动态规划优化

徐毅

江苏省常州高级中学

JSOI 2015 小营

引入

引入

在信息学竞赛中，朴素动态规划往往并不足以高效解决问题，因此需要对其进行优化。

引入

在信息学竞赛中，朴素动态规划往往并不足以高效解决问题，因此需要对其进行优化。

而我们知道，动态规划的时间复杂度取决于状态和转移，优化肯定要从这两方面入手。

引入

在信息学竞赛中，朴素动态规划往往并不足以高效解决问题，因此需要对其进行优化。

而我们知道，动态规划的时间复杂度取决于状态和转移，优化肯定要从这两方面入手。

其中，状态优化更注重对题目性质的挖掘，而转移优化则要求我们掌握一些对转移方程进行处理的技巧。

例题

例题

为方便大家理解和实践，我在此选取了一些代码量较小的例题进行分析，希望大家着重领会这些例题的处理思路和技巧。

例题 1：中国象棋[1]

[1]题目来源：AHOI 2009

例题 1：中国象棋[1]

在一个 n 行 m 列的棋盘上放若干个炮，使得没有任何一个炮能攻击另一个炮，求方案数模 9999973。

[1]题目来源：AHOI 2009

例题 1：中国象棋[1]

在一个 n 行 m 列的棋盘上放若干个炮，使得没有任何一个炮能攻击另一个炮，求方案数模 9999973。

$1 \leq n, m \leq 100$。

[1]题目来源：AHOI 2009

例题 1：中国象棋

例题 1：中国象棋

- 没有任何一个炮能攻击另一个炮？

例题 1：中国象棋

- 没有任何一个炮能攻击另一个炮？
  - 每行每列不能放超过两个炮。

例题 1：中国象棋

- 没有任何一个炮能攻击另一个炮？
  - 每行每列不能放超过两个炮。
- 朴素动态规划？

例题 1：中国象棋

- 没有任何一个炮能攻击另一个炮？
  - 每行每列不能放超过两个炮。
- 朴素动态规划？
  - 用 $f(i,j)$ 表示到第 i 行为止各列放炮数量为 j（j 为 m 位三进制数）的方案数。

例题 1：中国象棋

- 没有任何一个炮能攻击另一个炮？
  - 每行每列不能放超过两个炮。
- 朴素动态规划？
  - 用 $f(i,j)$ 表示到第 i 行为止各列放炮数量为 j（j 为 m 位三进制数）的方案数。
  - 转移只要枚举当前行在哪一列或哪两列放炮即可。

例题 1：中国象棋

- 没有任何一个炮能攻击另一个炮？
  - 每行每列不能放超过两个炮。
- 朴素动态规划？
  - 用 $f(i, j)$ 表示到第 i 行为止各列放炮数量为 j（j 为 m 位三进制数）的方案数。
  - 转移只要枚举当前行在哪一列或哪两列放炮即可。
- 时间复杂度？

例题 1：中国象棋

- 没有任何一个炮能攻击另一个炮？
  - 每行每列不能放超过两个炮。
- 朴素动态规划？
  - 用 $f(i,j)$ 表示到第 i 行为止各列放炮数量为 j（j 为 m 位三进制数）的方案数。
  - 转移只要枚举当前行在哪一列或哪两列放炮即可。
- 时间复杂度？
  - $O(3^m m^2 n)$。

例题 1：中国象棋

例题 1：中国象棋

- 如何优化状态？

例题 1：中国象棋

- 如何优化状态？
  - 我们并不需要知道放了 $0/1/2$ 个炮的具体是哪几列，只要知道放了 $0/1/2$ 个炮的各有多少列就可以了。

例题 1：中国象棋

- 如何优化状态？
  - 我们并不需要知道放了 $0/1/2$ 个炮的具体是哪几列，只要知道放了 $0/1/2$ 个炮的各有多少列就可以了。
  - 用 $f(i, j, k)$ 表示到第 i 行为止有 j 列放了 0 个炮有 k 列放了 1 个炮的方案数。

例题 1：中国象棋

- 如何优化状态？
  - 我们并不需要知道放了 $0/1/2$ 个炮的具体是哪几列，只要知道放了 $0/1/2$ 个炮的各有多少列就可以了。
  - 用 $f(i,j,k)$ 表示到第 i 行为止有 j 列放了 0 个炮有 k 列放了 1 个炮的方案数。
- 如何转移？

例题 1：中国象棋

- 如何优化状态？
  - 我们并不需要知道放了 0/1/2 个炮的具体是哪几列，只要知道放了 0/1/2 个炮的各有多少列就可以了。
  - 用 $f(i,j,k)$ 表示到第 i 行为止有 j 列放了 0 个炮有 k 列放了 1 个炮的方案数。
- 如何转移？
  - 简单分类讨论，$f(i,j,k) = f(i-1,j,k) + (j+1)f(i-1,j+1,k-1) + (k+1)f(i-1,j,k+1) + k(j+1)f(i-1,j+1,k) + \frac{(j+2)(j+1)}{2}f(i-1,j+2,k-2) + \frac{(k+2)(k+1)}{2}f(i-1,j,k+2)$。

例题 1：中国象棋

- 如何优化状态？
  - 我们并不需要知道放了 $0/1/2$ 个炮的具体是哪几列，只要知道放了 $0/1/2$ 个炮的各有多少列就可以了。
  - 用 $f(i,j,k)$ 表示到第 i 行为止有 j 列放了 0 个炮有 k 列放了 1 个炮的方案数。
- 如何转移？
  - 简单分类讨论，$f(i,j,k)=f(i-1,j,k)+(j+1)f(i-1,j+1,k-1)+(k+1)f(i-1,j,k+1)+k(j+1)f(i-1,j+1,k)+\frac{(j+2)(j+1)}{2}f(i-1,j+2,k-2)+\frac{(k+2)(k+1)}{2}f(i-1,j,k+2)$。
- 时间复杂度？

例题 1：中国象棋

- 如何优化状态？
  - 我们并不需要知道放了 0/1/2 个炮的具体是哪几列，只要知道放了 0/1/2 个炮的各有多少列就可以了。
  - 用 $f(i,j,k)$ 表示到第 i 行为止有 j 列放了 0 个炮有 k 列放了 1 个炮的方案数。
- 如何转移？
  - 简单分类讨论，$f(i,j,k)=f(i-1,j,k)+(j+1)f(i-1,j+1,k-1)+(k+1)f(i-1,j,k+1)+k(j+1)f(i-1,j+1,k)+\frac{(j+2)(j+1)}{2}f(i-1,j+2,k-2)+\frac{(k+2)(k+1)}{2}f(i-1,j,k+2)$。
- 时间复杂度？
  - $O(m^2n)$。

小结 1

小结 1

有时我们状态设计得太细，在有办法转移的前提下，应尽量将同类状态合并，从而精简状态。

例题 2：Raucous Rockers

例题 2：Raucous Rockers

有 n 首歌长度分别为 $a_1, a_2, \ldots, a_n$，要从中选一些歌发行 m 张长度不超过 t 的唱片，歌必须按编号顺序选进唱片且只能被选一次，求最多能选多少首歌。

