

Нормальное распределение и его свойства.

Основы корреляционного анализа

Выборочные статистики

Как устроен мир



X

- Теория вероятностей изучает различные процессы порождения данных (некоторый сундук). В реальности мы не наблюдаем эти процессы.
- Однако эти процессы порождает **выборки**. Математическая статистика изучает их свойства и пытается восстановить структуру.

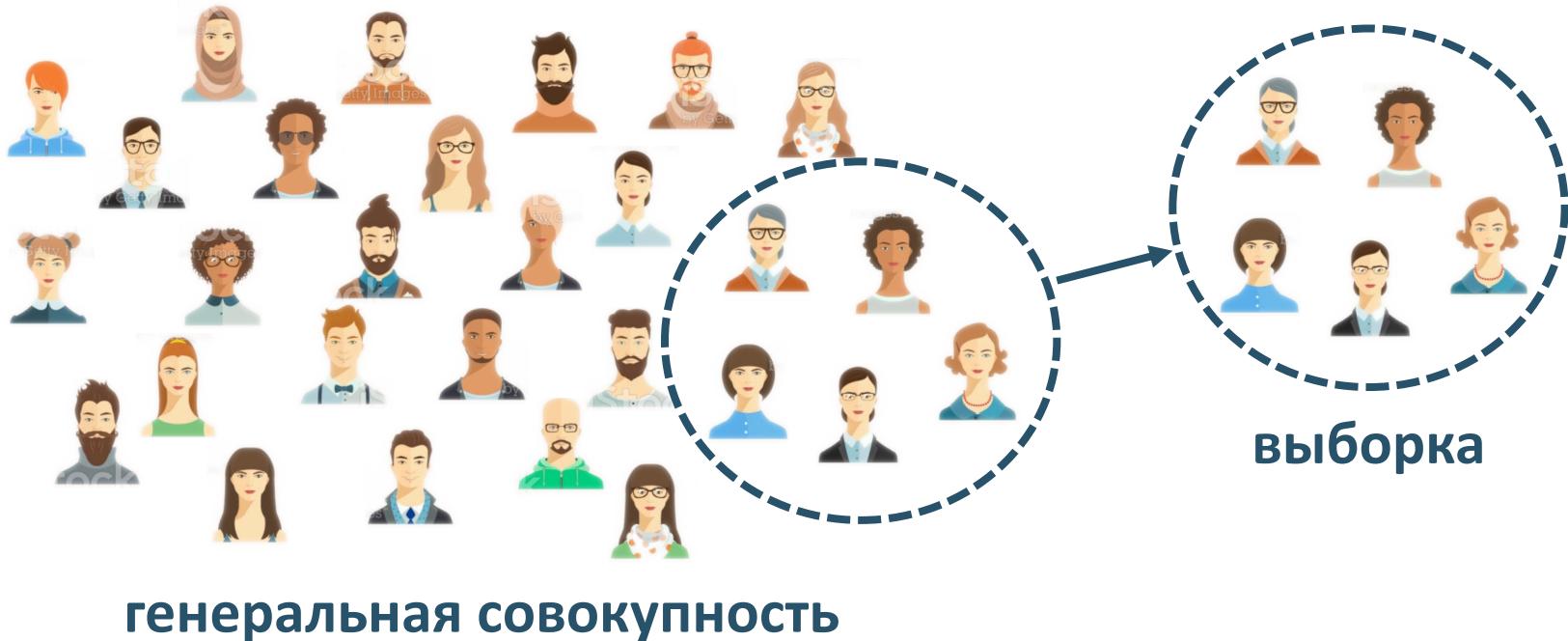
Генеральная совокупность и выборка

Генеральная совокупность – это все объекты, которые нас интересуют при исследовании

Выборка – это та часть генеральной совокупности, по которой мы собрали данные для исследования

Генеральная совокупность и выборка

- В городе живёт 1 млн. человек
- Провели опрос об уровне дохода (2.5 тыс. человек)
- Опубликовали средний доход по городу
- Опрашивать абсолютно всех людей в городе долго



Репрезентативность

- Выборки позволяют сделать выводы о всей генеральной совокупности
- Чтобы выводы были корректными, выборка должны быть **репрезентативной**
- **Репрезентативная выборка** – отражает свойства генеральной совокупности

Пример: Добрыня, Илья и Алёна исследуют рост людей.
Чья выборка репрезентативна?

- Добрыня опросил свою баскетбольную команду
- Илья опросил людей на остановке
- Алёна опросила всех своих подруг

Репрезентативность

- Выборки позволяют сделать выводы о всей генеральной совокупности
- Чтобы выводы были корректными, выборка должны быть **репрезентативной**
- **Репрезентативная выборка** – отражает свойства генеральной совокупности

Пример: Добрыня, Илья и Алёна исследуют рост людей.
Чья выборка репрезентативна?

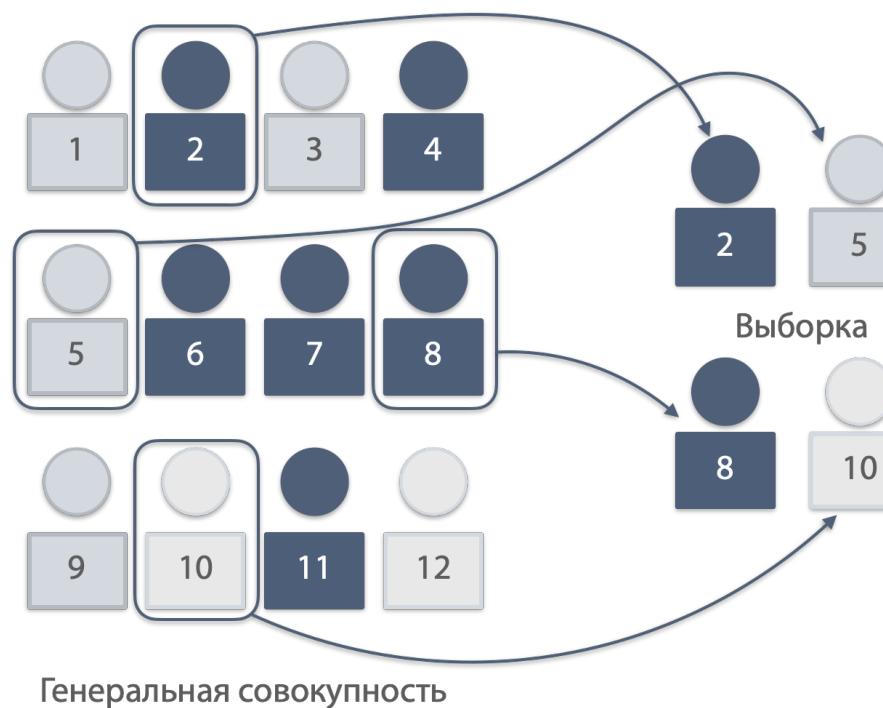
нет • Добрыня опросил свою баскетбольную команду

да • Илья опросил людей на остановке

нет • Алёна опросила всех своих подруг

Выборку бы, да репрезентативную бы

- Репрезентативность выборки определяет, насколько корректно делать выводы о всей генеральной совокупности, опираясь только на неё
- Один из способов достижения репрезентативности: случайный отбор наблюдений



Предпосылки

Выборка: X_1, X_2, \dots, X_n

Размер выборки

Одно наблюдение: X_i

- Каждое наблюдение можно рассматривать как случайную величину, которая имеет такое же распределение как и генеральная совокупность

Мы в дальнейшем будем всегда предполагать:

1. Наблюдения X_1, X_2, \dots, X_n независимы друг от друга
2. Наблюдения имеют одинаковое распределение (как у генеральной совокупности)

Краткая запись: $X_1, X_2, \dots, X_n \sim iid$

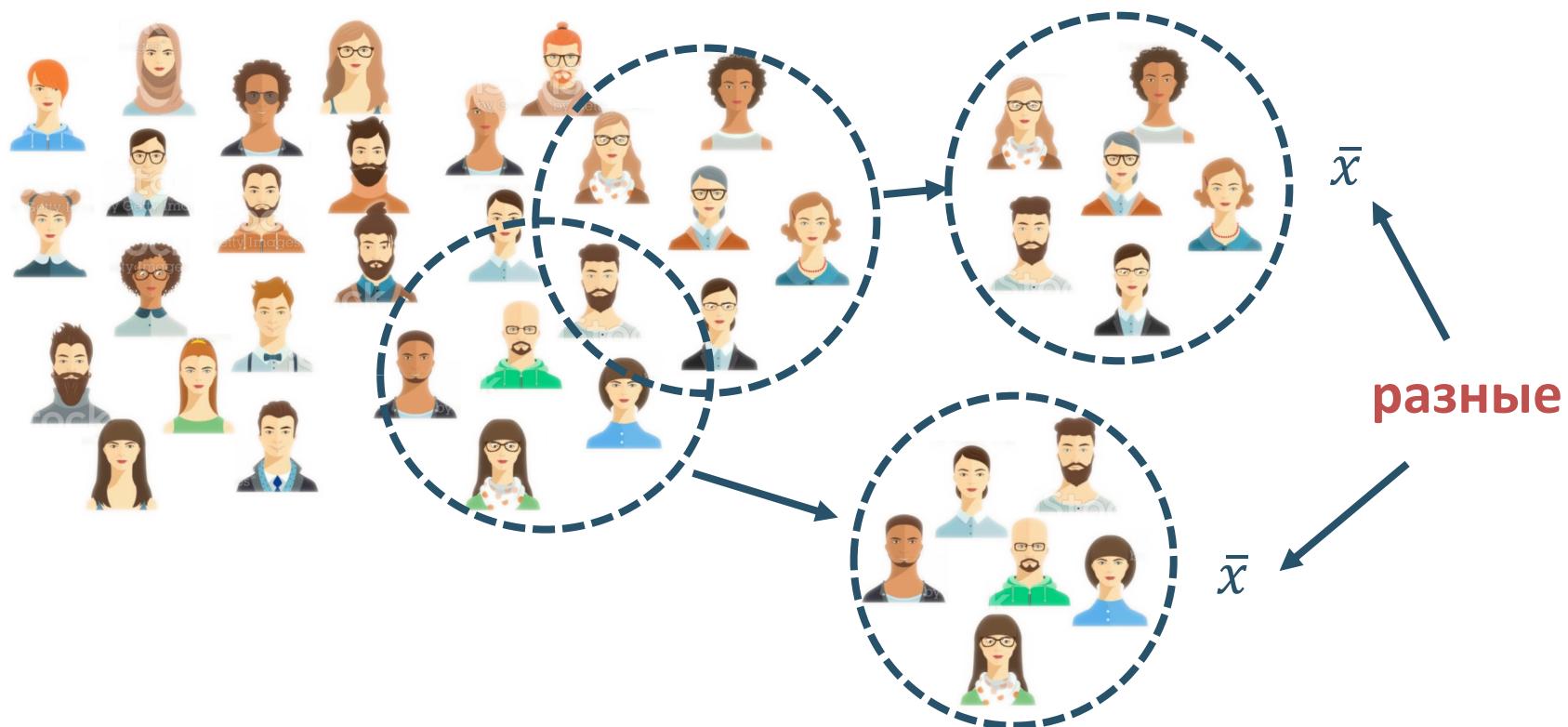
► *iid* расшифровывается как *identically independently distributed* (независимы и одинаково распределены)

Статистика

Выборка: $X_1, X_2, \dots, X_n \sim iid$

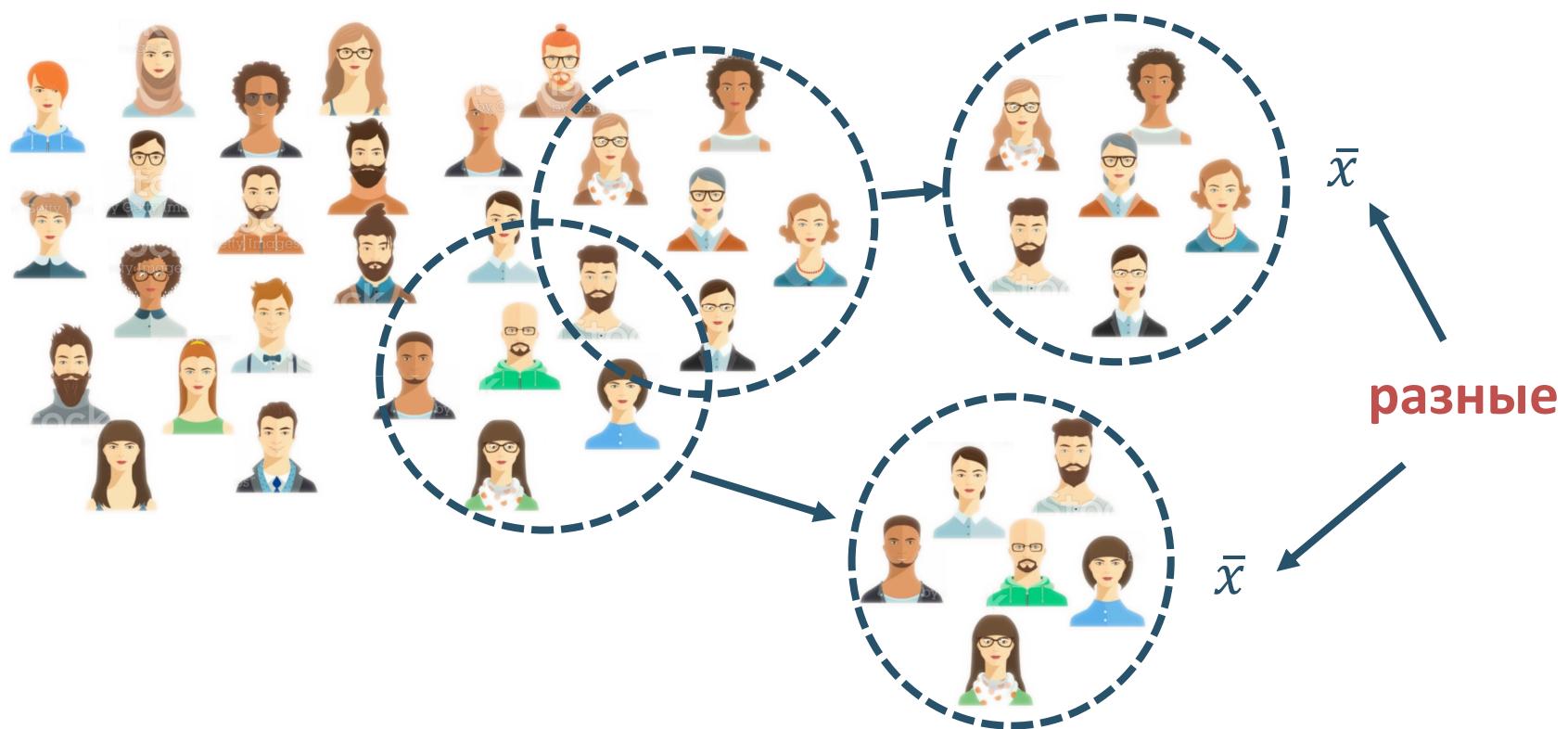
Статистика – любая функция от наблюдений

Примеры: среднее, медиана, максимум и т.п.



Статистика

Каждая статистика – случайная величина, так как она вычисляется на основе случайной выборки, т.е. на основе других случайных величин



Статистика

Каждая статистика – случайная величина, так как она вычисляется на основе случайной выборки, т.е. на основе других случайных величин

- ! Мы будем рассматривать любые статистики, посчитанные на основе выборки как случайные величины и изучать их свойства

Выборка

	Название	Сборы	Год
0	Мстители: Война бесконечности (2018)	2048359754	2018
1	Черная Пантера (2018)	1346913161	2018
2	Мир Юрского периода 2 (2018)	1309484461	2018
3	Суперсемейка 2 (2018)	1242805359	2018

- Строчка таблицы – наблюдение
- Столбец таблицы – переменная

Какими бывают переменные

Переменные



Категориальные

Принимают значения из какого-то ограниченного множества: пол, цвет машины, страна сборки и т.п.

Непрерывные

Могут принимать бесконечное число значений: возраст, вес, цены, кассовые сборы и т.п.

