta) \subset D$ và $\forall x \in (c-\delta, c+\delta)$, ta có

$$f(x) \leq f(c) \quad (\text{tương ứng } f(x) \geq f(c)).$$

Định lý 1.1

(Định lý Fermat) Nếu hàm f đạt cực trị tại $c \in D$ và f khả vi tại c thì $f'(c) = 0$.

Hệ quả 1.1

(Định lý Rolle) Cho hàm f xác định và liên tục trên $[a, b]$, khả vi trên (a, b). Nếu $f(a) = f(b)$ thì tồn tại $c \in (a, b)$ sao cho $f'(c) = 0$.

0.1.5 Các định lý giá trị trung bình

Định lý 1.2

(Định lý Lagrange) Cho hàm f *xác định và liên tục trên* $[a, b]$*, khả vi trên* (a, b)*. Khi đó tồn tại* $c \in (a, b)$ *sao cho:*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

0.1.5 Các định lý giá trị trung bình

Định lý 1.2

(Định lý Lagrange) Cho hàm f xác định và liên tục trên $[a, b]$, khả vi trên (a, b). Khi đó tồn tại $c \in (a, b)$ sao cho:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Định lý 1.3

(Định lý Cauchy) Cho 2 hàm f, g xác định và liên tục trên $[a, b]$, khả vi trên (a, b). Giả sử $g(a) \neq g(b)$ và $g'(x) \neq 0, \forall x \in (a, b)$. Khi đó tồn tại $c \in (a, b)$ sao cho

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

0.1.6 Công thức Taylor

Định lý 1.4

Giả sử hàm f xác định và có đạo hàm đến cấp n liên tục trên $[a, b]$ và có đạo hàm cấp $n+1$ trên (a, b). Khi đó, với $x_0 \in (a, b)$ bất kỳ, ta có

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \\ + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

với ξ là một số nằm giữa x và x_0.

0.1.6 Công thức Taylor

Định lý 1.4

Giả sử hàm f xác định và có đạo hàm đến cấp n liên tục trên $[a, b]$ và có đạo hàm cấp $n+1$ trên (a, b). Khi đó, với $x_0 \in (a, b)$ bất kỳ, ta có

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \\ + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

với ξ là một số nằm giữa x và x_0.

Công thức trên gọi là *công thức Taylor* và hàm $f(x)$ cho bởi công thức đó gọi là *khai triển Taylor hữu hạn* của f tại x_0. Khai triển Taylor hữu hạn của f tại $x_0 = 0$ được gọi là *khai triển Mac Laurin* của f.

0.1.7 Quy tắc L'Hospital

Quy tắc sau thường được dùng khi tính giới hạn để khử các dạng vô định $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$.

Định lý 1.5

(De L'Hospital) Cho các hàm số f, g xác định, khả vi tại lân cận của điểm $a \in \mathbb{R}$, có thể trừ tại điểm a. Nếu $g'(x) \neq 0$ trong lân cận của a và

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0\,(=\infty), \qquad \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

thì

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

0.2.1 Tích phân bất định

Định nghĩa 1.9

Hàm F được gọi là một nguyên hàm của f trên khoảng $I \subset \mathbb{R}$ nếu

$$F'(x) = f(x), \forall x \in I.$$

0.2.1 Tích phân bất định

Định nghĩa 1.9

Hàm F *được gọi là một nguyên hàm của* f *trên khoảng* $I \subset \mathbb{R}$ *nếu*

$$F'(x) = f(x), \forall x \in I.$$

Định lý 1.6

Nếu F *là một nguyên hàm của* f *trên khoảng* I *thì họ tất cả các nguyên hàm của* f *được gọi là tích phân bất định của* f *là*

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

với C *là một hằng số tùy ý.*

0.2.1 Tích phân bất định

Định nghĩa 1.9

Hàm F được gọi là một nguyên hàm của f trên khoảng $I \subset \mathbb{R}$ nếu

$$F'(x) = f(x), \forall x \in I.$$

Định lý 1.6

Nếu F là một nguyên hàm của f trên khoảng I thì họ tất cả các nguyên hàm của f được gọi là tích phân bất định của f là

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

với C là một hằng số tùy ý.

Phương pháp tìm nguyên hàm: đưa về công thức đã biết trong bảng nguyên hàm nhờ

1. Phương pháp đổi biến;
2. Phương pháp tích phân từng phần.

0.2.2 Tích phân xác định

Định nghĩa 1.10

Cho hàm f xác định và bị chặn trên $[a, b]$. *Chia* $[a, b]$ *thành n đoạn nhỏ bởi các điểm*

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = .b$$

0.2.2 Tích phân xác định

Định nghĩa 1.10

Cho hàm f xác định và bị chặn trên $[a, b]$. Chia $[a, b]$ thành n đoạn nhỏ bởi các điểm

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = .b$$

Lấy tùy ý $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ và đặt $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, i = 1, 2, \ldots, n$ rồi lập tổng

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

0.2.2 Tích phân xác định

Định nghĩa 1.10

Cho hàm f xác định và bị chặn trên $[a, b]$. Chia $[a, b]$ thành n đoạn nhỏ bởi các điểm

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = .b$$

Lấy tùy ý $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ và đặt $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, i = 1, 2, \ldots, n$ rồi lập tổng

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

Nếu tồn tại giới hạn hữu hạn

$$\lim_{n\to+\infty} \sigma_n = I$$

không phụ thuộc vào việc chia đoạn $[a, b]$ cũng như việc chọn các ξ_i, thì giá trị I đó được gọi là **tích phân xác định** *của hàm f trên $[a, b]$, ký hiệu là*

$$I = \int_a^b f(x)dx.$$

0.2.2 Tích phân xác định

Định lý 1.7

(Công thức Newton-Leibniz) Nếu hàm $f(x)$ *liên tục trên* $[a, b]$ *có một nguyên hàm trong đoạn đó là* $F(x)$ *thì*

$$I = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

0.2.2 Tích phân xác định

Định lý 1.7

(Công thức Newton-Leibniz) Nếu hàm $f(x)$ liên tục trên $[a, b]$ có một nguyên hàm trong đoạn đó là $F(x)$ thì

$$I = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Phương pháp tính tích phân:

1. Phương pháp đổi biến.
2. Phương pháp tích phân từng phần.

0.2.3 Một số ứng dụng của tích phân xác định

1. Tính diện tích hình phẳng:

- Hình phẳng giới hạn bởi các đường $\{x = a, x = b, y = 0, y = f(x)\}$:

$$S = \int_a^b |f(x)|dx.$$

0.2.3 Một số ứng dụng của tích phân xác định

1. Tính diện tích hình phẳng:

- Hình phẳng giới hạn bởi các đường $\{x = a, x = b, y = 0, y = f(x)\}$:

$$S = \int_a^b |f(x)|dx.$$

- Hình phẳng giới hạn bởi các đường $\{x = a, x = b, y = f(x), y = g(x)\}$:

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)|dx.$$

0.2.3 Một số ứng dụng của tích phân xác định

1. Tính diện tích hình phẳng:

- Hình phẳng giới hạn bởi các đường $\{x = a, x = b, y = 0, y = f(x)\}$:

$$S = \int_a^b |f(x)|dx.$$

- Hình phẳng giới hạn bởi các đường $\{x = a, x = b, y = f(x), y = g(x)\}$:

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)|dx.$$

- Hình phẳng giới hạn bởi đường cong cho dạng tham số $\{x = x(t), y = y(t), t \in [t_1, t_2]\}$:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} |y(t)x'(t)|dt.$$

0.2.3 Một số ứng dụng của tích phân xác định

2. *Tính độ dài đường cong phẳng:*

- Đường cong $y = f(x), x \in [a, b]$:

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx.$$

0.2.3 Một số ứng dụng của tích phân xác định

2. *Tính độ dài đường cong phẳng:*

- Đường cong $y = f(x), x \in [a, b]$:

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

- Đường cong cho dạng tham số $x = x(t), y = y(t), t \in [t_1, t_2]$:

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt.$$

0.2.3 Một số ứng dụng của tích phân xác định

2. Tính độ dài đường cong phẳng:

- Đường cong $y = f(x), x \in [a, b]$:

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

- Đường cong cho dạng tham số $x = x(t), y = y(t), t \in [t_1, t_2]$:

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt.$$

- Đường cong cho dạng tọa độ cực $\{x = r(\phi)\cos\phi, y = r(\phi)\sin\phi, \phi \in [\alpha, \beta]$:

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{(r'(\phi))^2 + (r(\phi))^2} d\phi.$$

0.2.3 Một số ứng dụng của tích phân xác định

3. Thể tích vật thể tròn xoay: Vật thể tròn xoay sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $\{x = a, x = b, y = 0, y = f(x)\}$ quanh trục Ox:

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx.$$

0.2.3 Một số ứng dụng của tích phân xác định

3. Thể tích vật thể tròn xoay: Vật thể tròn xoay sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $\{x = a, x = b, y = 0, y = f(x)\}$ quanh trục Ox:

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx.$$

4. Diện tích mặt tròn xoay: Mặt tròn xoay sinh ra khi quay cung là đồ thị hàm số $y = f(x), x \in [a, b]$ quanh trục Ox:

$$S = 2\pi \int_a^b |f(x))| \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

0.2.4 Tích phân suy rộng loại 1

Định nghĩa 1.11

Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $[a,+\infty)$ và khả tích trên $[a,b]$ với $b>a$ bất kỳ. Nếu tồn tại giới hạn

$$I=\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$$

thì f được gọi là khả tích trên $[a,+\infty)$ và I được gọi là một tích phân suy rộng loại 1 của hàm số $f(x)$ trên $[a,+\infty)$, ký hiệu

$$I=\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx=\int_a^{+\infty} f(x)dx.$$

Khi đó ta cũng nói tích phân $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ (ht).
Nếu không tồn tại giới hạn trên thì ta nói tích phân đó là phân kỳ (pk).

0.2.4 Tích phân suy rộng loại 1

Tương tự ta có các tích phân suy rộng:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a \to -\infty} \int_{a}^{b} f(x)dx,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{a \to -\infty \\ b \to +\infty}} \int_{a}^{b} f(x)dx.$$

0.2.4 Tích phân suy rộng loại 1

Tương tự ta có các tích phân suy rộng:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{b} f(x)dx,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to+\infty}} \int_{a}^{b} f(x)dx.$$

Ngoài ra, nếu các tích phân $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx, \int_{-\infty}^{a} f(x)dx$ ht thì ta có thể viết

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{+\infty} f(x)dx.$$

0.2.4 Tích phân suy rộng loại 1

Tương tự ta có các tích phân suy rộng:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{b} f(x)dx,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to+\infty}} \int_{a}^{b} f(x)dx.$$

Ngoài ra, nếu các tích phân $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx, \int_{-\infty}^{a} f(x)dx$ ht thì ta có thể viết

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{+\infty} f(x)dx.$$

Nếu F là một nguyên hàm của f thì ta có thể tính

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} F(b) - F(a) = F(+\infty) - F(a) = F(x)\Big|_{a}^{+\infty}.$$

0.2.4 Tích phân suy rộng loại 1

Các tiêu chuẩn so sánh:

Định lý 1.8

Cho f, g là các hàm khả tích trên $[a, b]$ với mọi $b > a$ và

$$0 \leq f(x) \leq g(x), \forall x \geq a.$$

Khi đó ta có:

(i) $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ *ht* $\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)dx$ *ht.*

(ii) $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *pk* $\Rightarrow \int_a^{+\infty} g(x)dx$ *pk.*

Chú ý: Tích phân suy rộng $\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}dx$ với $a > 0$:

- hội tụ với $\alpha > 1$,
- phân kỳ với $\alpha \leq 1$.

0.2.4 Tích phân suy rộng loại 1

Định lý 1.9

Cho f, g là hai hàm số dương và khả tích trên $[a, +\infty)$. Khi đó:

1. *Nếu* $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = k$, $(0 < k < +\infty)$ *thì*

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \, ht \Leftrightarrow \int_a^{+\infty} g(x)dx \, ht .$$

2. *Nếu* $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$ *và* $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ *ht thì* $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *ht.*
3. *Nếu* $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = +\infty$ *và* $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ *pk thì* $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *pk.*

0.2.4 Tích phân suy rộng loại 1

Định lý 1.10

Nếu $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ *ht thì* $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *ht.*

0.2.4 Tích phân suy rộng loại 1

Định lý 1.10

Nếu $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ *ht thì* $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *ht.*

- Nếu $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ ht thì ta nói $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ ht tuyệt đối.
- Nếu $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ ht nhưng $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ pk thì ta nói $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ là bán ht.

0.2.5 Tích phân suy rộng loại 2

Định nghĩa 1.12

Cho hàm f xác định trên nửa đoạn $(a, b]$ sao cho f liên tục trên $[a+h, b]$, với $h > 0$ tùy ý, nhưng không liên tục trên toàn đoạn $[a, b]$ (khi đó điểm $x = a$ gọi là một điểm bất thường). Nếu tồn tại giới hạn

$$I = \lim_{h \to 0} \int_{a+h}^{b} f(x)dx$$

thì f được gọi là khả tích trên $(a, b]$ và giá trị I đó được gọi là một tích phân suy rộng loại 2 của f, ký hiệu là $\int_a^b f(x)dx$, và nói tích phân đó hội tụ.
Nếu không tồn tại giới hạn trên thì ta nói tích phân đó phân kỳ.

0.2.5 Tích phân suy rộng loại 2

Định nghĩa 1.12

Cho hàm f xác định trên nửa đoạn $(a, b]$ sao cho f liên tục trên $[a+h, b]$, với $h > 0$ tùy ý, nhưng không liên tục trên toàn đoạn $[a, b]$ (khi đó điểm $x = a$ gọi là một điểm bất thường). Nếu tồn tại giới hạn

$$I = \lim_{h \to 0} \int_{a+h}^{b} f(x)dx$$

thì f được gọi là khả tích trên $(a, b]$ và giá trị I đó được gọi là một tích phân suy rộng loại 2 của f, ký hiệu là $\int_a^b f(x)dx$, và nói tích phân đó hội tụ.
Nếu không tồn tại giới hạn trên thì ta nói tích phân đó phân kỳ.

Ta cũng dùng ký hiệu đó cho tích phân suy rộng loại 2 của f trên $[a, b)$, tức là

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{h \to 0} \int_a^{b-h} f(x)dx.$$

0.2.5 Tích phân suy rộng loại 2

Nếu F là một nguyên hàm của f thì ta có thể tính

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{h\to 0}\int_{a+h}^b f(x)dx = F(b) - \lim_{h\to 0} F(a+h).$$

0.2.5 Tích phân suy rộng loại 2

Nếu F là một nguyên hàm của f thì ta có thể tính

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{h\to 0}\int_{a+h}^b f(x)dx = F(b) - \lim_{h\to 0} F(a+h).$$

Các tiêu chuẩn so sánh:

Định lý 1.11

Cho f, g là các hàm khả tích trên $(a, b]$ và

$$0 \le f(x) \le g(x),\ \forall x \in (a, c], a < c < b.$$

Khi đó:

(i) $\int_a^b g(x)dx$ *ht* $\Rightarrow \int_a^b f(x)dx$ *ht.*

(ii) $\int_a^b f(x)dx$ *pk* $\Rightarrow \int_a^b g(x)dx$ *pk.*

Chú ý: Tích phân suy rộng $\int_0^b \frac{1}{x^\alpha}dx$:

- hội tụ với $\alpha < 1$,
- phân kỳ với $\alpha \ge 1$.

0.2.5 Tích phân suy rộng loại 2

Định lý 1.12

Giả sử f, g là các hàm dương khả tích trên $(a, b]$. Khi đó

1. *Nếu* $\lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = k, (0 < k < +\infty)$ *thì*

$$\int_a^b f(x)dx\ ht \Leftrightarrow \int_a^b g(x)dx\ ht\ .$$

2. *Nếu* $\lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$ *và* $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ *ht thì* $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *ht.*
3. *Nếu* $\lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = +\infty$ *và* $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ *pk thì* $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *pk.*

1.1.1 Định nghĩa

- Cho dãy số $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ Tổng vô hạn dạng

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots \quad (1)$$

được gọi là một *chuỗi số*, phần tử u_n gọi là số hạng thứ n của chuỗi.

1.1.1 Định nghĩa

- Cho dãy số $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ Tổng vô hạn dạng

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots \tag{1}$$

được gọi là một *chuỗi số*, phần tử u_n gọi là số hạng thứ n của chuỗi.

- *Tổng riêng thứ n* của chuỗi (1) là đại lượng

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = u_1 + u_2 + \cdots + u_n.$$

1.1.1 Định nghĩa

- Cho dãy số $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ Tổng vô hạn dạng

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots \tag{1}$$

được gọi là một *chuỗi số*, phần tử u_n gọi là số hạng thứ n của chuỗi.

- *Tổng riêng thứ n* của chuỗi (1) là đại lượng

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = u_1 + u_2 + \cdots + u_n.$$

- Nếu tồn tại giới hạn hữu hạn $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = S$ thì ta nói chuỗi (1) *hội tụ (ht) và có tổng S*, viết là $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = S$.
Nếu $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = S$ thì đại lượng $r_n = S - s_n$ gọi là phần dư thứ n của chuỗi.

1.1.1 Định nghĩa

- Cho dãy số $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ Tổng vô hạn dạng

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots \tag{1}$$

được gọi là một *chuỗi số*, phần tử u_n gọi là số hạng thứ n của chuỗi.

- *Tổng riêng thứ n* của chuỗi (1) là đại lượng

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = u_1 + u_2 + \cdots + u_n.$$

- Nếu tồn tại giới hạn hữu hạn $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = S$ thì ta nói chuỗi (1) *hội tụ (ht) và có tổng S*, viết là $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = S$.
Nếu $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = S$ thì đại lượng $r_n = S - s_n$ gọi là phần dư thứ n của chuỗi.
Chuỗi (1) không hội tụ thì ta nói nó *phân kỳ* (pk).

1.1.2 Điều kiện hội tụ

Định lý 2.1

Nếu chuỗi số (1) hội tụ thì $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0.$

1.1.2 Điều kiện hội tụ

Định lý 2.1

Nếu chuỗi số (1) hội tụ thì $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Định nghĩa 2.1

Dãy số $\{u_n\}$ *được gọi là dãy Cauchy nếu* $\forall\epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ *sao cho*

$$|u_n - u_m| < \epsilon, \forall m, n > N.$$

1.1.2 Điều kiện hội tụ

Định lý 2.1

Nếu chuỗi số (1) hội tụ thì $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Định nghĩa 2.1

Dãy số $\{u_n\}$ *được gọi là dãy Cauchy nếu* $\forall\epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ *sao cho*

$$|u_n - u_m| < \epsilon, \forall m, n > N.$$

Định lý 2.2

Dãy số $\{u_n\}$ *hội tụ khi và chỉ khi nó là dãy Cauchy.*

1.1.2 Điều kiện hội tụ

Định lý 2.1

Nếu chuỗi số (1) hội tụ thì $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Định nghĩa 2.1

Dãy số $\{u_n\}$ *được gọi là dãy Cauchy nếu* $\forall\epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ *sao cho*

$$|u_n - u_m| < \epsilon, \forall m, n > N.$$

Định lý 2.2

Dãy số $\{u_n\}$ *hội tụ khi và chỉ khi nó là dãy Cauchy.*

Định lý 2.3

(Tiêu chuẩn Cauchy) Chuỗi (1) hội tụ khi và chỉ khi dãy các tổng riêng $\{s_n\}$ *là dãy Cauchy.*

1.1.2 Một số tính chất của chuỗi hội tụ

Định lý 2.4

(a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = S \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \alpha u_n = \alpha S, \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

.

(b)

$$\begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} u_n = S \\ \sum_{n=1}^{\infty} v_n = S' \end{cases} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n) = S + S'.$$

(c) *Các chuỗi*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ và } \sum_{n=p}^{\infty} u_n, p > 1$$

cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ.

1.2.1 Các định lý so sánh

Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ mà $u_n > 0, \forall n$ được gọi là chuỗi số dương.

1.2.1 Các định lý so sánh

Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ mà $u_n > 0, \forall n$ được gọi là chuỗi số dương.

Định lý 2.5

Giả sử hai chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ và $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ có $u_n \leq v_n, \forall n \geq n_0 \in \mathbb{N}$. Khi đó

- *Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ ht thì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ cũng ht.*
- *Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ pk thì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ cũng pk.*

1.2.1 Các định lý so sánh

Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ mà $u_n > 0, \forall n$ được gọi là chuỗi số dương.

Định lý 2.5

Giả sử hai chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *và* $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ *có* $u_n \leq v_n, \forall n \geq n_0 \in \mathbb{N}$. *Khi đó*

- *Chuỗi* $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ *ht thì chuỗi* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *cũng ht.*
- *Chuỗi* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *pk thì chuỗi* $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ *cũng pk.*

Định lý 2.6

Nếu hai chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *và* $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ *có* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = k > 0$ *thì hai chuỗi số ấy cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ.*

1.2. Kiểm tra sự hội tụ của chuỗi số dương

Định lý 2.7

(Quy tắc D'Alembert) Chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *có* $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$

- *hội tụ khi* $l < 1$;
- *phân kỳ khi* $l > 1$;
- *không có kết luận khi* $l = 1$.

1.2. Kiểm tra sự hội tụ của chuỗi số dương

Định lý 2.7

(Quy tắc D'Alembert) Chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *có* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = l$

- *hội tụ khi* $l < 1$;
- *phân kỳ khi* $l > 1$;
- *không có kết luận khi* $l = 1$.

Định lý 2.8

(Quy tắc Cauchy) Chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *có* $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = l$

- *hội tụ khi* $l < 1$;
- *phân kỳ khi* $l > 1$;
- *không có kết luận khi* $l = 1$.

1.2. Kiểm tra sự hội tụ của chuỗi số dương

Định lý 2.9

(Quy tắc tích phân) Giả sử $f(x)$ *là một hàm số dương, liên tục, đơn điệu giảm trên* $[1, +\infty)$ *và có* $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$. *Đặt* $u_n = f(n), n = 1, 2, \ldots$ *Khi đó*

$$\text{tích phân suy rộng } \int_1^{+\infty} f(x)dx \text{ và chuỗi số dương } \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ.

1.2. Kiểm tra sự hội tụ của chuỗi số dương

Định lý 2.9

(Quy tắc tích phân) Giả sử $f(x)$ *là một hàm số dương, liên tục, đơn điệu giảm trên* $[1, +\infty)$ *và có* $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$. *Đặt* $u_n = f(n), n = 1, 2, \ldots$ *Khi đó*

$$\text{tích phân suy rộng } \int_1^{+\infty} f(x)dx \text{ và chuỗi số dương } \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ.

Chuỗi Riemann

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

hội tụ khi $p > 1$ và phân kỳ khi $p \leq 1$.

1.3.1 Hội tụ tuyệt đối

Định lý 2.10

Nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ *hội tụ thì chuỗi* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *cũng hội tụ.*

1.3.1 Hội tụ tuyệt đối

Định lý 2.10

Nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ *hội tụ thì chuỗi* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *cũng hội tụ.*

- Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ được gọi là hội tụ tuyệt đối (httđ) nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ hội tụ.
- Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ được gọi là bán hội tụ nếu nó hội tụ nhưng chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ phân kỳ.

1.3.2 Chuỗi đan dấu

Chuỗi đan dấu là chuỗi số có dạng

$$\pm\left(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n\right) = \pm(u_1 - u_2 + u_3 - \cdots),\ u_n > 0\,\forall n.$$

1.3.2 Chuỗi đan dấu

Chuỗi đan dấu là chuỗi số có dạng

$$\pm\Big(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n\Big) = \pm(u_1 - u_2 + u_3 - \cdots),\ u_n > 0\,\forall n.$$

Định lý 2.11

(Leibniz) Nếu dãy số dương $\{u_n\}$ *là dãy giảm và có* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ *thì chuỗi đan dấu* $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ *hội tụ và có tổng* $S \le u_1$.

1.3.2 Chuỗi đan dấu

Chuỗi đan dấu là chuỗi số có dạng

$$\pm\left(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n\right) = \pm(u_1 - u_2 + u_3 - \cdots),\ u_n > 0\,\forall n.$$

Định lý 2.11

(Leibniz) Nếu dãy số dương $\{u_n\}$ là dãy giảm và có $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ thì chuỗi đan dấu $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ hội tụ và có tổng $S \leq u_1$.