例题 2：Raucous Rockers

有 n 首歌长度分别为 $a_1, a_2, \ldots, a_n$，要从中选一些歌发行 m 张长度不超过 t 的唱片，歌必须按编号顺序选进唱片且只能被选一次，求最多能选多少首歌。

$1 \le m \le n \le 1000$，$1 \le a_i \le t \le 10^9$。

例题 2： Raucous Rockers

例题 2： Raucous Rockers

- 朴素动态规划？

例题 2：Raucous Rockers

- 朴素动态规划？
  - 用 $f(i, j, k)$ 表示到第 i 首歌为止用了 j 张唱片外加长度 k 最多能选多少首歌。

例题 2：Raucous Rockers

- 朴素动态规划？
    - 用 $f(i,j,k)$ 表示到第 i 首歌为止用了 j 张唱片外加长度 k 最多能选多少首歌。
    - 当 $a_i \le k$ 时，转移有不选和选进当前唱片两种，$f(i,j,k) = \max\{f(i-1,j,k), f(i-1,j,k-a_i)+1\}$。

例题 2：Raucous Rockers

- 朴素动态规划？
  - 用 $f(i,j,k)$ 表示到第 i 首歌为止用了 j 张唱片外加长度 k 最多能选多少首歌。
  - 当 $a_i \le k$ 时，转移有不选和选进当前唱片两种，$f(i,j,k) = \max\{f(i-1,j,k), f(i-1,j,k-a_i)+1\}$。
  - 当 $a_i > k$ 时，转移有不选和选进上张唱片两种，$f(i,j,k) = \max\{f(i-1,j,k), f(i-1,j-1,t-a_i)+1\}$。

例题 2： Raucous Rockers

- 朴素动态规划？
  - 用 $f(i, j, k)$ 表示到第 i 首歌为止用了 j 张唱片外加长度 k 最多能选多少首歌。
  - 当 $a_i \leq k$ 时，转移有不选和选进当前唱片两种，$f(i, j, k) = \max\{f(i-1, j, k), f(i-1, j, k-a_i)+1\}$。
  - 当 $a_i > k$ 时，转移有不选和选进上张唱片两种，$f(i, j, k) = \max\{f(i-1, j, k), f(i-1, j-1, t-a_i)+1\}$。
- 时间复杂度？

例题 2：Raucous Rockers

- 朴素动态规划？
  - 用 $f(i,j,k)$ 表示到第 i 首歌为止用了 j 张唱片外加长度 k 最多能选多少首歌。
  - 当 $a_i \le k$ 时，转移有不选和选进当前唱片两种，$f(i,j,k) = \max\{f(i-1,j,k), f(i-1,j,k-a_i)+1\}$。
  - 当 $a_i > k$ 时，转移有不选和选进上张唱片两种，$f(i,j,k) = \max\{f(i-1,j,k), f(i-1,j-1,t-a_i)+1\}$。
- 时间复杂度？
  - $O(mnt)$。

例题 2： Raucous Rockers

例题 2： Raucous Rockers

- 如何优化状态？

例题 2： Raucous Rockers

- 如何优化状态？
  - 要使在给定长度的唱片中选的歌最多，也就是要使在给定选歌数量时所用唱片数和外加长度最少。

例题 2：Raucous Rockers

- 如何优化状态？
  - 要使在给定长度的唱片中选的歌最多，也就是要使在给定选歌数量时所用唱片数和外加长度最少。
  - 用 $f(i,j)$ 表示到第 i 首歌为止选了 j 首歌所用最少唱片数和外加长度（因此是二元组）。

例题 2： Raucous Rockers

- 如何优化状态？
  - 要使在给定长度的唱片中选的歌最多，也就是要使在给定选歌数量时所用唱片数和外加长度最少。
  - 用 $f(i,j)$ 表示到第 i 首歌为止选了 j 首歌所用最少唱片数和外加长度（因此是二元组）。
- 如何转移？

例题 2： Raucous Rockers

- 如何优化状态？
  - 要使在给定长度的唱片中选的歌最多，也就是要使在给定选歌数量时所用唱片数和外加长度最少。
  - 用 $f(i, j)$ 表示到第 i 首歌为止选了 j 首歌所用最少唱片数和外加长度（因此是二元组）。
- 如何转移？
  - 定义 $(x, y) + z$ 表示用了 x 张唱片外加长度 y 时再选一首长度为 z 的歌后所需唱片数和外加长度（也是二元组）。

例题 2：Raucous Rockers

- 如何优化状态？
  - 要使在给定长度的唱片中选的歌最多，也就是要使在给定选歌数量时所用唱片数和外加长度最少。
  - 用 $f(i, j)$ 表示到第 i 首歌为止选了 j 首歌所用最少唱片数和外加长度（因此是二元组）。
- 如何转移？
  - 定义 $(x, y) + z$ 表示用了 x 张唱片外加长度 y 时再选一首长度为 z 的歌后所需唱片数和外加长度（也是二元组）。
  - 对于第 i 首歌，转移有不选和选两种，
    $f(i, j) = \min\{f(i-1, j), f(i-1, j-1) + a_i\}$。

例题 2： Raucous Rockers

- 如何优化状态？
  - 要使在给定长度的唱片中选的歌最多，也就是要使在给定选歌数量时所用唱片数和外加长度最少。
  - 用 $f(i,j)$ 表示到第 i 首歌为止选了 j 首歌所用最少唱片数和外加长度（因此是二元组）。
- 如何转移？
  - 定义 $(x,y)+z$ 表示用了 x 张唱片外加长度 y 时再选一首长度为 z 的歌后所需唱片数和外加长度（也是二元组）。
  - 对于第 i 首歌，转移有不选和选两种，$f(i,j)=\min\{f(i-1,j),f(i-1,j-1)+a_i\}$。
- 时间复杂度？

例题 2：Raucous Rockers

- 如何优化状态？
  - 要使在给定长度的唱片中选的歌最多，也就是要使在给定选歌数量时所用唱片数和外加长度最少。
  - 用 $f(i,j)$ 表示到第 i 首歌为止选了 j 首歌所用最少唱片数和外加长度（因此是二元组）。
- 如何转移？
  - 定义 $(x,y)+z$ 表示用了 x 张唱片外加长度 y 时再选一首长度为 z 的歌后所需唱片数和外加长度（也是二元组）。
  - 对于第 i 首歌，转移有不选和选两种，$f(i,j)=\min\{f(i-1,j),f(i-1,j-1)+a_i\}$。
- 时间复杂度？
  - $O(n^2)$。

小结 2

小结 2

有时可尝试把所求的答案设计入状态，通过转变思路来精简状态。

例题 3：方伯伯的玉米田[2]

[2]题目来源：SCOI 2014

例题 3：方伯伯的玉米田[2]

有一排 n 株玉米高度分别为 $a_1, a_2, \ldots, a_n$，可以进行不超过 k 次拔高操作，每次可以把任意一个区间的玉米拔高 1。

[2]题目来源：SCOI 2014

例题 3：方伯伯的玉米田[2]

有一排 n 株玉米高度分别为 $a_1, a_2, \ldots, a_n$，可以进行不超过 k 次拔高操作，每次可以把任意一个区间的玉米拔高 1。

拔高操作结束后，可拔掉任意数量的玉米，使得剩余玉米的高度构成不下降序列，求最长序列长度。

[2]题目来源：SCOI 2014

例题 3：方伯伯的玉米田[2]