Какими бывают описательные статистики

Описательные статистики



Меры центральной тенденции

Отвечают на вопрос
“а на что похожи типичные
наблюдения из выборки”

Примеры: среднее, мода,
медиана



Меры разброса

Отвечают на вопрос
“а как сильно значения
в выборке могут отличаться от
типовых значений”

Примеры: дисперсия,
стандартное отклонение,
интерквантильный размах

Среднее

Выборочный аналог математического ожидания, рассчитывается по формуле:

$$\bar{x} = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

Пример: $x_1 = 1, x_2 = 5, x_3 = -4, x_4 = 3, x_5 = 0$

$$\bar{x} = \frac{1 + 5 + (-4) + 3 + 0}{5} = 1$$

Медиана

Чтобы найти медиану, данные нужно расположить в порядке возрастания. Медианой будет значение, которое оказалось в середине.

Пример 1: $x_1 = 1, x_2 = 5, x_3 = -4, x_4 = 3, x_5 = 0$

$$-4, 0, \textcolor{pink}{1}, 3, 5 \Rightarrow med = 1$$

Если число значений чётное, берётся среднее двух значений, которые «окружают» середину

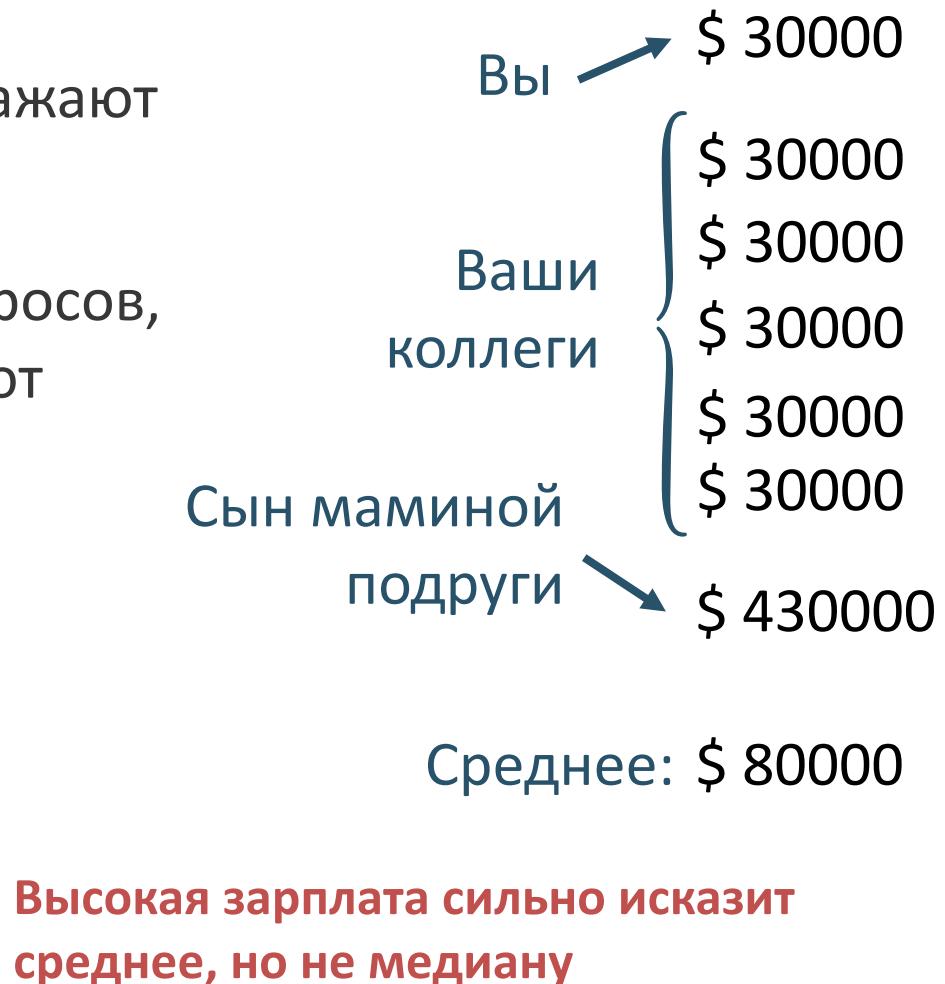
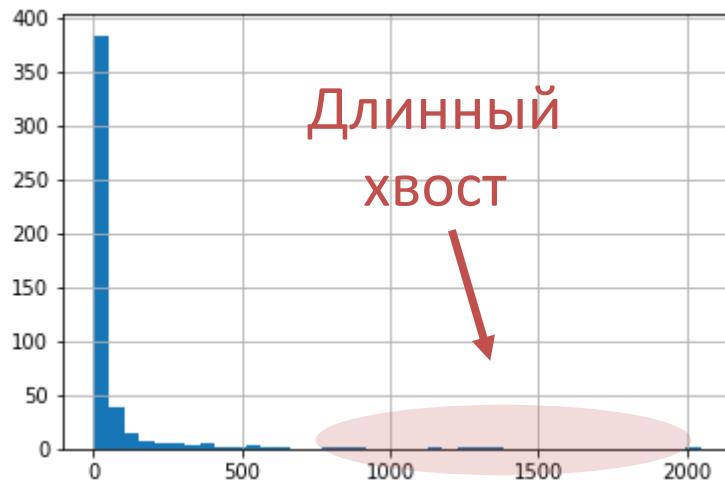
Пример 2: $x_1 = 1, x_2 = 5, x_3 = -4, x_4 = 3$

$$-4, \textcolor{pink}{1}, 3, 5 \Rightarrow med = \frac{1+3}{2} = 2$$

Среднее и медиана

Среднее чувствительно к выбросам в данных,
медиана не чувствительна

- Среднее и медиана отражают типичное значение
- Если в выборке нет выбросов, они примерно совпадают



Выборочная дисперсия

- Хочется понимать, насколько сильно элементы выборки отклоняются от своего типичного значения

Алёна: 18 лет,

Карина: 22 года

$$\bar{x} = \frac{18 + 22}{2} = 20$$

Отклонения от среднего:

$$x_1 - \bar{x} = 18 - 20 = -2$$

$$x_2 - \bar{x} = 22 - 20 = 2$$

Среднее отклонение:

$$\frac{-2 + 2}{2} = 0$$



Как быть?

Выборочная дисперсия

- Хочется понимать, насколько сильно элементы выборки отклоняются от своего типичного значения

Алёна: 18 лет,

Карина: 22 года

$$\bar{x} = \frac{18 + 22}{2} = 20$$

Отклонения от среднего:

$$x_1 - \bar{x} = 18 - 20 = -2$$
$$x_2 - \bar{x} = 22 - 20 = 2$$

Среднее отклонение:

$$\frac{-2 + 2}{2} = 0$$

Выход №1:

$$\frac{| -2 | + | 2 |}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Выборочная дисперсия

- ! Проблема меры, основанной на модуле в том, что она недифференцируема

Модуль неудобно использовать
при теоретических выкладках

Выборочная дисперсия

- Хочется понимать, насколько сильно элементы выборки отклоняются от своего типичного значения

Алёна: 18 лет,

Карина: 22 года

$$\bar{x} = \frac{18 + 22}{2} = 20$$

Отклонения от среднего:

$$x_1 - \bar{x} = 18 - 20 = -2$$
$$x_2 - \bar{x} = 22 - 20 = 2$$

Среднее отклонение:

$$\frac{-2 + 2}{2} = 0$$

Выход №2:

$$\frac{(-2)^2 + 2^2}{2} = \frac{4 + 4}{2} = 4$$

Выборочная дисперсия

- ! Для квадратичной функции всегда есть производная
 - Она обладает хорошими статистическими свойствами
 - Её удобно использовать для теоретических выкладок

Выборочная дисперсия

- Это мера разброса. Показывает, насколько сильно элементы выборки отклоняются от своего типичного значения

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{(X_1 - \bar{x})^2 + \dots + (X_n - \bar{x})^2}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{x})^2$$

Пример: $x_1 = 1, x_2 = 5, x_3 = -4, x_4 = 6 \quad \bar{x} = 2$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{(1 - 2)^2 + (5 - 2)^2 + (-4 - 2)^2 + (6 - 2)^2}{4}$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1 + 9 + 36 + 16}{4} = 15.5$$

Выборочная дисперсия

Удобнее искать дисперсию по более простой формуле:

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}^2 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [X_i^2 - 2 \cdot X_i \cdot \bar{x} + \bar{x}^2] = \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - \frac{2 \bar{x}}{n} \sum_{i=1}^n X_i + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \bar{x}^2 \\ &= \overline{x^2} - 2 \bar{x}^2 + \bar{x}^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2\end{aligned}$$

Выборочная дисперсия

Удобнее искать дисперсию по более простой формуле:

$$\hat{\sigma}^2 = \bar{x^2} - \bar{x}^2$$

Пример: $x_1 = 1, x_2 = 5, x_3 = -4, x_4 = 6 \quad \bar{x} = 2$

$$\bar{x^2} = \frac{1^2 + 5^2 + (-4)^2 + 6^2}{4} = 19.5$$

$$\hat{\sigma}^2 = 19.5 - 4 = 15.5$$

Стандартное отклонение

- Дисперсия измеряется в квадратных величинах
- Чтобы вернуться назад к исходным величинам, можно взять из неё квадратных корень

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\hat{\sigma}^2}$$

лет = $\sqrt{\text{лет в квадрате}}$

Несмешённая выборочная дисперсия

- Обычно на практике используют другую формулу:

$$s^2 = \frac{(X_1 - \bar{x})^2 + \dots + (X_n - \bar{x})^2}{n - 1} = \frac{1}{n - 1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{x})^2$$

- Это несмешённая дисперсия
- Что это значит, мы подробно обсудим позднее

Перцентиль

Перцентиль порядка k – это такое число, что $k\%$ выборки меньше этого числа

- Перцентиль это выборочный аналог квантиля
- Проще всего вычислять его по упорядоченной выборке

$$x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \cdots \leq x_{(n)}$$

- Квартили – перцентили с шагом в 0.25:

$$x_{(0.25 \cdot [n+1])} \quad x_{(0.5 \cdot [n+1])} \quad x_{(0.75 \cdot [n+1])}$$

медиана

Интерквантильный размах:

$$IQR = x_{(0.75 \cdot [n+1])} - x_{(0.25 \cdot [n+1])}$$

Перцентиль

Пример:

1, 5, 3, -1, -4, 3, 3, -10, 2, -1

-10, -4, -1, -1, 1, 2, 3, 3, 3, 5

упорядочили
выборку

$$\Rightarrow med = \frac{1+2}{2} = 1.5$$

позиция медианы:

$$0.5 \cdot (10 + 1) = 5.5$$

Перцентиль

Пример:

1, 5, 3, -1, -4, 3, 3, -10, 2, -1

-10, -4, -1, -1, 1, 2, 3, 3, 3, 5

упорядочили
выборку

$$\Rightarrow \frac{-4+(-1)}{2} = -2.5$$

позиция нижней квартили: $0.75 \cdot (10 + 1) = 8.25$

- Перцентили в спорных случаях можно считать по-разному, каждая библиотека предоставляет разные варианты

Перцентиль

Пример:

1, 5, 3, -1, -4, 3, 3, -10, 2, -1

-10, -4, -1, -1, 1, 2, 3, 3, 3, 5

упорядочили
выборку

$$\Rightarrow \frac{3 + 3}{2} = 3$$

позиция верхней квартили: $0.75 \cdot (10 + 1) = 8.25$

- Перцентили в спорных случаях можно считать по-разному, каждая библиотека предоставляет разные варианты

Резюме

- Репрезентативная выборка – отражает свойства генеральной совокупность
- Мы будем в дальнейшем предполагать, что все наблюдения, которые мы делаем, не зависят друг от друга

Теоретическая величина	Выборочный аналог
Математическое ожидание	Выборочное среднее
Дисперсия	Выборочная дисперсия
Квантиль	Перцентиль
Медиана	Выборочная медиана
Мода	Выборочная мода

Гистограмма и эмпирическая функция распределения

Эмпирическая функция распределения

Функция распределения – функция, которая определяет вероятность события $X \leq x$, то есть

$$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$$

Эмпирическая функция распределения – функция, которая определяет для каждого x частоту события $X \leq x$, то есть

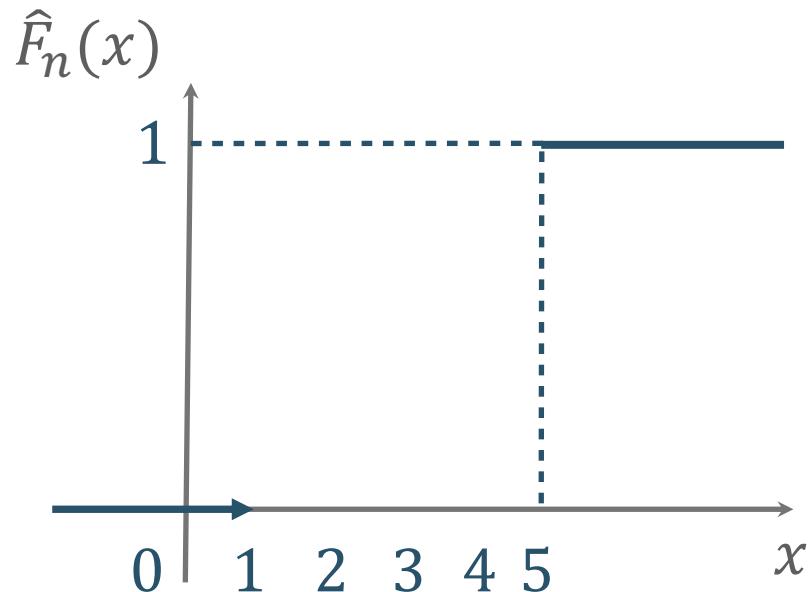
$$\hat{F}_n(x) = \widehat{\mathbb{P}}(X \leq x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [X_i \leq x],$$

где $[]$ – индикаторная функция, то есть:

$$[X_i \leq x] = \begin{cases} 1, & X_i \leq x \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