Định lý 2.12

1. *Nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ httđ và có tổng S thì chuỗi suy từ nó bằng cách thay đổi thứ tự các phần tử hoặc nhóm tùy ý các số hạng lại cũng httđ và có tổng S.*

1.3.2 Chuỗi đan dấu

Chuỗi đan dấu là chuỗi số có dạng

$$\pm\left(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n\right) = \pm(u_1 - u_2 + u_3 - \cdots),\ u_n > 0\,\forall n.$$

Định lý 2.11

(Leibniz) Nếu dãy số dương $\{u_n\}$ là dãy giảm và có $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ thì chuỗi đan dấu $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ hội tụ và có tổng $S \leq u_1$.

Định lý 2.12

1. *Nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ httđ và có tổng S thì chuỗi suy từ nó bằng cách thay đổi thứ tự các phần tử hoặc nhóm tùy ý các số hạng lại cũng httđ và có tổng S.*
2. *Nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ bán ht thì ta có thể thay đổi thứ tự và nhóm các số hạng của nó để tạo ra chuỗi mới có tổng khác hoặc phân kỳ.*

1.4.1 Dãy hàm số

Cho các hàm số $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots$ xác định trên miền $D \subset \mathbb{R}$.

(a) Dãy hàm $\{f_n\}$ được gọi là hội tụ điểm tại $x_0 \in D$ nếu dãy số $\{f_n(x_0)\}$ hội tụ. Tập các điểm mà dãy hàm $\{f_n\}$ hội tụ tại đó gọi là tập hợp hội tụ của nó.

1.4.1 Dãy hàm số

Cho các hàm số $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots$ xác định trên miền $D \subset \mathbb{R}$.

(a) Dãy hàm $\{f_n\}$ được gọi là hội tụ điểm tại $x_0 \in D$ nếu dãy số $\{f_n(x_0)\}$ hội tụ. Tập các điểm mà dãy hàm $\{f_n\}$ hội tụ tại đó gọi là tập hợp hội tụ của nó.

(b) Dãy hàm $\{f_n\}$ được gọi là hội tụ đến hàm f trên tập D nếu với mỗi $x \in D$ ta có

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x) \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ sao cho } |f_n(x) - f(x)| < \epsilon, \forall n > n_0.$$

1.4.1 Dãy hàm số

Cho các hàm số $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots$ xác định trên miền $D \subset \mathbb{R}$.

(a) Dãy hàm $\{f_n\}$ được gọi là hội tụ điểm tại $x_0 \in D$ nếu dãy số $\{f_n(x_0)\}$ hội tụ. Tập các điểm mà dãy hàm $\{f_n\}$ hội tụ tại đó gọi là tập hợp hội tụ của nó.

(b) Dãy hàm $\{f_n\}$ được gọi là hội tụ đến hàm f trên tập D nếu với mỗi $x \in D$ ta có

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x) \Leftrightarrow \forall\epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ sao cho } |f_n(x) - f(x)| < \epsilon, \forall n > n_0.$$

(c) Dãy hàm $\{f_n\}$ được gọi là hội tụ đều đến hàm f trên tập D nếu

$$\forall\epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ sao cho } |f_n(x) - f(x)| < \epsilon, \forall n > n_0, \forall x \in D.$$

1.4.2 Chuỗi hàm số

Cho dãy hàm $\{f_n\}$ xác định trên miền $D \subset \mathbb{R}$. Khi đó tổng

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \tag{2}$$

gọi là một *chuỗi hàm*. *Tổng riêng* thứ n của chuỗi hàm (2) là hàm

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x).$$

1.4.2 Chuỗi hàm số

Cho dãy hàm $\{f_n\}$ xác định trên miền $D \subset \mathbb{R}$. Khi đó tổng

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \tag{2}$$

gọi là một *chuỗi hàm*. *Tổng riêng* thứ n của chuỗi hàm (2) là hàm

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x).$$

Định nghĩa 2.2

- *Chuỗi (2) được gọi là hội tụ tại điểm $x_0 \in D$ nếu dãy hàm $\{s_n(x)\}$ hội tụ tại x_0. Tập tất cả các điểm mà chuỗi (2) hội tụ gọi là miền hội tụ của chuỗi.*

1.4.2 Chuỗi hàm số

Cho dãy hàm $\{f_n\}$ xác định trên miền $D \subset \mathbb{R}$. Khi đó tổng

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \tag{2}$$

gọi là một *chuỗi hàm*. *Tổng riêng* thứ n của chuỗi hàm (2) là hàm

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x).$$

Định nghĩa 2.2

- *Chuỗi (2) được gọi là hội tụ tại điểm $x_0 \in D$ nếu dãy hàm $\{s_n(x)\}$ hội tụ tại x_0. Tập tất cả các điểm mà chuỗi (2) hội tụ gọi là miền hội tụ của chuỗi.*
- *Chuỗi (2) được gọi là hội tụ đều trên $D' \subset D$ nếu dãy hàm $\{s_n(x)\}$ hội tụ đều trên D'.*

1.4.3 Tiêu chuẩn hội tụ đều của chuỗi hàm số

Định lý 2.13

(Tiêu chuẩn Weierstrass) Giả sử dãy hàm $\{f_n\}$ xác định trên miền $D \subset \mathbb{R}$ và

$$|f_n(x)| \leq a_n,\ \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in D' \subset D.$$

Nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ hội tụ thì chuỗi hàm (2) hội tụ tuyệt đối và đều trên D'.

1.4.3 Tiêu chuẩn hội tụ đều của chuỗi hàm số

Định lý 2.13

(Tiêu chuẩn Weierstrass) Giả sử dãy hàm $\{f_n\}$ *xác định trên miền* $D \subset \mathbb{R}$ *và*

$$|f_n(x)| \leq a_n, \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in D' \subset D.$$

Nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *hội tụ thì chuỗi hàm (2) hội tụ tuyệt đối và đều trên* D'.

Một số tính chất của chuỗi hội tụ đều: xem các ĐL8.11-8.13 trong giáo trình.

1.5.1 Bán kính hội tụ

Chuỗi lũy thừa là chuỗi hàm số dạng

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots \tag{3}$$

1.5.1 Bán kính hội tụ

Chuỗi lũy thừa là chuỗi hàm số dạng

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots \tag{3}$$

Định lý 2.14

(i) *(Abel) Nếu chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hội tụ tại $x = x_0 \neq 0$ thì nó hội tụ tuyệt đối tại mọi x với $|x| < |x_0|$.*

(ii) *Nếu chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ phân kỳ tại $x = x_1 \neq 0$ thì nó phân kỳ tại mọi x với $|x| > |x_1|$.*

$\Longrightarrow$ chuỗi lũy thừa (3):

1. hoặc chỉ hội tụ tại $x = 0$;
2. hoặc hội tụ $\forall x \in \mathbb{R}$;
3. hoặc $\exists R > 0$ sao cho chuỗi lũy thừa (3) hội tụ tuyệt đối với $|x| < R$ và phân kỳ với $|x| > R$. Số R đó được gọi là *bán kính hội tụ* của chuỗi lũy thừa (3).

1.5.2 Tìm bán kính hội tụ

Định lý 2.15

Nếu có $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \rho$ *(hoặc* $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho$*) thì bán kính hội tụ của chuỗi lũy thừa (3) được xác định bởi*

$$R = \begin{cases} 0 & \text{nếu } \rho = +\infty \\ +\infty & \text{nếu } \rho = 0 \\ \dfrac{1}{\rho} & \text{nếu } 0 < \rho < +\infty \end{cases}$$

1.5.2 Tìm bán kính hội tụ

Định lý 2.15

Nếu có $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \rho$ *(hoặc* $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho$*) thì bán kính hội tụ của chuỗi lũy thừa (3) được xác định bởi*

$$R = \begin{cases} 0 & \text{nếu } \rho = +\infty \\ +\infty & \text{nếu } \rho = 0 \\ \dfrac{1}{\rho} & \text{nếu } 0 < \rho < +\infty \end{cases}$$

Quy tắc tìm miền hội tụ của chuỗi lũy thừa (3): tìm ρ theo một trong hai giới hạn trong ĐL trên.

1. Nếu $\rho = +\infty$: chuỗi chỉ hội tụ tại $x = 0$;
2. Nếu $\rho = 0$: miền hội tụ của chuỗi là $(-\infty, +\infty)$;
3. Nếu $0 < \rho < +\infty$: kiểm tra tính hội tụ của chuỗi tại $x = \pm R$ rồi kết luận miền hội tụ của chuỗi.

Một số tính chất

Định lý 2.16

Giả sử chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = f(x)$ trên miền hội tụ I với bán kính hội tụ R. Khi đó:

1. *f một hàm liên tục trên I.*
2. $$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$$
   là chuỗi cũng có bán kính hội tụ R.
3. $$\int f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int a_n x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$
   là chuỗi cũng có bán kính hội tụ R.

1.5.3 Khai triển một hàm thành chuỗi lũy thừa

Định lý 2.17

Giả sử hàm f xác định và có đạo hàm mọi cấp trong lân cận V của x_0. Khi đó, với $x \in V$, ta có

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \\ + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \cdots$$

1.5.3 Khai triển một hàm thành chuỗi lũy thừa

Định lý 2.17

Giả sử hàm f xác định và có đạo hàm mọi cấp trong lân cận V của x_0. Khi đó, với $x \in V$, ta có

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \\ + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \cdots$$

Công thức trên gọi là *chuỗi Taylor* của hàm $f(x)$ trong lân cận của x_0.

1.5.3 Khai triển một hàm thành chuỗi lũy thừa

Định lý 2.17

Giả sử hàm f xác định và có đạo hàm mọi cấp trong lân cận V của x_0. Khi đó, với $x \in V$, ta có

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \\ + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \cdots$$

Công thức trên gọi là *chuỗi Taylor* của hàm $f(x)$ trong lân cận của x_0.
Nếu $x_0 = 0$ thì chuỗi có dạng

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

được gọi là *chuỗi Mac Laurin* của f.

2.1.1 Định nghĩa hàm nhiều biến

Định nghĩa 3.1

Không gian Euclide $\mathbb{R}^n$ là tập hợp

$$\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) | x_i \in \mathbb{R}, \forall i = 1, 2, \ldots, n\}$$

cùng với 2 phép toán

- $x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n),$
  $$\forall x = (x_1, x_2, \ldots, x_n), y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n;$$
- $kx = (kx_1, kx_2, \ldots, kx_n), \forall x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \forall k \in \mathbb{R}$

và tích vô hướng

$$xy = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n,$$
$$\forall x = (x_1, x_2, \ldots, x_n), y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n.$$

2.1.1 Định nghĩa hàm nhiều biến

Định nghĩa 3.2

Cho $D \subset \mathbb{R}^n$. Một ánh xạ

$$\begin{aligned} f : & D \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto u = f(x) \end{aligned}$$

được gọi là một hàm số n biến xác định trên D.

2.1.1 Định nghĩa hàm nhiều biến

Định nghĩa 3.2

Cho $D \subset \mathbb{R}^n$. Một ánh xạ

$$\begin{aligned} f : & D \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto u = f(x) \end{aligned}$$

được gọi là một hàm số n biến xác định trên D.

- Tập D được gọi là miền xác định của hàm f. Thông thường đó là tập các phần $x \in \mathbb{R}^n$ làm cho $f(x)$ có nghĩa.
- $x_1, x_2, \ldots, x_n$ được gọi là các biến số độc lập.

2.1.2 Tập hợp trong $\mathbb{R}^n$

- Trong không gian Euclide $\mathbb{R}^n$, tập

$$\{e_i = (0,\ldots,0,1,0\ldots,0), i = 1,2,\ldots,n \text{ (thành phần thứ } i \text{ bằng 1)}\}$$

gọi là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^n$. Mỗi $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ đều có thể viết thành

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n$$

và ta nói x có toạ độ $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ trong cơ sở chính tắc đó.

2.1.2 Tập hợp trong $\mathbb{R}^n$

- Trong không gian Euclide $\mathbb{R}^n$, tập

$$\{e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0 \ldots, 0), i = 1, 2, \ldots, n \text{ (thành phần thứ } i \text{ bằng 1)}\}$$

gọi là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^n$. Mỗi $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ đều có thể viết thành

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n$$

và ta nói x có toạ độ $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ trong cơ sở chính tắc đó.

- Khoảng cách giữa hai điểm $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n), y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ là

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}.$$

2.1.2 Tập hợp trong $\mathbb{R}^n$

- Trong không gian Euclide $\mathbb{R}^n$, tập

$$\{e_i = (0,\dots,0,1,0\dots,0), i = 1,2,\dots,n \text{ (thành phần thứ } i \text{ bằng } 1)\}$$

gọi là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^n$. Mỗi $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ đều có thể viết thành

$$x = x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_ne_n$$

và ta nói x có toạ độ $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ trong cơ sở chính tắc đó.

- Khoảng cách giữa hai điểm $x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ là

$$d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}.$$

- Với mỗi $r > 0$, tập

$$B_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n | d(x,y) < r\} \quad (\bar{B}_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n | d(x,y) \leq r\})$$

được gọi là một hình cầu mở (đóng) tâm x, bán kính r. Tập $V \subset \mathbb{R}^n$ được gọi là một *lân cận* của điểm x nếu tồn tại một hình cầu mở $B_r(x) \subset V$.

2.1.2 Tập hợp trong $\mathbb{R}^n$

Cho tập $E \subset \mathbb{R}^n$ có phần bù $E^c = \{x \in \mathbb{R}^n | x \notin E\}$.

- Điểm $x_0 \in E$ được gọi là một *điểm trong* của E nếu tồn tại một hình cầu mở $B_r(x_0) \subset E$.

2.1.2 Tập hợp trong $\mathbb{R}^n$

Cho tập $E \subset \mathbb{R}^n$ có phần bù $E^c = \{x \in \mathbb{R}^n | x \notin E\}$.

- Điểm $x_0 \in E$ được gọi là một *điểm trong* của E nếu tồn tại một hình cầu mở $B_r(x_0) \subset E$.
- Tập E gọi là *mở* nếu mọi điểm của nó đều là điểm trong.

2.1.2 Tập hợp trong $\mathbb{R}^n$

Cho tập $E \subset \mathbb{R}^n$ có phần bù $E^c = \{x \in \mathbb{R}^n | x \notin E\}$.

- Điểm $x_0 \in E$ được gọi là một *điểm trong* của E nếu tồn tại một hình cầu mở $B_r(x_0) \subset E$.
- Tập E gọi là *mở* nếu mọi điểm của nó đều là điểm trong.
- Tập E gọi là *đóng* nếu phần bù E^c của nó là mở.

2.1.2 Tập hợp trong $\mathbb{R}^n$

Cho tập $E \subset \mathbb{R}^n$ có phần bù $E^c = \{x \in \mathbb{R}^n | x \notin E\}$.

- Điểm $x_0 \in E$ được gọi là một *điểm trong* của E nếu tồn tại một hình cầu mở $B_r(x_0) \subset E$.
- Tập E gọi là *mở* nếu mọi điểm của nó đều là điểm trong.
- Tập E gọi là *đóng* nếu phần bù E^c của nó là mở.
- Điểm $x_0 \in \mathbb{R}^n$ gọi là một *điểm biên* của E nếu $\forall r > 0$ ta đều có

$$B_r(x_0) \cap E \neq \emptyset, \; B_r(x_0) \cap E^c \neq \emptyset.$$

  Tập tất cả các điểm biên của E gọi là *biên* của E, ký hiệu là ∂E.

2.1.2 Tập hợp trong $\mathbb{R}^n$

Cho tập $E \subset \mathbb{R}^n$ có phần bù $E^c = \{x \in \mathbb{R}^n | x \notin E\}$.

- Điểm $x_0 \in E$ được gọi là một *điểm trong* của E nếu tồn tại một hình cầu mở $B_r(x_0) \subset E$.
- Tập E gọi là *mở* nếu mọi điểm của nó đều là điểm trong.
- Tập E gọi là *đóng* nếu phần bù E^c của nó là mở.
- Điểm $x_0 \in \mathbb{R}^n$ gọi là một *điểm biên* của E nếu $\forall r > 0$ ta đều có

  $$B_r(x_0) \cap E \neq \emptyset,\ B_r(x_0) \cap E^c \neq \emptyset.$$

  Tập tất cả các điểm biên của E gọi là *biên* của E, ký hiệu là ∂E.
  Ta có: tập E là đóng khi và chỉ khi $\partial E \subset E$.
- Tập E gọi là *bị chặn* nếu tồn tại một hình cầu B_r nào đó sao cho $E \subset B_r$.
- Tập E được gọi là *liên thông* nếu có thể nối hai điểm bất kỳ trong E bởi một đường liên tục nằm hoàn toàn trong E.
  Tập liên thông E được gọi là *đơn liên* nếu nó bị giới hạn bởi một mặt kín; gọi là *đa liên* nếu nó bị giới hạn bởi nhiều mặt kín rời nhau đôi một.

2.2.1 Giới hạn của hàm nhiều biến

Xét trên không gian $\mathbb{R}^2 = Oxy$.

- Dãy điểm $\{M_n(x_n, y_n)\}$ được gọi là hội tụ tới điểm $M_0(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ nếu

$$\lim_{n\to+\infty} d(M_n, M_0) = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} x_n = x_0, \lim_{n\to+\infty} y_n = y_0.$$

  Viết $\lim\limits_{n\to+\infty} M_n = M_0$ hay $M_n \to M_0$ khi $n \to +\infty$.

2.2.1 Giới hạn của hàm nhiều biến

Xét trên không gian $\mathbb{R}^2 = Oxy$.

- Dãy điểm $\{M_n(x_n, y_n)\}$ được gọi là hội tụ tới điểm $M_0(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ nếu

$$\lim_{n\to+\infty} d(M_n, M_0) = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} x_n = x_0, \lim_{n\to+\infty} y_n = y_0.$$

  Viết $\lim\limits_{n\to+\infty} M_n = M_0$ hay $M_n \to M_0$ khi $n \to +\infty$.

- Hàm số $f(x, y) = f(M)$ xác định trên miền D được gọi là có giới hạn l khi $M(x, y) \to M_0(x_0, y_0)$ nếu $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ sao cho

$$\forall M \in D, d(M, M_0) < \delta \Rightarrow |f(M) - l| < \epsilon.$$

2.2.1 Giới hạn của hàm nhiều biến

Xét trên không gian $\mathbb{R}^2 = Oxy$.

- Dãy điểm $\{M_n(x_n, y_n)\}$ được gọi là hội tụ tới điểm $M_0(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ nếu

$$\lim_{n\to+\infty} d(M_n, M_0) = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} x_n = x_0, \lim_{n\to+\infty} y_n = y_0.$$

  Viết $\lim\limits_{n\to+\infty} M_n = M_0$ hay $M_n \to M_0$ khi $n \to +\infty$.

- Hàm số $f(x, y) = f(M)$ xác định trên miền D được gọi là có giới hạn l khi $M(x, y) \to M_0(x_0, y_0)$ nếu $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ sao cho

$$\forall M \in D, d(M, M_0) < \delta \Rightarrow |f(M) - l| < \epsilon.$$

  Khi đó ta viết

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = l \quad \text{hay} \quad \lim_{M\to M_0} f(M) = l.$$

2.2.1 Giới hạn của hàm nhiều biến

Xét trên không gian $\mathbb{R}^2 = Oxy$.

- Dãy điểm $\{M_n(x_n, y_n)\}$ được gọi là hội tụ tới điểm $M_0(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ nếu

$$\lim_{n\to+\infty} d(M_n, M_0) = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} x_n = x_0, \lim_{n\to+\infty} y_n = y_0.$$

  Viết $\lim\limits_{n\to+\infty} M_n = M_0$ hay $M_n \to M_0$ khi $n \to +\infty$.

- Hàm số $f(x, y) = f(M)$ xác định trên miền D được gọi là có giới hạn l khi $M(x, y) \to M_0(x_0, y_0)$ nếu $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ sao cho

$$\forall M \in D, d(M, M_0) < \delta \Rightarrow |f(M) - l| < \epsilon.$$

  Khi đó ta viết

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = l \quad \text{hay} \quad \lim_{M\to M_0} f(M) = l.$$

  Một cách tương đương, ta có

$$\lim_{M\to M_0} f(M) = l \Leftrightarrow \forall\{M_n(x_n, y_n)\} \subset D, \lim_{n\to+\infty} M_n = M_0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} f(x_n, y_n) = l.$$

2.2.2 Tính liên tục của hàm nhiều biến

- Cho hàm f xác định trên miền $D \subset \mathbb{R}^2$ và điểm $M_0 \in D$. Ta nói rằng hàm f liên tục tại M_0 nếu tồn tại giới hạn

$$\lim_{M \to M_0} f(M) = f(M_0).$$

2.2.2 Tính liên tục của hàm nhiều biến

- Cho hàm f xác định trên miền $D \subset \mathbb{R}^2$ và điểm $M_0 \in D$. Ta nói rằng hàm f liên tục tại M_0 nếu tồn tại giới hạn

$$\lim_{M \to M_0} f(M) = f(M_0).$$

Nếu D là miền đóng và $M_0 \in \partial D$ thì giới hạn trên được lấy với $M \in D$.

2.2.2 Tính liên tục của hàm nhiều biến

- Cho hàm f xác định trên miền $D \subset \mathbb{R}^2$ và điểm $M_0 \in D$. Ta nói rằng hàm f liên tục tại M_0 nếu tồn tại giới hạn

$$\lim_{M \to M_0} f(M) = f(M_0).$$

Nếu D là miền đóng và $M_0 \in \partial D$ thì giới hạn trên được lấy với $M \in D$.
Hàm f được gọi là liên tục trên miền D nếu nó liên tục tại mọi điểm thuộc D.

2.2.2 Tính liên tục của hàm nhiều biến

- Cho hàm f xác định trên miền $D \subset \mathbb{R}^2$ và điểm $M_0 \in D$. Ta nói rằng hàm f liên tục tại M_0 nếu tồn tại giới hạn

$$\lim_{M \to M_0} f(M) = f(M_0).$$

Nếu D là miền đóng và $M_0 \in \partial D$ thì giới hạn trên được lấy với $M \in D$.
Hàm f được gọi là liên tục trên miền D nếu nó liên tục tại mọi điểm thuộc D.

- Hàm f được gọi là liên tục đều trên miền D nếu $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ sao cho

$$\forall M, M' \in D, d(M, M') < \delta \Rightarrow |f(M) - f(M')| < \epsilon.$$

2.3.1 Đạo hàm riêng

Cho hàm số $z = f(x, y)$ xác định trên miền $D \subset \mathbb{R}^2$, $M_0(x_0, y_0) \in D$.

- Cố định $y = y_0$, nếu hàm một biến $f(x, y_0)$ theo biến x có đạo hàm tại x_0 thì đạo hàm đó được gọi là *đạo hàm riêng của f theo biến x* tại M_0, ký hiệu là

$$f'_x(x_0, y_0) \quad \text{hay} \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \quad \text{hay} \quad \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0).$$

2.3.1 Đạo hàm riêng

Cho hàm số $z = f(x, y)$ xác định trên miền $D \subset \mathbb{R}^2$, $M_0(x_0, y_0) \in D$.

- Cố định $y = y_0$, nếu hàm một biến $f(x, y_0)$ theo biến x có đạo hàm tại x_0 thì đạo hàm đó được gọi là *đạo hàm riêng của f theo biến x* tại M_0, ký hiệu là

$$f'_x(x_0, y_0) \quad \text{hay} \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \quad \text{hay} \quad \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0).$$

- Tương tự, ta có *đạo hàm riêng của f theo biến y* tại M_0, ký hiệu là

$$f'_y(x_0, y_0) \quad \text{hay} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \quad \text{hay} \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0).$$

2.3.1 Đạo hàm riêng

Cho hàm số $z = f(x, y)$ xác định trên miền $D \subset \mathbb{R}^2$, $M_0(x_0, y_0) \in D$.

- Cố định $y = y_0$, nếu hàm một biến $f(x, y_0)$ theo biến x có đạo hàm tại x_0 thì đạo hàm đó được gọi là *đạo hàm riêng của f theo biến x* tại M_0, ký hiệu là

$$f'_x(x_0, y_0) \quad \text{hay} \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \quad \text{hay} \quad \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0).$$

- Tương tự, ta có *đạo hàm riêng của f theo biến y* tại M_0, ký hiệu là

$$f'_y(x_0, y_0) \quad \text{hay} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \quad \text{hay} \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0).$$

Tổng quát, đạo hàm riêng của hàm $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ theo biến x_i tại điểm $M(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ là đạo hàm tại a_i của hàm một biến

$$f(a_1, \ldots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \ldots, a_n).$$

2.3.1 Đạo hàm riêng

Cho hàm số $z = f(x, y)$ xác định trên miền $D \subset \mathbb{R}^2$, $M_0(x_0, y_0) \in D$.