有一排 n 株玉米高度分别为 $a_1, a_2, \ldots, a_n$，可以进行不超过 k 次拔高操作，每次可以把任意一个区间的玉米拔高 1。

拔高操作结束后，可拔掉任意数量的玉米，使得剩余玉米的高度构成不下降序列，求最长序列长度。

$1 \le n \le 10000$，$1 \le k \le 500$，$1 \le a_i \le 5000$。

[2]题目来源：SCOI 2014

例题 3：方伯伯的玉米田

例题 3：方伯伯的玉米田

- 拔高操作？

例题 3：方伯伯的玉米田

- 拔高操作？
  - 拔高的区间右端点一定是 n。

例题 3：方伯伯的玉米田

- 拔高操作？
  - 拔高的区间右端点一定是 n。
  - 每株玉米被拔高的次数随位置不下降。

例题 3：方伯伯的玉米田

- 拔高操作？
  - 拔高的区间右端点一定是 n。
  - 每株玉米被拔高的次数随位置不下降。
- 朴素动态规划？

例题 3：方伯伯的玉米田

- 拔高操作？
  - 拔高的区间右端点一定是 n。
  - 每株玉米被拔高的次数随位置不下降。
- 朴素动态规划？
  - 用 $f(i,j)$ 表示以第 i 株玉米结尾它被拔高了 j 次的最长序列长度。

例题 3：方伯伯的玉米田

- 拔高操作？
  - 拔高的区间右端点一定是 n。
  - 每株玉米被拔高的次数随位置不下降。
- 朴素动态规划？
  - 用 $f(i,j)$ 表示以第 i 株玉米结尾它被拔高了 j 次的最长序列长度。
  - $f(i,j) = \max\{f(p,q)+1\}(0 \le p < i, 0 \le q \le j, a_p + q \le a_i + j)$。

例题 3：方伯伯的玉米田

- 拔高操作？
  - 拔高的区间右端点一定是 n。
  - 每株玉米被拔高的次数随位置不下降。
- 朴素动态规划？
  - 用 $f(i,j)$ 表示以第 i 株玉米结尾它被拔高了 j 次的最长序列长度。
  - $f(i,j) = \max\{f(p,q)+1\}(0 \le p < i, 0 \le q \le j, a_p + q \le a_i + j)$。
- 时间复杂度？

例题 3：方伯伯的玉米田

- 拔高操作？
  - 拔高的区间右端点一定是 n。
  - 每株玉米被拔高的次数随位置不下降。
- 朴素动态规划？
  - 用 $f(i,j)$ 表示以第 i 株玉米结尾它被拔高了 j 次的最长序列长度。
  - $f(i,j) = \max\{f(p,q)+1\}(0 \le p < i, 0 \le q \le j, a_p + q \le a_i + j)$。
- 时间复杂度？
  - $O(k^2n^2)$。

例题 3：方伯伯的玉米田

例题 3：方伯伯的玉米田

- 如何优化转移？

例题 3：方伯伯的玉米田

- 如何优化转移？
  - 用 $d(i,j)$ 表示到目前为止结尾玉米被拔高了 i 次高度为 j 的最长序列长度。

例题 3：方伯伯的玉米田

- 如何优化转移？
  - 用 $d(i,j)$ 表示到目前为止结尾玉米被拔高了 i 次高度为 j 的最长序列长度。
  - 我们需要不断更新这个表（当然不会下降），并查询二维前缀最大值。

例题 3：方伯伯的玉米田

- 如何优化转移？
  - 用 $d(i,j)$ 表示到目前为止结尾玉米被拔高了 i 次高度为 j 的最长序列长度。
  - 我们需要不断更新这个表（当然不会下降），并查询二维前缀最大值。
  - 二维树状数组的经典应用。

例题 3：方伯伯的玉米田

- 如何优化转移？
  - 用 $d(i, j)$ 表示到目前为止结尾玉米被拔高了 i 次高度为 j 的最长序列长度。
  - 我们需要不断更新这个表（当然不会下降），并查询二维前缀最大值。
  - 二维树状数组的经典应用。
- 时间复杂度？

例题 3：方伯伯的玉米田

- 如何优化转移？
  - 用 $d(i,j)$ 表示到目前为止结尾玉米被拔高了 i 次高度为 j 的最长序列长度。
  - 我们需要不断更新这个表（当然不会下降），并查询二维前缀最大值。
  - 二维树状数组的经典应用。
- 时间复杂度？
  - 设 $c = \max\{a_i + k\}$。

例题 3：方伯伯的玉米田

- 如何优化转移？
  - 用 $d(i, j)$ 表示到目前为止结尾玉米被拔高了 i 次高度为 j 的最长序列长度。
  - 我们需要不断更新这个表（当然不会下降），并查询二维前缀最大值。
  - 二维树状数组的经典应用。
- 时间复杂度？
  - 设 $c = \max\{a_i + k\}$。
  - $O(kn \log c \log k)$。

小结 3

小结 3

有时可对转移的限制条件维护一个表，借助数据结构即可降低转移的复杂度。

例题 3：方伯伯的玉米田

例题 3：方伯伯的玉米田

- 进一步优化？

例题 3：方伯伯的玉米田

- 进一步优化？
  - $f(i,j) = \max\{f(p,q)+1\}(0 \le p < i, 0 \le q \le j, a_p + q \le a_i + j)$。

例题 3：方伯伯的玉米田

- 进一步优化？
  - $f(i,j)=\max\{f(p,q)+1\}(0\le p<i, 0\le q\le j, a_p+q\le a_i+j)$。
  - $f(i,j-1)=\max\{f(p,q)+1\}(0\le p<i, 0\le q<j, a_p+q<a_i+j)$。

例题 3：方伯伯的玉米田

- 进一步优化？
  - $f(i,j) = \max\{f(p,q)+1\}(0 \le p < i, 0 \le q \le j, a_p + q \le a_i + j)$。
  - $f(i,j-1) = \max\{f(p,q)+1\}(0 \le p < i, 0 \le q < j, a_p + q < a_i + j)$。
  - 与 $f(i,j-1)$ 的转移限制条件相比，$f(i,j)$ 只多了 $q = j$ 或 $a_p + q = a_i + j$ 的情况。

例题 3：方伯伯的玉米田

- 进一步优化？
  - $f(i,j) = \max\{f(p,q)+1\}(0 \le p < i, 0 \le q \le j, a_p + q \le a_i + j)$。
  - $f(i,j-1) = \max\{f(p,q)+1\}(0 \le p < i, 0 \le q < j, a_p + q < a_i + j)$。
  - 与 $f(i,j-1)$ 的转移限制条件相比，$f(i,j)$ 只多了 $q=j$ 或 $a_p + q = a_i + j$ 的情况。
  - 在之前维护的表 d 中，我们只需要查询某一行或某一列的前缀最大值。

例题 3：方伯伯的玉米田

- 进一步优化？
  - $f(i,j) = \max\{f(p,q)+1\}(0 \le p < i, 0 \le q \le j, a_p + q \le a_i + j)$。
  - $f(i,j-1) = \max\{f(p,q)+1\}(0 \le p < i, 0 \le q < j, a_p + q < a_i + j)$。
  - 与 $f(i,j-1)$ 的转移限制条件相比，$f(i,j)$ 只多了 $q=j$ 或 $a_p + q = a_i + j$ 的情况。
  - 在之前维护的表 d 中，我们只需要查询某一行或某一列的前缀最大值。
  - 一维树状数组即可。