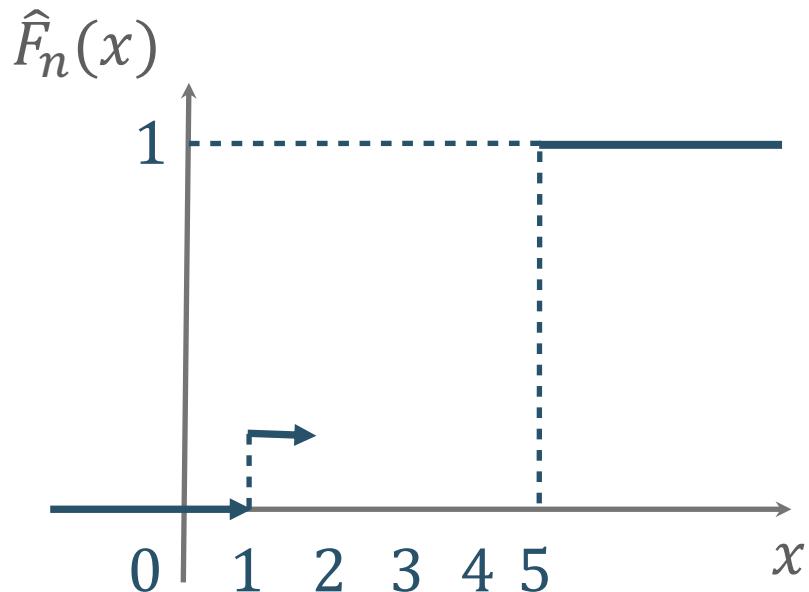
Эмпирическая функция распределения

Пример: $x_1 = 2, x_2 = 5, x_3 = 2, x_4 = 3, x_5 = 1$



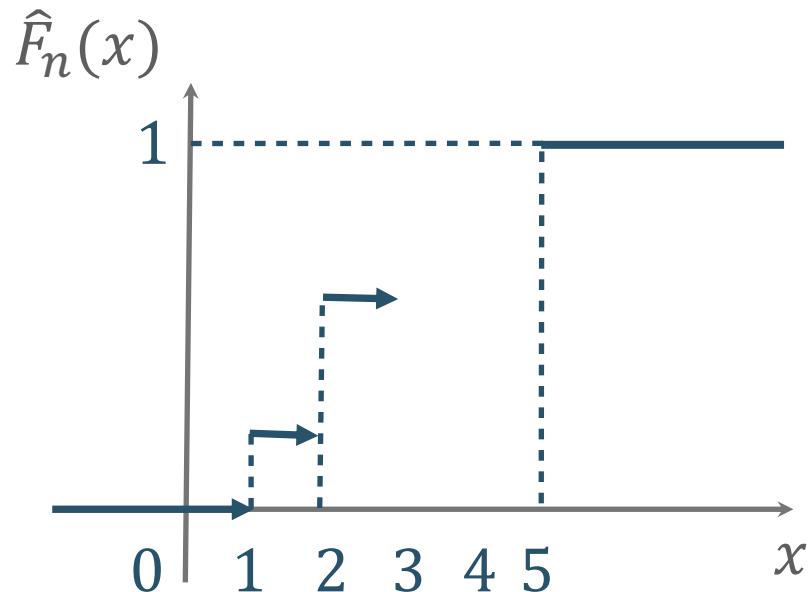
Эмпирическая функция распределения

Пример: $x_1 = 2, x_2 = 5, x_3 = 2, x_4 = 3, x_5 = 1$



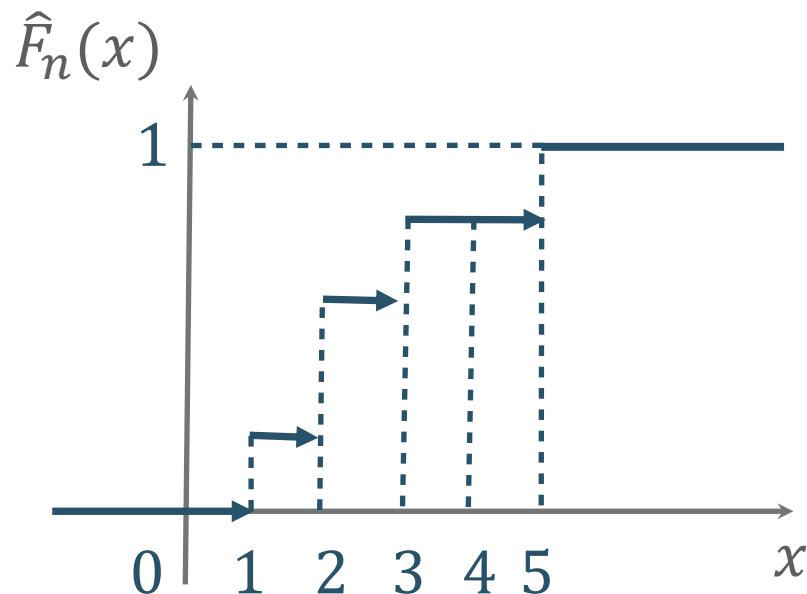
Эмпирическая функция распределения

Пример: $x_1 = 2, x_2 = 5, x_3 = 2, x_4 = 3, x_5 = 1$



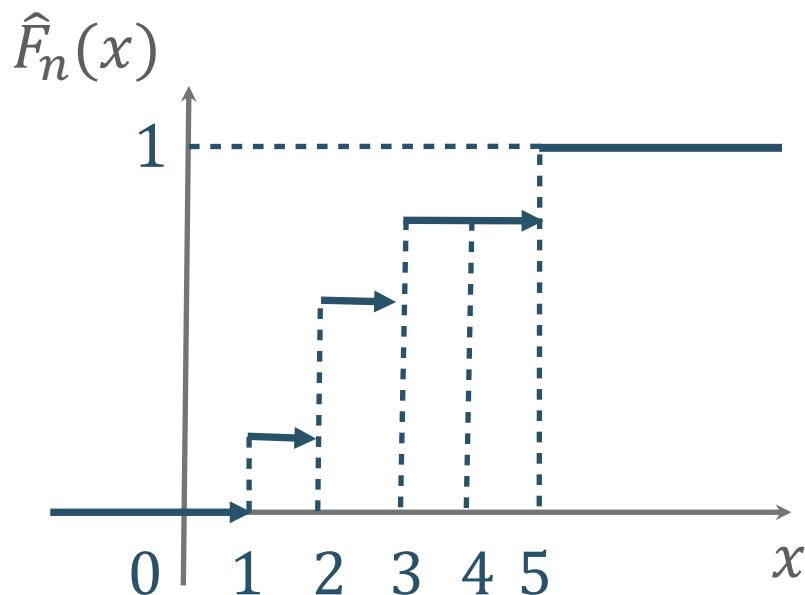
Эмпирическая функция распределения

Пример: $x_1 = 2, x_2 = 5, x_3 = 2, x_4 = 3, x_5 = 1$



Эмпирическая функция распределения

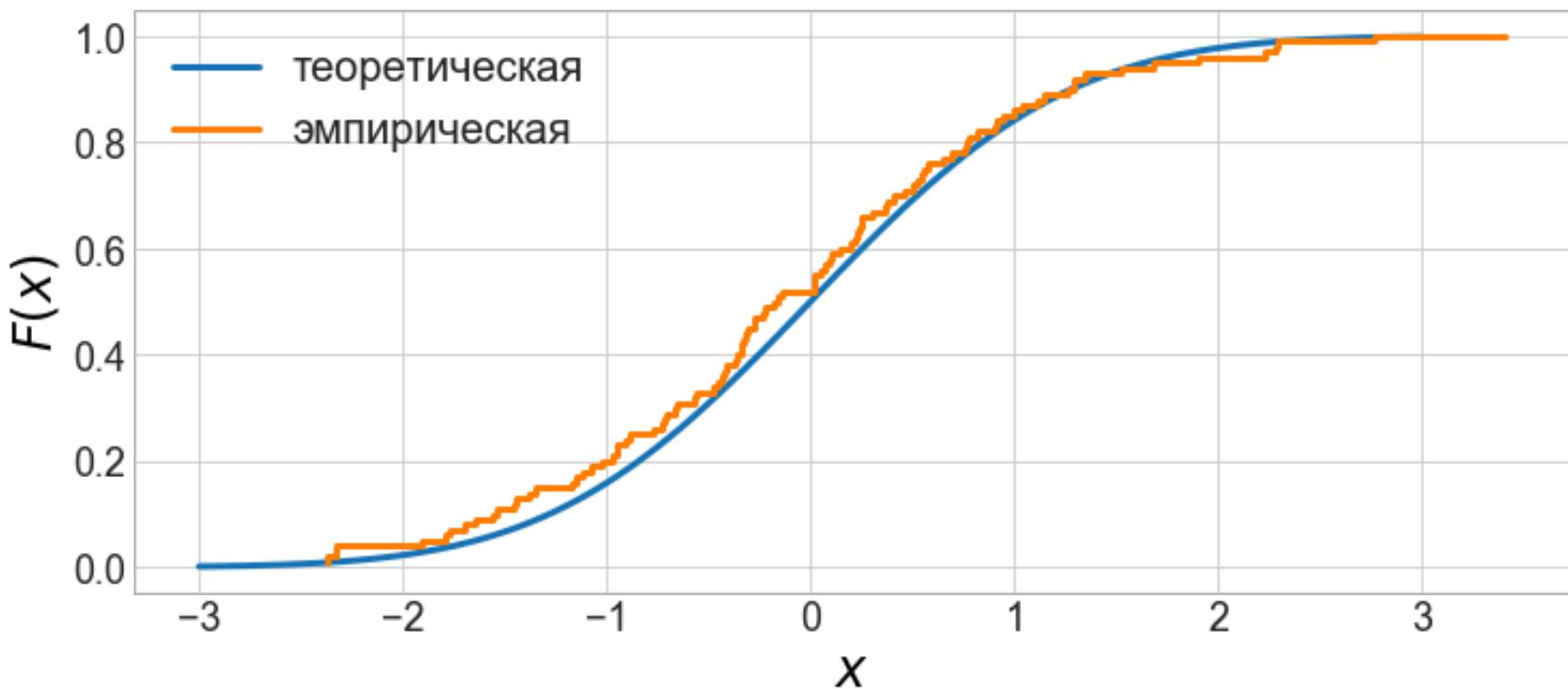
Пример: $x_1 = 2, x_2 = 5, x_3 = 2, x_4 = 3, x_5 = 1$



По аналогии строится
теоретическая функция
распределения для
дискретных случайных
величин

Эмпирическая функция распределения

Чем больше выборка, тем чаще ступеньки и тем больше эмпирическая функция распределения похожа на теоретическую.

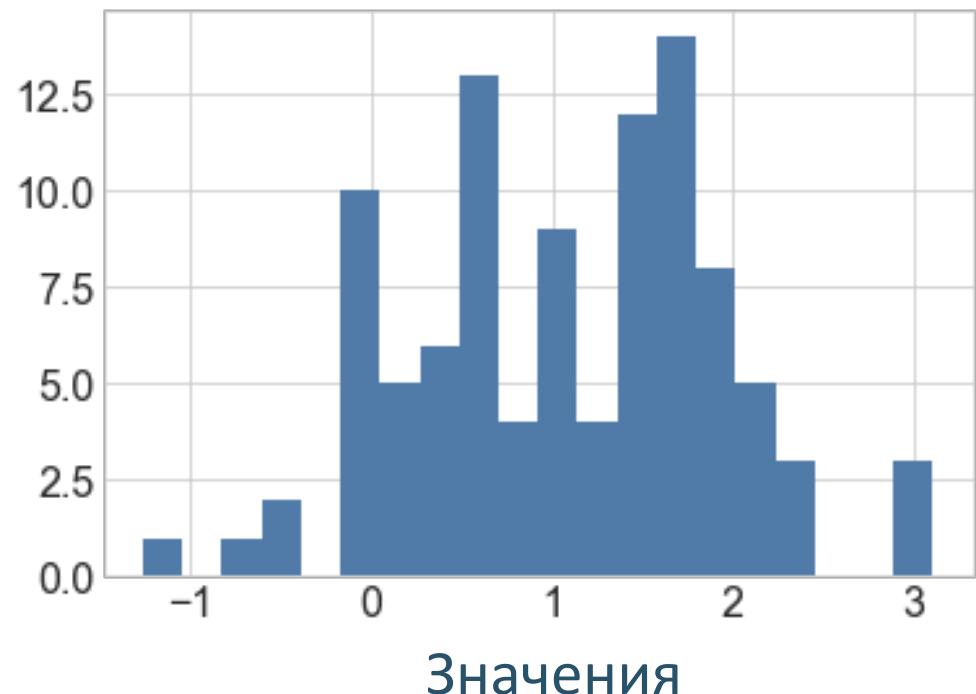


Гистограмма

Гистограмма – эмпирическая оценка **плотности** распределения.
По оси x откладывают значения,
по оси y частоты.

Область возможных значений обычно дробят на отрезки, **бины**.
Чем короче бины, тем детальнее рисуется гистограмма.

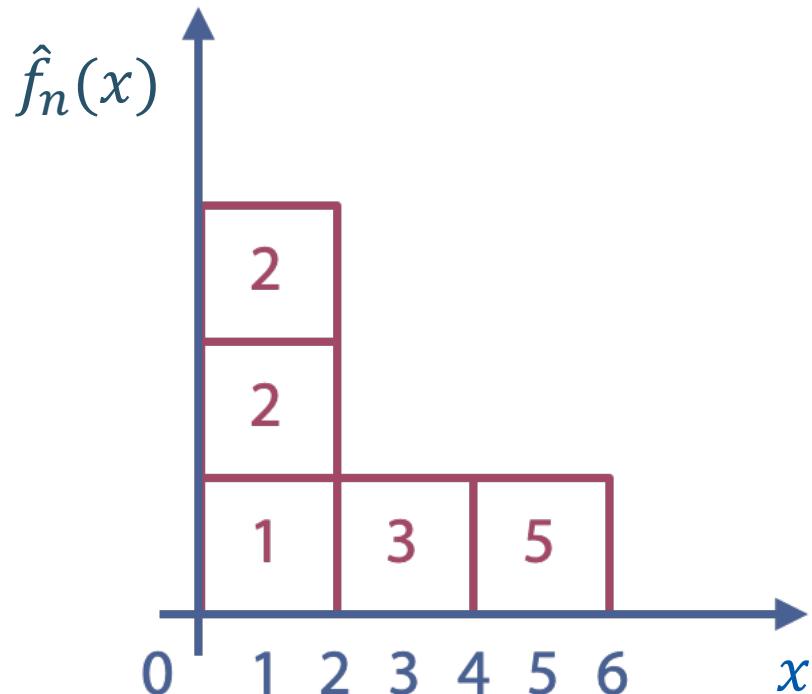
Сколько значений
попали в текущий
отрезок (бин)



Гистограмма

Пример: $x_1 = 2, x_2 = 5, x_3 = 2, x_4 = 3, x_5 = 1$

$$\hat{f}_n(x) = \frac{1}{n \cdot h} \cdot \sum [z_k < x_i \leq z_{k+1}],$$



Скобки – индикаторная
функция:

[правда] = 1

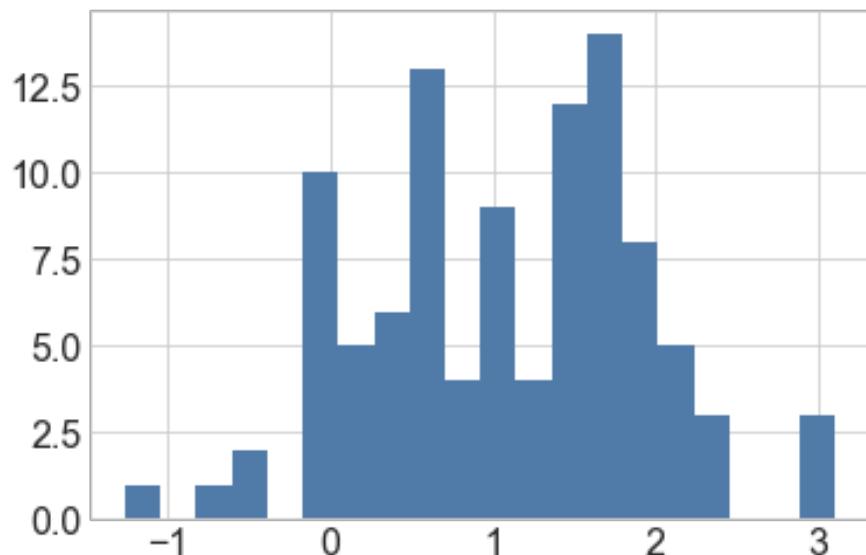
[ложь] = 0

Размер бина (длина отрезка):

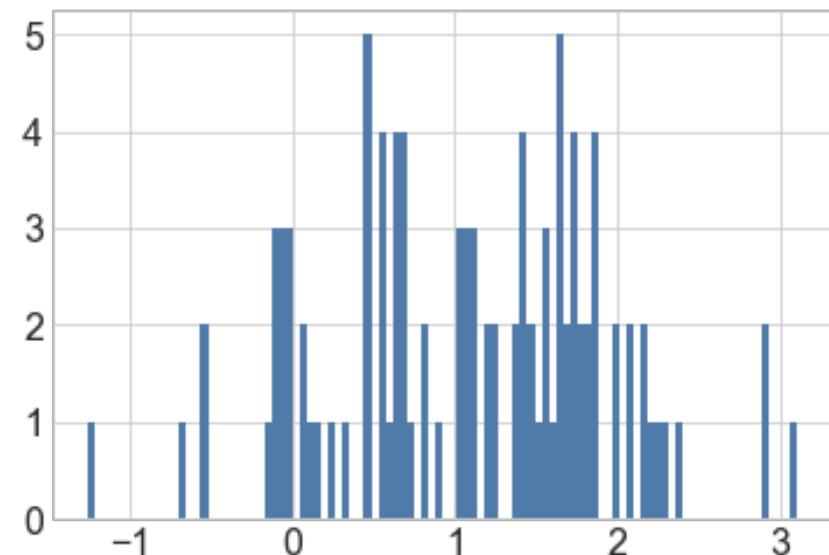
$$h = z_{k+1} - z_k$$

Гистограмма

- Длина интервала h (бина) должна быть достаточно большой, чтобы в него попало существенное число наблюдений
- И при этом достаточно малой, чтобы не потерять важные детали распределения



