Vectơ ngẫu nhiên

Véctơ ngẫu nhiên

Khái niệm

Cho $X_1, X_2, \ldots, X_n$ là các biến ngẫu nhiên. Khi đó, véctơ

$$X = (X_1, X_2, \ldots, X_n) \in \mathbb{R}^n$$

được gọi là vectơ ngẫu nhiên n chiều.

- X là véctơ ngẫu nhiên rời rạc: các X_k là rời rạc
- X là véctơ ngẫu nhiên liên tục: các X_k là liên tục

Câu hỏi:

Nếu ta biết được phân bố xác suất của mỗi biến ngẫu nhiên X_k thì có thể "KIỂM SOÁT" được véctơ X hay không? Chẳng hạn ta muốn tính

$$P(X \in A), \quad \text{với } A \text{ là một tập con của } \mathbb{R}^n.$$

Phân bố xác suất đồng thời

Giả sử $X = (X_1, \dots, X_n)$ là một véctơ ngẫu nhiên n chiều. Hàm số

$$F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

xác định bởi

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \dots, X_n \leq x_n)$$

được gọi là hàm phân bố tích lũy đồng thời của các biến ngẫu X_k

Phân bố xác suất đồng thời

- Cho X, Y là các biến ngẫu nhiên rời rạc. Hàm xác suất đồng thời của X, Y được xác định bởi

$$f_{X,Y}(x,y) = P(X = x, Y = y).$$

Bảng phân phối xác suất đồng thời

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\cdots$	y_m
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1m}
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2m}
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
x_n	p_{n1}	p_{n2}	$\cdots$	p_{nm}

trong đó $p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j)$.

Phân phối xác suất đồng thời

- **Chú ý:** Ta có thể xác định phân phối xác suất của các biến ngẫu nhiên thành phần (phân phối lề) từ hàm phân phối xác suất đồng thời

$$P_X(x_i) = P(X = x_i) = \sum_{j=1}^{m} P(x_i, y_j)$$

$$P_Y(y_j) = P(Y = y_j) = \sum_{i=1}^{n} P(x_i, y_j)$$

Phân phối xác suất đồng thời

- Cho X, Y là các biến ngẫu nhiên liên tục. Hàm mật độ xác suất đồng thời của X, Y là hàm $f(x, y)$ thỏa các điều kiện sau

  1. $f(x, y) \geq 0$
  2. $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} f(x, y)dxdy = 1$
  3. Với $A \subset \mathbb{R}^2$ ta có $P(A) = \displaystyle\int_A f(x, y)dxdy$

- Tương tự trường hợp rời rạc, ta có thể xác định các phân phối thành phần từ phân phối xác suất đồng thời

$$f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x, y)dy, \quad f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x, y)dx$$

Phân phối xác suất có điều kiện

- Cho X, Y là các biến ngẫu nhiên rời rạc.

  Xác suất của X với điều kiện cho trước $\{Y = y_j\}$

  $$P(X = x_i | Y = y_j) = \frac{P(x_i, y_j)}{P_Y(y_j)}.$$

  Xác suất của Y khi đã biết $\{X = x_i\}$

  $$P(Y = y_j | X = x_i) = \frac{P(x_i, y_j)}{P_X(x_i)}.$$

Phân phối xác suất có điều kiện

- Nếu X, Y là hai biến ngẫu nhiên liên tục với hàm mật độ đồng thời f.

  Hàm mật độ xác suất có điều kiện của Y khi đã biết $X = x$

$$f_Y(y|x) = \begin{cases} \dfrac{f(x,y)}{f_X(x)}, & f_X(x) > 0 \\ 0, & \text{các trường hợp khác} \end{cases}$$

Hàm mật độ xác suất có điều kiện của Y khi đã biết $X = x$

$$f_Y(y|x) = \begin{cases} \dfrac{f(x,y)}{f_X(x)}, & f_X(x) > 0 \\ 0, & \text{các trường hợp khác} \end{cases}$$

Tính độc lập

- Cho X, Y là hai biến ngẫu nhiên rời rạc. Ta nói X và Y độc lập nếu

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x).P(Y = y)$$

  với mọi X, Y.

- Tương tự, hai biến ngẫu nhiên liên tục X, Y là độc lập nếu

$$f(x, y) = f_X(x) f_Y(y), \quad \text{với mọi } x, y$$

- Nếu X, Y là độc lập thì ta có

$$E[XY] = E[X]E[Y]$$

Các ví dụ

Ví dụ 1 Một chương trình bao gồm hai mô-đun. Đặt X là số lỗi trong mô-đun 1 và Y là số lỗi trong mô-đun 2 có xác suất đồng thời như sau

$$P(0,0) = P(0,1) = P(1,0) = 0,2; P(1,1) = P(1,2) = P(1,3) = 0,1;$$

$$P(0,2) = P(0,3) = 0,05.$$

a. Tìm phân phối xác suất thành phần của X.

b. Tìm phân phối của tổng số lỗi trong chương trình.

c. Các lỗi trong hai mô-đun có xảy ra độc lập hay không?

d. Giả sử chương trình có lỗi. Tính xác suất mô-đun 1 có lỗi.

e. Giả sử mô-đun 1 có lỗi. Tính xác suất mô-đun 2 có lỗi.

Ví dụ 2 Hàm mật độ xác suất đồng thời của các biến ngẫu nhiên X và Y được cho như sau

$$f(x,y) = \begin{cases} Ce^{-x}e^{-2y}, & x > 0, y > 0 \\ 0, & \text{các trường hợp khác} \end{cases}$$

a. Tìm C.

b. Tính $P(X > 1, Y < 1)$.

c. Tính $P(X < Y)$.

d. Tìm hàm mật độ thành phần của X.