例题 3：方伯伯的玉米田

- 进一步优化？
  - $f(i,j) = \max\{f(p,q)+1\}(0 \le p < i, 0 \le q \le j, a_p + q \le a_i + j)$。
  - $f(i,j-1) = \max\{f(p,q)+1\}(0 \le p < i, 0 \le q < j, a_p + q < a_i + j)$。
  - 与 $f(i,j-1)$ 的转移限制条件相比，$f(i,j)$ 只多了 $q = j$ 或 $a_p + q = a_i + j$ 的情况。
  - 在之前维护的表 d 中，我们只需要查询某一行或某一列的前缀最大值。
  - 一维树状数组即可。
- 时间复杂度？

例题 3：方伯伯的玉米田

- 进一步优化？
  - $f(i, j) = \max\{f(p, q) + 1\}(0 \le p < i, 0 \le q \le j, a_p + q \le a_i + j)$。
  - $f(i, j-1) = \max\{f(p, q) + 1\}(0 \le p < i, 0 \le q < j, a_p + q < a_i + j)$。
  - 与 $f(i, j-1)$ 的转移限制条件相比，$f(i, j)$ 只多了 $q = j$ 或 $a_p + q = a_i + j$ 的情况。
  - 在之前维护的表 d 中，我们只需要查询某一行或某一列的前缀最大值。
  - 一维树状数组即可。
- 时间复杂度？
  - $O(kn(\log c + \log k))$。

小结 4

小结 4

有时可通过观察转移限制条件的增量避免重复计算，从而降低转移的复杂度。

例题 4：多重背包

例题 4：多重背包

有 n 种物品，第 i 种物品有 a_i 个，每个所占空间为 b_i，价值为 c_i。要从中选择一些物品放入容量为 m 的背包，求最大总价值。

例题 4：多重背包

有 n 种物品，第 i 种物品有 a_i 个，每个所占空间为 b_i，价值为 c_i。要从中选择一些物品放入容量为 m 的背包，求最大总价值。

$1 \le n \le 1000$，$1 \le m, a_i, b_i, c_i \le 10000$。

例题 4：多重背包

例题 4：多重背包

- 朴素动态规划？

例题 4：多重背包

- 朴素动态规划？
  - 用 $f(i,j)$ 表示到第 i 种物品为止占了容量 j 的最大总价值。

例题 4：多重背包

- 朴素动态规划？
  - 用 $f(i,j)$ 表示到第 i 种物品为止占了容量 j 的最大总价值。
  - $f(i,j) = \max\{f(i-1, j-kb_i)+kc_i\}(0 \le k \le \min\{a_i, \lfloor \frac{j}{b_i} \rfloor\})$。

例题 4：多重背包

- 朴素动态规划？
  - 用 $f(i,j)$ 表示到第 i 种物品为止占了容量 j 的最大总价值。
  - $f(i,j) = \max\{f(i-1, j-kb_i)+kc_i\}(0 \le k \le \min\{a_i, \lfloor \frac{j}{b_i} \rfloor\})$。
- 时间复杂度？

例题 4：多重背包

- 朴素动态规划？
  - 用 $f(i,j)$ 表示到第 i 种物品为止占了容量 j 的最大总价值。
  - $f(i,j) = \max\{f(i-1, j-kb_i)+kc_i\}(0 \le k \le \min\{a_i, \lfloor \frac{j}{b_i} \rfloor\})$。
- 时间复杂度？
  - 设 $s = \sum a_i$。

例题 4：多重背包

- 朴素动态规划？
  - 用 $f(i,j)$ 表示到第 i 种物品为止占了容量 j 的最大总价值。
  - $f(i,j) = \max\{f(i-1, j-kb_i)+kc_i\}(0 \le k \le \min\{a_i, \lfloor \frac{j}{b_i} \rfloor\})$。
- 时间复杂度？
  - 设 $s = \sum a_i$。
  - $O(ms)$。

例题 4：多重背包

例题 4：多重背包

- 如何优化转移？

例题 4：多重背包

- 如何优化转移？
  - 对于第 i 种物品，将状态第二维按模 b_i 的余数分类处理（显然互不影响），不妨设当前处理到的余数为 r。

例题 4：多重背包

- 如何优化转移？
  - 对于第 i 种物品，将状态第二维按模 b_i 的余数分类处理（显然互不影响），不妨设当前处理到的余数为 r。
  - 设 $g(j) = f(i, jb_i + r)$，$h(j) = f(i-1, jb_i + r)$，则 $g(j) = \max\{h(k) - kc_i\} + jc_i(\max\{j - a_i, 0\} \leq k \leq j)$。

例题 4：多重背包

- 如何优化转移？
  - 对于第 i 种物品，将状态第二维按模 b_i 的余数分类处理（显然互不影响），不妨设当前处理到的余数为 r。
  - 设 $g(j) = f(i, jb_i + r)$，$h(j) = f(i-1, jb_i + r)$，则 $g(j) = \max\{h(k) - kc_i\} + jc_i(\max\{j - a_i, 0\} \leq k \leq j)$。
  - 单调队列的经典应用。

例题 4：多重背包

- 如何优化转移？
  - 对于第 i 种物品，将状态第二维按模 b_i 的余数分类处理（显然互不影响），不妨设当前处理到的余数为 r。
  - 设 $g(j)=f(i,jb_i+r)$，$h(j)=f(i-1,jb_i+r)$，则 $g(j)=\max\{h(k)-kc_i\}+jc_i(\max\{j-a_i,0\}\le k\le j)$。
  - 单调队列的经典应用。
- 时间复杂度？

例题 4：多重背包

- 如何优化转移？
  - 对于第 i 种物品，将状态第二维按模 b_i 的余数分类处理（显然互不影响），不妨设当前处理到的余数为 r。
  - 设 $g(j)=f(i,jb_i+r)$，$h(j)=f(i-1,jb_i+r)$，则 $g(j)=\max\{h(k)-kc_i\}+jc_i(\max\{j-a_i,0\}\le k\le j)$。
  - 单调队列的经典应用。
- 时间复杂度？
  - $O(mn)$。

小结 5

小结 5

有时可将状态分为彼此独立的几类，从而化不连续为连续，方便用数据结构维护。

例题 5：Lightning Conductor[3]

[3]题目来源：POI 2011

例题 5：Lightning Conductor[3]

有一排 n 栋楼高度分别为 $h_1, h_2, \ldots, h_n$，要选一栋楼顶装避雷针保护整排楼。

[3] 题目来源：POI 2011

例题 5：Lightning Conductor[3]

有一排 n 栋楼高度分别为 $h_1, h_2, \ldots, h_n$，要选一栋楼顶装避雷针保护整排楼。

在第 i 栋楼顶装高度为 p 的避雷针能保护第 j 栋楼当且仅当 $h_j \le h_i + p - \sqrt{|i-j|}$，求选每栋楼顶装避雷针的最小高度。

[3]题目来源：POI 2011

例题 5：Lightning Conductor[3]