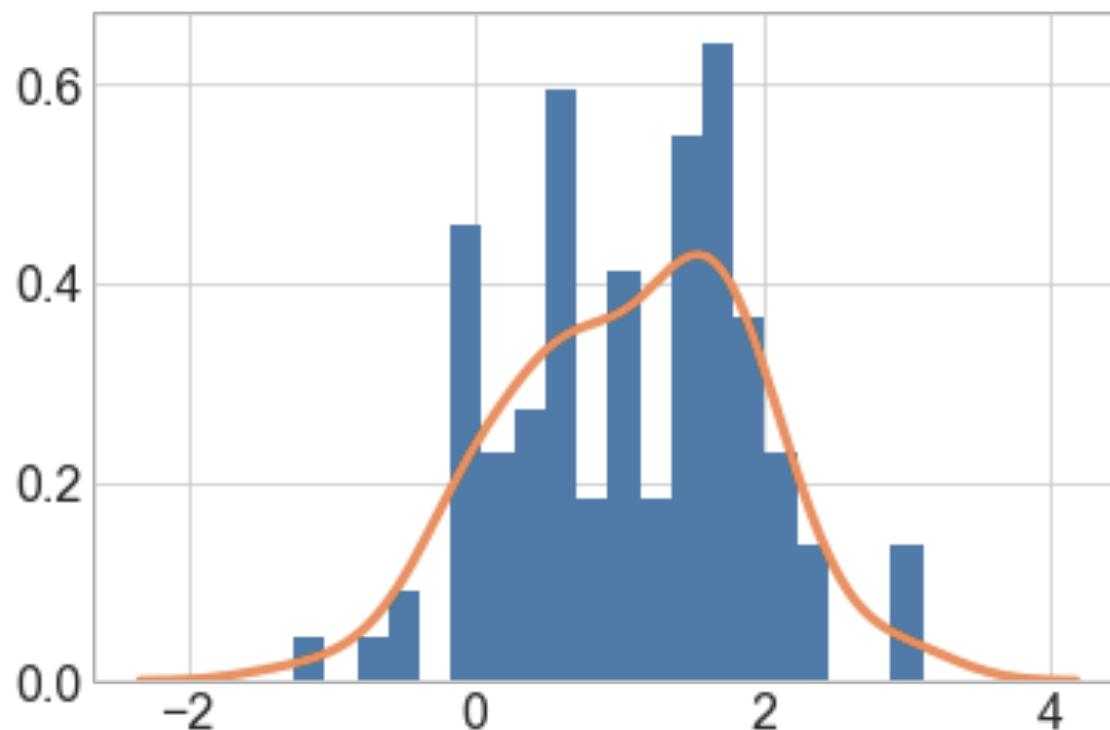
20 бинов



100 бинов

Ядерные оценки плотности

- Ядерные оценки плотности (kernel density estimation, KDE) позволяют получить график плотности в виде непрерывной кривой



Ядерные оценки плотности

Гистограмма:

$$\hat{f}_n(x) = \frac{1}{n \cdot h} \cdot \sum [z_k < x_i \leq z_{k+1}]$$

↑
↑
границы
фиксированы

Улучшение:

$$\hat{f}_n(x) = \frac{1}{n \cdot h} \cdot \sum \left[x - \frac{h}{2} < x_i \leq x + \frac{h}{2} \right]$$

↑
↑
скользящие
границы

h – ширина окна

Ядерные оценки плотности

$$\hat{f}_n(x) = \frac{1}{n \cdot h} \cdot \sum \left[x - \frac{h}{2} < x_i \leq x + \frac{h}{2} \right]$$

- Перепишем оценку в более удобном виде:

$$\hat{f}_n(x) = \frac{1}{n \cdot h} \cdot \sum K\left(\frac{x - x_i}{h}\right) \quad K(z) = \left[-\frac{1}{2} < z \leq \frac{1}{2}\right]$$

- Такая функция придаёт каждому наблюдению вес либо 0 либо 1
- Чем дальше наблюдение от центра, тем меньше должен быть его вес, нужна другая функция

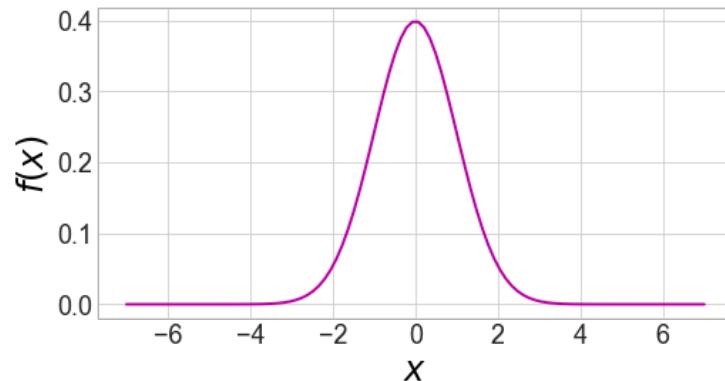
Ядерные оценки плотности

Чтобы взвесить наблюдения, функцию $K(z)$ (ядерную функцию) выбирают так, чтобы:

- Она была неотрицательной
- $\int K(z) dz = 1$ (сумма всех весов равна 1)

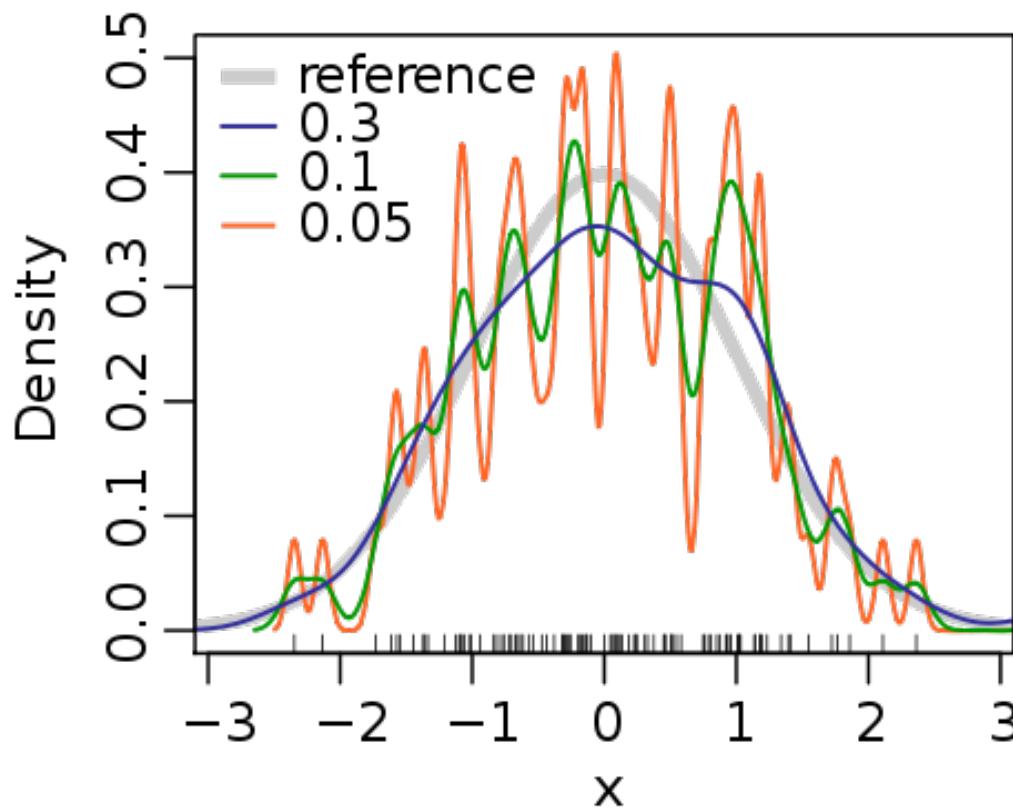
Ядерные функции бывают разными, чаще всего используют Гауссовское ядро:

$$K(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{z^2}{2}}$$

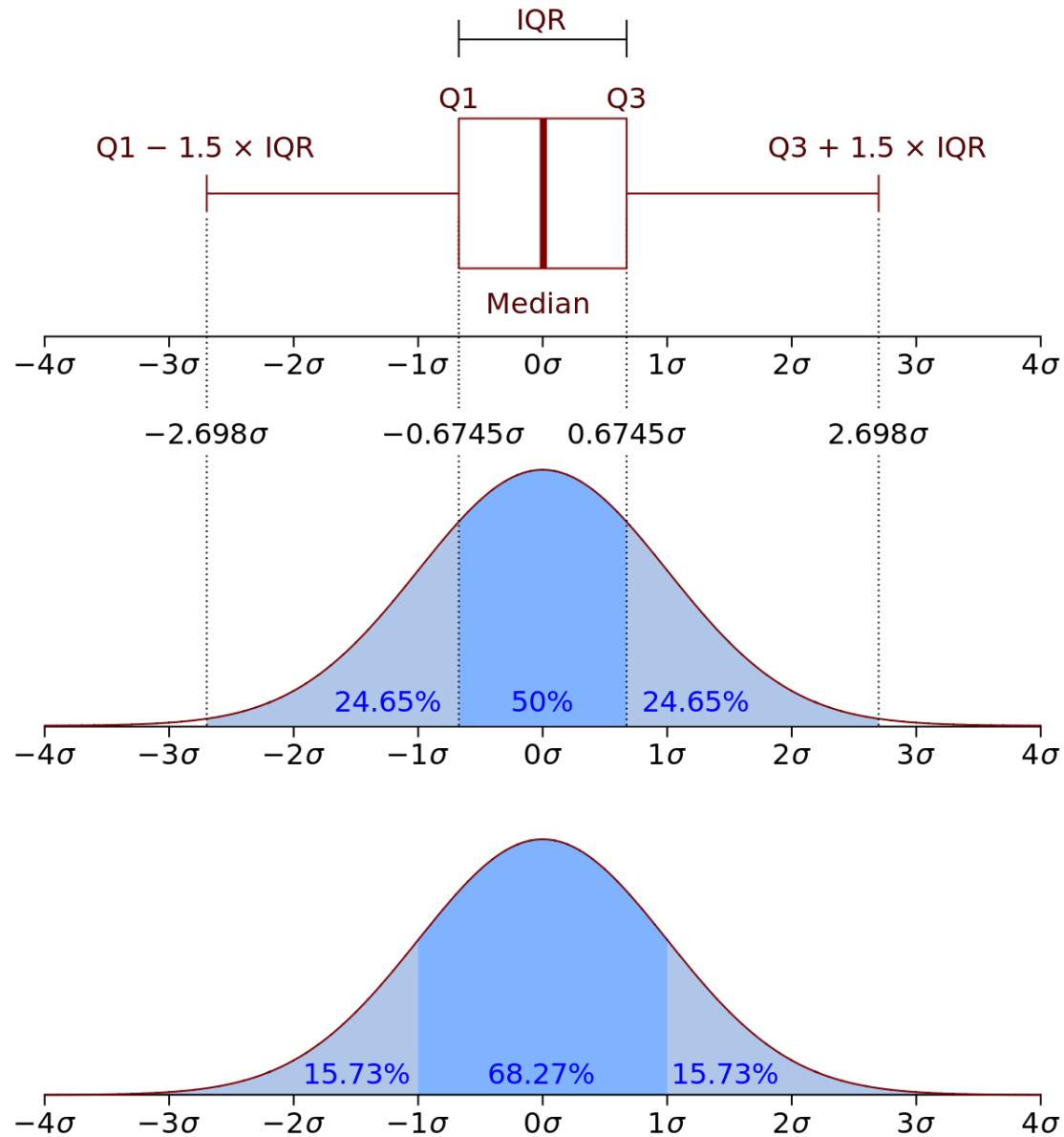


Пример

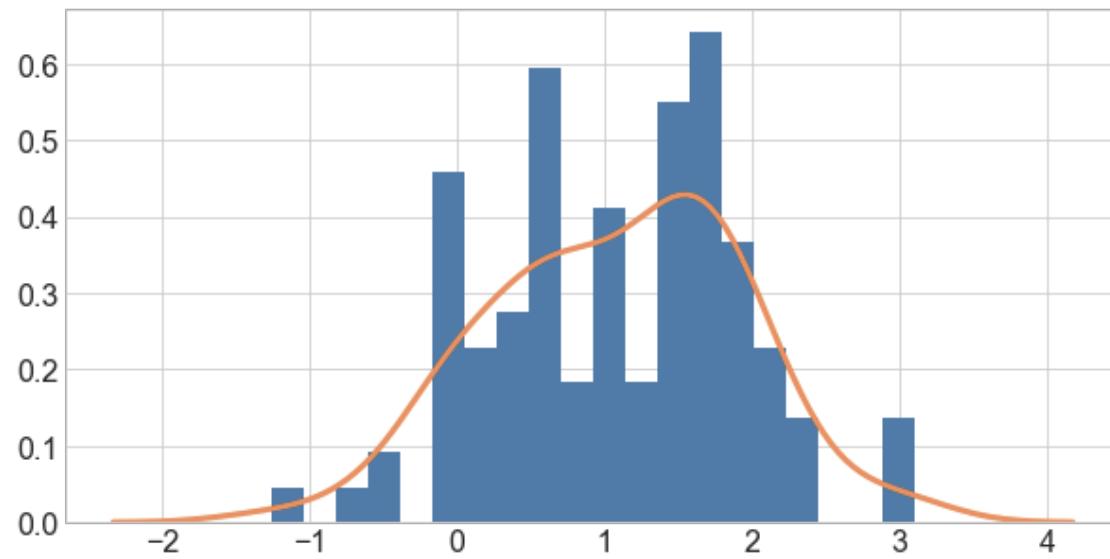
- Серые чёрточки на оси x – наблюдения
- Величина параметра h (ширина окна) влияет на то, насколько гладкой получается итоговая кривая



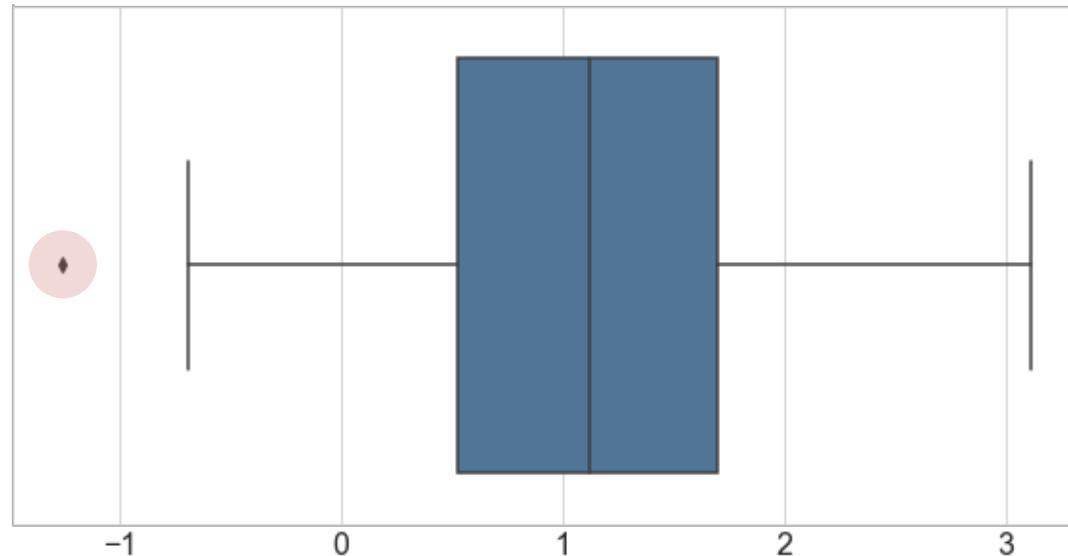
Ящик с усами (Boxplot)



Ящик с усами



Аномальное
значение



Ящик с усами (Boxplot)

- Позволяет обобщить данные
- Показывает наличие выбросов
- Даёт некоторое представление о симметрии данных
- Позволяет сравнить несколько переменных между собой

Резюме

- Плотность распределения вероятностей и функцию распределения также можно оценить по выборке
- Для того, что получить непрерывную оценку плотности распределения используют ядерное сглаживание

Теоретическая величина	Выборочный аналог
Функция распределения	Эмпирическая функция распределения
Плотность распределения	Гистограмма