- Cố định $y = y_0$, nếu hàm một biến $f(x, y_0)$ theo biến x có đạo hàm tại x_0 thì đạo hàm đó được gọi là *đạo hàm riêng của f theo biến x* tại M_0, ký hiệu là

$$f'_x(x_0, y_0) \quad \text{hay} \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \quad \text{hay} \quad \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0).$$

- Tương tự, ta có *đạo hàm riêng của f theo biến y* tại M_0, ký hiệu là

$$f'_y(x_0, y_0) \quad \text{hay} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \quad \text{hay} \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0).$$

Tổng quát, đạo hàm riêng của hàm $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ theo biến x_i tại điểm $M(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ là đạo hàm tại a_i của hàm một biến

$$f(a_1, \ldots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \ldots, a_n).$$

Khi tính đạo hàm riêng của một hàm số theo biến nào thì ta coi các biến còn lại là tham số và tính đạo hàm một biến theo biến đó.

2.3.2 Vi phân toàn phần

Cho hàm số $z = f(x, y)$ xác định trên miền $D \subset \mathbb{R}^2$, $M_0(x_0, y_0) \in D$.

- Với mỗi điểm $M(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \in D$, biểu thức

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

gọi là *số gia toàn phần* của f tại M_0.

2.3.2 Vi phân toàn phần

Cho hàm số $z = f(x, y)$ xác định trên miền $D \subset \mathbb{R}^2$, $M_0(x_0, y_0) \in D$.

- Với mỗi điểm $M(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \in D$, biểu thức

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

gọi là *số gia toàn phần* của f tại M_0.

- Nếu có thể biểu diễn dạng

$$\Delta f = A(x_0, y_0)\Delta x + B(x_0, y_0)\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y,$$

ở đó $\alpha \to 0, \beta \to 0$ khi $M \to M_0$, thì ta nói hàm f *khả vi tại* M_0. Biểu thức

$$df(x_0, y_0) = A(x_0, y_0)\Delta x + B(x_0, y_0)\Delta y$$

được gọi là *vi phân toàn phần* của hàm f tại M_0.

2.3.2 Vi phân toàn phần

Cho hàm số $z = f(x, y)$ xác định trên miền $D \subset \mathbb{R}^2$, $M_0(x_0, y_0) \in D$.

- Với mỗi điểm $M(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \in D$, biểu thức

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

  gọi là *số gia toàn phần* của f tại M_0.

- Nếu có thể biểu diễn dạng

$$\Delta f = A(x_0, y_0)\Delta x + B(x_0, y_0)\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y,$$

  ở đó $\alpha \to 0, \beta \to 0$ khi $M \to M_0$, thì ta nói hàm f *khả vi tại* M_0. Biểu thức

$$df(x_0, y_0) = A(x_0, y_0)\Delta x + B(x_0, y_0)\Delta y$$

  được gọi là *vi phân toàn phần* của hàm f tại M_0.

- Hàm $z = f(x, y)$ được gọi là khả vi trên miền D nếu nó khả vi tại mọi điểm của miền ấy.

2.3.3 Điều kiện khả vi

Chú ý: Hàm f khả vi tại điểm M_0 thì liên tục tại đó.

2.3.3 Điều kiện khả vi

Chú ý: Hàm f khả vi tại điểm M_0 thì liên tục tại đó.

Định lý 3.1

Nếu hàm số $z = f(x, y)$ có các đạo hàm riêng ở lân cận của điểm $M_0(x_0, y_0)$ và nếu các đạo hàm riêng ấy liên tục tại M_0 thì f khả vi tại M_0 và ta có

$$df = f'_x \Delta x + f'_y \Delta y.$$

2.3.3 Điều kiện khả vi

Chú ý: Hàm f khả vi tại điểm M_0 thì liên tục tại đó.

Định lý 3.1

Nếu hàm số $z = f(x, y)$ có các đạo hàm riêng ở lân cận của điểm $M_0(x_0, y_0)$ và nếu các đạo hàm riêng ấy liên tục tại M_0 thì f khả vi tại M_0 và ta có

$$df = f'_x \Delta x + f'_y \Delta y.$$

Chú ý:

- Do $dx = \Delta x, dy = \Delta y$ nên $df = f'_x dx + f'_y dy$.

2.3.3 Điều kiện khả vi

Chú ý: Hàm f khả vi tại điểm M_0 thì liên tục tại đó.

Định lý 3.1

Nếu hàm số $z = f(x, y)$ có các đạo hàm riêng ở lân cận của điểm $M_0(x_0, y_0)$ và nếu các đạo hàm riêng ấy liên tục tại M_0 thì f khả vi tại M_0 và ta có

$$df = f'_x \Delta x + f'_y \Delta y.$$

Chú ý:

- Do $dx = \Delta x, dy = \Delta y$ nên $df = f'_x dx + f'_y dy$.
- Ta có công thức tính gần đúng

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y.$$

2.3.4 Đạo hàm của hàm hợp

Cho tập $D \subset \mathbb{R}^n$ và các ánh xạ

$$u : D \to \mathbb{R}^m$$
$$x = (x_1, \ldots, x_n) \mapsto u(x) = (u_1(x), \ldots, u_m(x))$$

2.3.4 Đạo hàm của hàm hợp

Cho tập $D \subset \mathbb{R}^n$ và các ánh xạ

$$\begin{aligned} u : D &\to \mathbb{R}^m \\ x = (x_1, \dots, x_n) &\mapsto u(x) = (u_1(x), \dots, u_m(x)) \\ f : u(D) &\to \mathbb{R} \\ u = (u_1, \dots, u_m) &\mapsto f(u) = f(u_1, \dots, u_m) \end{aligned}$$

2.3.4 Đạo hàm của hàm hợp

Cho tập $D \subset \mathbb{R}^n$ và các ánh xạ

$$
\begin{aligned}
u : D &\to \mathbb{R}^m \\
x = (x_1, \ldots, x_n) &\mapsto u(x) = (u_1(x), \ldots, u_m(x)) \\
f : u(D) &\to \mathbb{R} \\
u = (u_1, \ldots, u_m) &\mapsto f(u) = f(u_1, \ldots, u_m)
\end{aligned}
$$

Khi đó ánh xạ tích

$$
\begin{aligned}
F = f \circ u : D &\to \mathbb{R} \\
x = (x_1, \ldots, x_n) &\mapsto F(x) = f(u(x)) = f(u_1(x), \ldots, u_m(x))
\end{aligned}
$$

được gọi là hàm hợp của f và u.

2.3.4 Đạo hàm của hàm hợp

Định lý 3.2

Nếu f có các đạo hàm riêng $\dfrac{\partial f}{\partial u_i}, i = 1, \ldots, m$ liên tục trong $u(D)$ và với mỗi $i = 1, \ldots, m$, u_j có các đạo hàm riêng $\dfrac{\partial u_i}{\partial x_j}, j = 1, \ldots, n$ trong D. Khi đó tồn tại các đạo hàm riêng $\dfrac{\partial F}{\partial x_j}, j = 1, \ldots, n$ và ta có

$$\frac{\partial F}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial u_i} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, j = 1, \ldots, n.$$

2.3.4 Đạo hàm của hàm hợp

Dạng ma trận

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x_1} & \frac{\partial F}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial u_1} & \frac{\partial f}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial f}{\partial u_m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial u_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial u_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial u_m}{\partial x_1} & \frac{\partial u_m}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial u_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x}.$$

2.3.4 Đạo hàm của hàm hợp

Trong trường hợp $m = n$, ma trận

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial u_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial u_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial u_n}{\partial x_1} & \frac{\partial u_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial u_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

là một ma trận vuông cấp n, gọi là *ma trận Jacobi* của ánh xạ u, còn định thức của nó gọi là *định thức Jacobi* của u, ký hiệu là $J = \dfrac{Du}{Dx}$.

2.3.4 Đạo hàm của hàm hợp

Chú ý 3.1

- *Nếu* $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n), x_i = x_i(t), i = 1, 2, \ldots, n$ *thì*

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x_1} x_1'(t) + \frac{\partial f}{\partial x_2} x_2'(t) + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} x_n'(t).$$

2.3.4 Đạo hàm của hàm hợp

Chú ý 3.1

- *Nếu* $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n), x_i = x_i(t), i = 1, 2, \ldots, n$ *thì*

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x_1} x_1'(t) + \frac{\partial f}{\partial x_2} x_2'(t) + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} x_n'(t).$$

- *Nếu các đạo hàm riêng* $\dfrac{\partial u_i}{\partial x_j}, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$ *liên tục thì theo ĐL3.1,* $\dfrac{\partial F}{\partial x_j}$ *cũng liên tục* $\forall j = \overline{1, n}$, *do đó* F *khả vi và ta có vi phân toàn phần của* F *là*

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial F}{\partial x_n} dx_n. \tag{4}$$

2.3.5 Đạo hàm và vi phân cấp cao

Xét trường hợp hàm 2 biến $z = f(x, y)$.

- f có các đạo hàm riêng cấp 1 là f'_x, f'_y. Nếu tồn tại các đạo hàm riêng của f'_x, f'_y thì các đạo hàm đó gọi là đạo hàm riêng cấp 2 của f, ký hiệu là:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f''_{x^2}$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f''_{xy}$$
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f''_{yx}$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f''_{y^2}.$$

2.3.5 Đạo hàm và vi phân cấp cao

Xét trường hợp hàm 2 biến $z = f(x, y)$.

- f có các đạo hàm riêng cấp 1 là f'_x, f'_y. Nếu tồn tại các đạo hàm riêng của f'_x, f'_y thì các đạo hàm đó gọi là đạo hàm riêng cấp 2 của f, ký hiệu là:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f''_{x^2}$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f''_{xy}$$
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f''_{yx}$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f''_{y^2}.$$

- Nếu tồn tại các đạo hàm riêng của $f''_{x^2}, f''_{xy}, f''_{yx}, f''_{y^2}$ thì các đạo hàm đó gọi là đạo hàm riêng cấp 3 của $f, \ldots$

2.3.5 Đạo hàm và vi phân cấp cao

Định lý 3.3

(Schwarz) Nếu hàm $z = f(x, y)$ *có các đạo hàm riêng* f''_{xy}, f''_{yx} *trong một lân cận* U *nào đó của điểm* $M_0(x_0, y_0)$ *và các đạo hàm đó liên tục tại* M_0 *thì*

$$f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0).$$

2.3.5 Đạo hàm và vi phân cấp cao

Định lý 3.3

(Schwarz) Nếu hàm $z = f(x, y)$ có các đạo hàm riêng f''_{xy}, f''_{yx} trong một lân cận U nào đó của điểm $M_0(x_0, y_0)$ và các đạo hàm đó liên tục tại M_0 thì

$$f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0).$$

- Giả sử hàm $z = f(x, y)$ khả vi và có vi phân toàn phần $df = f'_x dx + f'_y dy$ là một hàm theo 2 biến x, y. Nếu tồn tại vi phân toàn phần của df thì vi phân đó gọi là vi phân toàn phần cấp 2 của f, ký hiệu là $d^2 f = d(df)$.

2.3.5 Đạo hàm và vi phân cấp cao

Định lý 3.3

(Schwarz) Nếu hàm $z = f(x, y)$ có các đạo hàm riêng f''_{xy}, f''_{yx} trong một lân cận U nào đó của điểm $M_0(x_0, y_0)$ và các đạo hàm đó liên tục tại M_0 thì

$$f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0).$$

- Giả sử hàm $z = f(x, y)$ khả vi và có vi phân toàn phần $df = f'_x dx + f'_y dy$ là một hàm theo 2 biến x, y. Nếu tồn tại vi phân toàn phần của df thì vi phân đó gọi là vi phân toàn phần cấp 2 của f, ký hiệu là $d^2 f = d(df)$.
- Tương tự, ta có các vi phân cấp cao hơn của hàm f

$$d^3 f = d(d^2 f)$$
$$\ldots$$
$$d^n f = d(d^{n-1} f).$$

2.3.5 Đạo hàm và vi phân cấp cao

- Nếu x, y là các biến số độc lập thì ta có

$$\begin{aligned} d^2 f = d(df) &= d(f'_x dx + f'_y dy) \\ &= (f'_x dx + f'_y dy)'_x dx + (f'_x dx + f'_y dy)'_y dy \\ &= f''_{x^2}(dx)^2 + (f''_{xy} + f''_{yx}) dxdy + f''_{y^2}(dy)^2. \end{aligned}$$

2.3.5 Đạo hàm và vi phân cấp cao

- Nếu x, y là các biến số độc lập thì ta có

$$\begin{aligned} d^2 f = d(df) &= d(f'_x dx + f'_y dy) \\ &= (f'_x dx + f'_y dy)'_x dx + (f'_x dx + f'_y dy)'_y dy \\ &= f''_{x^2}(dx)^2 + (f''_{xy} + f''_{yx})dxdy + f''_{y^2}(dy)^2. \end{aligned}$$

Nếu f''_{xy}, f''_{yx} liên tục thì $f''_{xy} = f''_{yx}$, khi đó

$$d^2 f = f''_{x^2}(dx)^2 + 2f''_{xy}dxdy + f''_{y^2}(dy)^2.$$

2.3.5 Đạo hàm và vi phân cấp cao

- Nếu x, y là các biến số độc lập thì ta có

$$\begin{aligned} d^2f = d(df) &= d(f'_x dx + f'_y dy) \\ &= (f'_x dx + f'_y dy)'_x dx + (f'_x dx + f'_y dy)'_y dy \\ &= f''_{x^2}(dx)^2 + (f''_{xy} + f''_{yx})dxdy + f''_{y^2}(dy)^2. \end{aligned}$$

Nếu f''_{xy}, f''_{yx} liên tục thì $f''_{xy} = f''_{yx}$, khi đó

$$d^2f = f''_{x^2}(dx)^2 + 2f''_{xy}dxdy + f''_{y^2}(dy)^2.$$

- Nếu x, y là các hàm số của các biến độc lập s, t thì dx, dy là các hàm theo biến s, t. Do đó

$$\begin{aligned} d^2f = d(df) &= d(f'_x dx + f'_y dy) \\ &= d(f'_x)dx + f'_x d(dx) + d(f'_y)dy + f'_y d(dy) \\ &= f''_{x^2}(dx)^2 + (f''_{xy} + f''_{yx})dxdy + f''_{y^2}(dy)^2 + f'_x d^2x + f'_y d^2y. \end{aligned}$$

2.3.6 Đạo hàm theo hướng

- Cho điểm $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3 = Oxyz$ và vector đơn vị $\vec{u}$. Điểm $M(x, y, z)$ nằm trên đường thẳng (Δ) qua M_0 và có vector chỉ phương $\vec{u}$ thỏa mãn
$$\overrightarrow{M_0M} = \rho\vec{u}, \rho \in \mathbb{R}.$$

2.3.6 Đạo hàm theo hướng

- Cho điểm $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3 = Oxyz$ và vector đơn vị $\vec{u}$. Điểm $M(x, y, z)$ nằm trên đường thẳng (Δ) qua M_0 và có vector chỉ phương $\vec{u}$ thỏa mãn
$$\overrightarrow{M_0M} = \rho\vec{u}, \rho \in \mathbb{R}.$$
- Giả sử hàm $f(x, y, z)$ xác định trên miền $D \subset \mathbb{R}^3$ và $M_0(x_0, y_0, z_0) \in D$. Nếu tồn tại giới hạn hữu hạn
$$\lim_{\rho \to 0^+} \frac{f(M) - f(M_0)}{\rho}$$
thì giới hạn đó được gọi là *đạo hàm theo hướng của f tại M_0 theo hướng $\vec{u}$*, ký hiệu là $f'(M_0, \vec{u})$ hoặc $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(M_0)$.

2.3.6 Đạo hàm theo hướng

- Cho điểm $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3 = Oxyz$ và vector đơn vị $\vec{u}$. Điểm $M(x, y, z)$ nằm trên đường thẳng (Δ) qua M_0 và có vector chỉ phương $\vec{u}$ thỏa mãn
$$\overrightarrow{M_0M} = \rho\vec{u}, \rho \in \mathbb{R}.$$
- Giả sử hàm $f(x, y, z)$ xác định trên miền $D \subset \mathbb{R}^3$ và $M_0(x_0, y_0, z_0) \in D$. Nếu tồn tại giới hạn hữu hạn
$$\lim_{\rho \to 0^+} \frac{f(M) - f(M_0)}{\rho}$$
thì giới hạn đó được gọi là *đạo hàm theo hướng của f tại M_0 theo hướng $\vec{u}$*, ký hiệu là $f'(M_0, \vec{u})$ hoặc $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(M_0)$.
- Với $\vec{i} = (1, 0, 0)$, từ $\overrightarrow{M_0M} = \rho\vec{i}$, suy ra $M = (x_0 + \rho, y_0, z_0)$. Do đó
$$f'(M_0, \vec{i}) = \lim_{\rho \to 0^+} \frac{f(x_0 + \rho, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{\rho} = f'_x(M_0).$$
Tương tự với $\vec{j} = (0, 1, 0)$, $\vec{k} = (0, 0, 1)$, ta có
$$f'(M_0, \vec{j}) = f'_y(M_0), \quad f'(M_0, \vec{k}) = f'_z(M_0).$$

2.3.6 Đạo hàm theo hướng

Định lý 3.4

Nếu hàm $f(x, y, z)$ khả vi tại điểm $M_0(x_0, y_0, z_0)$ thì nó có đạo hàm theo mọi hướng $\vec{u}$ tại M_0 và

$$f'(M_0, \vec{u}) = f'_x(M_0)\cos\alpha + f'_y(M_0)\cos\beta + f'_z(M_0)\cos\gamma,$$

ở đó $\alpha = (\vec{u}, \vec{i}), \beta = (\vec{u}, \vec{j}), \gamma = (\vec{u}, \vec{k})$.

2.3.6 Đạo hàm theo hướng

Định lý 3.4

Nếu hàm $f(x, y, z)$ khả vi tại điểm $M_0(x_0, y_0, z_0)$ thì nó có đạo hàm theo mọi hướng $\vec{u}$ tại M_0 và

$$f'(M_0, \vec{u}) = f'_x(M_0)\cos\alpha + f'_y(M_0)\cos\beta + f'_z(M_0)\cos\gamma,$$

ở đó $\alpha = (\vec{u}, \vec{i}), \beta = (\vec{u}, \vec{j}), \gamma = (\vec{u}, \vec{k})$.

- Giả sử hàm $f(x, y, z)$ có các đạo hàm riêng tại $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Khi đó vector

$$\nabla f(M_0) = grad(f(M_0)) = \Big(f'_x(M_0), f'_y(M_0), f'_z(M_0)\Big)$$

gọi là gradient của f tại M_0.

2.3.6 Đạo hàm theo hướng

Định lý 3.4

Nếu hàm $f(x, y, z)$ khả vi tại điểm $M_0(x_0, y_0, z_0)$ thì nó có đạo hàm theo mọi hướng $\vec{u}$ tại M_0 và

$$f'(M_0, \vec{u}) = f'_x(M_0)\cos\alpha + f'_y(M_0)\cos\beta + f'_z(M_0)\cos\gamma,$$

ở đó $\alpha = (\vec{u}, \vec{i}), \beta = (\vec{u}, \vec{j}), \gamma = (\vec{u}, \vec{k})$.

- Giả sử hàm $f(x, y, z)$ có các đạo hàm riêng tại $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Khi đó vector

$$\nabla f(M_0) = grad(f(M_0)) = \left(f'_x(M_0), f'_y(M_0), f'_z(M_0)\right)$$

  gọi là gradient của f tại M_0.
- Từ ĐL3.4, nếu f khả vi tại M_0 thì $|f'(M_0, \vec{u})|$ đạt GTLN bằng $|\nabla f(M_0))|$ khi 2 vector $\vec{u}$ và $\nabla f(M_0)$ cùng phương, điều đó có nghĩa $\nabla f(M_0)$ là phương tại M_0 mà f có tốc độ biến thiên đạt giá trị tuyệt đối cực đại.

2.3.7 Công thức Taylor

Định lý 3.5

Giả sử hàm $f(x,y)$ có các đạo hàm riêng đến cấp $n+1$ liên tục trong một lân cận V nào đó của điểm $M_0(x_0,y_0)$. Nếu $M(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) \in V$ thì ta có

$$\begin{aligned} f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) =& f(x_0,y_0) + df(x_0 y_0) + \frac{1}{2!}d^2 f(x_0,y_0) + \cdots \\ &+ \frac{1}{n!}d^n f(x_0,y_0) + \frac{1}{(n+1)!}d^{n+1} f(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y) \end{aligned} \tag{5}$$

với $0 < \theta < 1$.

Công thức (5) gọi là *khai triển Taylor hữu hạn* của hàm f tại (x_0,y_0).

2.4.1 Hàm ẩn

Cho tập $U \subset \mathbb{R}^2$ và hàm $F : U \to \mathbb{R}$. Xét phương trình

$$F(x, y) = 0. \tag{6}$$

- Nếu với mỗi $x = x_0$ trong khoảng I nào đó, tồn tại y_0 sao cho (x_0, y_0) là nghiệm của phương trình (6) thì ta nói phương trình đó xác định hàm số ẩn y theo x trong khoảng I.

2.4.1 Hàm ẩn

Cho tập $U \subset \mathbb{R}^2$ và hàm $F : U \to \mathbb{R}$. Xét phương trình

$$F(x, y) = 0. \tag{6}$$

- Nếu với mỗi $x = x_0$ trong khoảng I nào đó, tồn tại y_0 sao cho (x_0, y_0) là nghiệm của phương trình (6) thì ta nói phương trình đó xác định hàm số ẩn y theo x trong khoảng I.
- Hàm số $f : I \to \mathbb{R}$ gọi là hàm số ẩn xác định bởi phương trình (6) nếu

$$\forall x \in I : (x, f(x)) \in U \text{ và } F(x, f(x)) = 0.$$

2.4.2 Đạo hàm của hàm ẩn

Định lý 3.6

Cho $F(x, y)$ có các đạo hàm riêng liên tục trên khoảng mở $U \subset \mathbb{R}^2$. Giả sử $(x_0, y_0) \in U$ mà $F(x_0, y_0) = 0$ và có $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$. Khi đó phương trình (6) xác định trong lân cận I nào đó của x_0 một hàm ẩn duy nhất $y = f(x)$ sao cho

- $f(x_0) = y_0$;
- *hàm f liên tục và có đạo hàm liên tục trong I.*

Đạo hàm của hàm $y = f(x)$ trong ĐL3.6 được tính theo công thức

$$y' = -\frac{F'_x}{F'_y}.$$

2.4.2 Đạo hàm của hàm ẩn

Định lý 3.6

Cho $F(x, y)$ có các đạo hàm riêng liên tục trên khoảng mở $U \subset \mathbb{R}^2$. Giả sử $(x_0, y_0) \in U$ mà $F(x_0, y_0) = 0$ và có $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$. Khi đó phương trình (6) xác định trong lân cận I nào đó của x_0 một hàm ẩn duy nhất $y = f(x)$ sao cho

- $f(x_0) = y_0$;
- *hàm f liên tục và có đạo hàm liên tục trong I.*

Đạo hàm của hàm $y = f(x)$ trong ĐL3.6 được tính theo công thức

$$y' = -\frac{F'_x}{F'_y}.$$

Nếu có $F'_x(x_0, y_0) = F'_y(x_0, y_0) = 0$ thì điểm (x_0, y_0) gọi là một điểm kỳ dị của phương trình (6).

2.4.2 Đạo hàm của hàm ẩn

Xét trường hợp 3 biến với phương trình

$$F(x, y, z) = 0. \tag{7}$$

2.4.2 Đạo hàm của hàm ẩn

Xét trường hợp 3 biến với phương trình

$$F(x, y, z) = 0. \tag{7}$$

Định lý 3.7

Cho $F(x, y, z)$ có các đạo hàm riêng liên tục trên khoảng mở $U \subset \mathbb{R}^3$. Giả sử $(x_0, y_0, z_0) \in U$ mà $F(x_0, y_0, z_0) = 0$ và có $F'_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$. Khi đó phương trình (7) xác định trong lân cận V nào đó của (x_0, y_0) một hàm ẩn duy nhất $z = f(x, y)$ sao cho

- $f(x_0, y_0) = z_0$;
- *hàm f liên tục và có các đạo hàm riêng liên tục trong V.*

Các đạo hàm riêng của hàm $z = f(x, y)$ trong ĐL3.7 được tính theo công thức

$$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z}, \quad z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z}.$$

2.5.1 Cực trị của hàm nhiều biến

Cho hàm $z = f(x, y)$ xác định trên miền D và M_0 là một điểm trong của D.