有一排 n 栋楼高度分别为 $h_1, h_2, \ldots, h_n$，要选一栋楼顶装避雷针保护整排楼。

在第 i 栋楼顶装高度为 p 的避雷针能保护第 j 栋楼当且仅当 $h_j \le h_i + p - \sqrt{|i-j|}$，求选每栋楼顶装避雷针的最小高度。

$1 \le n \le 5 \times 10^5$，$0 \le h_i \le 10^9$。

[3] 题目来源：POI 2011

例题 5：Lightning Conductor

例题 5： Lightning Conductor

- 不是动态规划？

例题 5： Lightning Conductor

- 不是动态规划？
  - 用 $f(i)$ 表示选第 i 栋楼顶装避雷针的最小高度。

例题 5：Lightning Conductor

- 不是动态规划？
  - 用 $f(i)$ 表示选第 i 栋楼顶装避雷针的最小高度。
  - 将题中式子变形，
    $f(i) = \max\{h_j - h_i + \sqrt{|i-j|}\}(1 \le j \le n)$。

例题 5： Lightning Conductor

- 不是动态规划？
  - 用 $f(i)$ 表示选第 i 栋楼顶装避雷针的最小高度。
  - 将题中式子变形，
    $f(i) = \max\{h_j - h_i + \sqrt{|i-j|}\}(1 \le j \le n)$。
- 时间复杂度？

例题 5：Lightning Conductor

- 不是动态规划？
  - 用 $f(i)$ 表示选第 i 栋楼顶装避雷针的最小高度。
  - 将题中式子变形，
    $f(i) = \max\{h_j - h_i + \sqrt{|i-j|}\}(1 \le j \le n)$。
- 时间复杂度？
  - $O(n^2)$。

经典模型 1：决策单调性优化

经典模型 1：决策单调性优化

- $f(i) = \min\{g(j) + w(j, i)\}(1 \le j < i)$, $w(p, q+1) - w(p, q)$ 随 p 不增。

经典模型 1：决策单调性优化

- $f(i) = \min\{g(j) + w(j,i)\}(1 \le j < i)$，$w(p, q+1) - w(p, q)$ 随 p 不增。
- 若 $k < j < i$，$g(k) + w(k,i) > g(j) + w(j,i)$，则 $g(k) + w(k, i+1) > g(j) + w(j, i+1)$。

经典模型 1：决策单调性优化

- $f(i) = \min\{g(j) + w(j, i)\}(1 \le j < i)$，$w(p, q+1) - w(p, q)$ 随 p 不增。
- 若 $k < j < i$，$g(k) + w(k, i) > g(j) + w(j, i)$，则 $g(k) + w(k, i+1) > g(j) + w(j, i+1)$。
- 显然，最优决策随 i 不减。

经典模型 1：决策单调性优化

经典模型 1：决策单调性优化

- 实现决策单调性优化需要我们维护一个决策表。

经典模型 1：决策单调性优化

- 实现决策单调性优化需要我们维护一个决策表。
- 初始时只有 $f(1)$，于是所有状态的当前最优决策都是 1：$1111111111111111111111111111111111111111$。

经典模型 1：决策单调性优化

- 实现决策单调性优化需要我们维护一个决策表。
- 初始时只有 $f(1)$，于是所有状态的当前最优决策都是 1：1111111111111111111111111111111111111111。
- 此时 $f(2)$ 已经确定（最优决策只能是 1），于是可以用决策 2 来更新决策表。由决策单调性，新的决策表只能有这样的形式：1111111111111111111111222222222222222222。

经典模型 1：决策单调性优化

- 实现决策单调性优化需要我们维护一个决策表。
- 初始时只有 $f(1)$，于是所有状态的当前最优决策都是 1：11111111111111111111111111111111111111111。
- 此时 $f(2)$ 已经确定（最优决策只能是 1），于是可以用决策 2 来更新决策表。由决策单调性，新的决策表只能有这样的形式：11111111111111111111112222222222222222222。
- 显然，我们可以二分查找转折点。

经典模型 1：决策单调性优化

经典模型 1：决策单调性优化

- 此时 $f(3)$ 也已经确定，于是可以用决策 3 来更新决策表。由决策单调性，新的决策表只能有以下两种形式：
1111111111111111111111222222222333333333
1111111111133333333333333333333333333333。

动态规划优化

徐毅

引入

例题

总结

习题

经典模型 1：决策单调性优化

- 此时 $f(3)$ 也已经确定，于是可以用决策 3 来更新决策表。由决策单调性，新的决策表只能有以下两种形式：1111111111111111111111222222222333333333
  1111111111133333333333333333333333333333。
- 因此，我们首先看决策 2 的区间 $[s,t]$ 的 s 点上是否决策 3 更优，若是则全部抛弃决策 2，将此区间并入决策 3，并继续以同样的方式看决策 1，否则在决策 2 的区间 $[s,t]$ 中二分查找转折点。

经典模型 1：决策单调性优化

经典模型 1：决策单调性优化

- 通过上面的模拟，算法已经基本明晰。

经典模型 1：决策单调性优化

- 通过上面的模拟，算法已经基本明晰。
- 我们用栈来维护决策表，每个元素保存一个决策的区间，显然区间与区间前后相接。

经典模型 1：决策单调性优化

- 通过上面的模拟，算法已经基本明晰。
- 我们用栈来维护决策表，每个元素保存一个决策的区间，显然区间与区间前后相接。
- 当插入一个新的决策时，从栈顶开始对每一个老决策进行以下操作：

经典模型 1：决策单调性优化

- 通过上面的模拟，算法已经基本明晰。
- 我们用栈来维护决策表，每个元素保存一个决策的区间，显然区间与区间前后相接。
- 当插入一个新的决策时，从栈顶开始对每一个老决策进行以下操作：
  - 若老决策的起点处是新决策更好，则退栈，全部抛弃老决策，将其区间并入新决策，继续处理当前栈顶；

经典模型 1：决策单调性优化

- 通过上面的模拟，算法已经基本明晰。
- 我们用栈来维护决策表，每个元素保存一个决策的区间，显然区间与区间前后相接。
- 当插入一个新的决策时，从栈顶开始对每一个老决策进行以下操作：
  - 若老决策的起点处是新决策更好，则退栈，全部抛弃老决策，将其区间并入新决策，继续处理当前栈顶；
  - 若老决策的起点处还是老决策好，则转折点必然在这个老决策的区间中，二分查找之，然后新决策进栈，结束。

经典模型 1：决策单调性优化

- 通过上面的模拟，算法已经基本明晰。
- 我们用栈来维护决策表，每个元素保存一个决策的区间，显然区间与区间前后相接。
- 当插入一个新的决策时，从栈顶开始对每一个老决策进行以下操作：
  - 若老决策的起点处是新决策更好，则退栈，全部抛弃老决策，将其区间并入新决策，继续处理当前栈顶；
  - 若老决策的起点处还是老决策好，则转折点必然在这个老决策的区间中，二分查找之，然后新决策进栈，结束。
- 时间复杂度为 $O(n \log n)$。