- Ящик с усами позволяет визуализировать основные описательные статистики

Нормальное распределение и его свойства

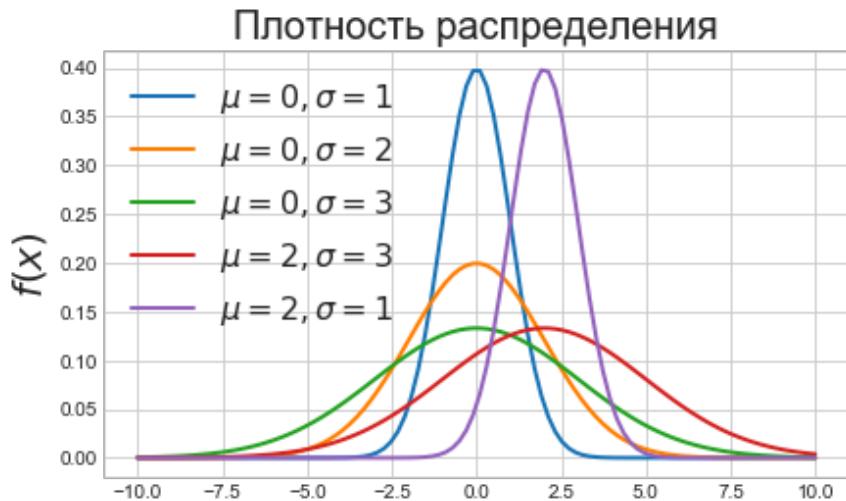
Нормальное распределение

- В статистике часто встречается нормальное распределение
- Оно используется для проверки гипотез и для того, чтобы понимать насколько точными у нас получаются прогнозы и оценки
- Его обычно используют, когда у нас есть в распоряжении большая выборка
- Давайте познакомиться с нормальным распределением поближе

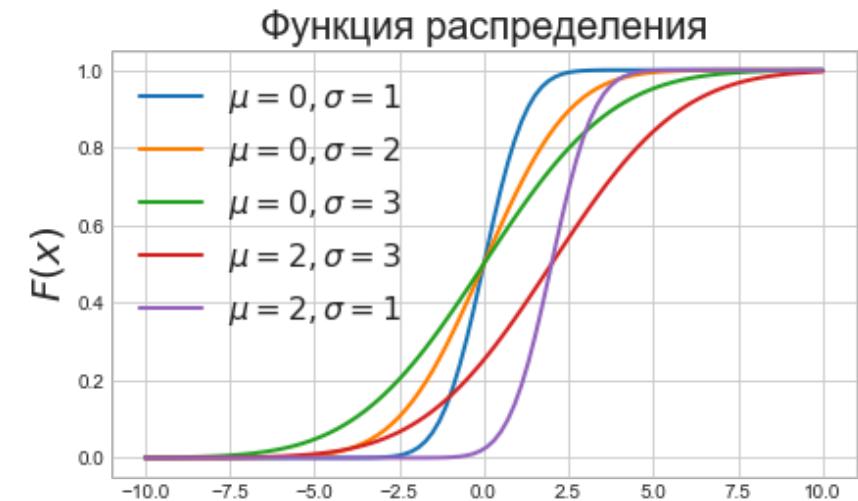
Нормальное распределение

Нормальная случайная величина: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$$\mathbb{E}(X) = \mu, \text{Var}(X) = \sigma^2$$



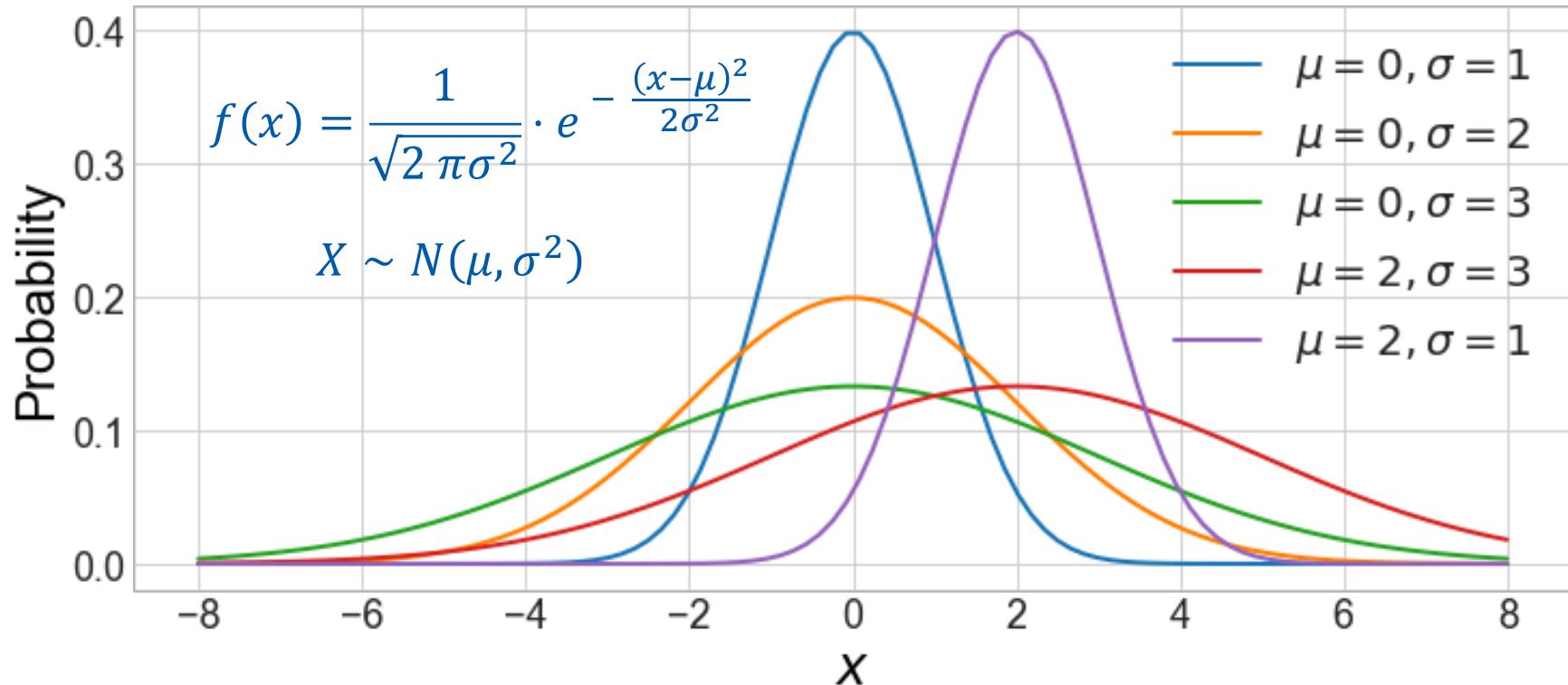
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2 \pi \sigma^2}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$



$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) \, dx$$

Функцию распределения нельзя найти в аналитическом виде, интеграл не берётся

Свойства нормального распределения



1. Распределение симметрично относительно точки $\mathbb{E}(X) = \mu$
2. Параметр μ не влияет на форму кривой и отвечает за её сдвиг кривой вдоль оси x , параметр σ определяет степень “размытости” кривой

Свойства нормального распределения

$$X \sim N(\mu_x, \sigma_x^2)$$

$$Y \sim N(\mu_y, \sigma_y^2)$$

a – константа

3. $X + Y \sim N(\mu_x + \mu_y, \sigma_x^2 + \sigma_y^2)$

4. $X + a \sim N(\mu_x + a, \sigma_x^2)$

5. $a \cdot X \sim N(a \cdot \mu_x, a^2 \cdot \sigma_x^2)$

Нормальная случайная величина устойчива
к суммированию и линейным преобразованиям

Центрирование и нормирование

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

центрирование

$$X - \mu \sim N(0, \sigma^2)$$

нормирование

$$\frac{X - \mu}{\sqrt{\sigma^2}} \sim N(0, 1)$$

- Распределение $N(0, 1)$ называется **стандартным нормальным распределением**

Стандартное нормальное распределение

- Функцию распределения для нормального распределения нельзя найти в аналитическом виде
- Для функции распределения случайной величины $N(0, 1)$ составлены таблицы

Как найти вероятность

$$X \sim N(7, 16)$$

$$\mathbb{P}(X \leq 15)$$

Искать такую вероятность неудобно, нужны были бы таблицы для всех возможных μ и σ

Как найти вероятность

$$X \sim N(7, 16)$$

$$\mathbb{P}(X \leq 15) = \mathbb{P}\left(\frac{X - 7}{4} \leq \frac{15 - 7}{4}\right)$$

$$= \mathbb{P}(N(0, 1) \leq 2) = F_{N(0,1)}(2) = \Phi(2) \approx 0.98$$



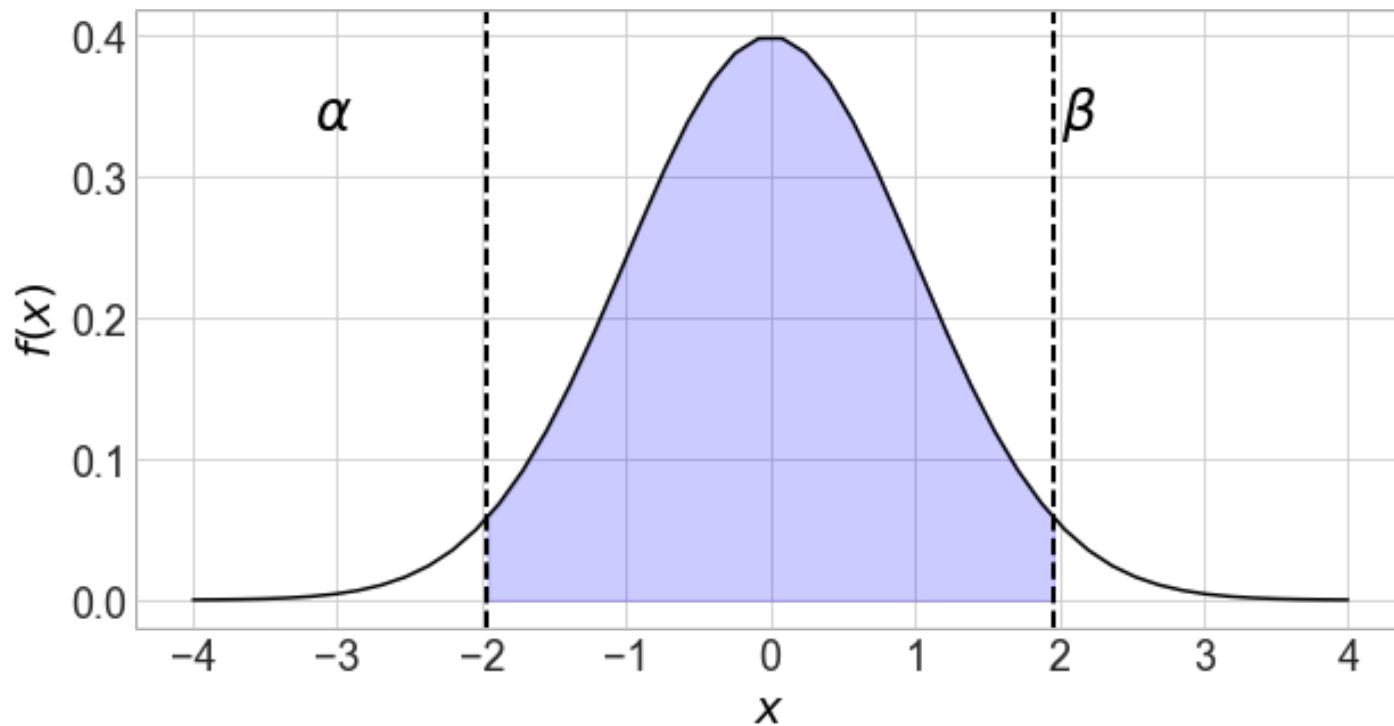
Обозначение
для функции
распределения $N(0,1)$

Раньше активно пользовались таблицами для распределения $N(0, 1)$, сегодня для любого распределения расчёты делает компьютер

Как найти вероятность

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\alpha \leq X \leq \beta) &= \mathbb{P}\left(\frac{\alpha - \mu}{\sigma} \leq \frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{\beta - \mu}{\sigma}\right) = \\ &= \Phi\left(\frac{\beta - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - \mu}{\sigma}\right)\end{aligned}$$



Правила сигм

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

Правило сигмы:

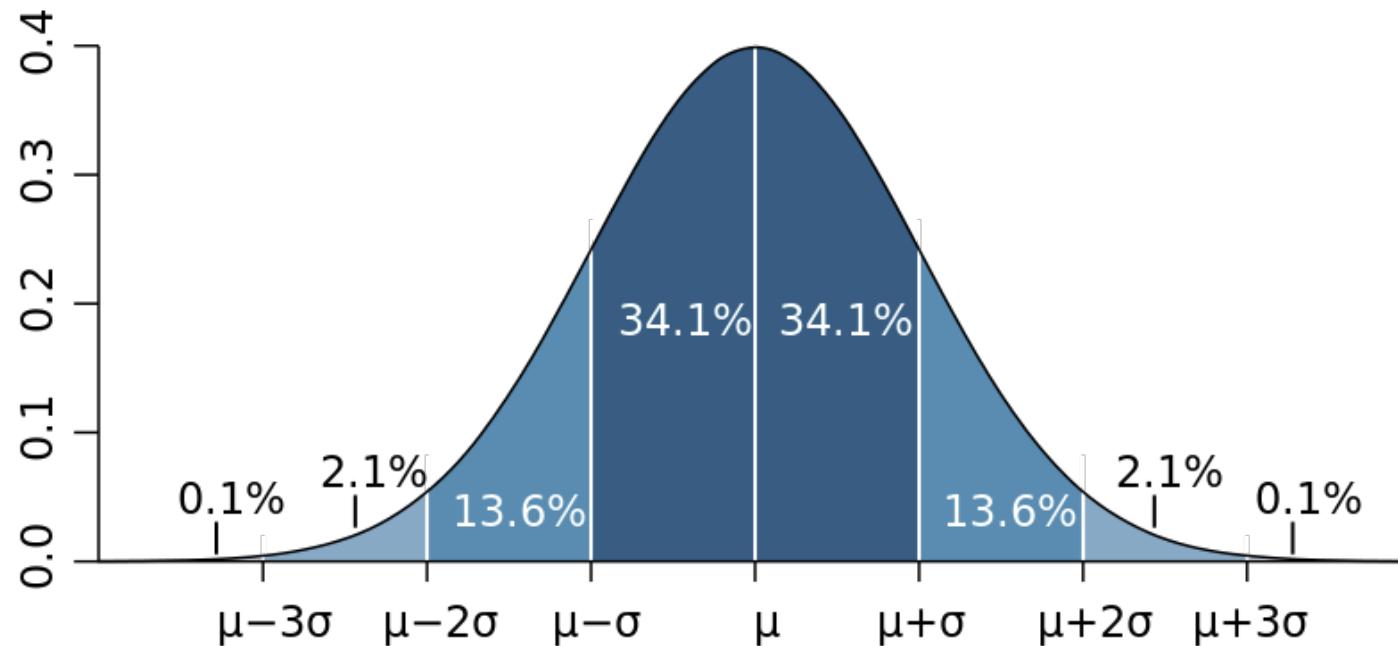
$$\mathbb{P}(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx 0.68$$

Правило двух сигм:

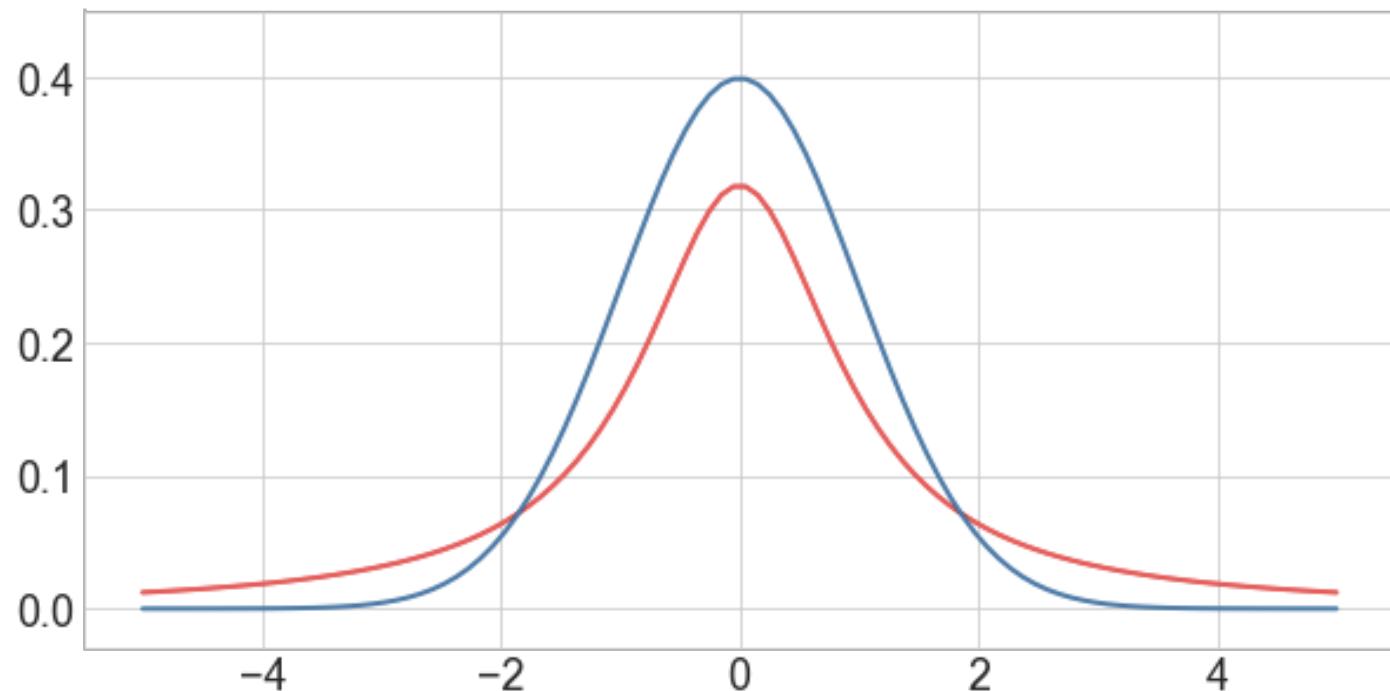
$$\mathbb{P}(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 0.95$$

Правило трех сигм:

$$\mathbb{P}(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) \approx 0.997$$



Тяжёлые хвосты



- Хвосты красного распределения тяжёлые
- Под ними сосредоточена большая вероятностная масса
- События из-под них (выбросы) более вероятны

Эксцесс и куртосис

Эксцессом случайной величины X называют величину

$$\beta_X = \frac{\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))^4]}{\sigma^4} - 3$$

Куртосис

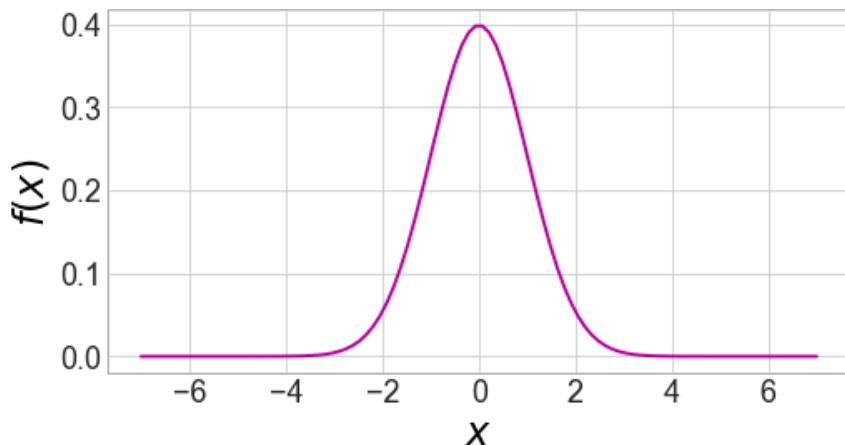
- Число 3 вычитается из куртосиса, чтобы эксцесс нормального распределения был равен нулю
- Если хвосты распределения легче, а пик острее, чем у нормального распределения, тогда $\beta_X > 0$
- Если хвосты распределения тяжелее, а пик более приплюснутый, тогда $\beta_X < 0$

Эксцесс и куртосис

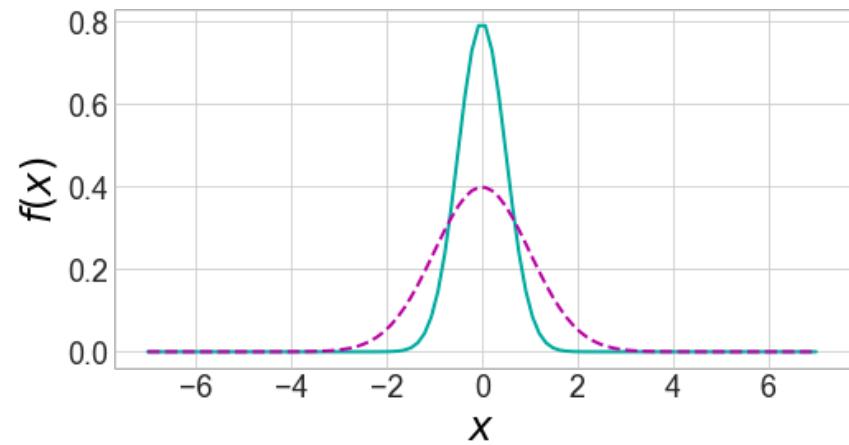
Эксцессом случайной величины X называют величину

$$\beta_X = \frac{\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))^4]}{\sigma^4} - 3$$

Куртосис



Нормальное распределение
с нулевым эксцессом



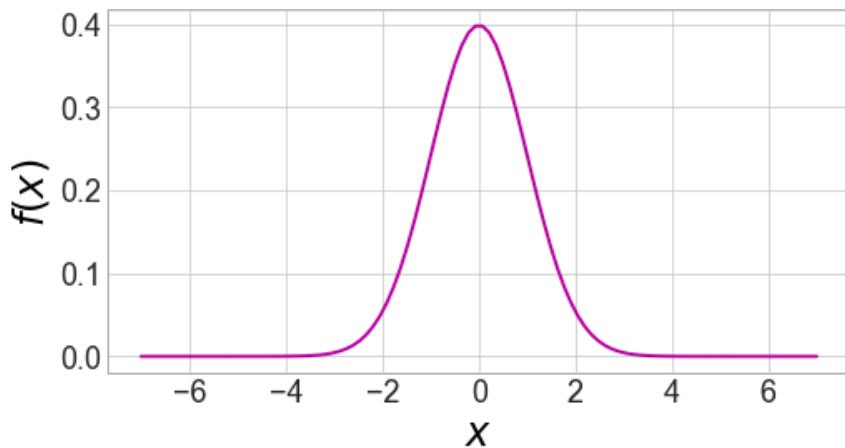
Положительный эксцесс

Эксцесс и куртосис

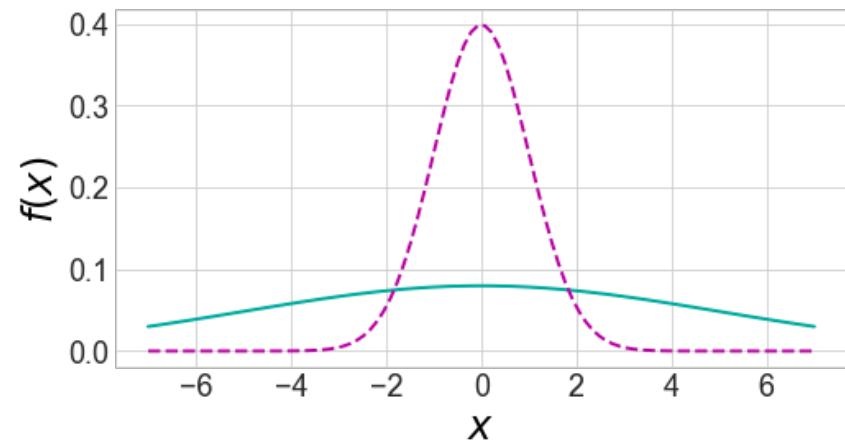
Эксцессом случайной величины X называют величину

$$\beta_X = \frac{\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))^4]}{\sigma^4} - 3$$

Куртосис



Нормальное распределение
с нулевым эксцессом



Отрицательный эксцесс

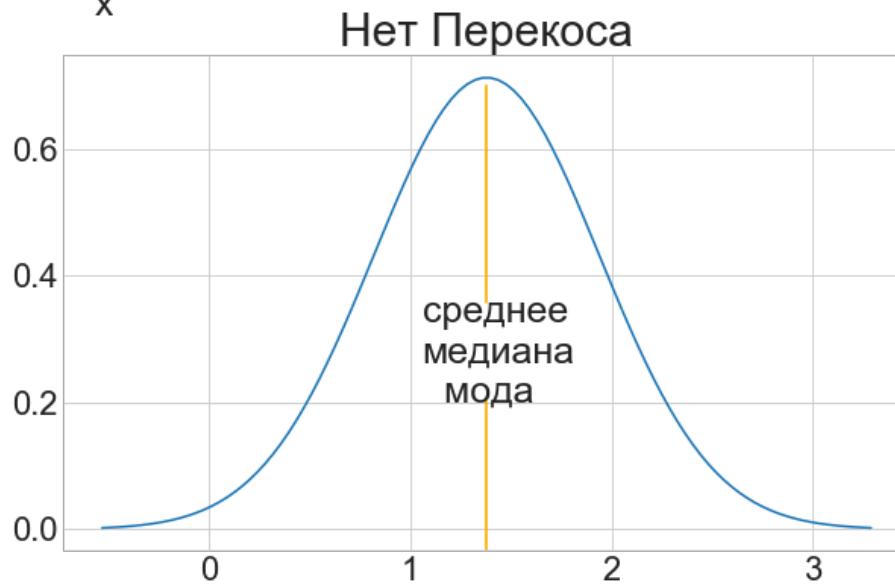
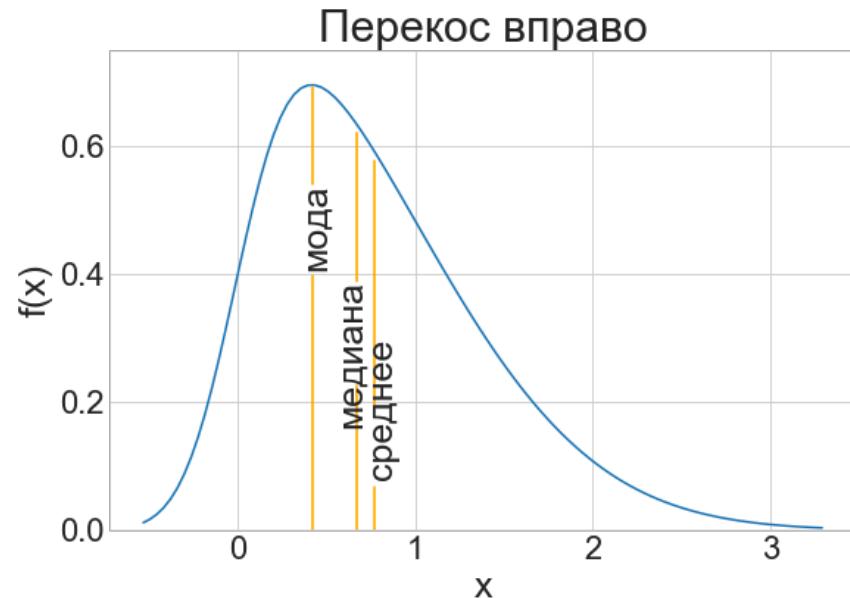
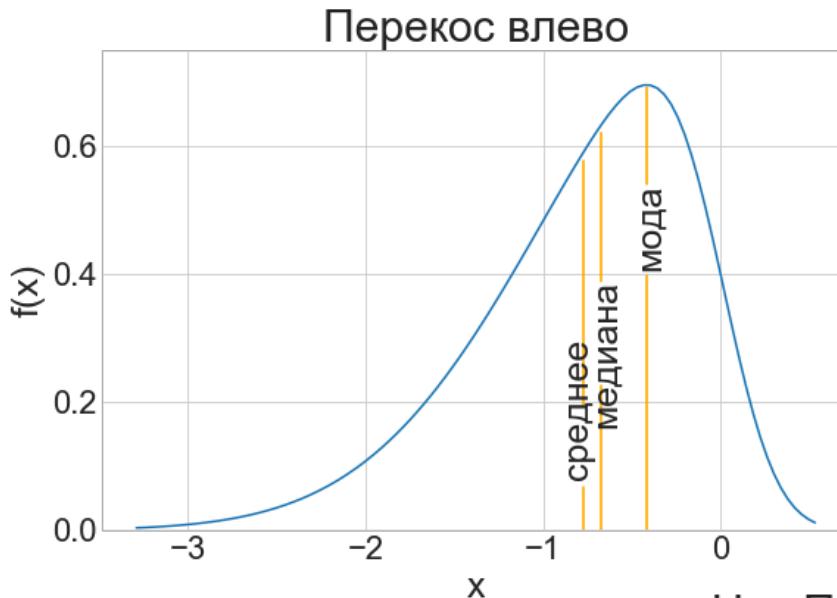
Коэффициент асимметрии (skewness)

Коэффициентом асимметрии случайной величины X называют величину

$$A_X = \frac{\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))^3]}{\sigma^3}$$

- Если плотность распределения симметрична, то $A_X = 0$
- Если левый хвост тяжелее, то $A_X > 0$
- Если правый хвост тяжелее, то $A_X < 0$

Коэффициент асимметрии (skewness)



Эксцесс и асимметрия

- Эксцесс оказывается полезным при поиске тяжёлых хвостов
- Большое значение эксцесса сигнализирует о наличии тяжёлых хвостов и выбросов в данных
- Коэффициент асимметрии характеризует перекос в распределении
- Если у распределения сильный перекос, с применением стандартных статистических методов возникают сложности

Многомерное нормальное

Многомерное нормальное

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \sim N \left[\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho \\ \rho & \sigma_2^2 \end{pmatrix} \right]$$

Математическое
ожидание

$$\mathbb{E}(X_1) = \mu_1$$

$$\mathbb{E}(X_2) = \mu_1$$

Ковариационная
матрица

$$Var(X_1) = \sigma_1^2$$

$$Var(X_2) = \sigma_2^2$$

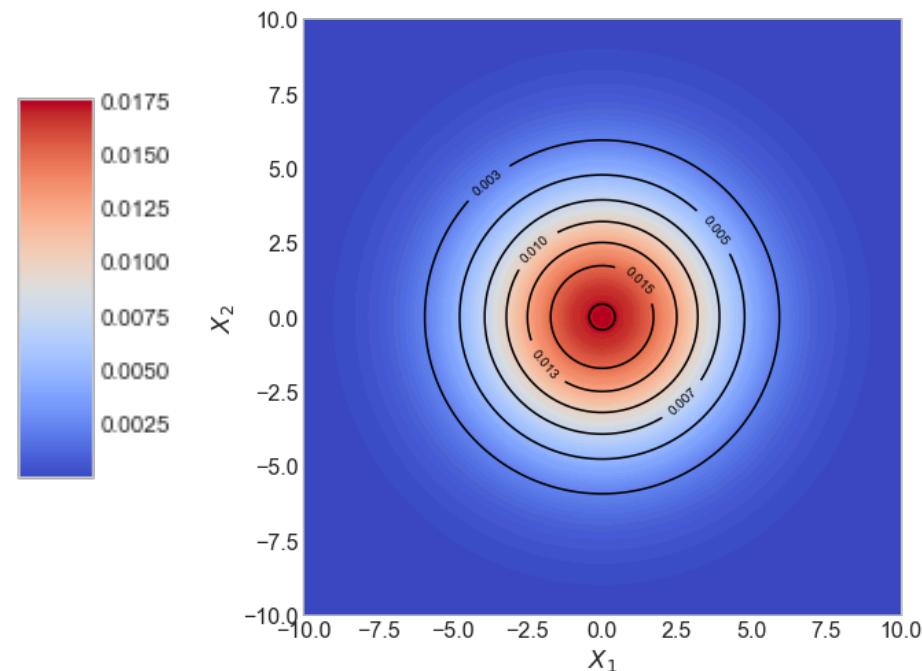
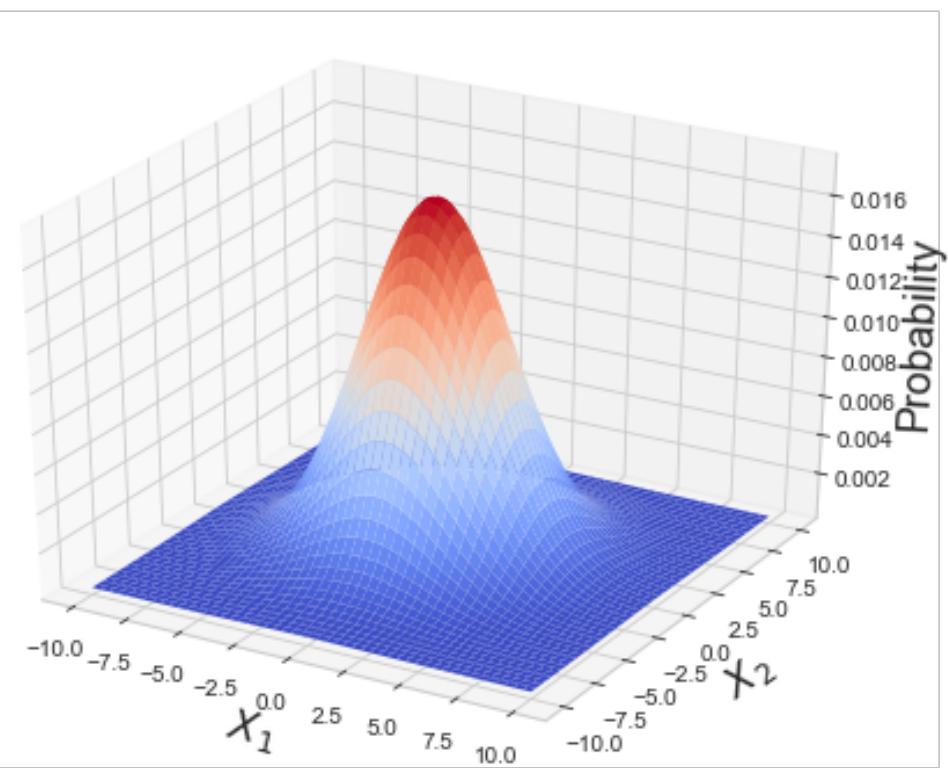
$$Cov(X_1, X_2) = \rho$$