- Điểm M_0 được gọi là một điểm *cực tiểu* (địa phương) của f nếu tồn tại một lân cận V của M_0 sao cho

$$f(M_0) \leq f(M), \forall M \in V.$$

2.5.1 Cực trị của hàm nhiều biến

Cho hàm $z = f(x, y)$ xác định trên miền D và M_0 là một điểm trong của D.

- Điểm M_0 được gọi là một điểm *cực tiểu* (địa phương) của f nếu tồn tại một lân cận V của M_0 sao cho

$$f(M_0) \leq f(M), \forall M \in V.$$

- Điểm M_0 được gọi là một điểm *cực đại* (địa phương) của f nếu tồn tại một lân cận V của M_0 sao cho

$$f(M_0) \geq f(M), \forall M \in V.$$

2.5.1 Cực trị của hàm nhiều biến

Cho hàm $z = f(x, y)$ xác định trên miền D và M_0 là một điểm trong của D.

- Điểm M_0 được gọi là một điểm *cực tiểu* (địa phương) của f nếu tồn tại một lân cận V của M_0 sao cho

$$f(M_0) \leq f(M), \forall M \in V.$$

- Điểm M_0 được gọi là một điểm *cực đại* (địa phương) của f nếu tồn tại một lân cận V của M_0 sao cho

$$f(M_0) \geq f(M), \forall M \in V.$$

- Điểm cực đại và cực tiểu của một hàm số được gọi chung là điểm *cực trị*.

2.5.1 Cực trị của hàm nhiều biến

Cho hàm $z = f(x, y)$ xác định trên miền D và M_0 là một điểm trong của D.

- Điểm M_0 được gọi là một điểm *cực tiểu* (địa phương) của f nếu tồn tại một lân cận V của M_0 sao cho

$$f(M_0) \leq f(M), \forall M \in V.$$

- Điểm M_0 được gọi là một điểm *cực đại* (địa phương) của f nếu tồn tại một lân cận V của M_0 sao cho

$$f(M_0) \geq f(M), \forall M \in V.$$

- Điểm cực đại và cực tiểu của một hàm số được gọi chung là điểm *cực trị*.
- Điểm M_0 được gọi là một *điểm tới hạn* của hàm f nếu

$$\left[\begin{array}{l} \text{- không tồn tại ít nhất một trong hai đạo hàm riêng của } f \text{ tại } M_0 \\ \text{- tồn tại các đạo hàm riêng của } f \text{ tại } M_0 \text{ và } f'_x(M_0) = f'_y(M_0) = 0. \end{array}\right.$$

2.5.1 Cực trị của hàm nhiều biến

Định lý 3.8

Nếu hàm số f đạt cực trị tại M_0 và có các đạo hàm riêng tại M_0 thì

$$p = f'_x(M_0) = 0, \quad q = f'_y(M_0) = 0.$$

2.5.1 Cực trị của hàm nhiều biến

Định lý 3.8

Nếu hàm số f đạt cực trị tại M_0 và có các đạo hàm riêng tại M_0 thì

$$p = f'_x(M_0) = 0, \quad q = f'_y(M_0) = 0.$$

Định lý 3.9

Giả sử hàm $z = f(x, y)$ có các đạo hàm riêng đến cấp hai liên tục trong một lân cận nào đó của $M_0(x_0, y_0)$ và

$$p = f'_x(M_0) = 0, \quad q = f'_y(M_0) = 0.$$

Đặt $r = f''_{x^2}(M_0), s = f''_{xy}(M_0), t = f''_{y^2}(M_0)$. Khi đó ta có:

(a) *Nếu $s^2 - rt < 0$: f đạt cực trị tại M_0. Nó là cực tiểu nếu $r > 0$ và là cực đại nếu $r < 0$.*

(b) *Nếu $s^2 - rt > 0$: f không đạt cực trị tại M_0.*

(c) *Nếu $s^2 - rt = 0$: chưa thể kết luận f có đạt cực trị tại M_0 hay không.*

2.5.2 GTLN và GTNN hàm nhiều biến trên miền đóng bị chặn

Để tìm GTLN và GTNN của một hàm $z = f(x, y)$ trên một miền đóng bị chặn $D \subset \mathbb{R}^2$, ta thực hiện theo các bước sau:

1. Tìm các điểm tới hạn của f và tính giá trị hàm f tại các điểm đó.

2.5.2 GTLN và GTNN hàm nhiều biến trên miền đóng bị chặn

Để tìm GTLN và GTNN của một hàm $z = f(x, y)$ trên một miền đóng bị chặn $D \subset \mathbb{R}^2$, ta thực hiện theo các bước sau:

1. Tìm các điểm tới hạn của f và tính giá trị hàm f tại các điểm đó.
2. So sánh với giá trị của f trên biên ∂D.

2.5.2 GTLN và GTNN hàm nhiều biến trên miền đóng bị chặn

Để tìm GTLN và GTNN của một hàm $z = f(x, y)$ trên một miền đóng bị chặn $D \subset \mathbb{R}^2$, ta thực hiện theo các bước sau:

1. Tìm các điểm tới hạn của f và tính giá trị hàm f tại các điểm đó.
2. So sánh với giá trị của f trên biên ∂D.
3. Kết luận về GTLN và GTNN của f trên D.

2.5.3 Cực trị có điều kiện

Cực trị của hàm $f(x, y)$ trên miền $D = \{(x, y) : g(x, y) = 0\}$ gọi là *cực trị có điều kiện*.

2.5.3 Cực trị có điều kiện

Cực trị của hàm $f(x,y)$ trên miền $D = \{(x,y) : g(x,y) = 0\}$ gọi là *cực trị có điều kiện*.

Định lý 3.10

(ĐK cần của cực trị có điều kiện) Cho $M_0(x_0, y_0)$ là một điểm cực trị có điều kiện của hàm f trên D. Giả sử f và g có các đạo hàm riêng trong lân cận của M_0 và $g'_x(M_0)^2 + g'_y(M_0)^2 \neq 0$. Khi đó ta có tại M_0

$$\frac{D(f,g)}{D(x,y)} = \begin{vmatrix} f'_x & f'_y \\ g'_x & g'_y \end{vmatrix} = 0. \tag{8}$$

2.5.3 Cực trị có điều kiện

Cực trị của hàm $f(x, y)$ trên miền $D = \{(x, y) : g(x, y) = 0\}$ gọi là *cực trị có điều kiện*.

Định lý 3.10

(ĐK cần của cực trị có điều kiện) Cho $M_0(x_0, y_0)$ là một điểm cực trị có điều kiện của hàm f trên D. Giả sử f và g có các đạo hàm riêng trong lân cận của M_0 và $g'_x(M_0)^2 + g'_y(M_0)^2 \neq 0$. Khi đó ta có tại M_0

$$\frac{D(f, g)}{D(x, y)} = \begin{vmatrix} f'_x & f'_y \\ g'_x & g'_y \end{vmatrix} = 0. \tag{8}$$

- Điều kiện (8) và điều kiện $g(x, y) = 0$ giúp ta tìm (x_0, y_0).

2.5.3 Cực trị có điều kiện

Cực trị của hàm $f(x,y)$ trên miền $D = \{(x,y) : g(x,y) = 0\}$ gọi là *cực trị có điều kiện*.

Định lý 3.10

(ĐK cần của cực trị có điều kiện) Cho $M_0(x_0, y_0)$ là một điểm cực trị có điều kiện của hàm f trên D. Giả sử f và g có các đạo hàm riêng trong lân cận của M_0 và $g'_x(M_0)^2 + g'_y(M_0)^2 \neq 0$. Khi đó ta có tại M_0

$$\frac{D(f,g)}{D(x,y)} = \begin{vmatrix} f'_x & f'_y \\ g'_x & g'_y \end{vmatrix} = 0. \tag{8}$$

- Điều kiện (8) và điều kiện $g(x,y) = 0$ giúp ta tìm (x_0, y_0).
- Với các giả thiết trong ĐL3.10, từ điều kiện (8) suy ra tồn tại số λ thỏa mãn

$$\begin{cases} f'_x(x_0,y_0) + \lambda g'_x(x_0,y_0) = 0 \\ f'_y(x_0,y_0) + \lambda g'_y(x_0,y_0) = 0. \end{cases} \tag{9}$$

Số λ đó gọi là *nhân tử Lagrange*. Phương pháp tìm λ và (x_0, y_0) nhờ điều kiện (9) và $g(x,y) = 0$ gọi là *phương pháp nhân tử Lagrange*.

2.5.3 Cực trị có điều kiện

Phương pháp nhân tử Lagrange cho bài toán n biến và m ràng buộc: Cực trị của hàm $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ trên miền ràng buộc

$$D = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : g_j(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, j = \overline{1, m}.$$

Cho $M_0(a_1, a_2, \dots, a_n)$ là một điểm cực trị có điều kiện của hàm f trên D. Giả sử f và các g_j có các đạo hàm riêng trong lân cận của M_0 và hệ vector $\{\nabla g_j(M_0), j = \overline{1, m}\}$ độc lập tuyến tính. Khi đó tồn tại các $\lambda_j, j = \overline{1, m}$ thỏa mãn

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(M_0) + \lambda_1 \dfrac{\partial g_1}{\partial x_1}(M_0) + \cdots + \lambda_m \dfrac{\partial g_m}{\partial x_1}(M_0) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2}(M_0) + \lambda_1 \dfrac{\partial g_1}{\partial x_2}(M_0) + \cdots + \lambda_m \dfrac{\partial g_m}{\partial x_2}(M_0) = 0 \\ \dots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(M_0) + \lambda_1 \dfrac{\partial g_1}{\partial x_n}(M_0) + \cdots + \lambda_m \dfrac{\partial g_m}{\partial x_n}(M_0) = 0. \end{cases} \tag{10}$$

Từ các điều kiện $g_j(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, j = \overline{1, m}$ và (10) giúp ta tìm các λ_j và M_0.

3.1.1 Mặt trụ và các mặt bậc 2

- *Mặt trụ:* là mặt sinh ra bởi một đường thẳng (l) có phương cố định di chuyển theo một đường cong phẳng (C) cho trước. Đường cong (C) và đường thẳng (l) tương ứng được gọi là *đường chuẩn* và *đường sinh* của mặt trụ.

3.1.1 Mặt trụ và các mặt bậc 2

- *Mặt trụ:* là mặt sinh ra bởi một đường thẳng (l) có phương cố định di chuyển theo một đường cong phẳng (C) cho trước. Đường cong (C) và đường thẳng (l) tương ứng được gọi là *đường chuẩn* và *đường sinh* của mặt trụ.
- Ngoài ra, ta có các mặt bậc 2 là tập hợp những điểm trong không gian $Oxyz$ thỏa mãn phương trình

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fzx + Gx + Hy + Jz + K = 0$$

trong đó $A, B, \ldots, K$ là những hằng số.

3.1.1 Mặt trụ và các mặt bậc 2

- *Mặt trụ:* là mặt sinh ra bởi một đường thẳng (l) có phương cố định di chuyển theo một đường cong phẳng (C) cho trước. Đường cong (C) và đường thẳng (l) tương ứng được gọi là *đường chuẩn* và *đường sinh* của mặt trụ.
- Ngoài ra, ta có các mặt bậc 2 là tập hợp những điểm trong không gian $Oxyz$ thỏa mãn phương trình

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fzx + Gx + Hy + Jz + K = 0$$

trong đó $A, B, \ldots, K$ là những hằng số.
Bằng cách nhóm và đổi biến, ta có thể đưa các mặt bậc 2 về một trong các mặt sau:

3.1.2 Các mặt bậc 2

- *Mặt cầu:* phương trình mặt cầu tâm $I(a, b, c)$ bán kinh R là

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2.$$

3.1.2 Các mặt bậc 2

- *Mặt cầu:* phương trình mặt cầu tâm $I(a, b, c)$ bán kính R là

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2.$$

- *Mặt Ellipsoid:* là mặt có phương trình dạng

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

3.1.2 Các mặt bậc 2

- *Mặt cầu:* phương trình mặt cầu tâm $I(a, b, c)$ bán kinh R là

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2.$$

- *Mặt Ellipsoid:* là mặt có phương trình dạng

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

- *Mặt Hyperboloid 1 tầng:* là mặt có phương trình dạng

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

3.1.2 Các mặt bậc 2

- *Mặt cầu:* phương trình mặt cầu tâm $I(a, b, c)$ bán kinh R là
$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2.$$

- *Mặt Ellipsoid:* là mặt có phương trình dạng
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

- *Mặt Hyperboloid 1 tầng:* là mặt có phương trình dạng
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

- *Mặt Hyperboloid 1 tầng:* là mặt có phương trình dạng
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1.$$

3.1.2 Các mặt bậc 2

- *Mặt elliptic Paraboliod:* là mặt có phương trình dạng

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c}, \quad c>0.$$

3.1.2 Các mặt bậc 2

- *Mặt elliptic Paraboliod:* là mặt có phương trình dạng

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}, \quad c > 0.$$

- *Mặt hyperbolic Paraboliod:* là mặt có phương trình dạng

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}, \quad c > 0.$$

3.1.2 Các mặt bậc 2

- *Mặt elliptic Paraboliod:* là mặt có phương trình dạng

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}, \quad c > 0.$$

- *Mặt hyperbolic Paraboliod:* là mặt có phương trình dạng

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}, \quad c > 0.$$

- *Mặt nón elliptic:* là mặt có phương trình

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

Khi $a = b$ ta có mặt nón tròn xoay.

3.1.3 Hệ tọa độ trụ và tọa độ cầu

- *Hệ tọa độ cực:* điểm $M(x, y)$ tương ứng có $|\overrightarrow{OM}| = r$ và góc $(\overrightarrow{OM}, Ox) = \phi$, ta có

$$\begin{cases} x = r\cos\phi \\ y = r\sin\phi \end{cases}$$

3.1.3 Hệ tọa độ trụ và tọa độ cầu

- *Hệ tọa độ cực:* điểm $M(x, y)$ tương ứng có $|\overrightarrow{OM}| = r$ và góc $(\overrightarrow{OM}, Ox) = \phi$, ta có
$$\begin{cases} x = r\cos\phi \\ y = r\sin\phi \end{cases}$$

- *Hệ tọa độ trụ:* điểm $M(x, y, z)$ có hình chiếu trên mặt phẳng Oxy là M_1, với $|\overrightarrow{OM_1}| = r$ và góc $(\overrightarrow{OM_1}, Ox) = \phi$, ta có
$$\begin{cases} x = r\cos\phi \\ y = r\sin\phi \\ z = z \end{cases}$$

3.1.3 Hệ tọa độ trụ và tọa độ cầu

- *Hệ tọa độ cực:* điểm $M(x, y)$ tương ứng có $|\overrightarrow{OM}| = r$ và góc $(\overrightarrow{OM}, Ox) = \phi$, ta có
$$\begin{cases} x = r\cos\phi \\ y = r\sin\phi \end{cases}$$
- *Hệ tọa độ trụ:* điểm $M(x, y, z)$ có hình chiếu trên mặt phẳng Oxy là M_1, với $|\overrightarrow{OM_1}| = r$ và góc $(\overrightarrow{OM_1}, Ox) = \phi$, ta có
$$\begin{cases} x = r\cos\phi \\ y = r\sin\phi \\ z = z \end{cases}$$
- *Hệ tọa độ cầu:* điểm $M(x, y, z)$ có $|\overrightarrow{OM}| = \rho$, $(\overrightarrow{OM}, Oz) = \theta$ và hình chiếu của M trên mặt phẳng Oxy là M_1 với $|\overrightarrow{OM_1}| = r$ và góc $(\overrightarrow{OM_1}, Ox) = \phi$, ta có
$$\begin{cases} x = r\cos\phi = \rho\sin\theta\cos\phi \\ y = r\sin\phi = \rho\sin\theta\sin\phi \\ z = \rho\cos\theta \end{cases}$$

3.2.1 Định nghĩa tích phân kép

Định nghĩa 4.1

Cho hàm $f(x,y)$ xác định trên một miền đóng và bị chặn $D \subset \mathbb{R}^2$. Chia D thành n mảnh nhỏ $D_i, i = 1, \dots, n$. Giả sử mỗi mảnh đó có đường kính tương ứng là $d_i = \max\{d(M,N), M, N \in D_i\}$ và diện tích tương ứng là $\Delta S_i, i = 1, \dots, n$.

3.2.1 Định nghĩa tích phân kép

Định nghĩa 4.1

Cho hàm $f(x,y)$ *xác định trên một miền đóng và bị chặn* $D \subset \mathbb{R}^2$. *Chia* D *thành* n *mảnh nhỏ* $D_i, i = 1, \ldots, n$. *Giả sử mỗi mảnh đó có đường kính tương ứng là* $d_i = \max\{d(M,N), M, N \in D_i\}$ *và diện tích tương ứng là* $\Delta S_i, i = 1, \ldots, n$. *Lấy tùy ý* $(x_i, y_i) \in D_i$ *và lập tổng*

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta S_i.$$

3.2.1 Định nghĩa tích phân kép

Định nghĩa 4.1

Cho hàm $f(x,y)$ xác định trên một miền đóng và bị chặn $D \subset \mathbb{R}^2$. Chia D thành n mảnh nhỏ $D_i, i = 1, \dots, n$. Giả sử mỗi mảnh đó có đường kính tương ứng là $d_i = \max\{d(M,N), M, N \in D_i\}$ và diện tích tương ứng là $\Delta S_i, i = 1, \dots, n$. Lấy tùy ý $(x_i, y_i) \in D_i$ và lập tổng

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta S_i.$$

Nếu $\max d_i \to 0$ khi $n \to +\infty$ và tồn tại giới hạn hữu hạn

$$\lim_{n\to+\infty} \sigma_n = I$$

không phụ thuộc vào việc chia miền D cũng như việc chọn các (x_i, y_i), thì ta nói hàm f khả tích trên D và giá trị I đó được gọi là **tích phân kép** *của hàm $f(x,y)$ trên miền D, ký hiệu là*

$$I = \iint_D f(x,y)dS.$$

3.2.1 Định nghĩa tích phân kép

- Trong công thức tích phân kép, D gọi là miền lấy tích phân, f gọi là hàm dưới dấu tích phân, dS gọi là yếu tố diện tích.

3.2.1 Định nghĩa tích phân kép

- Trong công thức tích phân kép, D gọi là miền lấy tích phân, f gọi là hàm dưới dấu tích phân, dS gọi là yếu tố diện tích.
- Hàm $f(x, y)$ liên tục trên miền đóng, bị chặn D thì khả tích trên miền đó.

3.2.1 Định nghĩa tích phân kép

- Trong công thức tích phân kép, D gọi là miền lấy tích phân, f gọi là hàm dưới dấu tích phân, dS gọi là yếu tố diện tích.
- Hàm $f(x, y)$ liên tục trên miền đóng, bị chặn D thì khả tích trên miền đó.
- Nếu miền D được chia thành 2 miền D_1, D_2 không dẫm lên nhau thì
$$\iint\limits_{D} f(x,y)dS = \iint\limits_{D_1} f(x,y)dS + \iint\limits_{D_2} f(x,y)dS.$$

3.2.1 Định nghĩa tích phân kép

- Trong công thức tích phân kép, D gọi là miền lấy tích phân, f gọi là hàm dưới dấu tích phân, dS gọi là yếu tố diện tích.
- Hàm $f(x, y)$ liên tục trên miền đóng, bị chặn D thì khả tích trên miền đó.
- Nếu miền D được chia thành 2 miền D_1, D_2 không dẫm lên nhau thì
$$\iint\limits_D f(x,y)dS = \iint\limits_{D_1} f(x,y)dS + \iint\limits_{D_2} f(x,y)dS.$$
- Chia miền D bởi các đường song song với Ox, Oy, ta được $dS = dxdy$, do đó
$$I = \iint\limits_D f(x,y)dS = \iint\limits_D f(x,y)dxdy.$$

3.2.1 Định nghĩa tích phân kép

- Trong công thức tích phân kép, D gọi là miền lấy tích phân, f gọi là hàm dưới dấu tích phân, dS gọi là yếu tố diện tích.
- Hàm $f(x, y)$ liên tục trên miền đóng, bị chặn D thì khả tích trên miền đó.
- Nếu miền D được chia thành 2 miền D_1, D_2 không dẫm lên nhau thì
$$\iint\limits_{D} f(x,y)dS = \iint\limits_{D_1} f(x,y)dS + \iint\limits_{D_2} f(x,y)dS.$$
- Chia miền D bởi các đường song song với Ox, Oy, ta được $dS = dxdy$, do đó
$$I = \iint\limits_{D} f(x,y)dS = \iint\limits_{D} f(x,y)dxdy.$$
- *Một số tính chất:*

3.2.2 Cách tính tích phân kép

Định lý 4.1

(Fubini) Giả sử hàm $f(x, y)$ khả tích trên $D = [a, b] \times [c, d]$.

(a) *Nếu với mỗi $x \in [a, b]$, hàm số $y \mapsto f(x, y)$ khả tích trên $[c, d]$ thì hàm số*

$$I(x) = \int_c^d f(x, y)dy$$

khả tích trên $[a, b]$ và

$$\iint\limits_D f(x, y)dxdy = \int_a^b I(x)dx = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)dy \right) dx$$

3.2.2 Cách tính tích phân kép

Định lý 4.1

(Fubini) Giả sử hàm $f(x, y)$ khả tích trên $D = [a, b] \times [c, d]$.

(a) *Nếu với mỗi $x \in [a, b]$, hàm số $y \mapsto f(x, y)$ khả tích trên $[c, d]$ thì hàm số*

$$I(x) = \int_c^d f(x, y)dy$$

khả tích trên $[a, b]$ và

$$\iint\limits_D f(x, y)dxdy = \int_a^b I(x)dx = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)dy \right) dx$$

(b) *Nếu với mỗi $y \in [c, d]$, hàm số $x \mapsto f(x, y)$ khả tích trên $[a, b]$ thì hàm số*

$$J(y) = \int_a^b f(x, y)dx$$

khả tích trên $[c, d]$ và

$$\iint\limits_D f(x, y)dxdy = \int_c^d J(y)dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)dx \right) dy$$

3.2.2 Cách tính tích phân kép

Hệ quả 4.1

Nếu hàm $f(x, y)$ liên tục trên $D = [a, b] \times [c, d]$ thì

$$\iint\limits_D f(x, y)dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)dx \right) dy.$$

3.2.2 Cách tính tích phân kép

Hệ quả 4.1

Nếu hàm $f(x,y)$ liên tục trên $D = [a,b] \times [c,d]$ thì

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \Big(\int_c^d f(x,y)dy \Big) dx = \int_c^d \Big(\int_a^b f(x,y)dx \Big) dy.$$

Chú ý: Nếu $f(x,y) = f_1(x)f_2(y)$ (tách biến) thì

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int_a^b f_1(x)dx \int_c^d f_2(y)dy.$$

3.2.2 Cách tính tích phân kép

Định lý 4.2

Giả sử hàm $f(x,y)$ *khả tích trên* $D = \{(x,y) : a \leq x \leq b, y_1(x) \leq y \leq y_2(x)\}$ *với* y_1, y_2 *là hai hàm số khả tích trên* $[a,b]$ *và* $y_1(x) \leq y_2(x), \forall x \in [a,b]$*. Nếu với mỗi* $x \in [a,b]$*, hàm số* $y \mapsto f(x,y)$ *khả tích trên đoạn* $[y_1(x), y_2(x)]$ *thì hàm số*

$$I(x) = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy$$

khả tích trên $[a,b]$ *và*

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int_a^b I(x)dx = \int_a^b \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy \right) dx.$$

3.2.2 Cách tính tích phân kép

Định lý 4.2

Giả sử hàm $f(x, y)$ *khả tích trên* $D = \{(x, y) : a \le x \le b, y_1(x) \le y \le y_2(x)\}$ *với* y_1, y_2 *là hai hàm số khả tích trên* $[a, b]$ *và* $y_1(x) \le y_2(x), \forall x \in [a, b]$. *Nếu với mỗi* $x \in [a, b]$, *hàm số* $y \mapsto f(x, y)$ *khả tích trên đoạn* $[y_1(x), y_2(x)]$ *thì hàm số*

$$I(x) = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)dy$$

khả tích trên $[a, b]$ *và*

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \int_a^b I(x)dx = \int_a^b \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)dy \right) dx.$$

Hệ quả 4.2

Nếu các hàm $f(x, y), y_1(x), y_2(x)$ *trong ĐL4.2 là các hàm liên tục thì*

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)dy \right) dx.$$

3.2.2 Cách tính tích phân kép

Định lý 4.3

Giả sử hàm $f(x,y)$ *khả tích trên* $D = \{(x,y) : x_1(y) \leq x \leq x_2(y), c \leq y \leq d\}$ *với* x_1, x_2 *là hai hàm số khả tích trên* $[c,d]$ *và* $x_1(y) \leq x_2(y), \forall y \in [c,d]$. *Nếu với mỗi* $y \in [a,b]$, *hàm số* $x \mapsto f(x,y)$ *khả tích trên đoạn* $[x_1(y), x_2(y)]$ *thì hàm số*

$$J(y) = \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx$$

khả tích trên $[c,d]$ *và*

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int_c^d J(y)dy = \int_c^d \left(\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx \right) dy.$$

3.2.2 Cách tính tích phân kép

Định lý 4.3

Giả sử hàm $f(x,y)$ *khả tích trên* $D = \{(x,y) : x_1(y) \leq x \leq x_2(y), c \leq y \leq d\}$ *với* x_1, x_2 *là hai hàm số khả tích trên* $[c,d]$ *và* $x_1(y) \leq x_2(y), \forall y \in [c,d]$. *Nếu với mỗi* $y \in [a,b]$, *hàm số* $x \mapsto f(x,y)$ *khả tích trên đoạn* $[x_1(y), x_2(y)]$ *thì hàm số*

$$J(y) = \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx$$

khả tích trên $[c,d]$ *và*

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int_c^d J(y)dy = \int_c^d \left(\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx \right) dy.$$

Hệ quả 4.3

Nếu các hàm $f(x,y), x_1(y), x_2(y)$ *trong ĐL4.3 là các hàm liên tục thì*

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int_c^d \left(\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx \right) dy.$$

3.2.2 Cách tính tích phân kép

Chú ý: cách đổi thứ tự tích phân.