Ví dụ 3 Cho X, Y là các biến ngẫu nhiên liên tục có hàm mật độ xác suất đồng thời như sau

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2}{5}(2x+3y) & , 0 \le x, y \le 1, \\ 0 & , \text{ các trường hợp còn lại} \end{cases}$$

a. Tìm hàm mật độ có điều kiện $f_Y(y|x)$.

b. Tính $P(0,25 < Y < 1|X = 0,75)$.

Bài tập 1. Cho X, Y là các biến ngẫu nhiên và hàm số

$$f(x,y) = \begin{cases} 10x^2y, & 0 \le y \le x \le 1 \\ 0, & \text{các trường hợp khác} \end{cases}$$

a. Chứng tỏ rằng (X, Y) có hàm mật độ đồng thời là $f(x, y)$.

b. Tính $P\left(Y \ge \dfrac{1}{2}X\right)$.

c. Tìm hàm mật độ thành phần của X, Y.

d. Tìm hàm mật độ có điều kiện $f_X(x|y), f_Y(y|x)$.

e. Tính $P(Y < 0,125|X = 0,25)$.

Kỳ vọng, hiệp phương sai và hệ số tương quan

- Cho X, Y là các biến ngẫu nhiên và một hàm $h(X, Y)$. Kỳ vọng của hàm $h(X, Y)$, ký hiệu là $E(h(X, Y))$, được xác định như sau

1. Nếu X, Y là các biến ngẫu nhiên rời rạc thì

$$E(h(X, Y)) = \sum_{x} \sum_{y} h(x, y) P(x, y)$$

2. Nếu X, Y là các biến ngẫu nhiên liên tục có hàm mật độ đồng thời f thì

$$E(h(X, Y)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h(x, y) f(x, y) dx dy$$

Kỳ vọng, hiệp phương sai và hệ số tương quan

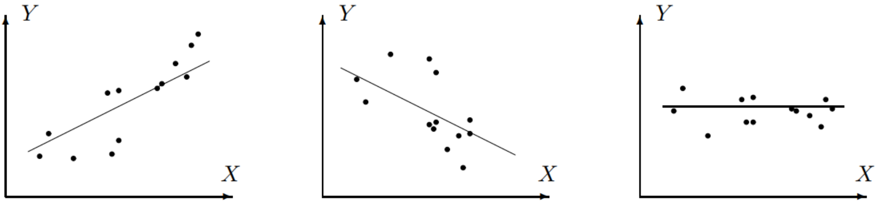
- **Hiệp phương sai** của X và Y, ký hiệu $\mathrm{Cov}(X, Y)$, được xác định bởi

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = E((X - E(X))(Y - E(Y))) = E(XY) - E(X)E(Y).$$

- **Hệ số tương quan** của X, Y được xác định như sau

$$\rho(X, Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}}$$

- Nếu $\mathrm{Cov}(X, Y) > 0$ thì X và Y có quan hệ đồng biến.
- Nếu $\mathrm{Cov}(X, Y) < 0$ thì X và Y có quan hệ nghịch biến.
- Nếu $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$ thì ta nói X, Y không *tương quan*.



(a) $\mathrm{Cov}(X,Y) > 0$ (b) $\mathrm{Cov}(X,Y) < 0$ (c) $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$

- Nếu $|\rho| = 1$ thì ta nói các điểm (x_i, y_j) nằm trên một đường thẳng.
- Nếu ρ gần 1 thì ta nói X, Y có tương quan dương mạnh.
- Nếu ρ gần -1 thì ta nói X, Y có tương quan âm mạnh.
- Nếu ρ gần 0 thì ta nói X, Y có tương quan yếu hoặc không tương quan.

Ví dụ 4 Cho X, Y là các biến ngẫu nhiên liên tục và hàm mật độ xác suất đồng thời

$$f(x,y) = \begin{cases} 2, & x + y \leq 1, x > 0, y > 0 \\ 0, & \text{các trường hợp khác} \end{cases}$$

Tính $\mathrm{Cov}(X, Y)$ và $\rho(X, Y)$.

Kỳ vọng, hiệp phương sai và hệ số tương quan

Mệnh đề

1. $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathrm{Cov}(Y, X)$
2. $\rho(X, Y) = \rho(Y, X)$
3. $\mathrm{Cov}(aX + b, cY + d) = ac\mathrm{Cov}(X, Y)$
4. $\rho(aX + b, cY + d) = \rho(X, Y)$
5. Nếu X, Y độc lập thì $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$.

Bài tập 2. Cho hàm mật độ xác suất đồng thời của X, Y như sau

$$f(x,y) = \begin{cases} 6x, & 0 < x < 1, 0 < y < 1 - x \\ 0, & \text{các trường hợp khác} \end{cases}$$

a. Tính trung bình thành phần của X, Y.
b. Tính $P(X > 0,3 | Y = 0,5)$.
c. X, Y có độc lập không?
d. Tính $P(X + Y \leq 0,5), P(Y \geq 0,5)$.

Bài tập 3. Cho hàm mật độ xác suất đồng thời của X, Y như sau

$$f(x,y) = \begin{cases} Cx^2y, & 0 \le y \le x \le 1 \\ 0, & \text{các trường hợp khác} \end{cases}$$

a. Tìm C.
b. Tính $P(Y \ge \frac{1}{2}X)$.
c. Tìm hàm mật độ thành phần của X, Y.
d. Tính trung bình thành phần của X, Y.
e. X, Y có độc lập không?
f. Tìm hàm mật độ có điều kiện $f_X(x|y)$.
g. Tính $P(Y > 1|X = \frac{1}{3})$.
h. Tính $P(X > \frac{1}{3}|Y > \frac{1}{4})$.