Кратко пишут

$$X \sim N(\mu, \Sigma)$$

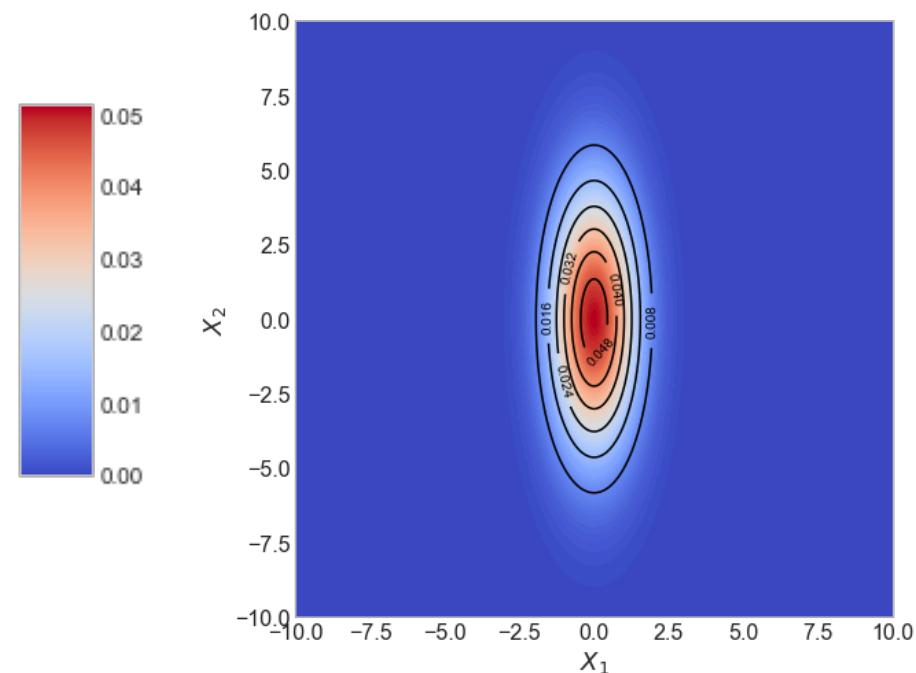
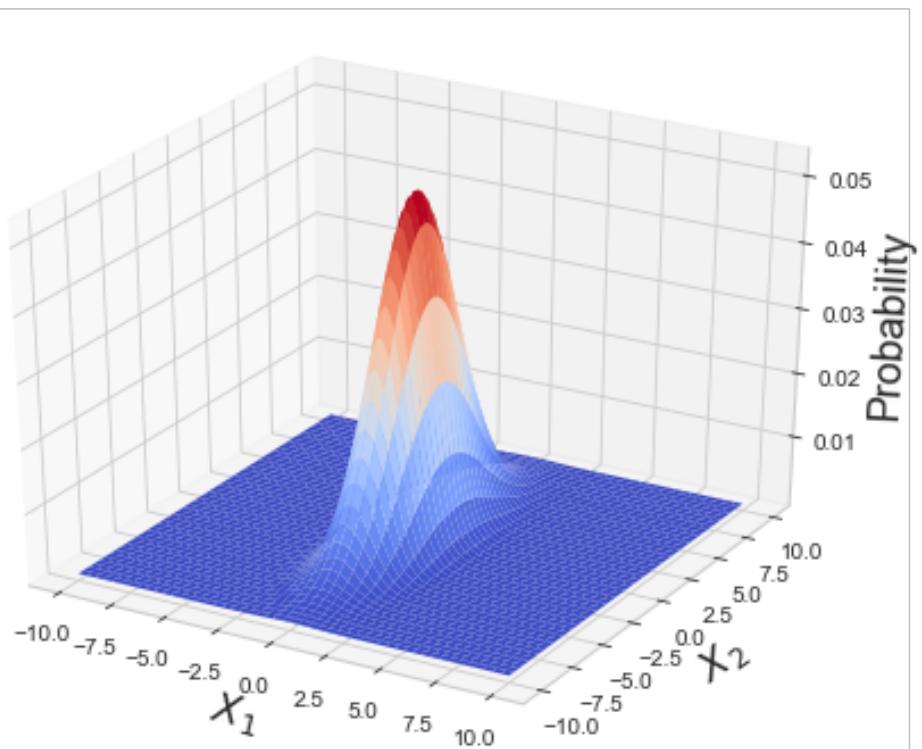
Многомерное нормальное

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \sim N \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \right]$$



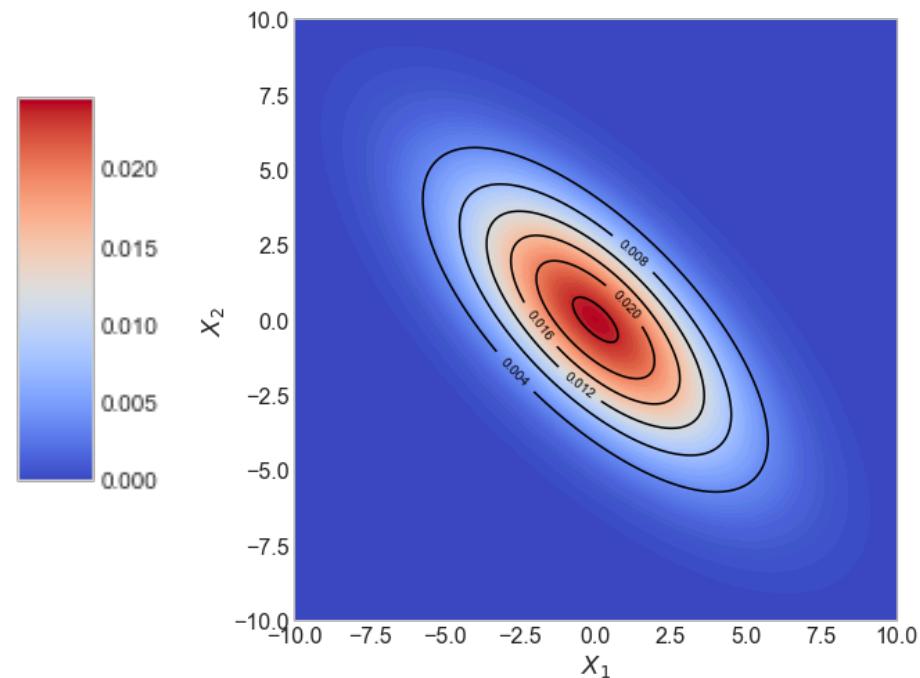
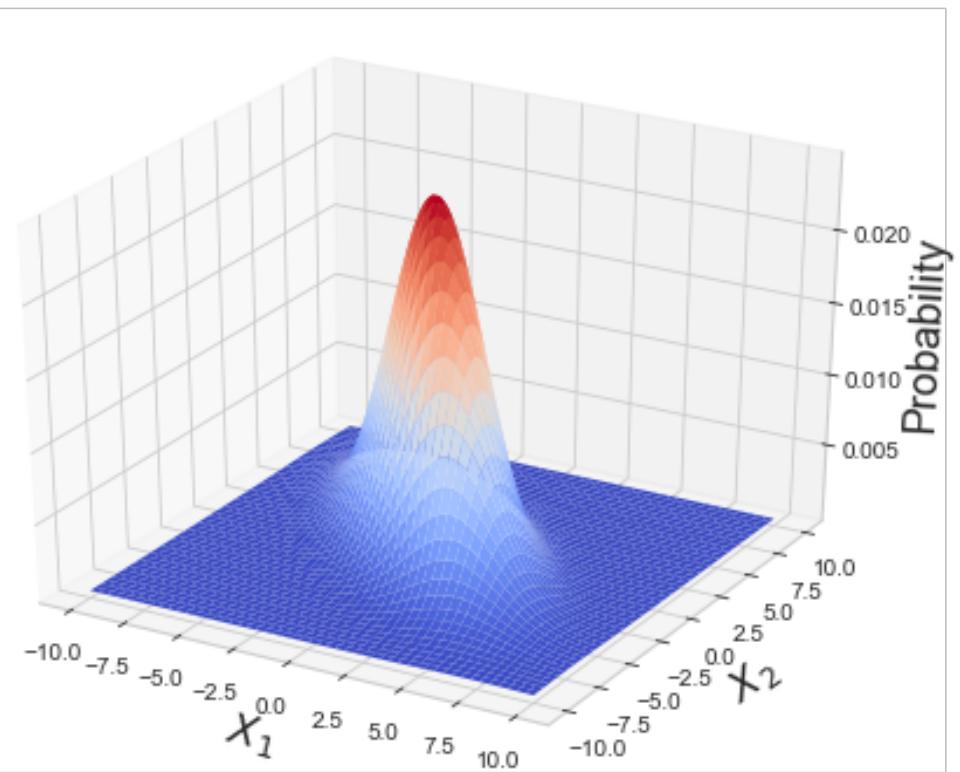
Многомерное нормальное

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \sim N \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \right]$$



Многомерное нормальное

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \sim N \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 & -6.3 \\ -6.3 & 9 \end{pmatrix} \right]$$



Многомерное нормальное

- По аналогии можно определить нормальное распределение для любой размерности

$$X \sim N(\mu, \Sigma)$$

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} \quad \mu = \begin{pmatrix} \mathbb{E}(X_1) \\ \mathbb{E}(X_2) \\ \mathbb{E}(X_3) \end{pmatrix}$$

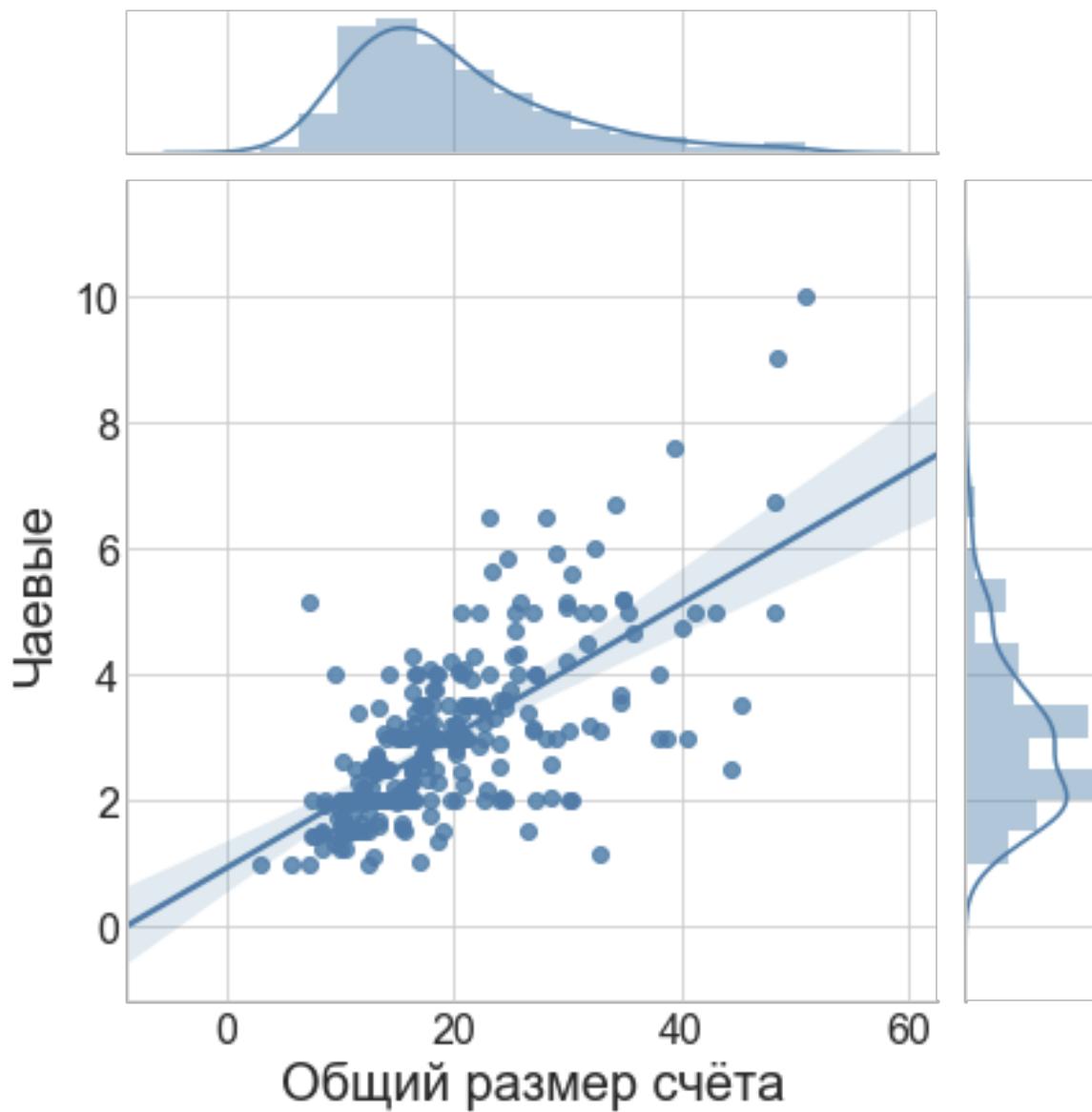
$$\Sigma = \begin{pmatrix} Var(X_1) & Cov(X_1, X_2) & Cov(X_1, X_2) \\ Cov(X_2, X_1) & Var(X_2) & Cov(X_2, X_3) \\ Cov(X_3, X_1) & Cov(X_3, X_2) & Var(X_3) \end{pmatrix}$$

Резюме

- Нормальное распределение довольно часто встречается на практике
- Важно научится хорошо с ним уметь работать

Зависимые и независимые случайные величины

Зависимые случайные величины



- Случайные величины часто взаимосвязаны между собой
- Нужен какой-то способ измерять взаимосвязь между ними

Независимость

Говорят, что события A и B **независимы**, если

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$$

Говорят, что случайные величины X и Y **независимы**, если

$$F(x, y) = \mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y) =$$

$$\mathbb{P}(X \leq x) \cdot \mathbb{P}(Y \leq y) = F_X(x) \cdot F_Y(y)$$

Можно сформулировать это же определение в терминах плотностей:

$$f(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$$

Ковариация

Ковариация – мера линейной зависимости двух случайных величин, вычисляется как

$$Cov(X, Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X)) \cdot (Y - \mathbb{E}(Y))]$$

По аналогии с дисперсией, раскрыв скобки, получаем более простую формулу для вычисления:

$$\begin{aligned} Cov(X, Y) &= \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X)) \cdot (Y - \mathbb{E}(Y))] = \\ &= \mathbb{E}(X \cdot Y - X \cdot \mathbb{E}(Y) - \mathbb{E}(X) \cdot Y + \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y)) = \\ &= \mathbb{E}(X \cdot Y) - \mathbb{E}(X \cdot \mathbb{E}(Y)) - \mathbb{E}(\mathbb{E}(X) \cdot Y) + \mathbb{E}(\mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y)) = \\ &= \mathbb{E}(X \cdot Y) - \mathbb{E}(Y) \cdot \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y) + \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y) = \\ &= \mathbb{E}(X \cdot Y) - \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y) \end{aligned}$$

Свойства ковариации

X, Y, Z – случайные величины a – константа

1. $Cov(X, Y) = Cov(Y, X)$
2. $Cov(a, b) = 0$
3. $Cov(a \cdot X, Y) = a \cdot Cov(X, Y)$
4. $Cov(X + a, Y) = Cov(X, Y)$
5. $Cov(X + Z, Y) = Cov(X, Y) + Cov(Z, Y)$
6. $Cov(X, X) = Var(X)$

Свойства ковариации

X, Y, Z – случайные величины a – константа

7. Если случайные величины независимы,

$$Cov(X, Y) = 0$$

8. Обратное неверно. Если ковариация равна нулю, случайные величины могут быть зависимы.
9. Если X и Y зависимы, тогда

$$\mathbb{E}(X \cdot Y) = \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y) + Cov(X, Y)$$

$$Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y) + 2 \cdot Cov(X, Y)$$

Корреляция Пирсона

Ковариация имеет размерность равную произведению размерностей случайных величин

Пример: если X – рост, Y – вес, ковариация измеряется в $\text{рост} \cdot \text{вес}$

Это неудобно \Rightarrow вводится безразмерный коэффициент корреляции:

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma(X) \cdot \sigma(Y)}$$

Коэффициент корреляции характеризует тесноту и направленность линейной связи между случайными величинами и принимает значение от -1 до 1 .