3.2.2 Cách tính tích phân kép

Chú ý: cách đổi thứ tự tích phân.

• *Đổi biến số trong tích phân kép:* Giả sử hàm $f(x, y)$ liên tục trên miền D. Xét tích phân

$$\iint_D f(x, y)dxdy.$$

Thực hiện đổi biến

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v).$$

Giả thiết rằng

- $x = x(u, v), y = y(u, v)$ là những hàm số liên tục và có các đạo hàm riêng liên tục trên một miền đóng D' của $O'uv$.
- Công thức đổi biến số xác định một song ánh từ miền D' lên miền D.
- Định thức Jacobi $J = \dfrac{D(x, y)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} \neq 0$ hoặc $J = 0$ tại một số hữu hạn điểm trên D'.

Khi đó ta có

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \iint_{D'} f(x(u, v), y(u, v))|J|dudv.$$

3.2.2 Cách tính tích phân kép

- *Tích phân kép trong hệ tọa độ cực:*

$$x = r\cos\phi, \quad y = r\sin\phi$$

với $r > 0$ và $0 \leq \phi \leq 2\pi$. Ta có

$$J = \frac{D(x,y)}{D(r,\phi)} = \begin{vmatrix} x'_r & x'_\phi \\ y'_r & y'_\phi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\phi & -r\sin\phi \\ \sin\phi & r\cos\phi \end{vmatrix} = r \neq 0.$$

Do đó

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D'} f(r\cos\phi, r\sin\phi)rdrd\phi.$$

3.2.2 Cách tính tích phân kép

- *Tích phân kép trong hệ tọa độ cực:*

$$x = r\cos\phi, \quad y = r\sin\phi$$

với $r > 0$ và $0 \leq \phi \leq 2\pi$. Ta có

$$J = \frac{D(x,y)}{D(r,\phi)} = \begin{vmatrix} x'_r & x'_\phi \\ y'_r & y'_\phi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\phi & -r\sin\phi \\ \sin\phi & r\cos\phi \end{vmatrix} = r \neq 0.$$

Do đó

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D'} f(r\cos\phi, r\sin\phi)rdrd\phi.$$

Nếu $\alpha \leq \phi \leq \beta, r_1(\phi) \leq r \leq r_2(\phi)$ thì ta có

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int_\alpha^\beta d\phi \int_{r_1(\phi)}^{r_2(\phi)} f(r\cos\phi, r\sin\phi)rdr.$$

3.2.3 Ứng dụng của tích phân kép

- *Tính thể tích của vật thể:* Khối trụ có đường chuẩn là biên của D, đường sinh song song với Oz giới hạn bởi đường cong $z = f(x, y) \geq 0$ và mặt phẳng Oxy, có thể tích là

$$V = \iint\limits_D f(x, y)dxdy.$$

3.2.3 Ứng dụng của tích phân kép

- *Tính thể tích của vật thể:* Khối trụ có đường chuẩn là biên của D, đường sinh song song với Oz giới hạn bởi đường cong $z = f(x, y) \geq 0$ và mặt phẳng Oxy, có thể tích là

$$V = \iint_D f(x, y)dxdy.$$

- *Tính diện tích hình phẳng:* diện tích hình phẳng D cho bởi công thức

$$S = \iint_D dxdy.$$

3.2.3 Ứng dụng của tích phân kép

• *Tính thể tích của vật thể:* Khối trụ có đường chuẩn là biên của D, đường sinh song song với Oz giới hạn bởi đường cong $z = f(x, y) \geq 0$ và mặt phẳng Oxy, có thể tích là

$$V = \iint\limits_{D} f(x, y)dxdy.$$

• *Tính diện tích hình phẳng:* diện tích hình phẳng D cho bởi công thức

$$S = \iint\limits_{D} dxdy.$$

• *Tính diện mặt cong:* Giả sử một mặt cong (S) có phương trình $z = f(x, y)$ được giới hạn bởi một đường cong kín, ở đó hàm f liên tục có các đạo hàm riêng $p = f'_x, q = f'_y$ liên tục. Gọi D là hình chiếu của (S) trên mặt phẳng Oxy. Khi đó diện tích mặt cong được tính bởi công thức

$$S = \iint\limits_{D} \sqrt{1 + p^2 + q^2}dxdy.$$

3.2.3 Ứng dụng của tích phân kép

Cho bản phẳng chiếm một miền $D \subset \mathbb{R}^2$ có khối lượng riêng tại mỗi điểm $P(x, y) \in D$ là $\rho(x, y)$ với ρ là một hàm liên tục.

- *Khối lượng của bản phẳng:* được tính bởi

$$m = \iint_D \rho(x, y) dxdy.$$

3.2.3 Ứng dụng của tích phân kép

Cho bản phẳng chiếm một miền $D \subset \mathbb{R}^2$ có khối lượng riêng tại mỗi điểm $P(x, y) \in D$ là $\rho(x, y)$ với ρ là một hàm liên tục.

• *Khối lượng của bản phẳng:* được tính bởi

$$m = \iint\limits_D \rho(x, y) dxdy.$$

• *Mômen quán tính của một bản phẳng:* Người ta định nghĩa mômen quán tính của một chất điểm có khối lượng m đặt tại điểm $P(x, y)$ đối với các trục Ox, Oy và gốc tọa độ O là

$$I_x = my^2, \quad I_y = mx^2, \quad I_O = m(x^2 + y^2).$$

Do đó, mômen của bản phẳng được tính bởi

$$I_x = \iint\limits_D y^2 \rho(x, y) dxdy.$$
$$I_y = \iint\limits_D x^2 \rho(x, y) dxdy.$$
$$I_O = \iint\limits_D (x^2 + y^2) \rho(x, y) dxdy.$$

3.2.3 Ứng dụng của tích phân kép

- *Trọng tâm của bản phẳng:* trọng tâm $G(x_G, y_G)$ của bản phẳng được tính bởi

$$x_G = \frac{\iint\limits_D x\rho(x,y)dxdy}{\iint\limits_D \rho(x,y)dxdy}, \quad y_G = \frac{\iint\limits_D y\rho(x,y)dxdy}{\iint\limits_D \rho(x,y)dxdy}.$$

3.2.3 Ứng dụng của tích phân kép

- *Trọng tâm của bản phẳng:* trọng tâm $G(x_G, y_G)$ của bản phẳng được tính bởi

$$x_G = \frac{\iint\limits_D x\rho(x,y)dxdy}{\iint\limits_D \rho(x,y)dxdy}, \quad y_G = \frac{\iint\limits_D y\rho(x,y)dxdy}{\iint\limits_D \rho(x,y)dxdy}.$$

Nếu bản phẳng đồng chất thì ρ không đổi, do đó

$$x_G = \frac{1}{S}\iint\limits_D x\rho(x,y)dxdy, \quad y_G = \frac{1}{S}\iint\limits_D y\rho(x,y)dxdy,$$

với $S = \iint\limits_D dxdy$ là diện tích của bản phẳng.

3.3.1 Định nghĩa tích phân bội ba

Định nghĩa 4.2

Cho hàm $f(x, y, z)$ *xác định trên một miền đóng và bị chặn* $V \subset \mathbb{R}^3$. *Chia* V *thành* n *mảnh nhỏ* $V_i, i = 1, \ldots, n$. *Giả sử mỗi mảnh đó có đường kính tương ứng là* $d_i = \max\{d(M, N), M, N \in V_i\}$ *và thể tích tương ứng là* $\Delta V_i, i = 1, \ldots, n$.

3.3.1 Định nghĩa tích phân bội ba

Định nghĩa 4.2

Cho hàm $f(x,y,z)$ *xác định trên một miền đóng và bị chặn* $V \subset \mathbb{R}^3$*. Chia* V *thành* n *mảnh nhỏ* $V_i, i = 1, \ldots, n$*. Giả sử mỗi mảnh đó có đường kính tương ứng là* $d_i = \max\{d(M,N), M, N \in V_i\}$ *và thể tích tương ứng là* $\Delta V_i, i = 1, \ldots, n$*. Lấy tùy ý* $(x_i, y_i, z_i) \in V_i$ *và lập tổng*

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta V_i.$$

3.3.1 Định nghĩa tích phân bội ba

Định nghĩa 4.2

Cho hàm $f(x, y, z)$ xác định trên một miền đóng và bị chặn $V \subset \mathbb{R}^3$. Chia V thành n mảnh nhỏ $V_i, i = 1, \ldots, n$. Giả sử mỗi mảnh đó có đường kính tương ứng là $d_i = \max\{d(M, N), M, N \in V_i\}$ và thể tích tương ứng là $\Delta V_i, i = 1, \ldots, n$. Lấy tùy ý $(x_i, y_i, z_i) \in V_i$ và lập tổng

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta V_i.$$

Nếu $\max d_i \to 0$ khi $n \to +\infty$ và tồn tại giới hạn hữu hạn

$$\lim_{n \to +\infty} \sigma_n = I$$

không phụ thuộc vào việc chia miền V cũng như việc chọn các (x_i, y_i, z_i), thì ta nói hàm f khả tích trên V và giá trị I đó được gọi là **tích phân bội ba** *của hàm $f(x, y, z)$ trên miền V, ký hiệu là*

$$I = \iiint\limits_V f(x, y, z)dV.$$

3.3.1 Định nghĩa tích phân bội ba

- Trong công thức tích phân bội ba, V gọi là miền lấy tích phân, f gọi là hàm dưới dấu tích phân, dV gọi là yếu tố thể tích.

3.3.1 Định nghĩa tích phân bội ba

- Trong công thức tích phân bội ba, V gọi là miền lấy tích phân, f gọi là hàm dưới dấu tích phân, dV gọi là yếu tố thể tích.
- Hàm $f(x, y, z)$ liên tục trên miền đóng, bị chặn V thì khả tích trên miền đó.

3.3.1 Định nghĩa tích phân bội ba

- Trong công thức tích phân bội ba, V gọi là miền lấy tích phân, f gọi là hàm dưới dấu tích phân, dV gọi là yếu tố thể tích.
- Hàm $f(x, y, z)$ liên tục trên miền đóng, bị chặn V thì khả tích trên miền đó.
- Nếu miền V được chia thành 2 miền V_1, V_2 không dẫm lên nhau thì
$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dV = \iiint\limits_{V_1} f(x,y,z)dV + \iiint\limits_{V_2} f(x,y,z)dV.$$

3.3.1 Định nghĩa tích phân bội ba

- Trong công thức tích phân bội ba, V gọi là miền lấy tích phân, f gọi là hàm dưới dấu tích phân, dV gọi là yếu tố thể tích.
- Hàm $f(x, y, z)$ liên tục trên miền đóng, bị chặn V thì khả tích trên miền đó.
- Nếu miền V được chia thành 2 miền V_1, V_2 không dẫm lên nhau thì
$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dV = \iiint\limits_{V_1} f(x,y,z)dV + \iiint\limits_{V_2} f(x,y,z)dV.$$
- Thể tích miền V là
$$V = \iiint\limits_V dV.$$

3.3.1 Định nghĩa tích phân bội ba

- Trong công thức tích phân bội ba, V gọi là miền lấy tích phân, f gọi là hàm dưới dấu tích phân, dV gọi là yếu tố thể tích.
- Hàm $f(x, y, z)$ liên tục trên miền đóng, bị chặn V thì khả tích trên miền đó.
- Nếu miền V được chia thành 2 miền V_1, V_2 không dẫm lên nhau thì
$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dV = \iiint\limits_{V_1} f(x,y,z)dV + \iiint\limits_{V_2} f(x,y,z)dV.$$
- Thể tích miền V là
$$V = \iiint\limits_V dV.$$
- Chia miền V bởi các mặt song song với Oxy, Oyz, Oxz, ta được $dV = dxdydz$, do đó
$$I = \iiint\limits_V f(x,y,z)dV = \iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz.$$

3.3.1 Định nghĩa tích phân bội ba

- Trong công thức tích phân bội ba, V gọi là miền lấy tích phân, f gọi là hàm dưới dấu tích phân, dV gọi là yếu tố thể tích.
- Hàm $f(x, y, z)$ liên tục trên miền đóng, bị chặn V thì khả tích trên miền đó.
- Nếu miền V được chia thành 2 miền V_1, V_2 không dẫm lên nhau thì
$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dV = \iiint\limits_{V_1} f(x,y,z)dV + \iiint\limits_{V_2} f(x,y,z)dV.$$
- Thể tích miền V là
$$V = \iiint\limits_V dV.$$
- Chia miền V bởi các mặt song song với Oxy, Oyz, Oxz, ta được $dV = dxdydz$, do đó
$$I = \iiint\limits_V f(x,y,z)dV = \iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz.$$
- *Một số tính chất:*

3.3.2 Cách tính tích phân bội ba

• Giả sử miền V giới hạn bởi các mặt $z = f_1(x, y), z = f_2(x, y)$, ở đó f_1, f_2 là các hàm số liên tục trên miền D, với D là hình chiếu của V trên Oxy. Khi đó ta có

$$I = \iiint\limits_V f(x, y, z) dxdydz = \iint\limits_D dxdy \int_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} f(x, y, z) dz$$

3.3.2 Cách tính tích phân bội ba

• Giả sử miền V giới hạn bởi các mặt $z = f_1(x, y), z = f_2(x, y)$, ở đó f_1, f_2 là các hàm số liên tục trên miền D, với D là hình chiếu của V trên Oxy. Khi đó ta có

$$I = \iiint\limits_V f(x, y, z)dxdydz = \iint\limits_D dxdy \int_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} f(x, y, z)dz$$

• Nếu miền $D = \{(x, y) : a \leq x \leq b, y_1(x) \leq y \leq y_2(x)\}$ trong đó y_1, y_2 là những hàm số liên tục trên $[a, b]$ thì

$$I = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} f(x, y, z)dz.$$

3.3.3 Đổi biến trong tích phân bội ba

- *Công thức đổi biến số:* Giả sử hàm $f(x,y,z)$ liên tục trên miền V. Xét tích phân

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz.$$

Thực hiện đổi biến

$$x = x(u,v,w), \quad y = y(u,v,w), \quad z = z(u,v,w).$$

Giả thiết rằng

- $x = x(u,v,w), y = y(u,v,w), z = z(u,v,w)$ là những hàm số liên tục và có các đạo hàm riêng liên tục trên một miền đóng V' của $O'uvw$.
- Công thức đổi biến số xác định một song ánh từ miền D' lên miền D.
- Định thức Jacobi $J = \dfrac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)} = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v & x'_w \\ y'_u & y'_v & y_w \\ z'_u & z'_v & z'_w \end{vmatrix} \neq 0$ hoặc $J = 0$ tại một số hữu hạn điểm trên D'.

Khi đó ta có

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{V'} f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w))|J|dudvdw.$$

3.3.3 Đổi biến trong tích phân bội ba

- *Đổi biến sang hệ tọa độ trụ:*

$$x = r\cos\phi, \quad y = r\sin\phi, \quad z = z.$$

Với $r > 0, 0 \leq \phi < 2\pi$, định thức Jacobi

$$J = \frac{D(x,y,z)}{D(r,\phi,z)} = \begin{vmatrix} \cos\phi & -r\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & r\cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r \neq 0,$$

do đó

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{V'} f(r\cos\phi, r\sin\phi, z)rdrd\phi dz.$$

3.3.3 Đổi biến trong tích phân bội ba

- *Đổi biến sang hệ tọa độ cầu:*

$$x = r\sin\theta\cos\phi, \quad y = r\sin\theta\sin\phi, \quad z = r\cos\theta.$$

Với $r > 0, 0 \le \theta < \pi, 0 \le \phi < 2\pi$, định thức Jacobi

$$J = \frac{D(x,y,z)}{D(r,\theta,\phi)} = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\phi & r\cos\theta\cos\phi & -r\sin\theta\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & r\cos\theta\sin\phi & r\sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{vmatrix} = -r^2\sin\theta \neq 0,$$

do đó

$$I = \iiint_{V'} f(r\sin\theta\cos\phi, r\sin\theta\sin\phi, r\cos\theta) r^2 \sin\theta drd\theta d\phi.$$

3.3.4 Ứng dụng của tích phân bội ba

Cho một vật thể $V \subset \mathbb{R}^3$ có khối lượng riêng tại mỗi điểm $P(x, y, z) \in V$ là $\rho(x, y, z)$ với ρ là một hàm liên tục.

- *Thể tích của vật thể:* $V = \iiint\limits_V dxdydz$.

3.3.4 Ứng dụng của tích phân bội ba

Cho một vật thể $V \subset \mathbb{R}^3$ có khối lượng riêng tại mỗi điểm $P(x, y, z) \in V$ là $\rho(x, y, z)$ với ρ là một hàm liên tục.

- *Thể tích của vật thể:* $V = \iiint\limits_V dxdydz.$
- *Khối lượng của vật thể:* $m = \iiint\limits_V \rho(x, y, z)dxdydz.$

3.3.4 Ứng dụng của tích phân bội ba

Cho một vật thể $V \subset \mathbb{R}^3$ có khối lượng riêng tại mỗi điểm $P(x, y, z) \in V$ là $\rho(x, y, z)$ với ρ là một hàm liên tục.

- *Thể tích của vật thể:* $V = \iiint\limits_V dxdydz$.
- *Khối lượng của vật thể:* $m = \iiint\limits_V \rho(x, y, z)dxdydz$.
- *Trọng tâm của vật thể:* trọng tâm $G(x_G, y_G, z_G)$ của vật thể được tính bởi

$$x_G = \frac{1}{m}\iiint\limits_V x\rho(x, y, z)dxdydz, \quad y_G = \frac{1}{m}\iiint\limits_V y\rho(x, y, z)dxdydz,$$
$$z_G = \frac{1}{m}\iiint\limits_V z\rho(x, y, z)dxdydz.$$

3.3.4 Ứng dụng của tích phân bội ba

Cho một vật thể $V \subset \mathbb{R}^3$ có khối lượng riêng tại mỗi điểm $P(x,y,z) \in V$ là $\rho(x,y,z)$ với ρ là một hàm liên tục.

- *Thể tích của vật thể:* $V = \iiint\limits_V dxdydz$.
- *Khối lượng của vật thể:* $m = \iiint\limits_V \rho(x,y,z)dxdydz$.
- *Trọng tâm của vật thể:* trọng tâm $G(x_G, y_G, z_G)$ của vật thể được tính bởi

$$x_G = \frac{1}{m}\iiint\limits_V x\rho(x,y,z)dxdydz, \quad y_G = \frac{1}{m}\iiint\limits_V y\rho(x,y,z)dxdydz,$$
$$z_G = \frac{1}{m}\iiint\limits_V z\rho(x,y,z)dxdydz.$$

Nếu vật thể đồng chất thì

$$x_G = \frac{1}{V}\iiint\limits_V xdxdydz, \quad y_G = \frac{1}{V}\iiint\limits_V ydxdydz,$$
$$z_G = \frac{1}{V}\iiint\limits_V zdxdydz.$$

4.1.1 Định nghĩa tích phân đường loại 1

Định nghĩa 5.1

Cho hàm $f(M) = f(x, y)$ *xác định trên một cung phẳng* $\overset{\frown}{AB}$. *Chia cung* $\overset{\frown}{AB}$ *thành* n *cung nhỏ bởi các điểm* $A = A_0, A_1, \ldots, A_n = B$.

Gọi độ dài mỗi cung $\overset{\frown}{A_{i-1}A_i}$ *là* $\Delta s_i, i = 1, \ldots, n$. *Trên mỗi cung* $\overset{\frown}{A_{i-1}A_i}$ *lấy tùy ý một điểm* $M_i(\xi_i, \eta_i), i = 1, \ldots, n$ *và lập tổng*

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta s_i.$$

4.1.1 Định nghĩa tích phân đường loại 1

Định nghĩa 5.1

Cho hàm $f(M) = f(x, y)$ xác định trên một cung phẳng $\overset{\frown}{AB}$. Chia cung $\overset{\frown}{AB}$ thành n cung nhỏ bởi các điểm $A = A_0, A_1, \ldots, A_n = B$.
Gọi độ dài mỗi cung $\overset{\frown}{A_{i-1}A_i}$ là $\Delta s_i, i = 1, \ldots, n$. Trên mỗi cung $\overset{\frown}{A_{i-1}A_i}$ lấy tùy ý một điểm $M_i(\xi_i, \eta_i), i = 1, \ldots, n$ và lập tổng

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta s_i.$$

Nếu $\max \Delta s_i \to 0$ khi $n \to +\infty$ và tồn tại giới hạn hữu hạn $\lim\limits_{n\to+\infty} \sigma_n = I$, không phụ thuộc vào cách chia cung $\overset{\frown}{AB}$ cũng như cách chọn các điểm $M_i(\xi_i, \eta_i)$, thì ta nói hàm f khả tích trên $\overset{\frown}{AB}$ và giới hạn đó được gọi là tích phân đường loại một của hàm f dọc theo cung $\overset{\frown}{AB}$, ký hiệu là

$$I = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} f(x, y)ds.$$

4.1.1 Định nghĩa

- *Cung trơn:*
  - Cung $\overset{\frown}{AB}$ được cho bởi phương trình $y = f(x), x \in [a, b]$ được gọi là trơn nếu hàm f có đạo hàm liên tục trên $[a, b]$.
  - Cung $\overset{\frown}{AB}$ được cho bởi phương trình tham số $x = x(t), y = y(t), t \in [t_1, t_2]$ được gọi là trơn nếu các hàm $x(t), y(t)$ có đạo hàm liên tục trên $[t_1, t_2]$.
  - Cung $\overset{\frown}{AB}$ được gọi là trơn từng khúc nếu nó gồm hữu hạn cung trơn.

4.1.1 Định nghĩa

- *Cung trơn:*
  - Cung $\overset{\frown}{AB}$ được cho bởi phương trình $y = f(x), x \in [a, b]$ được gọi là trơn nếu hàm f có đạo hàm liên tục trên $[a, b]$.
  - Cung $\overset{\frown}{AB}$ được cho bởi phương trình tham số $x = x(t), y = y(t), t \in [t_1, t_2]$ được gọi là trơn nếu các hàm $x(t), y(t)$ có đạo hàm liên tục trên $[t_1, t_2]$.
  - Cung $\overset{\frown}{AB}$ được gọi là trơn từng khúc nếu nó gồm hữu hạn cung trơn.
- Cho cung $\overset{\frown}{AB}$ trơn (hoặc trơn từng khúc). Nếu hàm $f(x, y)$ liên tục trên $\overset{\frown}{AB}$ thì nó cũng khả tích trên đó.