例题 5：Lightning Conductor

例题 5： Lightning Conductor

- 变得像动态规划？

例题 5：Lightning Conductor

- 变得像动态规划？
  - 设 $g(i) = h_i$，$w(p, q) = \sqrt{q - p}$。

例题 5：Lightning Conductor

- 变得像动态规划？
  - 设 $g(i) = h_i$，$w(p, q) = \sqrt{q - p}$。
  - $f(i) = \max\{g(j) + w(j, i)\} - h_i (1 \le j < i)$。

例题 5：Lightning Conductor

- 变得像动态规划？
  - 设 $g(i) = h_i$，$w(p, q) = \sqrt{q - p}$。
  - $f(i) = \max\{g(j) + w(j, i)\} - h_i (1 \leq j < i)$。
- $j > i$ 的情况？

例题 5： Lightning Conductor

- 变得像动态规划？
  - 设 $g(i) = h_i$， $w(p, q) = \sqrt{q - p}$。
  - $f(i) = \max\{g(j) + w(j, i)\} - h_i (1 \le j < i)$。
- $j > i$ 的情况？
  - 逆序再做一次即可。

例题 5： Lightning Conductor

例题 5：Lightning Conductor

- 如何优化？

例题 5：Lightning Conductor

- 如何优化？
  - $w(p,q+1)-w(p,q)=\sqrt{q+1-p}-\sqrt{q-p}$，随 p 不减。

例题 5：Lightning Conductor

- 如何优化？
  - $w(p, q+1) - w(p, q) = \sqrt{q+1-p} - \sqrt{q-p}$，随 p 不减。
  - 决策单调性优化。

例题 5：Lightning Conductor

- 如何优化？
  - $w(p, q+1) - w(p, q) = \sqrt{q+1-p} - \sqrt{q-p}$，随 p 不减。
  - 决策单调性优化。
- 时间复杂度？

例题 5： Lightning Conductor

- 如何优化？
  - $w(p, q+1) - w(p, q) = \sqrt{q+1-p} - \sqrt{q-p}$，随 p 不减。
  - 决策单调性优化。
- 时间复杂度？
  - $O(n \log n)$。

例题 5： Lightning Conductor

例题 5：Lightning Conductor

- 进一步优化？

例题 5：Lightning Conductor

- 进一步优化？
  - 设最高的楼是第 m 栋，若 $h_j < h_m - \lceil\sqrt{n}\rceil$，则 $h_j - h_i + \sqrt{|i-j|} < h_m - h_i + \sqrt{|i-m|}$。

例题 5：Lightning Conductor

- 进一步优化？
  - 设最高的楼是第 m 栋，若 $h_j < h_m - \lceil \sqrt{n} \rceil$，则 $h_j - h_i + \sqrt{|i-j|} < h_m - h_i + \sqrt{|i-m|}$。
  - 只有当 $h_j \geq h_m - \lceil \sqrt{n} \rceil$ 时 j 才可能成为最优决策。

例题 5：Lightning Conductor

- 进一步优化？
  - 设最高的楼是第 m 栋，若 $h_j < h_m - \lceil \sqrt{n} \rceil$，则 $h_j - h_i + \sqrt{|i-j|} < h_m - h_i + \sqrt{|i-m|}$。
  - 只有当 $h_j \geq h_m - \lceil \sqrt{n} \rceil$ 时 j 才可能成为最优决策。
  - 对于高度相同的楼也只有最左侧和最右侧的可能成为最优决策。

例题 5：Lightning Conductor

- 进一步优化？
  - 设最高的楼是第 m 栋，若 $h_j < h_m - \lceil\sqrt{n}\rceil$，则 $h_j - h_i + \sqrt{|i-j|} < h_m - h_i + \sqrt{|i-m|}$。
  - 只有当 $h_j \geq h_m - \lceil\sqrt{n}\rceil$ 时 j 才可能成为最优决策。
  - 对于高度相同的楼也只有最左侧和最右侧的可能成为最优决策。
  - 更新决策表不超过 $\sqrt{n}$ 次。

例题 5：Lightning Conductor

- 进一步优化？
  - 设最高的楼是第 m 栋，若 $h_j < h_m - \lceil\sqrt{n}\rceil$，则 $h_j - h_i + \sqrt{|i-j|} < h_m - h_i + \sqrt{|i-m|}$。
  - 只有当 $h_j \geq h_m - \lceil\sqrt{n}\rceil$ 时 j 才可能成为最优决策。
  - 对于高度相同的楼也只有最左侧和最右侧的可能成为最优决策。
  - 更新决策表不超过 $\sqrt{n}$ 次。
- 时间复杂度？

例题 5：Lightning Conductor

- 进一步优化？
  - 设最高的楼是第 m 栋，若 $h_j < h_m - \lceil\sqrt{n}\rceil$，则 $h_j - h_i + \sqrt{|i-j|} < h_m - h_i + \sqrt{|i-m|}$。
  - 只有当 $h_j \geq h_m - \lceil\sqrt{n}\rceil$ 时 j 才可能成为最优决策。
  - 对于高度相同的楼也只有最左侧和最右侧的可能成为最优决策。
  - 更新决策表不超过 $\sqrt{n}$ 次。
- 时间复杂度？
  - $O(n + \sqrt{n}\log n)$。

例题 5：Lightning Conductor

- 进一步优化？
  - 设最高的楼是第 m 栋，若 $h_j < h_m - \lceil\sqrt{n}\rceil$，则 $h_j - h_i + \sqrt{|i-j|} < h_m - h_i + \sqrt{|i-m|}$。
  - 只有当 $h_j \geq h_m - \lceil\sqrt{n}\rceil$ 时 j 才可能成为最优决策。
  - 对于高度相同的楼也只有最左侧和最右侧的可能成为最优决策。
  - 更新决策表不超过 $\sqrt{n}$ 次。
- 时间复杂度？
  - $O(n + \sqrt{n}\log n)$。
  - $O(n)$。

小结 6

小结 6

有时可利用转移方程的特殊性，通过一定的分析排除掉一些决策，从而降低转移的复杂度。

例题 6：防御准备

例题 6：防御准备

有一排 n 个检查点，第 i 个点要么用 a_i 的花费建立防御塔，要么要依靠其右侧离它最近的防御塔 j 并用 $j-i$ 的花费通过检查，求使所有点通过检查的最小总花费。

例题 6：防御准备

有一排 n 个检查点，第 i 个点要么用 a_i 的花费建立防御塔，要么要依靠其右侧离它最近的防御塔 j 并用 $j-i$ 的花费通过检查，求使所有点通过检查的最小总花费。

$1 \le n \le 10^6$，$1 \le a_i \le 10^9$。

例题 6：防御准备

例题 6：防御准备

- 朴素动态规划？

例题 6：防御准备

- 朴素动态规划？
  - 用 $f(i)$ 表示到第 i 个点为止（第 i 个点必建立防御塔）所需最小总花费。

例题 6：防御准备

- 朴素动态规划？
  - 用 $f(i)$ 表示到第 i 个点为止（第 i 个点必建立防御塔）所需最小总花费。
  - $f(i) = \min\{f(j) + \frac{(i-j)(i-j-1)}{2}\} + a_i (0 \leq j < i)$。

例题 6：防御准备

- 朴素动态规划？
  - 用 $f(i)$ 表示到第 i 个点为止（第 i 个点必建立防御塔）所需最小总花费。
  - $f(i) = \min\{f(j) + \frac{(i-j)(i-j-1)}{2}\} + a_i (0 \leq j < i)$。
- 时间复杂度？