Выборочные аналоги:

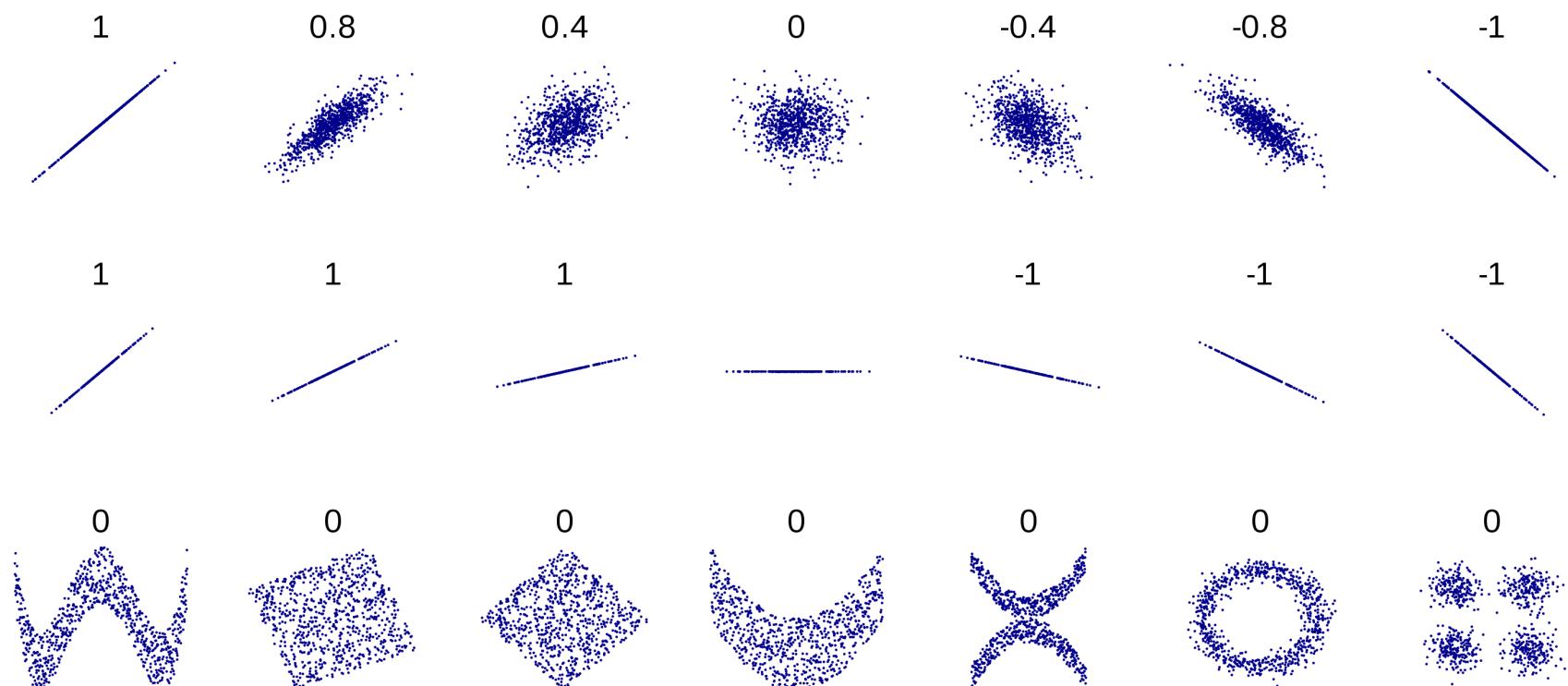
Выборочная ковариация:

$$\widehat{Cov}(X, Y) = \bar{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i - \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \right) \cdot \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i \right)$$

Выборочная корреляция (корреляция Пирсона):

$$\hat{\rho}(X, Y) = \frac{\bar{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\hat{\sigma}_x \cdot \hat{\sigma}_y}$$

Корреляция Пирсона



Корреляция Пирсона



Корреляция Пирсона улавливает только линейную взаимосвязь и чувствительна к выбросам

► Угадай корреляцию: <http://guessthecorrelation.com/>

Корреляция Спирмена

Корреляция Спирмена – мера силы монотонной взаимосвязи. Вычисляется как корреляция Пирсона между **рангами наблюдений**.

x_1, x_2, \dots, x_n – выборка

$x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \dots \leq x_{(n)}$

Упорядочим

по возрастанию

Правила выставления ранга:

1. Порядковый номер наблюдения – ранг
2. Если встречаются несколько одинаковых значений, им присваивается одинаковое значение ранга, равное среднему арифметическому их порядковых номеров

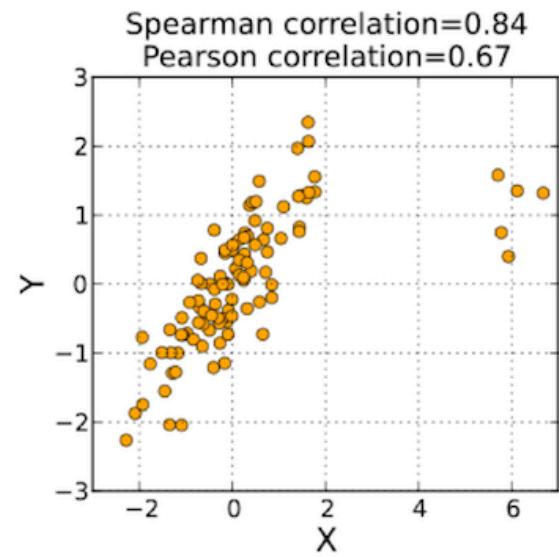
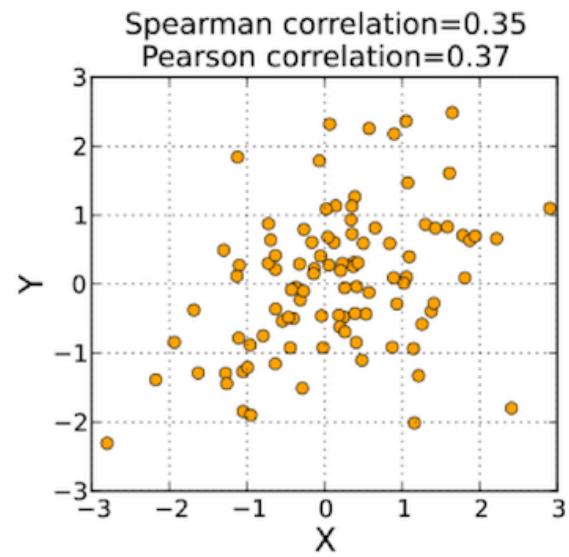
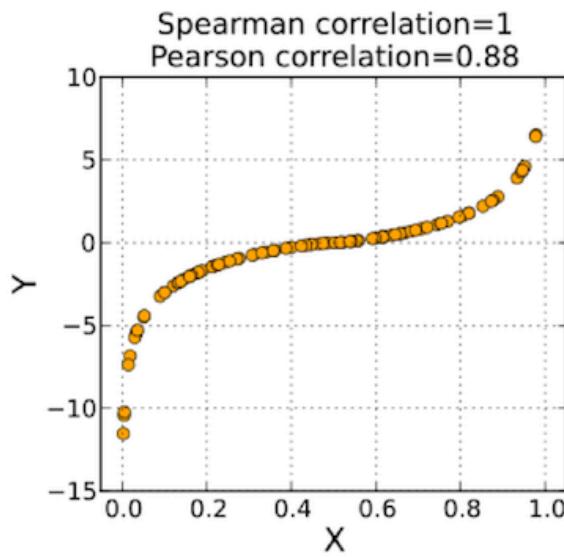
Корреляция Спирмена

Пример:

	X	Y
Выборка:	10, 8, 6, 7, 4, 10, 9, 5	9, 9, 4, 5, 6, 8, 10, 7
Порядок:	7, 5, 3, 4, 1, 8, 6, 2	6, 7, 1, 2, 3, 5, 8, 4
Ранг:	7.5, 5, 3, 4, 1, 7.5, 6, 2	6.5, 6.5, 1, 2, 3, 5, 8, 4
	r_x	r_y

$$\hat{\rho}_s(X, Y) = \hat{\rho}_p(r_x, r_y) \approx 0.645$$

Корреляция Спирмена

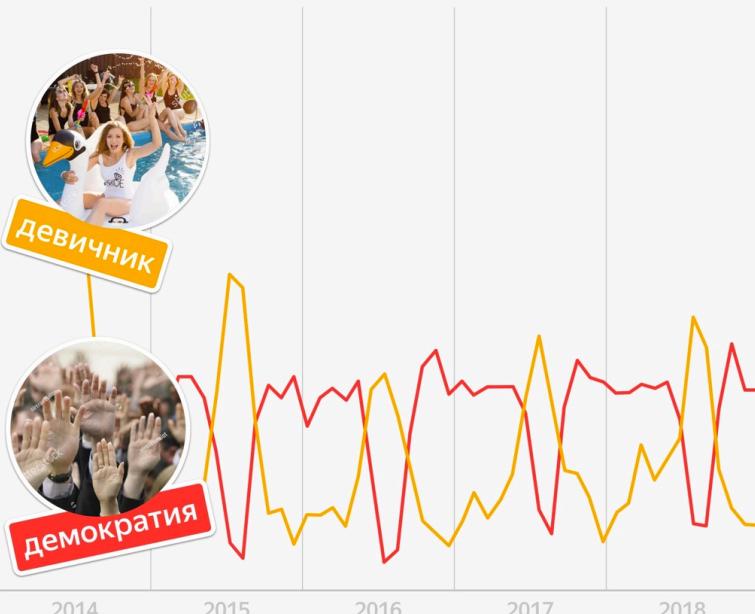


Корреляция Спирмэна пытается уловить
в данных монотонность

Корреляция не означает причинность

Парадоксы в Поиске — Яндекс

Когда в Поиске снижается доля запросов со словом **демократия**, становится больше запросов со словом **девичник**



Парадоксы в Поиске — Яндекс

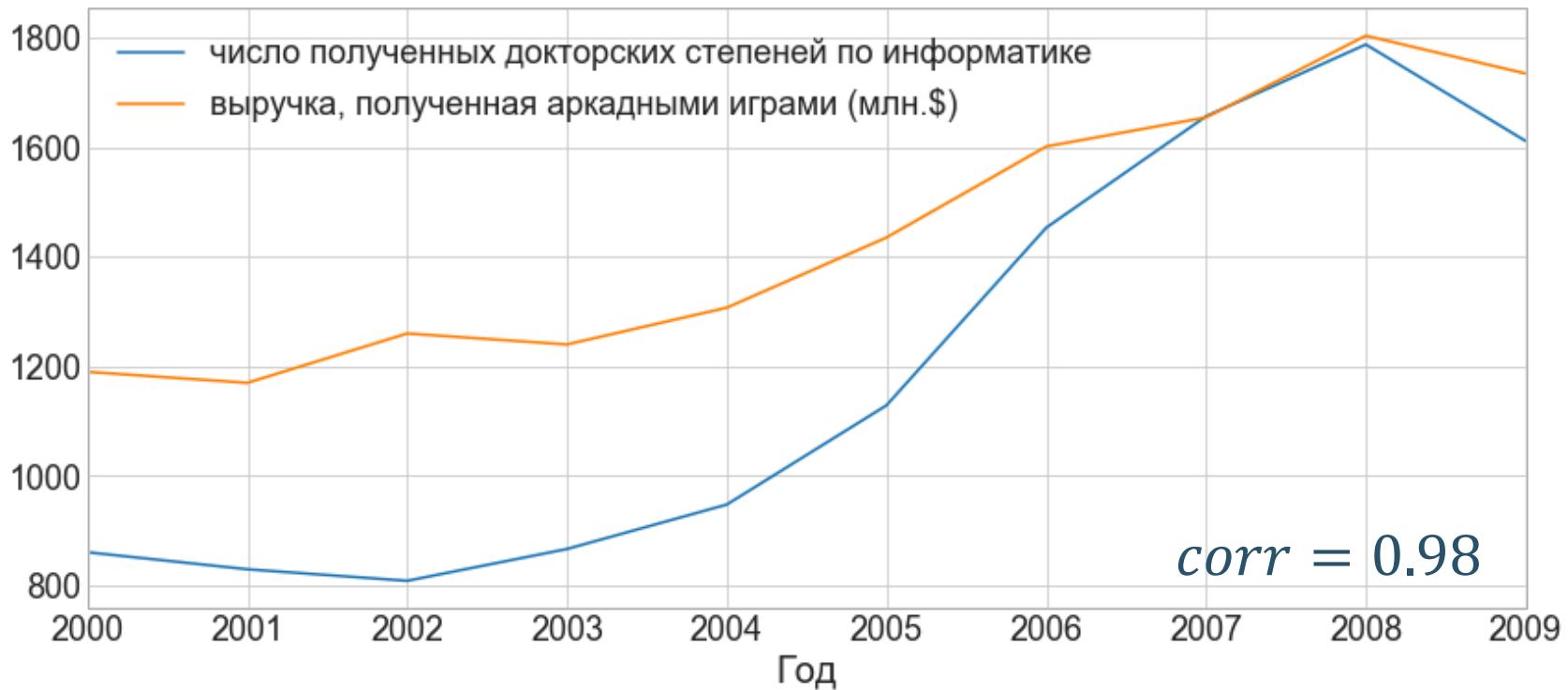
Когда в Поиске растёт интерес к **тату**, снижается доля запросов со словом **смысл**



- Больше примеров в пабликах Яндекса в социальных сетях по тегу #ПарадоксыВПоиске

Ложная корреляция

Это связь, которая не имеет содержательного смысла



Разгадка: в динамике обоих рядов присутствует тренд. Если провести очистку от него, корреляция пропадёт.

- ▶ Ещё примеры: <http://www.tylervigen.com/spurious-correlations>

Ложная корреляция

Корреляция между величинами может быть вызвана общей причиной:

- Общий тренд в данных
- Спрос на мороженое и число грабежей коррелируют из-за погоды
- Цены на различные продукты могут коррелировать из-за инфляции

Резюме

- Ковариация и корреляция Пирсона задают меру линейной связи между случайными величинами
- Корреляция Спирмена пытается измерить меру монотонной взаимосвязи
- Корреляции между переменными не достаточно для наличия причинно-следственной связи
- Иногда в данных присутствует ложная корреляция
- При работе с корреляцией надо быть осторожным: про то, как делать свои выводы аккуратно, мы поговорим на будущих неделях нашей специализации