4.1.1 Định nghĩa

- *Cung trơn:*
  - Cung $\overset{\frown}{AB}$ được cho bởi phương trình $y = f(x), x \in [a, b]$ được gọi là trơn nếu hàm f có đạo hàm liên tục trên $[a, b]$.
  - Cung $\overset{\frown}{AB}$ được cho bởi phương trình tham số $x = x(t), y = y(t), t \in [t_1, t_2]$ được gọi là trơn nếu các hàm $x(t), y(t)$ có đạo hàm liên tục trên $[t_1, t_2]$.
  - Cung $\overset{\frown}{AB}$ được gọi là trơn từng khúc nếu nó gồm hữu hạn cung trơn.
- Cho cung $\overset{\frown}{AB}$ trơn (hoặc trơn từng khúc). Nếu hàm $f(x, y)$ liên tục trên $\overset{\frown}{AB}$ thì nó cũng khả tích trên đó.
- Nếu $C \in \overset{\frown}{AB}$ thì

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} f(x, y)ds = \int\limits_{\overset{\frown}{AC}} f(x, y)ds + \int\limits_{\overset{\frown}{CB}} f(x, y)ds.$$

4.1.2 Cách tính

- Cung $\overset{\frown}{AB}$ trơn cho bởi phương trình $y = f(x), x \in [a, b]$:

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} f(x, y) ds = \int_a^b f(x, y(x)) \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx.$$

4.1.2 Cách tính

- Cung $\overset{\frown}{AB}$ trơn cho bởi phương trình $y = f(x), x \in [a, b]$:

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} f(x, y)ds = \int_a^b f(x, y(x))\sqrt{1 + (y'(x))^2}dx.$$

- Cung $\overset{\frown}{AB}$ trơn cho bởi phương trình tham số $x = x(t), y = y(t), t \in [t_1, t_2]$:

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} f(x, y)ds = \int_{t_1}^{t_2} f(x(t), y(t))\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt.$$

4.1.2 Cách tính

- Cung $\overset{\frown}{AB}$ trơn cho bởi phương trình $y = f(x), x \in [a, b]$:

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} f(x,y)ds = \int_a^b f(x, y(x))\sqrt{1 + (y'(x))^2}dx.$$

- Cung $\overset{\frown}{AB}$ trơn cho bởi phương trình tham số $x = x(t), y = y(t), t \in [t_1, t_2]$:

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} f(x,y)ds = \int_{t_1}^{t_2} f(x(t), y(t))\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt.$$

- *(trường hợp trong không gian)* Cung $\overset{\frown}{AB}$ trơn cho bởi phương trình tham số $x = x(t), y = y(t), z = z(t), t \in [t_1, t_2]$:

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} f(x,y,z)ds = \int_{t_1}^{t_2} f(x(t), y(t), z(t))\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}dt.$$

4.1.3 Ứng dụng của tích phân đường loại một

Giả sử cung vật chất $\overset{\frown}{AB}$ có khối lượng riêng $\rho(x, y, z)$ với ρ là một hàm liên tục.

- Độ dài cung $\overset{\frown}{AB}$: $\ell = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} ds$.

4.1.3 Ứng dụng của tích phân đường loại một

Giả sử cung vật chất $\overset{\frown}{AB}$ có khối lượng riêng $\rho(x, y, z)$ với ρ là một hàm liên tục.

- Độ dài cung $\overset{\frown}{AB}$: $\ell = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} ds$.
- Khối lượng của cung $\overset{\frown}{AB}$ là

$$m = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} \rho(x, y, z) ds.$$

4.1.3 Ứng dụng của tích phân đường loại một

Giả sử cung vật chất $\overset{\frown}{AB}$ có khối lượng riêng $\rho(x, y, z)$ với ρ là một hàm liên tục.

- Độ dài cung $\overset{\frown}{AB}$: $\ell = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} ds$.
- Khối lượng của cung $\overset{\frown}{AB}$ là
$$m = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} \rho(x, y, z) ds.$$
- Trọng tâm $G(x_G, y_G, z_G)$ của cung $\overset{\frown}{AB}$ xác định bởi
$$x_G = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} x\rho(x, y, z) ds, \quad y_G = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} y\rho(x, y, z) ds, \quad z_G = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} z\rho(x, y, z) ds.$$

4.2.1 Định nghĩa tích phân đường loại 2

Định nghĩa 5.2

Cho các hàm $P(x, y), Q(x, y)$ *xác định trên một cung phẳng* $\overset{\frown}{AB}$. *Chia cung* $\overset{\frown}{AB}$ *thành* n *cung nhỏ bởi các điểm* $A = A_0, A_1, \ldots, A_n = B$.
Gọi độ dài đại số của hình chiếu của vector $\overrightarrow{A_{i-1}A_i}$ *trên 2 trục* Ox, Oy *là* $\Delta x_i, \Delta y_i, i = 1, \ldots, n$. *Trên mỗi cung* $\overset{\frown}{A_{i-1}A_i}$ *lấy tùy ý một điểm* $M_i(\xi_i, \eta_i)$, $i = 1, \ldots, n$ *và lập tổng*

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} P(\xi_i, \eta_i)\Delta x_i + Q(\xi_i, \eta_i)\Delta y_i.$$

4.2.1 Định nghĩa tích phân đường loại 2

Định nghĩa 5.2

Cho các hàm $P(x, y), Q(x, y)$ *xác định trên một cung phẳng* $\overset{\frown}{AB}$. *Chia cung* $\overset{\frown}{AB}$ *thành n cung nhỏ bởi các điểm* $A = A_0, A_1, \ldots, A_n = B$.
Gọi độ dài đại số của hình chiếu của vector $\overrightarrow{A_{i-1}A_i}$ *trên 2 trục* Ox, Oy *là* $\Delta x_i, \Delta y_i, i = 1, \ldots, n$. *Trên mỗi cung* $\overset{\frown}{A_{i-1}A_i}$ *lấy tùy ý một điểm* $M_i(\xi_i, \eta_i)$, $i = 1, \ldots, n$ *và lập tổng*

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} P(\xi_i, \eta_i)\Delta x_i + Q(\xi_i, \eta_i)\Delta y_i.$$

Nếu $\max \Delta x_i \to 0, \max \Delta y_i \to 0$ *khi* $n \to +\infty$ *và tồn tại giới hạn hữu hạn* $\lim\limits_{n\to+\infty} \sigma_n = I$, *không phụ thuộc vào cách chia cung* $\overset{\frown}{AB}$ *cũng như cách chọn các điểm* $M_i(\xi_i, \eta_i)$, *thì giới hạn đó được gọi là tích phân đường loại 2 của hàm* P, Q *dọc theo cung* $\overset{\frown}{AB}$, *ký hiệu là*

$$I = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$

4.2.1 Định nghĩa tích phân đường loại 2

• Nếu cung $\overset{\frown}{AB}$ trơn từng khúc và các hàm P, Q liên tục trên $\overset{\frown}{AB}$ thì tồn tại tích phân đường loại 2 của P, Q dọc theo cung $\overset{\frown}{AB}$.

4.2.1 Định nghĩa tích phân đường loại 2

• Nếu cung $\overset{\frown}{AB}$ trơn từng khúc và các hàm P, Q liên tục trên $\overset{\frown}{AB}$ thì tồn tại tích phân đường loại 2 của P, Q dọc theo cung $\overset{\frown}{AB}$.

• Nếu $C \in \overset{\frown}{AB}$ thì

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{\overset{\frown}{AC}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy + \int\limits_{\overset{\frown}{CB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

4.2.1 Định nghĩa tích phân đường loại 2

• Nếu cung $\overset{\frown}{AB}$ trơn từng khúc và các hàm P, Q liên tục trên $\overset{\frown}{AB}$ thì tồn tại tích phân đường loại 2 của P, Q dọc theo cung $\overset{\frown}{AB}$.

• Nếu $C \in \overset{\frown}{AB}$ thì

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{\overset{\frown}{AC}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy + \int\limits_{\overset{\frown}{CB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

• Nếu đổi chiều lấy tích phân dọc theo cung $\overset{\frown}{BA}$ thì tích phân đường loại 2 bị đổi dấu

$$\int\limits_{\overset{\frown}{BA}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = -\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

4.2.1 Định nghĩa tích phân đường loại 2

• Nếu cung $\overset{\frown}{AB}$ trơn từng khúc và các hàm P, Q liên tục trên $\overset{\frown}{AB}$ thì tồn tại tích phân đường loại 2 của P, Q dọc theo cung $\overset{\frown}{AB}$.

• Nếu $C \in \overset{\frown}{AB}$ thì

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{\overset{\frown}{AC}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy + \int\limits_{\overset{\frown}{CB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

• Nếu đổi chiều lấy tích phân dọc theo cung $\overset{\frown}{BA}$ thì tích phân đường loại 2 bị đổi dấu

$$\int\limits_{\overset{\frown}{BA}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = -\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

• Tích phân đường loại 2 dọc theo một đường cong khép kín (L) theo chiều dương ký hiệu là

$$\oint\limits_{L} P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

4.2.2 Cách tính tích phân đường loại 2

- Nếu cung $\overset{\frown}{AB}$ trơn cho bởi phương trình $y = y(x)$ thì

$$\int_{\overset{\curvearrowright}{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{x_A}^{x_B} \Big(P(x,y(x)) + Q(x,y(x))y'(x) \Big) dx.$$

(đổi vai trò của x, y nếu cung $\overset{\frown}{AB}$ trơn cho bởi phương trình $x = x(y)$).

4.2.2 Cách tính tích phân đường loại 2

- Nếu cung $\overset{\frown}{AB}$ trơn cho bởi phương trình $y = y(x)$ thì

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{x_A}^{x_B} \Big(P(x,y(x)) + Q(x,y(x))y'(x)\Big)dx.$$

(đổi vai trò của x, y nếu cung $\overset{\frown}{AB}$ trơn cho bởi phương trình $x = x(y)$).

- Nếu cung $\overset{\frown}{AB}$ trơn cho bởi phương trình $x = x(t), y = y(t)$ thì

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{t_A}^{t_B} \Big(P(x(t),y(t))x'(t) + Q(x(t),y(t))y'(t)\Big)dt.$$

4.2.3 Công thức Green

Định lý 5.1

Giả sử miền D có biên là đường cong L gồm một hay nhiều đường kín trơn từng khúc rời nhau đôi một. Nếu hàm số $P(x, y), Q(x, y)$ và các đạo hàm riêng cấp 1 của chúng liên tục trên miền D thì

$$\iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \oint\limits_L Pdx + Qdy. \tag{11}$$

Công thức (11) gọi là công thức Green.

4.2.3 Công thức Green

Định lý 5.1

Giả sử miền D có biên là đường cong L gồm một hay nhiều đường kín trơn từng khúc rời nhau đôi một. Nếu hàm số $P(x, y)$, $Q(x, y)$ và các đạo hàm riêng cấp 1 của chúng liên tục trên miền D thì

$$\iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \oint\limits_L Pdx + Qdy. \qquad (11)$$

Công thức (11) gọi là công thức Green.

Chú ý: Một đường kín L là biên của miền D thì chiều dương của nó được xác định là chiều mà khi đi dọc L theo chiều đó, miền D nằm bên trái.

4.2.3 Công thức Green

Định lý 5.1

Giả sử miền D có biên là đường cong L gồm một hay nhiều đường kín trơn từng khúc rời nhau đôi một. Nếu hàm số $P(x,y), Q(x,y)$ và các đạo hàm riêng cấp 1 của chúng liên tục trên miền D thì

$$\iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \oint\limits_L Pdx + Qdy. \tag{11}$$

Công thức (11) gọi là công thức Green.

Chú ý: Một đường kín L là biên của miền D thì chiều dương của nó được xác định là chiều mà khi đi dọc L theo chiều đó, miền D nằm bên trái.

Hệ quả 5.1

Diện tích S của miền D được tính bởi công thức

$$S = \frac{1}{2}\oint\limits_L xdx - ydy.$$

4.2.4 Điều kiện để tích phân đường loại 2 không phụ thuộc đường lấy tich phân

Định lý 5.2

Giả sử hàm số $P(x,y), Q(x,y)$ và các đạo hàm của chúng liên tục trong một miền đơn liên D. Khi đó các mệnh đề sau đây tương đương với nhau:

(a) $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}, \forall (x,y) \in D;$

(b) $\oint\limits_L Pdx + Qdy = 0$ *với mọi đường kín* $L \subset D$;

(c) *Tích phân* $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} Pdx + Qdy$ *chỉ phụ thuộc hai đầu mút* A, B *mà không phụ thuộc cung* $\overset{\frown}{AB} \subset D$;

(d) $Pdx + Qdy$ *là vi phân toàn phần của một hàm* $u(x,y)$ *nào đó trong* D.

Cách tìm hàm $u(x, y)$ trong ý (d) của ĐL5.2

• Lấy $A(x_0, y_0) \in D$ tùy ý. Với mỗi $M(x, y) \in D$, hàm $u(x, y) = u(M)$ trong ý (d) của ĐL5.2 được cho bởi công thức

$$u(x, y) = \int_{\overset{\frown}{AM}} Pdx + Qdy + C, \quad C \text{ là hằng số tùy ý.}$$

Cách tìm hàm $u(x, y)$ trong ý (d) của ĐL5.2

- Lấy $A(x_0, y_0) \in D$ tùy ý. Với mỗi $M(x, y) \in D$, hàm $u(x, y) = u(M)$ trong ý (d) của ĐL5.2 được cho bởi công thức

$$u(x, y) = \int_{\overset{\frown}{AM}} Pdx + Qdy + C, \quad C \text{ là hằng số tùy ý.}$$

- Nếu $D = \mathbb{R}^2$ thì

$$u(x, y) = \int_{x_0}^{x} P(x, y_0)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x, y)dy + C$$

hoặc

$$u(x, y) = \int_{x_0}^{x} P(x, y)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0, y)dy + C.$$

Cách tìm hàm $u(x, y)$ trong ý (d) của ĐL5.2

- Lấy $A(x_0, y_0) \in D$ tùy ý. Với mỗi $M(x, y) \in D$, hàm $u(x, y) = u(M)$ trong ý (d) của ĐL5.2 được cho bởi công thức

$$u(x,y) = \int\limits_{\overset{\frown}{AM}} Pdx + Qdy + C, \quad C \text{ là hằng số tùy ý.}$$

- Nếu $D = \mathbb{R}^2$ thì

$$u(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(x, y_0)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x,y)dy + C$$

hoặc

$$u(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(x, y)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy + C.$$

Chú ý: Nếu $Pdx + Qdy$ là vi phân toàn phần của hàm $u(x, y)$ thì

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} Pdx + Qdy = u(B) - u(A).$$

4.2.5 Tích phân đường loại 2 trong không gian

• Cho các hàm số $P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)$ xác định trên cung $\overset{\frown}{AB}$ trong $\mathbb{R}^3$. Tương tự như định nghĩa tích phân đường loại hai trong mặt phẳng, ta có tích phân đường loại 2 của các hàm số P, Q, R dọc theo cung $\overset{\frown}{AB}$, ký hiệu là

$$I = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz.$$

4.2.5 Tích phân đường loại 2 trong không gian

• Cho các hàm số $P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$ xác định trên cung $\overset{\frown}{AB}$ trong $\mathbb{R}^3$. Tương tự như định nghĩa tích phân đường loại hai trong mặt phẳng, ta có tích phân đường loại 2 của các hàm số P, Q, R dọc theo cung $\overset{\frown}{AB}$, ký hiệu là

$$I = \int\limits_{\overset{\curvearrowright}{AB}} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz.$$

• Nếu cung $\overset{\frown}{AB}$ cho bởi phương trình tham số $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$ thì:

$$I = \int_{t_A}^{t_B} \Big(P(x(t),y(t),z(t))x'(t) + Q(x(t),y(t),z(t))y'(t) + R(x(t),y(t),z(t))z'(t) \Big) dt.$$

Sinh viên tự đọc

- Tích phân mặt loại 1 bao gồm các nội dung:
  - Định nghĩa.
  - Cách tính.

Sinh viên tự đọc

- Tích phân mặt loại 1 bao gồm các nội dung:
  - Định nghĩa.
  - Cách tính.
- Tích phân mặt loại 2 bao gồm các nội dung:
  - Định nghĩa.
  - Cách tính
  - Công thức Stokes.
  - Điều kiện tích phân đường loại 2 không phụ thuộc đường lấy tích phân.
  - Công thức Ostrogradsky.
  - Véc-tơ rôta; trường thế; div; toán tử Hamilton.

Khái niệm phương trình vi phân

- Một hệ thức liên hệ giữa biến x, hàm $y(x)$ và các đạo hàm của nó có dạng

$$F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0 \tag{12}$$

được gọi là một *phương trình vi phân*. Biến x gọi là biến độc lập, $y(x)$ gọi là biến phụ thuộc.

Khái niệm phương trình vi phân

• Một hệ thức liên hệ giữa biến x, hàm $y(x)$ và các đạo hàm của nó có dạng

$$F(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)) = 0 \tag{12}$$

được gọi là một *phương trình vi phân*. Biến x gọi là biến độc lập, $y(x)$ gọi là biến phụ thuộc.

• Cấp cao nhất của đạo hàm của $y(x)$ có mặt trong phương trình (12) gọi là *cấp* của phương trình.

Khái niệm phương trình vi phân

• Một hệ thức liên hệ giữa biến x, hàm $y(x)$ và các đạo hàm của nó có dạng

$$F(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)) = 0 \tag{12}$$

được gọi là một *phương trình vi phân*. Biến x gọi là biến độc lập, $y(x)$ gọi là biến phụ thuộc.

• Cấp cao nhất của đạo hàm của $y(x)$ có mặt trong phương trình (12) gọi là *cấp* của phương trình.

• Một hàm $y(x)$ xác định trên miền $I \subset \mathbb{R}$ thỏa mãn (12) với mọi $x \in I$ được gọi là một *nghiệm* hay một *đường tích phân* của phương trình.

Tập tất cả các nghiệm của (12) gọi là *nghiệm tổng quát* của phương trình.

Khái niệm phương trình vi phân

• Một hệ thức liên hệ giữa biến x, hàm $y(x)$ và các đạo hàm của nó có dạng

$$F(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)) = 0 \tag{12}$$

được gọi là một *phương trình vi phân*. Biến x gọi là biến độc lập, $y(x)$ gọi là biến phụ thuộc.
• Cấp cao nhất của đạo hàm của $y(x)$ có mặt trong phương trình (12) gọi là *cấp* của phương trình.
• Một hàm $y(x)$ xác định trên miền $I \subset \mathbb{R}$ thỏa mãn (12) với mọi $x \in I$ được gọi là một *nghiệm* hay một *đường tích phân* của phương trình.
Tập tất cả các nghiệm của (12) gọi là *nghiệm tổng quát* của phương trình.
• Giải một phương trình vi phân là đi tìm nghiệm tổng quát của nó.

5.1.1 Các khái niệm

- Dạng tổng quát của phương trình vi phân cấp 1:

$$F(x, y(x), y'(x)) = 0 \quad \text{(viết đơn giản là } F(x, y, y') = 0\text{).} \tag{13}$$

5.1.1 Các khái niệm

- Dạng tổng quát của phương trình vi phân cấp 1:

$$F(x, y(x), y'(x)) = 0 \quad \text{(viết đơn giản là } F(x, y, y') = 0\text{)}. \tag{13}$$

- Dạng chuẩn tắc của phương trình vi phân cấp 1:

$$y' = f(x, y). \tag{14}$$

5.1.1 Các khái niệm

- Dạng tổng quát của phương trình vi phân cấp 1:

$$F(x, y(x), y'(x)) = 0 \quad \text{(viết đơn giản là } F(x, y, y') = 0). \tag{13}$$

- Dạng chuẩn tắc của phương trình vi phân cấp 1:

$$y' = f(x, y). \tag{14}$$

Định lý 6.1

(sự tồn tại và duy nhất nghiệm) Cho phương trình vi phân cấp 1 có dạng chuẩn tắc (14). Giả sử $f(x, y)$ liên tục trên $D \subset \mathbb{R}^2$ và điểm $(x_0, y_0) \in D$. Khi đó trong một lân cận nào đó của x_0, tồn tại một nghiệm $y = y(x)$ của phương trình (14) thỏa mãn $y(x_0) = y_0$.
Ngoài ra, nếu f'_y cũng liên tục trên D thì nghiệm đó là duy nhất.

5.1.1 Các khái niệm

- Dạng tổng quát của phương trình vi phân cấp 1:

$$F(x, y(x), y'(x)) = 0 \quad \text{(viết đơn giản là } F(x, y, y') = 0\text{).} \tag{13}$$

- Dạng chuẩn tắc của phương trình vi phân cấp 1:

$$y' = f(x, y). \tag{14}$$

Định lý 6.1

(sự tồn tại và duy nhất nghiệm) Cho phương trình vi phân cấp 1 có dạng chuẩn tắc (14). Giả sử $f(x, y)$ *liên tục trên* $D \subset \mathbb{R}^2$ *và điểm* $(x_0, y_0) \in D$. *Khi đó trong một lân cận nào đó của* x_0, *tồn tại một nghiệm* $y = y(x)$ *của phương trình (14) thỏa mãn* $y(x_0) = y_0$.
Ngoài ra, nếu f'_y *cũng liên tục trên D thì nghiệm đó là duy nhất.*

- Điều kiện $y(x_0) = y_0$ gọi là *điều kiện ban đầu* của phương trình (14), có thể được viết là $y|_{x=x_0} = y_0$. Bài toán giải phương trình (14) với điều kiện ban đầu gọi là *bài toán Cauchy*.

5.1.1 Các khái niệm

- Nghiệm tổng quát của phương trình (14) có thể cho dạng ẩn

$$\Phi(x, y, C) = 0$$

với C là hằng số tùy ý. Hệ thức đó còn được gọi là một *tích phân tổng quát* của phương trình (14).

5.1.1 Các khái niệm

- Nghiệm tổng quát của phương trình (14) có thể cho dạng ẩn

$$\Phi(x, y, C) = 0$$

với C là hằng số tùy ý. Hệ thức đó còn được gọi là một *tích phân tổng quát* của phương trình (14).

- Nghiệm tổng quát dạng hiển của phương trình (14) là

$$y = \psi(x, C).$$

- Ứng với mỗi điều kiện ban đầu $y(x_0) = y_0$ ta tìm được một C_0.

5.1.1 Các khái niệm

• Nghiệm tổng quát của phương trình (14) có thể cho dạng ẩn

$$\Phi(x, y, C) = 0$$

với C là hằng số tùy ý. Hệ thức đó còn được gọi là một *tích phân tổng quát* của phương trình (14).
• Nghiệm tổng quát dạng hiển của phương trình (14) là

$$y = \psi(x, C).$$

• Ứng với mỗi điều kiện ban đầu $y(x_0) = y_0$ ta tìm được một C_0.
Khi đó, nghiệm $y = \psi(x, C_0)$ gọi là một *nghiệm riêng* và hệ thức $\Phi(x, y, C_0) = 0$ gọi là một *tích phân riêng* của phương trình (14).

5.1.1 Các khái niệm

• Nghiệm tổng quát của phương trình (14) có thể cho dạng ẩn

$$\Phi(x, y, C) = 0$$

với C là hằng số tùy ý. Hệ thức đó còn được gọi là một *tích phân tổng quát* của phương trình (14).

• Nghiệm tổng quát dạng hiển của phương trình (14) là

$$y = \psi(x, C).$$

• Ứng với mỗi điều kiện ban đầu $y(x_0) = y_0$ ta tìm được một C_0.
Khi đó, nghiệm $y = \psi(x, C_0)$ gọi là một *nghiệm riêng* và hệ thức $\Phi(x, y, C_0) = 0$ gọi là một *tích phân riêng* của phương trình (14).

• Phương trình (14) có thể có những nghiệm không nằm trong họ nghiệm tổng quát, gọi là các nghiệm *kỳ dị*.

5.1.2 Phương trình khuyết

- *Phương trình khuyết y:* $F(x, y') = 0$.