例题 6：防御准备

- 朴素动态规划？
  - 用 $f(i)$ 表示到第 i 个点为止（第 i 个点必建立防御塔）所需最小总花费。
  - $f(i) = \min\{f(j) + \frac{(i-j)(i-j-1)}{2}\} + a_i (0 \le j < i)$。
- 时间复杂度？
  - $O(n^2)$。

经典模型 2：斜率优化

经典模型 2：斜率优化

- $f(i) = \min\{a_i x(j) + b_i y(j)\}(1 \leq j < i)$。

经典模型 2：斜率优化

- $f(i) = \min\{a_i x(j) + b_i y(j)\}(1 \leq j < i)$。
- 将决策 i 用 $f(i)$ 决定的点 $(x(i), y(i))$ 在平面直角坐标系上表示，我们的目标是 $\min p = ax + by$。

经典模型 2：斜率优化

- $f(i) = \min\{a_i x(j) + b_i y(j)\}(1 \le j < i)$。
- 将决策 i 用 $f(i)$ 决定的点 $(x(i), y(i))$ 在平面直角坐标系上表示，我们的目标是 $\min p = ax + by$。
- 也就是说，对于直线 $y = -\frac{a}{b}x + \frac{p}{b}$ (不妨设 $b > 0$)，我们要使其纵截距最小。

经典模型 2：斜率优化

- $f(i) = \min\{a_i x(j) + b_i y(j)\}(1 \le j < i)$。
- 将决策 i 用 $f(i)$ 决定的点 $(x(i), y(i))$ 在平面直角坐标系上表示，我们的目标是 $\min p = ax + by$。
- 也就是说，对于直线 $y = -\frac{a}{b}x + \frac{p}{b}$（不妨设 $b > 0$），我们要使其纵截距最小。
- 可以想象，一条固定斜率的直线不断向上平移，碰到的第一个点就是最优决策。

经典模型 2：斜率优化

- $f(i) = \min\{a_i x(j) + b_i y(j)\}(1 \le j < i)$。
- 将决策 i 用 $f(i)$ 决定的点 $(x(i), y(i))$ 在平面直角坐标系上表示，我们的目标是 $\min p = ax + by$。
- 也就是说，对于直线 $y = -\frac{a}{b}x + \frac{p}{b}$ (不妨设 $b > 0$)，我们要使其纵截距最小。
- 可以想象，一条固定斜率的直线不断向上平移，碰到的第一个点就是最优决策。
- 而可能成为最优决策的点，一定在这些点的下凸壳上。

经典模型 2：斜率优化

经典模型 2：斜率优化

- 考虑一种更特殊的情况，$x(i)$ 随 i 不减，斜率随 i 不减，显然最优决策随 i 不减。

经典模型 2：斜率优化

- 考虑一种更特殊的情况，$x(i)$ 随 i 不减，斜率随 i 不减，显然最优决策随 i 不减。
- 与此同时，在寻找最优决策的过程中，一旦下一个决策不如当前决策，之后的所有决策也一定不如当前决策。

经典模型 2：斜率优化

- 考虑一种更特殊的情况，$x(i)$ 随 i 不减，斜率随 i 不减，显然最优决策随 i 不减。
- 与此同时，在寻找最优决策的过程中，一旦下一个决策不如当前决策，之后的所有决策也一定不如当前决策。
- 因此，这种情况斜率优化的实现只需要借助一个单调队列：

经典模型 2：斜率优化

- 考虑一种更特殊的情况，$x(i)$ 随 i 不减，斜率随 i 不减，显然最优决策随 i 不减。
- 与此同时，在寻找最优决策的过程中，一旦下一个决策不如当前决策，之后的所有决策也一定不如当前决策。
- 因此，这种情况斜率优化的实现只需要借助一个单调队列：
    - 队首后移，直至最优决策；

经典模型 2：斜率优化

- 考虑一种更特殊的情况，$x(i)$ 随 i 不减，斜率随 i 不减，显然最优决策随 i 不减。
- 与此同时，在寻找最优决策的过程中，一旦下一个决策不如当前决策，之后的所有决策也一定不如当前决策。
- 因此，这种情况斜率优化的实现只需要借助一个单调队列：
  - 队首后移，直至最优决策；
  - 将决策后得到的新状态入队，维护下凸壳。

经典模型 2：斜率优化

- 考虑一种更特殊的情况，$x(i)$ 随 i 不减，斜率随 i 不减，显然最优决策随 i 不减。
- 与此同时，在寻找最优决策的过程中，一旦下一个决策不如当前决策，之后的所有决策也一定不如当前决策。
- 因此，这种情况斜率优化的实现只需要借助一个单调队列：
  - 队首后移，直至最优决策；
  - 将决策后得到的新状态入队，维护下凸壳。
- 时间复杂度为 $O(n)$。

例题 6：防御准备

例题 6：防御准备

- 如何优化？

例题 6：防御准备

- 如何优化？
  - 变形得 $f(i) = \min\{f(j) + \frac{j(j+1)}{2} - ij\} + a_i + \frac{i(i-1)}{2} (0 \leq j < i)$。

例题 6：防御准备

- 如何优化？
  - 变形得
    $f(i)=\min\{f(j)+\frac{j(j+1)}{2}-ij\}+a_i+\frac{i(i-1)}{2}(0\le j<i)$。
  - 设 $x=j$，$y=f(j)+\frac{j(j+1)}{2}$，我们要 $\min z=-ix+y$，也即要使直线 $y=ix+z$ 的纵截距最小。

例题 6：防御准备

- 如何优化？
  - 变形得
    $f(i) = \min\{f(j) + \frac{j(j+1)}{2} - ij\} + a_i + \frac{i(i-1)}{2}(0 \leq j < i)$。
  - 设 $x = j$，$y = f(j) + \frac{j(j+1)}{2}$，我们要 $\min z = -ix + y$，也即要使直线 $y = ix + z$ 的纵截距最小。
  - x 单调增，斜率 i 单调增。

例题 6：防御准备

- 如何优化？
  - 变形得
    $f(i) = \min\{f(j) + \frac{j(j+1)}{2} - ij\} + a_i + \frac{i(i-1)}{2} (0 \le j < i)$。
  - 设 $x = j$，$y = f(j) + \frac{j(j+1)}{2}$，我们要 $\min z = -ix + y$，也即要使直线 $y = ix + z$ 的纵截距最小。
  - x 单调增，斜率 i 单调增。
  - 斜率优化。

例题 6：防御准备

- 如何优化？
  - 变形得 $f(i) = \min\{f(j) + \frac{j(j+1)}{2} - ij\} + a_i + \frac{i(i-1)}{2}(0 \le j < i)$。
  - 设 $x = j$，$y = f(j) + \frac{j(j+1)}{2}$，我们要 $\min z = -ix + y$，也即要使直线 $y = ix + z$ 的纵截距最小。
  - x 单调增，斜率 i 单调增。
  - 斜率优化。
- 时间复杂度？