  1. Trường hợp (đẹp nhất) giải ra được: $y' = f(x)$. Khi đó
  $$y(x) = \int f(x)dx.$$

5.1.2 Phương trình khuyết

- *Phương trình khuyết y:* $F(x, y') = 0$.

1. Trường hợp (đẹp nhất) giải ra được: $y' = f(x)$. Khi đó
$$y(x) = \int f(x)dx.$$
2. Trường hợp giải ra được: $x = f(y')$.
- Nếu tìm được $y' = f^{-1}(x)$ thì giải như trường hợp 1.
- Nếu không: đặt $\dfrac{dy}{dx} = y'(x) = t \Rightarrow dy = tdx$. Ngoài ra
$$x = f(y') = f(t) \Rightarrow dx = f'(t)dt.$$
Do đó
$$dy = tf'(t)dt \Rightarrow y = \int tf'(t)dt.$$
Ta được dạng tham số của đường tích phân là
$$x = f(t), y = \int tf'(t)dt.$$

5.1.2 Phương trình khuyết

- *Phương trình khuyết y*: $F(x, y') = 0$.

1. Trường hợp (đẹp nhất) giải ra được: $y' = f(x)$. Khi đó
$$y(x) = \int f(x)dx.$$
2. Trường hợp giải ra được: $x = f(y')$.
- Nếu tìm được $y' = f^{-1}(x)$ thì giải như trường hợp 1.
- Nếu không: đặt $\frac{dy}{dx} = y'(x) = t \Rightarrow dy = tdx$. Ngoài ra
$$x = f(y') = f(t) \Rightarrow dx = f'(t)dt.$$
Do đó
$$dy = tf'(t)dt \Rightarrow y = \int tf'(t)dt.$$
Ta được dạng tham số của đường tích phân là
$$x = f(t), y = \int tf'(t)dt.$$
3. Phương trình có thể tham số hóa: $x = f(t), y' = g(t)$. Giống trường hợp 2, ta có
$$dy = g(t)f'(t)dt \Rightarrow y = \int g(t)f'(t)dt.$$
Ta được dạng tham số của đường tích phân là
$$x = f(t), y = \int g(t)f'(t)dt.$$

5.1.2 Phương trình khuyết

- *Phương trình khuyết x:* $F(y, y') = 0$.
  1. Trường hợp giải ra được: $y' = f(y)$. Khi đó
$$dx = \frac{dy}{f(y)} \Rightarrow x = \int \frac{dy}{f(y)} \Rightarrow \Phi(x, y, .) = x - \int \frac{dy}{f(y)} = 0.$$

5.1.2 Phương trình khuyết

- *Phương trình khuyết x:* $F(y, y') = 0$.

1. Trường hợp giải ra được: $y' = f(y)$. Khi đó
$$dx = \frac{dy}{f(y)} \Rightarrow x = \int \frac{dy}{f(y)} \Rightarrow \Phi(x, y, .) = x - \int \frac{dy}{f(y)} = 0.$$
2. Trường hợp giải ra được: $y = f(y')$.
   - Nếu tìm được $y' = f^{-1}(y)$ thì giải như trường hợp 1.
   - Nếu không: đặt $y' = t \Rightarrow dy = tdx$. Ngoài ra
$$y = f(y') = f(t) \Rightarrow dy = f'(t)dt.$$
   Do đó: $$dx = \frac{f'(t)}{t}dt \Rightarrow x = \int \frac{f'(t)}{t}dt.$$
   Ta được dạng tham số của đường tích phân: $x = \int \frac{f'(t)}{t}dt, y = f(t)$.

5.1.2 Phương trình khuyết

- *Phương trình khuyết x:* $F(y, y') = 0$.

1. Trường hợp giải ra được: $y' = f(y)$. Khi đó
$$dx = \frac{dy}{f(y)} \Rightarrow x = \int \frac{dy}{f(y)} \Rightarrow \Phi(x, y, .) = x - \int \frac{dy}{f(y)} = 0.$$
2. Trường hợp giải ra được: $y = f(y')$.
   - Nếu tìm được $y' = f^{-1}(y)$ thì giải như trường hợp 1.
   - Nếu không: đặt $y' = t \Rightarrow dy = tdx$. Ngoài ra
   $$y = f(y') = f(t) \Rightarrow dy = f'(t)dt.$$
   Do đó: $$dx = \frac{f'(t)}{t}dt \Rightarrow x = \int \frac{f'(t)}{t}dt.$$
   Ta được dạng tham số của đường tích phân: $x = \int \frac{f'(t)}{t}dt, y = f(t)$.
3. Phương trình có thể tham số hóa: $y = f(t), y' = g(t)$. Giống trường hợp 2, ta có
$$dx = \frac{f'(t)}{g(t)}dt \Rightarrow x = \int \frac{f'(t)}{g(t)}dt.$$
   Ta được dạng tham số của đường tích phân: $x = \int \frac{f'(t)}{g(t)}dt, y = f(t)$.

5.1.3 Phương trình với biến số phân ly-Phương trình thuần nhất

- *Phương trình với biến số phân ly:* là phương trình có dạng:

$$f(x)dx = g(y)dy.$$

Lấy tích phân hai vế, ta được

$$\int f(x)dx = \int g(y)dy.$$

5.1.3 Phương trình với biến số phân ly-Phương trình thuần nhất

- *Phương trình với biến số phân ly:* là phương trình có dạng:

$$f(x)dx = g(y)dy.$$

Lấy tích phân hai vế, ta được

$$\int f(x)dx = \int g(y)dy.$$

- *Phương trình thuần nhất (đẳng cấp):* phương trình có dạng $y' = f(\frac{y}{x})$.

Đặt $\frac{y}{x} = u \Rightarrow y = xu \Rightarrow y' = u + xu' = f(u) \Rightarrow x\frac{du}{dx} = f(u) - u.$

5.1.3 Phương trình với biến số phân ly-Phương trình thuần nhất

- *Phương trình với biến số phân ly:* là phương trình có dạng:

$$f(x)dx = g(y)dy.$$

Lấy tích phân hai vế, ta được

$$\int f(x)dx = \int g(y)dy.$$

- *Phương trình thuần nhất (đẳng cấp):* phương trình có dạng $y' = f(\frac{y}{x})$.

Đặt $\frac{y}{x} = u \Rightarrow y = xu \Rightarrow y' = u + xu' = f(u) \Rightarrow x\frac{du}{dx} = f(u) - u$.

1. Nếu $f(u) \neq u$, ta rút ra: $\frac{du}{f(u) - u} = \frac{dx}{x}$. Lấy tích phân 2 vế, ta được

$$\int \frac{du}{f(u) - u} du = \ln|x| + \ln|C|.$$

5.1.3 Phương trình với biến số phân ly-Phương trình thuần nhất

- *Phương trình với biến số phân ly:* là phương trình có dạng:

$$f(x)dx = g(y)dy.$$

Lấy tích phân hai vế, ta được

$$\int f(x)dx = \int g(y)dy.$$

- *Phương trình thuần nhất (đẳng cấp):* phương trình có dạng $y' = f(\frac{y}{x})$.

Đặt $\dfrac{y}{x} = u \Rightarrow y = xu \Rightarrow y' = u + xu' = f(u) \Rightarrow x\dfrac{du}{dx} = f(u) - u$.

1. Nếu $f(u) \neq u$, ta rút ra: $\dfrac{du}{f(u) - u} = \dfrac{dx}{x}$. Lấy tích phân 2 vế, ta được

$$\int \frac{du}{f(u) - u} du = \ln|x| + \ln|C|.$$

2. Nếu $f(u) = u$, ta rút ra $y' = \dfrac{y}{x} \Rightarrow \dfrac{dy}{y} = \dfrac{dx}{x}$. Lấy tích phân 2 vế, ta được

$$\ln|y| = \ln|x| + \ln|C| \Rightarrow y = Cx.$$

5.1.4 Phương trình tuyến tính

Phương trình có dạng:

$$y' + p(x)y = q(x)$$

trong đó $p(x), q(x)$ là những hàm số liên tục.

- $q(x) = 0$ thì phương trình gọi là *tuyến tính thuần nhất*;
- $q(x) \neq 0$ thì phương trình gọi là *tuyến tính không thuần nhất*.

5.1.4 Phương trình tuyến tính

Phương trình có dạng:

$$y' + p(x)y = q(x)$$

trong đó $p(x), q(x)$ là những hàm số liên tục.

- $q(x) = 0$ thì phương trình gọi là *tuyến tính thuần nhất*;
- $q(x) \neq 0$ thì phương trình gọi là *tuyến tính không thuần nhất*.

• Xét trường hợp phương trình thuần nhất: $y' + p(x)y = 0$.

5.1.4 Phương trình tuyến tính

Phương trình có dạng:

$$y' + p(x)y = q(x)$$

trong đó $p(x), q(x)$ là những hàm số liên tục.

- $q(x) = 0$ thì phương trình gọi là *tuyến tính thuần nhất*;
- $q(x) \neq 0$ thì phương trình gọi là *tuyến tính không thuần nhất*.

• Xét trường hợp phương trình thuần nhất: $y' + p(x)y = 0$.

1. Nếu $y \neq 0$, ta rút ra: $\dfrac{dy}{y} = -p(x)dx$. Tích phân 2 vế ta được:

$$\ln|y| = -\int p(x)dx + \ln|C| \Longrightarrow y = Ce^{-\int p(x)dx}.$$

2. $y = 0$ cũng là một nghiệm của phương trình ứng với $C = 0$.

5.1.4 Phương trình tuyến tính

Phương trình có dạng:

$$y' + p(x)y = q(x)$$

trong đó $p(x), q(x)$ là những hàm số liên tục.

- $q(x) = 0$ thì phương trình gọi là *tuyến tính thuần nhất*;
- $q(x) \neq 0$ thì phương trình gọi là *tuyến tính không thuần nhất*.

• Xét trường hợp phương trình thuần nhất: $y' + p(x)y = 0$.

1. Nếu $y \neq 0$, ta rút ra: $\dfrac{dy}{y} = -p(x)dx$. Tích phân 2 vế ta được:
$$\ln|y| = -\int p(x)dx + \ln|C| \Longrightarrow y = Ce^{-\int p(x)dx}.$$
2. $y = 0$ cũng là một nghiệm của phương trình ứng với $C = 0$.

Như vậy nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất là

$$y = Ce^{-\int p(x)dx} \tag{15}$$

với C là hằng số tùy ý.

5.1.4 Phương trình tuyến tính

• Để giải phương trình không thuần nhất: $y' + p(x)y = q(x)$, ta thực hiện theo các bước sau:

5.1.4 Phương trình tuyến tính

• Để giải phương trình không thuần nhất: $y' + p(x)y = q(x)$, ta thực hiện theo các bước sau:

1. Giải phương trình thuần nhất tương ứng tìm được nghiệm $y = Ce^{-\int p(x)dx}$;

5.1.4 Phương trình tuyến tính

• Để giải phương trình không thuần nhất: $y' + p(x)y = q(x)$, ta thực hiện theo các bước sau:

1. Giải phương trình thuần nhất tương ứng tìm được nghiệm $y = Ce^{-\int p(x)dx}$;
2. Xét $y = C(x)e^{-\int p(x)dx}$ và thay vào phương trình không thuần nhất, biến đổi và rút gọn, ta được:

$$C'(x) = q(x)e^{\int p(x)dx} \Longrightarrow C(x) = \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + K,$$

với K là hằng số tùy ý.

5.1.4 Phương trình tuyến tính

• Để giải phương trình không thuần nhất: $y' + p(x)y = q(x)$, ta thực hiện theo các bước sau:

1. Giải phương trình thuần nhất tương ứng tìm được nghiệm $y = Ce^{-\int p(x)dx}$;
2. Xét $y = C(x)e^{-\int p(x)dx}$ và thay vào phương trình không thuần nhất, biến đổi và rút gọn, ta được:
$$C'(x) = q(x)e^{\int p(x)dx} \Longrightarrow C(x) = \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + K,$$
với K là hằng số tùy ý.

Từ đó ta được nghiệm tổng quát của phương trình không thuần nhất là:

$$y = \left(\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + K\right)e^{-\int p(x)}dx. \tag{16}$$

5.1.4 Phương trình tuyến tính

- Để giải phương trình không thuần nhất: $y' + p(x)y = q(x)$, ta thực hiện theo các bước sau:

  1. Giải phương trình thuần nhất tương ứng tìm được nghiệm $y = Ce^{-\int p(x)dx}$;
  2. Xét $y = C(x)e^{-\int p(x)dx}$ và thay vào phương trình không thuần nhất, biến đổi và rút gọn, ta được:
  $$C'(x) = q(x)e^{\int p(x)dx} \Longrightarrow C(x) = \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + K,$$
  với K là hằng số tùy ý.

Từ đó ta được nghiệm tổng quát của phương trình không thuần nhất là:

$$y = \left(\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + K\right)e^{-\int p(x)}dx. \tag{16}$$

- *Quy trình tìm nghiệm của phương trình tuyến tính cấp 1:*

  1. Tính $\int p(x)dx$, suy ra nghiệm của pt thuần nhất theo công thức (15);
  2. Tính $\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx$, suy ra nghiệm của pt không thuần nhất theo công thức (16).

5.1.5 Phương trình Bernoulli

Phương trình có dạng:

$$y' + p(x)y = q(x)y^{\alpha},$$

trong đó $p(x), q(x)$ là những hàm số liên tục, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.

5.1.5 Phương trình Bernoulli

Phương trình có dạng:

$$y' + p(x)y = q(x)y^{\alpha},$$

trong đó $p(x), q(x)$ là những hàm số liên tục, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.
Với $y \neq 0$, chia 2 vế của phương trình cho y^{α}, ta được

$$y^{-\alpha}y' + p(x)y^{1-\alpha} = q(x).$$

5.1.5 Phương trình Bernoulli

Phương trình có dạng:

$$y' + p(x)y = q(x)y^{\alpha},$$

trong đó $p(x), q(x)$ là những hàm số liên tục, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.
Với $y \neq 0$, chia 2 vế của phương trình cho y^{α}, ta được

$$y^{-\alpha}y' + p(x)y^{1-\alpha} = q(x).$$

Đặt $z = y^{1-\alpha} \Rightarrow z' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y'$, phương trình trên trở thành

$$z' + (1-\alpha)p(x)z = (1-\alpha)q(x),$$

ta được 1 phương trình tuyến tính cấp 1 đối với z.

5.1.6 Phương trình vi phân toàn phần

Phương trình dạng

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0, \tag{17}$$

ở đó P, Q là những hàm số cùng với các đạo hàm riêng của chúng liên tục trong một miền đơn liên D và có

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \tag{18}$$

5.1.6 Phương trình vi phân toàn phần

Phương trình dạng

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0, \tag{17}$$

ở đó P, Q là những hàm số cùng với các đạo hàm riêng của chúng liên tục trong một miền đơn liên D và có

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \tag{18}$$

Từ điều kiện (18), suy ra $Pdx + Qdy$ là vi phân toàn phần của hàm $u(x,y)$ nào đó. Nếu $D = \mathbb{R}^2$ thì

$$u(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(x,y_0)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x,y)dy + K,$$

hoặc

$$u(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(x,y)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy + K.$$

5.1.6 Phương trình vi phân toàn phần

Phương trình dạng

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0, \quad (17)$$

ở đó P, Q là những hàm số cùng với các đạo hàm riêng của chúng liên tục trong một miền đơn liên D và có

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \quad (18)$$

Từ điều kiện (18), suy ra $Pdx + Qdy$ là vi phân toàn phần của hàm $u(x,y)$ nào đó. Nếu $D = \mathbb{R}^2$ thì

$$u(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(x,y_0)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x,y)dy + K,$$

hoặc

$$u(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(x,y)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy + K.$$

Khi đó, phương trình (17) trở thành $du = 0$, và nghiệm tổng quát của (17) cho bởi

$$u(x,y) = C.$$

5.1.6 Phương trình vi phân toàn phần

Chú ý: Nếu điều kiện (18) không thỏa mãn, ta có thể tìm một hàm $\alpha(x, y)$ sao cho

$$\frac{\partial(\alpha P)}{\partial y} = \frac{\partial(\alpha Q)}{\partial x}. \tag{19}$$

5.1.6 Phương trình vi phân toàn phần

Chú ý: Nếu điều kiện (18) không thỏa mãn, ta có thể tìm một hàm $\alpha(x, y)$ sao cho

$$\frac{\partial(\alpha P)}{\partial y} = \frac{\partial(\alpha Q)}{\partial x}. \tag{19}$$

Khi đó, $\alpha P dx + \alpha Q dy$ là vi phân toàn phần của hàm $u(x, y)$ cho bởi

$$u(x, y) = \int_{x_0}^{x} \alpha(x, y_0) P(x, y_0) dx + \int_{y_0}^{y} \alpha(x, y) Q(x, y) dy + K,$$

hoặc

$$u(x, y) = \int_{x_0}^{x} \alpha(x, y) P(x, y) dx + \int_{y_0}^{y} \alpha(x_0, y) Q(x_0, y) dy + K.$$

và nghiệm của (17) cũng là

$$u(x, y) = C.$$

5.2.1 Các khái niệm

- Dạng tổng quát của phương trình vi phân cấp 2:

$$F(x, y, y', y'') = 0). \tag{20}$$

5.2.1 Các khái niệm

- Dạng tổng quát của phương trình vi phân cấp 2:

$$F(x, y, y', y'') = 0). \tag{20}$$

- Dạng chuẩn tắc của phương trình vi phân cấp 2:

$$y'' = f(x, y, y'). \tag{21}$$

5.2.1 Các khái niệm

- Dạng tổng quát của phương trình vi phân cấp 2:

$$F(x, y, y', y'') = 0). \tag{20}$$

- Dạng chuẩn tắc của phương trình vi phân cấp 2:

$$y'' = f(x, y, y'). \tag{21}$$

Định lý 6.2

Cho phương trình vi phân cấp 2 có dạng chuẩn tắc (21). Giả sử $f(x, y, y')$, f'_y, $f'_{y'}$ liên tục trên $D \subset \mathbb{R}^3$ và điểm $(x_0, y_0, z_0) \in D$. Khi đó trong một lân cận nào đó của x_0, tồn tại một nghiệm $y = y(x)$ của phương trình (21) thỏa mãn

$$y(x_0) = y|_{x=x_0} = y_0, \quad y'(x_0) = y'|_{x=x_0} = z_0.$$

5.2.1 Các khái niệm

- Dạng tổng quát của phương trình vi phân cấp 2:

$$F(x, y, y', y'') = 0). \tag{20}$$

- Dạng chuẩn tắc của phương trình vi phân cấp 2:

$$y'' = f(x, y, y'). \tag{21}$$

Định lý 6.2

Cho phương trình vi phân cấp 2 có dạng chuẩn tắc (21). Giả sử $f(x, y, y'), f'_y, f'_{y'}$ *liên tục trên* $D \subset \mathbb{R}^3$ *và điểm* $(x_0, y_0, z_0) \in D$*. Khi đó trong một lân cận nào đó của* x_0*, tồn tại một nghiệm* $y = y(x)$ *của phương trình (21) thỏa mãn*

$$y(x_0) = y|_{x=x_0} = y_0, \quad y'(x_0) = y'|_{x=x_0} = z_0.$$

- Điều kiện $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = z_0$ gọi là *điều kiện ban đầu* của phương trình (21). Bài toán giải phương trình (21) với điều kiện ban đầu gọi là *bài toán Cauchy*.

5.2.1 Các khái niệm

- Nghiệm tổng quát của phương trình (21) có thể cho dạng ẩn

$$\Phi(x, y, C_1, C_2) = 0$$

với C_1, C_2 là các hằng số tùy ý. Hệ thức đó còn được gọi là một *tích phân tổng quát* của phương trình (21).

5.2.1 Các khái niệm

• Nghiệm tổng quát của phương trình (21) có thể cho dạng ẩn

$$\Phi(x, y, C_1, C_2) = 0$$

với C_1, C_2 là các hằng số tùy ý. Hệ thức đó còn được gọi là một *tích phân tổng quát* của phương trình (21).

• Nghiệm tổng quát dạng hiển của phương trình (21) là

$$y = \psi(x, C_1, C_2).$$

• Ứng với mỗi điều kiện ban đầu $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = z_0$ ta tìm được C_1^0, C_2^0.

5.2.1 Các khái niệm

• Nghiệm tổng quát của phương trình (21) có thể cho dạng ẩn

$$\Phi(x, y, C_1, C_2) = 0$$

với C_1, C_2 là các hằng số tùy ý. Hệ thức đó còn được gọi là một *tích phân tổng quát* của phương trình (21).

• Nghiệm tổng quát dạng hiển của phương trình (21) là

$$y = \psi(x, C_1, C_2).$$

• Ứng với mỗi điều kiện ban đầu $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = z_0$ ta tìm được C_1^0, C_2^0.

- nghiệm $y = \psi(x, C_1^0, C_2^0)$ gọi là một *nghiệm riêng* của phương trình (21),
- hệ thức $\Phi(x, y, C_1^0, C_2^0) = 0$ gọi là một *tích phân riêng* của phương trình (21).

5.2.1 Các khái niệm

- Nghiệm tổng quát của phương trình (21) có thể cho dạng ẩn

$$\Phi(x, y, C_1, C_2) = 0$$

với C_1, C_2 là các hằng số tùy ý. Hệ thức đó còn được gọi là một *tích phân tổng quát* của phương trình (21).

- Nghiệm tổng quát dạng hiển của phương trình (21) là

$$y = \psi(x, C_1, C_2).$$

- Ứng với mỗi điều kiện ban đầu $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = z_0$ ta tìm được C_1^0, C_2^0.
  - nghiệm $y = \psi(x, C_1^0, C_2^0)$ gọi là một *nghiệm riêng* của phương trình (21),
  - hệ thức $\Phi(x, y, C_1^0, C_2^0) = 0$ gọi là một *tích phân riêng* của phương trình (21).

5.2.2 Phương trình khuyết

- *Phương trình khuyết* y, y': $F(x, y'') = 0$

Đặt $z = y'$, ta được phương trình cấp 1 đối với z là

$$F(x, z') = 0.$$

Giả sử $z = f(x, C_1)$ là nghiệm tổng quát của phương trình đó thì

$$y = \int f(x, C_1)dx + C_2$$

là nghiệm của phương trình ban đầu, với C_1, C_2 là các hằng số tùy ý.

5.2.2 Phương trình khuyết

• *Phương trình khuyết y, y':* $F(x, y'') = 0$
Đặt $z = y'$, ta được phương trình cấp 1 đối với z là

$$F(x, z') = 0.$$

Giả sử $z = f(x, C_1)$ là nghiệm tổng quát của phương trình đó thì

$$y = \int f(x, C_1)dx + C_2$$

là nghiệm của phương trình ban đầu, với C_1, C_2 là các hằng số tùy ý.
• *Phương trình khuyết y:* $F(x, y', y'') = 0$
Đặt $z = y'$, ta được phương trình cấp 1 đối với z là

$$F(x, z, z') = 0.$$

5.2.2 Phương trình khuyết

• *Phương trình khuyết* y, y': $F(x, y'') = 0$
Đặt $z = y'$, ta được phương trình cấp 1 đối với z là

$$F(x, z') = 0.$$

Giả sử $z = f(x, C_1)$ là nghiệm tổng quát của phương trình đó thì

$$y = \int f(x, C_1)dx + C_2$$

là nghiệm của phương trình ban đầu, với C_1, C_2 là các hằng số tùy ý.
• *Phương trình khuyết* y: $F(x, y', y'') = 0$
Đặt $z = y'$, ta được phương trình cấp 1 đối với z là

$$F(x, z, z') = 0.$$

• *Phương trình khuyết* x: $F(y, y', y'') = 0$
Đặt $z = y' \Rightarrow y'' = z\dfrac{dz}{dy}$, ta được phương trình cấp 1 đối với z theo biến y là

$$F(y, z, z\frac{dz}{dy}) = 0.$$

5.2.3 Phương trình tuyến tính

Phương trình có dạng:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$$

trong đó $p(x), q(x), f(x)$ là những hàm số liên tục.

- $f(x) = 0$ thì phương trình gọi là *tuyến tính thuần nhất*;
- $f(x) \neq 0$ thì phương trình gọi là *tuyến tính không thuần nhất*.

5.2.3.1 Phương trình tuyến tính thuần nhất

Xét phương trình tuyến tính thuần nhất:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{22}$$

với $p(x), q(x)$ là những hàm số liên tục.