例题 6：防御准备

- 如何优化？
  - 变形得 $f(i) = \min\{f(j) + \frac{j(j+1)}{2} - ij\} + a_i + \frac{i(i-1)}{2}(0 \le j < i)$。
  - 设 $x = j$，$y = f(j) + \frac{j(j+1)}{2}$，我们要 $\min z = -ix + y$，也即要使直线 $y = ix + z$ 的纵截距最小。
  - x 单调增，斜率 i 单调增。
  - 斜率优化。
- 时间复杂度？
  - $O(n)$。

总结

总结

这些内容其实都是动态规划优化中最基本也是最重要的部分，希望大家务必掌握。

总结

这些内容其实都是动态规划优化中最基本也是最重要的部分，希望大家务必掌握。

随着学习的深入，碰到的问题也会趋于复杂，最关键的还是要能将做题所得运用到今后的思考中。

习题

习题

我在此选取了一些最近几年的赛题作为对课上内容的巩固，希望大家踊跃参与讨论。

习题

我在此选取了一些最近几年的赛题作为对课上内容的巩固，希望大家踊跃参与讨论。

课上未讨论完的部分，留给大家课后思考，如有困难可在网上查到题解。

习题 1：免费的馅饼[4]

[4]题目来源：2011 年国家集训队互测

习题 1：免费的馅饼[4]

舞台宽度为 w 格，游戏者占一格，可选任意一格开始游戏，每秒可以不动也可以向左或向右移动一格或两格。

[4] 题目来源：2011 年国家集训队互测

习题 1：免费的馅饼[4]

舞台宽度为 w 格，游戏者占一格，可选任意一格开始游戏，每秒可以不动也可以向左或向右移动一格或两格。

有 n 块馅饼，第 i 块馅饼会在第 t_i 秒落在第 p_i 格内，若此时游戏者恰在此格内就能接到该馅饼并获得分数 v_i，求最大总分。

[4]题目来源：2011 年国家集训队互测

习题 1：免费的馅饼[4]

舞台宽度为 w 格，游戏者占一格，可选任意一格开始游戏，每秒可以不动也可以向左或向右移动一格或两格。

有 n 块馅饼，第 i 块馅饼会在第 t_i 秒落在第 p_i 格内，若此时游戏者恰在此格内就能接到该馅饼并获得分数 v_i，求最大总分。

$1 \le p_i \le w \le 10^8$，$1 \le n \le 10^5$，$1 \le t_i \le 10^8$，$1 \le v_i \le 1000$。

[4]题目来源：2011 年国家集训队互测

习题 2：Domination[5]

[5]题目来源：The 2014 ACM-ICPC Asia Mudanjiang Regional Contest

习题 2：Domination[5]

在一个 n 行 m 列的棋盘上，每天随机选一个空格子放一个棋子，求使得每行每列都至少有一个棋子的期望天数。

[5] 题目来源：The 2014 ACM-ICPC Asia Mudanjiang Regional Contest

习题 2：Domination[5]

在一个 n 行 m 列的棋盘上，每天随机选一个空格子放一个棋子，求使得每行每列都至少有一个棋子的期望天数。

$1 \leq n, m \leq 50$。

[5]题目来源：The 2014 ACM-ICPC Asia Mudanjiang Regional Contest

习题 3：特别行动队[6]

[6] 题目来源：APIO 2010

习题 3：特别行动队[6]

有 n 个士兵初始战斗力分别为 $x_1, x_2, \ldots, x_n$，一支特别行动队中士兵编号必须连续（假设从 i 到 j），设 $x = x_i + x_{i+1} + \ldots + x_j$，给出系数 a, b, c，则其战斗力为 $ax^2 + bx + c$，求将士兵全部编为特别行动队的最大总战斗力。

[6] 题目来源：APIO 2010

习题 3：特别行动队[6]

有 n 个士兵初始战斗力分别为 $x_1, x_2, \ldots, x_n$，一支特别行动队中士兵编号必须连续（假设从 i 到 j)，设 $x = x_i + x_{i+1} + \ldots + x_j$，给出系数 a, b, c，则其战斗力为 $ax^2 + bx + c$，求将士兵全部编为特别行动队的最大总战斗力。

$1 \leq n \leq 10^6$，$-5 \leq a \leq -1$，$|b|, |c| \leq 10^7$，$1 \leq x_i \leq 100$。

[6]题目来源：APIO 2010

习题 4：序列分割[7]

[7]题目来源：APIO 2014

习题 4：序列分割[7]

有一个长度为 n 的序列 $a_1, a_2, \ldots, a_n$，要进行 k 次操作，每次选择一个长度超过 1 的序列从任意位置分割成两个非空的新序列，并得到两个新序列的和的乘积的分数，求最大总分。

[7] 题目来源：APIO 2014

习题 4：序列分割[7]

有一个长度为 n 的序列 $a_1, a_2, \ldots, a_n$，要进行 k 次操作，每次选择一个长度超过 1 的序列从任意位置分割成两个非空的新序列，并得到两个新序列的和的乘积的分数，求最大总分。

$2 \le n \le 10^5$，$1 \le k \le \min\{n-1, 200\}$，$0 \le a_i \le 10000$。

[7] 题目来源：APIO 2014

习题 5：瑰丽华尔兹[8]

[8]题目来源：NOI 2005

习题 5：瑰丽华尔兹[8]

在一个 n 行 m 列的棋盘上，有一些格子有障碍，游戏者初始位置为 (x, y)。有 k 个时间区间，第 i 个区间为 $[s_i, t_i]$，方向为 d_i。

[8] 题目来源：NOI 2005

习题 5：瑰丽华尔兹[8]

在一个 n 行 m 列的棋盘上，有一些格子有障碍，游戏者初始位置为 (x, y)。有 k 个时间区间，第 i 个区间为 $[s_i, t_i]$，方向为 d_i。

游戏者每秒可选择不动或按所在时间区间的方向移动一格，不能移到障碍上或移出棋盘，求最多移动的步数。

[8] 题目来源：NOI 2005

习题 5：瑰丽华尔兹[8]

在一个 n 行 m 列的棋盘上，有一些格子有障碍，游戏者初始位置为 (x, y)。有 k 个时间区间，第 i 个区间为 $[s_i, t_i]$，方向为 d_i。

游戏者每秒可选择不动或按所在时间区间的方向移动一格，不能移到障碍上或移出棋盘，求最多移动的步数。

$1 \le x \le n \le 200$，$1 \le y \le m \le 200$，$1 \le k \le 200$，$s_1 = 1$，$s_i = t_{i-1} + 1$，$t_k \le 40000$，$1 \le d_i \le 4$。

[8] 题目来源：NOI 2005

习题 6：诗人小 G[9]

[9] 题目来源：NOI 2009

习题 6：诗人小 G[9]

一首诗有 n 个句子，可将连续若干句用空格隔开放在一行，每行的不协调度定义为该行实际长度与行标准长度 l 差的绝对值的 p 次方，求排版后产生的最小总不协调度。

[9] 题目来源：NOI 2009

习题 6：诗人小 G[9]

一首诗有 n 个句子，可将连续若干句用空格隔开放在一行，每行的不协调度定义为该行实际长度与行标准长度 l 差的绝对值的 p 次方，求排版后产生的最小总不协调度。

$1 \leq n \leq 10^5$，$1 \leq l \leq 3 \times 10^6$，$1 \leq p \leq 10$，每句长度不超过 30。

[9] 题目来源：NOI 2009