5.2.3.1 Phương trình tuyến tính thuần nhất

Xét phương trình tuyến tính thuần nhất:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{22}$$

với $p(x), q(x)$ là những hàm số liên tục.

Định lý 6.3

Nếu $y_1(x), y_2(x)$ là các nghiệm của phương trình (22) thì $C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ cũng là nghiệm của (22), với C_1, C_2 là các hằng số tùy ý.

5.2.3.1 Phương trình tuyến tính thuần nhất

Định nghĩa 6.1

Hai hàm số $y_1(x), y_2(x)$ *được gọi là phụ thuộc tuyến tính trên đoạn* $[a, b]$ *nếu*

$$\frac{y_1(x)}{y_2(x)} = c, \quad \forall x \in [a, b].$$

Hai hàm số $y_1(x), y_2(x)$ *không phụ thuộc tuyến tính thì gọi là độc lập tuyến tính.*

5.2.3.1 Phương trình tuyến tính thuần nhất

Định nghĩa 6.1

Hai hàm số $y_1(x), y_2(x)$ được gọi là phụ thuộc tuyến tính trên đoạn $[a, b]$ nếu

$$\frac{y_1(x)}{y_2(x)} = c, \quad \forall x \in [a, b].$$

Hai hàm số $y_1(x), y_2(x)$ không phụ thuộc tuyến tính thì gọi là độc lập tuyến tính.

Định nghĩa 6.2

Cho hai hàm số $y_1(x), y_2(x)$. Định thức

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_2 y_1'$$

gọi là định thức Wronsky của y_1, y_2, ký hiệu là $W(y_1, y_2)$.

5.2.3.1 Phương trình tuyến tính thuần nhất

Định lý 6.4

Nếu hai hàm số $y_1(x), y_2(x)$ *phụ thuộc tuyến tính trên đoạn* $[a, b]$ *thì* $W(y_1, y_2) \equiv 0$ *trên đoạn đó.*

5.2.3.1 Phương trình tuyến tính thuần nhất

Định lý 6.4

Nếu hai hàm số $y_1(x), y_2(x)$ phụ thuộc tuyến tính trên đoạn $[a, b]$ thì $W(y_1, y_2) \equiv 0$ trên đoạn đó.

Định lý 6.5

Giả sử $y_1(x), y_2(x)$ là hai nghiệm của phương trình (22) và $x_0 \in [a, b]$.

- *Nếu $W(y_1, y_2)|_{x=x_0} \neq 0$ thì $W(y_1, y_2) \neq 0, \forall x \in [a, b]$.*
- *Nếu $W(y_1, y_2)|_{x=x_0} = 0$ thì $W(y_1, y_2) = 0, \forall x \in [a, b]$.*

5.2.3.1 Phương trình tuyến tính thuần nhất

Định lý 6.4

Nếu hai hàm số $y_1(x), y_2(x)$ phụ thuộc tuyến tính trên đoạn $[a, b]$ thì $W(y_1, y_2) \equiv 0$ trên đoạn đó.

Định lý 6.5

Giả sử $y_1(x), y_2(x)$ là hai nghiệm của phương trình (22) và $x_0 \in [a, b]$.

- *Nếu $W(y_1, y_2)|_{x=x_0} \neq 0$ thì $W(y_1, y_2) \neq 0, \forall x \in [a, b]$.*
- *Nếu $W(y_1, y_2)|_{x=x_0} = 0$ thì $W(y_1, y_2) = 0, \forall x \in [a, b]$.*

Định lý 6.6

Cho $y_1(x), y_2(x)$ là hai nghiệm của phương trình (22) độc lập tuyến tính trên đoạn $[a, b]$. Khi đó $W(y_1, y_2) \neq 0, \forall x \in [a, b]$.

5.2.3.1 Phương trình tuyến tính thuần nhất

Định lý 6.7

Cho $y_1(x), y_2(x)$ *là hai nghiệm* **độc lập tuyến tính** *của phương trình (22). Khi đó nghiệm tổng quát của phương trình (22) là*

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) \tag{23}$$

với C_1, C_2 *là các hằng số tùy ý.*

5.2.3.1 Phương trình tuyến tính thuần nhất

Định lý 6.7

Cho $y_1(x), y_2(x)$ là hai nghiệm **độc lập tuyến tính** *của phương trình (22). Khi đó nghiệm tổng quát của phương trình (22) là*

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) \tag{23}$$

với C_1, C_2 là các hằng số tùy ý.

Định lý 6.8

Nếu $y_1(x) \neq 0$ là một nghiệm riêng của phương trình (22) thì

$$y_2(x) = y_1(x) \int \frac{1}{[y_1(x)]^2} e^{-\int p(x)dx} dx \tag{24}$$

cũng là một nghiệm của (22) và y_1, y_2 độc lập tuyến tính.

5.2.3.1 Phương trình tuyến tính thuần nhất

Định lý 6.7

Cho $y_1(x), y_2(x)$ là hai nghiệm **độc lập tuyến tính** *của phương trình (22). Khi đó nghiệm tổng quát của phương trình (22) là*

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) \tag{23}$$

với C_1, C_2 là các hằng số tùy ý.

Định lý 6.8

Nếu $y_1(x) \neq 0$ là một nghiệm riêng của phương trình (22) thì

$$y_2(x) = y_1(x) \int \frac{1}{[y_1(x)]^2} e^{-\int p(x)dx} dx \tag{24}$$

cũng là một nghiệm của (22) và y_1, y_2 độc lập tuyến tính.

Từ đó ta tìm được nghiệm tổng quát của phương trình tuyến tính thuần nhất theo công thức (23).

5.2.3.2 Phương trình tuyến tính không thuần nhất

Xét phương trình tuyến tính không thuần nhất:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \tag{25}$$

Phương pháp biến thiên hàm số:

1. Tìm 2 nghiệm riêng $y_1(x), y_2(x)$ độc lập tuyến tính của phương trình tuyến tính thuần nhất (22).

5.2.3.2 Phương trình tuyến tính không thuần nhất

Xét phương trình tuyến tính không thuần nhất:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \tag{25}$$

Phương pháp biến thiên hàm số:

1. Tìm 2 nghiệm riêng $y_1(x), y_2(x)$ độc lập tuyến tính của phương trình tuyến tính thuần nhất (22).
2. Chọn $C_1(x)$, $C_2(x)$ sao cho:
   - $C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0$
   - $y = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)$ là nghiệm của (25).

5.2.3.2 Phương trình tuyến tính không thuần nhất

Xét phương trình tuyến tính không thuần nhất:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \tag{25}$$

Phương pháp biến thiên hàm số:

1. Tìm 2 nghiệm riêng $y_1(x), y_2(x)$ độc lập tuyến tính của phương trình tuyến tính thuần nhất (22).
2. Chọn $C_1(x)$, $C_2(x)$ sao cho:
   - $C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0$
   - $y = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)$ là nghiệm của (25).

   Từ hệ điều kiện đó, ta rút ra:

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0 \\ C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = f(x) \end{cases}$$

   Giải hệ ta được $C_1'(x) = \psi_1(x)$, $C_2'(x) = \psi_2(x)$, suy ra

$$C_1(x) = \int \psi_1(x)dx,\ C_2(x) = \int \psi_2(x)dx.$$

5.2.3.2 Phương trình tuyến tính không thuần nhất

Xét phương trình tuyến tính không thuần nhất:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \tag{25}$$

Phương pháp biến thiên hàm số:

1. Tìm 2 nghiệm riêng $y_1(x), y_2(x)$ độc lập tuyến tính của phương trình tuyến tính thuần nhất (22).
2. Chọn $C_1(x)$, $C_2(x)$ sao cho:
   - $C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0$
   - $y = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)$ là nghiệm của (25).

   Từ hệ điều kiện đó, ta rút ra:

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0 \\ C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = f(x) \end{cases}$$

   Giải hệ ta được $C_1'(x) = \psi_1(x)$, $C_2'(x) = \psi_2(x)$, suy ra
   $C_1(x) = \int \psi_1(x)dx$, $C_2(x) = \int \psi_2(x)dx$.

Từ đó ta được nghiệm của phương trình tuyến tính không thuần nhất (25) là

$$y = y_1 \int \psi_1(x)dx + y_2 \int \psi_2(x)dx. \tag{26}$$

5.2.3.3 Phương trình tuyến tính thuần nhất có hệ số hằng

Xét phương trình tuyến tính thuần nhất:

$$y'' + py' + qy = 0 \tag{27}$$

với p, q là những hằng số.

5.2.3.3 Phương trình tuyến tính thuần nhất có hệ số hằng

Xét phương trình tuyến tính thuần nhất:

$$y'' + py' + qy = 0 \tag{27}$$

với p, q là những hằng số.
Ta tìm nghiệm riêng của (27) dạng $y = e^{kx}$. Thay vào phương trinh (27) ta được

$$e^{kx}(k^2 + pk + q) = 0 \Leftrightarrow k^2 + pk + q = 0. \tag{28}$$

Phương trình (28) gọi là *phương trình đặc trưng* của (27).

5.2.3.3 Phương trình tuyến tính thuần nhất có hệ số hằng

Xét phương trình tuyến tính thuần nhất:

$$y'' + py' + qy = 0 \tag{27}$$

với p, q là những hằng số.
Ta tìm nghiệm riêng của (27) dạng $y = e^{kx}$. Thay vào phương trinh (27) ta được

$$e^{kx}(k^2 + pk + q) = 0 \Leftrightarrow k^2 + pk + q = 0. \tag{28}$$

Phương trình (28) gọi là *phương trình đặc trưng* của (27).
Đặt $\Delta = p^2 - 4q$, có những trường hợp sau:
• $\Delta > 0$: Phương trình (28) có 2 nghiệm thực phân biệt $k_1 \neq k_2$, khi đó phương trình (27) có 2 nghiệm riêng tương ứng là

$$y_1 = e^{k_1 x} \text{ và } y_2 = e^{k_2 x}.$$

5.2.3.3 Phương trình tuyến tính thuần nhất có hệ số hằng

Xét phương trình tuyến tính thuần nhất:

$$y'' + py' + qy = 0 \qquad (27)$$

với p, q là những hằng số.
Ta tìm nghiệm riêng của (27) dạng $y = e^{kx}$. Thay vào phương trinh (27) ta được

$$e^{kx}(k^2 + pk + q) = 0 \Leftrightarrow k^2 + pk + q = 0. \qquad (28)$$

Phương trình (28) gọi là *phương trình đặc trưng* của (27).
Đặt $\Delta = p^2 - 4q$, có những trường hợp sau:
• $\Delta > 0$: Phương trình (28) có 2 nghiệm thực phân biệt $k_1 \neq k_2$, khi đó phương trình (27) có 2 nghiệm riêng tương ứng là

$$y_1 = e^{k_1 x} \text{ và } y_2 = e^{k_2 x}.$$

Hai nghiệm này độc lập tuyến tính, do đó nghiệm tổng quát của (27) là

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}.$$

5.2.3.3 Phương trình tuyến tính thuần nhất có hệ số hằng

- $\Delta = 0$: Phương trình (28) có nghiệm kép $k_1 = k_2 = -\dfrac{p}{2}$, khi đó phương trình (27) có 2 nghiệm riêng độc lập tuyến tính là

$$y_1 = e^{-\frac{p}{2}x} \text{ và } y_2 = y_1 \int \frac{1}{(y_1)^2} e^{-\int p dx} dx = xe^{-\frac{p}{2}x}.$$

5.2.3.3 Phương trình tuyến tính thuần nhất có hệ số hằng

• $\Delta = 0$: Phương trình (28) có nghiệm kép $k_1 = k_2 = -\dfrac{p}{2}$, khi đó phương trình (27) có 2 nghiệm riêng độc lập tuyến tính là

$$y_1 = e^{-\frac{p}{2}x} \text{ và } y_2 = y_1 \int \frac{1}{(y_1)^2} e^{-\int p dx} dx = x e^{-\frac{p}{2}x}.$$

Do đó nghiệm tổng quát của (27) trong trường hợp này là

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = e^{-\frac{p}{2}x}(C_1 + C_2 x).$$

• $\Delta < 0$: Phương trình (28) có 2 nghiệm phức $k_1 = a + ib, k_2 = a - ib$, khi đó (27) có 2 nghiệm riêng là

$$\bar{y_1} = e^{(a+ib)x} = e^{ax}e^{ibx} = e^{ax}(\cos bx + i \sin bx)$$
$$\bar{y_2} = e^{(a-ib)x} = e^{ax}e^{-ibx} = e^{ax}(\cos bx - i \sin bx).$$

5.2.3.3 Phương trình tuyến tính thuần nhất có hệ số hằng

• $\Delta = 0$: Phương trình (28) có nghiệm kép $k_1 = k_2 = -\dfrac{p}{2}$, khi đó phương trình (27) có 2 nghiệm riêng độc lập tuyến tính là

$$y_1 = e^{-\frac{p}{2}x} \text{ và } y_2 = y_1 \int \frac{1}{(y_1)^2} e^{-\int p dx} dx = xe^{-\frac{p}{2}x}.$$

Do đó nghiệm tổng quát của (27) trong trường hợp này là

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = e^{-\frac{p}{2}x}(C_1 + C_2 x).$$

• $\Delta < 0$: Phương trình (28) có 2 nghiệm phức $k_1 = a + ib, k_2 = a - ib$, khi đó (27) có 2 nghiệm riêng là

$$\bar{y_1} = e^{(a+ib)x} = e^{ax} e^{ibx} = e^{ax}(\cos bx + i \sin bx)$$
$$\bar{y_2} = e^{(a-ib)x} = e^{ax} e^{-ibx} = e^{ax}(\cos bx - i \sin bx).$$

Đặt $y_1 = \dfrac{\bar{y_1} + \bar{y_2}}{2} = e^{ax} \cos bx$ và $y_2 = \dfrac{\bar{y_1} - \bar{y_2}}{2i} = e^{ax} \sin bx$ thì y_1, y_2 cũng là 2 nghiệm riêng của (27) độc lập tuyến tính, do đó nghiệm tổng quát của (27) là

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = e^{ax}(C_1 \cos bx + C_2 \sin bx).$$

5.2.3.3 Phương trình không thuần nhất có hệ số hằng

Xét phương trình tuyến tính thuần nhất:

$$y'' + py' + qy = f(x) \tag{29}$$

với p, q là những hằng số.

5.2.3.3 Phương trình không thuần nhất có hệ số hằng

Xét phương trình tuyến tính thuần nhất:

$$y'' + py' + qy = f(x) \tag{29}$$

với p, q là những hằng số.

- *Phương pháp biến thiên hàm số:* ta tìm nghiệm của (29) theo các bước sau:
  1. Tìm 2 nghiệm riêng y_1, y_2 độc lập tuyến tính của pttt thuần nhất (27).
  2. Tìm $C_1(x), C_2(x)$ thỏa mãn hệ $\begin{cases} C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0 \\ C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = f(x) \end{cases}$

     Giải hệ ta được $C_1'(x) = \psi_1(x), C_2'(x) = \psi_2(x)$, suy ra

     $$C_1(x) = \int \psi_1(x)dx, C_2(x) = \int \psi_2(x)dx.$$

Từ đó ta được nghiệm tổng quát của phương trình (29) là

$$y = y_1 \int \psi_1(x)dx + y_2 \int \psi_2(x)dx.$$

5.2.3.3 Phương trình không thuần nhất có hệ số hằng

Định lý 6.9

Nếu Y_1 là nghiệm tổng quát của phương trình tuyến tính thuần nhất (22) và Y_2 là một nghiệm riêng của phương trình tuyến tính không thuần nhất (25) thì nghiệm tổng quát của (25) là

$$y = Y_1 + Y_2.$$

5.2.3.3 Phương trình không thuần nhất có hệ số hằng

Định lý 6.9

Nếu Y_1 là nghiệm tổng quát của phương trình tuyến tính thuần nhất (22) và Y_2 là một nghiệm riêng của phương trình tuyến tính không thuần nhất (25) thì nghiệm tổng quát của (25) là

$$y = Y_1 + Y_2.$$

Ta sẽ áp dụng kết quả trên để tìm nghiệm của phương trình tuyến tính với hệ số hằng (29) có hàm $f(x)$ ở các dạng đặc biệt sau:

1. $f(x) = e^{ax} P_n(x)$, với $a \in \mathbb{R}$ và $P_n(x)$ là một đa thức bậc n.
2. $f(x) = P_m(x) \cos bx + P_n(x) \sin bx$, với $b \in \mathbb{R}$ và $P_m(x), P_n(x)$ là các đa thức bậc m và n tương ứng.

Giả sử đã tìm được nghiệm tổng quát Y_1 của phương trình thuần nhất (27).
Ta tìm một nghiệm riêng Y_2 của (29) theo phương pháp *hệ số bất định* như sau.

5.2.3.3 Phương trình không thuần nhất có hệ số hằng

- *Trường hợp 1:* $f(x) = e^{ax}P_n(x)$, với $a \in \mathbb{R}$ và $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ là một đa thức bậc n.

1. Nếu a không là nghiệm của phương trình đặc trưng (28):

$$Y_2 = e^{ax}Q_n(x), \text{ với } Q_n(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k \text{ là một đa thức bậc } n.$$

   Thay vào phương trình (29) rồi đồng nhất hệ số, ta tìm được $Q_n(x)$.

5.2.3.3 Phương trình không thuần nhất có hệ số hằng

- *Trường hợp 1:* $f(x) = e^{ax}P_n(x)$, với $a \in \mathbb{R}$ và $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ là một đa thức bậc n.

1. Nếu a không là nghiệm của phương trình đặc trưng (28):

   $$Y_2 = e^{ax}Q_n(x), \text{ với } Q_n(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k \text{ là một đa thức bậc } n.$$

   Thay vào phương trình (29) rồi đồng nhất hệ số, ta tìm được $Q_n(x)$.
2. Nếu a là một nghiệm đơn của phương trình đặc trưng (28): $Y_2 = xe^{ax}Q_n(x)$.

5.2.3.3 Phương trình không thuần nhất có hệ số hằng

- *Trường hợp 1:* $f(x) = e^{ax}P_n(x)$, với $a \in \mathbb{R}$ và $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ là một đa thức bậc n.

1. Nếu a không là nghiệm của phương trình đặc trưng (28):
$$Y_2 = e^{ax}Q_n(x), \text{ với } Q_n(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k \text{ là một đa thức bậc } n.$$
Thay vào phương trình (29) rồi đồng nhất hệ số, ta tìm được $Q_n(x)$.
2. Nếu a là một nghiệm đơn của phương trình đặc trưng (28): $Y_2 = xe^{ax}Q_n(x)$.
3. Nếu a là nghiệm kép của phương trình đặc trưng (28): $Y_2 = x^2e^{ax}Q_n(x)$.

5.2.3.3 Phương trình không thuần nhất có hệ số hằng

- *Trường hợp 1:* $f(x) = e^{ax}P_n(x)$, với $a \in \mathbb{R}$ và $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ là một đa thức bậc n.
  1. Nếu a không là nghiệm của phương trình đặc trưng (28):
     $$Y_2 = e^{ax}Q_n(x), \text{ với } Q_n(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k \text{ là một đa thức bậc } n.$$
     Thay vào phương trình (29) rồi đồng nhất hệ số, ta tìm được $Q_n(x)$.
  2. Nếu a là một nghiệm đơn của phương trình đặc trưng (28): $Y_2 = xe^{ax}Q_n(x)$.
  3. Nếu a là nghiệm kép của phương trình đặc trưng (28): $Y_2 = x^2e^{ax}Q_n(x)$.
- *Trường hợp 2:* $f(x) = P_m(x)\cos bx + P_n(x)\sin bx$.
  1. Nếu $\pm ib$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng (28):
     $$Y_2 = Q_M(x)\cos bx + R_M(x)\sin bx, \text{ với } M = \max\{m, n\}.$$
     Thay vào phương trình (29) rồi đồng nhất hệ số, ta tìm được $Q_M(x), R_M(x)$.

5.2.3.3 Phương trình không thuần nhất có hệ số hằng

- *Trường hợp 1:* $f(x) = e^{ax}P_n(x)$, với $a \in \mathbb{R}$ và $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ là một đa thức bậc n.
  1. Nếu a không là nghiệm của phương trình đặc trưng (28):
  $$Y_2 = e^{ax}Q_n(x), \text{ với } Q_n(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k \text{ là một đa thức bậc } n.$$
  Thay vào phương trình (29) rồi đồng nhất hệ số, ta tìm được $Q_n(x)$.
  2. Nếu a là một nghiệm đơn của phương trình đặc trưng (28): $Y_2 = xe^{ax}Q_n(x)$.
  3. Nếu a là nghiệm kép của phương trình đặc trưng (28): $Y_2 = x^2e^{ax}Q_n(x)$.
- *Trường hợp 2:* $f(x) = P_m(x)\cos bx + P_n(x)\sin bx$.
  1. Nếu $\pm ib$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng (28):
  $$Y_2 = Q_M(x)\cos bx + R_M(x)\sin bx, \text{ với } M = \max\{m, n\}.$$
  Thay vào phương trình (29) rồi đồng nhất hệ số, ta tìm được $Q_M(x), R_M(x)$.
  2. Nếu $\pm ib$ là nghiệm của phương trình đặc trưng (28) $\Leftrightarrow p = 0, q = b^2$:
  $$Y_2 = x[Q_M(x)\cos bx + R_M(x)\sin bx].$$

5.2.3.3 Phương trình không thuần nhất có hệ số hằng

Chú ý 6.1

1. *Nếu* y_1, y_2 *tương ứng là nghiệm riêng của 2 phương trình*
$$y'' + py' + qy = f_1(x) \text{ và } y'' + py' + qy = f_2(x)$$
thì $y = y_1 + y_2$ *là một nghiệm riêng của phương trình*
$$y'' + py' + qy = f_1(x) + f_2(x).$$

5.2.3.3 Phương trình không thuần nhất có hệ số hằng

Chú ý 6.1

1. *Nếu* y_1, y_2 *tương ứng là nghiệm riêng của 2 phương trình*
$$y'' + py' + qy = f_1(x) \text{ và } y'' + py' + qy = f_2(x)$$
thì $y = y_1 + y_2$ *là một nghiệm riêng của phương trình*
$$y'' + py' + qy = f_1(x) + f_2(x).$$
2. *Nếu* $f(x) = e^{ax}[P_m(x)\cos bx + P_n(x)\sin bx]$ *thì bằng cách đặt* $y = e^{ax}z$, *ta đưa phương trình về dạng trên theo biến* z.

5.2.3.3 Phương trình không thuần nhất có hệ số hằng

Chú ý 6.1

1. *Nếu y_1, y_2 tương ứng là nghiệm riêng của 2 phương trình*
$$y'' + py' + qy = f_1(x) \text{ và } y'' + py' + qy = f_2(x)$$
thì $y = y_1 + y_2$ là một nghiệm riêng của phương trình
$$y'' + py' + qy = f_1(x) + f_2(x).$$
2. *Nếu $f(x) = e^{ax}[P_m(x)\cos bx + P_n(x)\sin bx]$ thì bằng cách đặt $y = e^{ax}z$, ta đưa phương trình về dạng trên theo biến z.*
3. *Có thể áp dụng các phương pháp tìm nghiệm tổng quát của phương trình tuyến tính bậc 2 cho các phương trình tuyến tính có bậc cao hơn.*

5.2.3.3 Phương trình không thuần nhất có hệ số hằng

Chú ý 6.1

1. *Nếu y_1, y_2 tương ứng là nghiệm riêng của 2 phương trình*
$$y'' + py' + qy = f_1(x) \text{ và } y'' + py' + qy = f_2(x)$$
thì $y = y_1 + y_2$ là một nghiệm riêng của phương trình
$$y'' + py' + qy = f_1(x) + f_2(x).$$
2. *Nếu $f(x) = e^{ax}[P_m(x)\cos bx + P_n(x)\sin bx]$ thì bằng cách đặt $y = e^{ax}z$, ta đưa phương trình về dạng trên theo biến z.*
3. *Có thể áp dụng các phương pháp tìm nghiệm tổng quát của phương trình tuyến tính bậc 2 cho các phương trình tuyến tính có bậc cao hơn.*

- *Phương trình Euler:* phương trình thuần nhất có hệ số biến thiên dạng
$$x^2y'' + axy' + by = 0.$$

Đặt $x = e^t$, ta đưa phương trình về dạng thuần nhất với hệ số hằng
$$y''(t) + (a-1)y'(t) + by(t) = 0.$$