

自动控制理论（1）作业十三

作业内容：在教材第四章内容和电子讲义的基础上，试解答以下题目。

学习目的：控制系统的校正设计

提交时间：12月5日上课交，或交电子版致网络学堂截至12月5日24时

书上 5.4, 5.5, 6.17, 6.19, 6.20

5.4 设有一被控对象，其开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K}{s(s+1)(2s+1)},$$

设计一个超前滞后校正装置，使 $K_v=10s^{-1}$ ，相角裕度为 50° ，增益裕度大于10dB。

解：（1）确定系统开环放大系数。

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) = K$$

要求 $K_v=10 s^{-1}$ ，则 $K=10$

（2）分析校正前系统的频率特性和稳定性。

画 $K=10$ 时的Bode图。

先确定转折频率为1、0.5

$$\text{当 } \omega = 1 \text{ 时, } 20\lg|G(j\omega)| = 20\lg\frac{10}{1 \times 1 \times 2 \times 1} = 14\text{dB}$$

$$\text{当 } \omega = 0.5 \text{ 时, } 20\lg|G(j\omega)| = 20\lg\frac{10}{0.5 \times 1 \times 1} = 26\text{dB}$$

下面确定剪切频率 ω_c ：

$$\text{由 } 20\lg|G(j\omega_c)| = 20\lg\frac{10}{\omega_c \cdot \omega_c \cdot 2\omega_c} = 0\text{dB, 解得 } \omega_c = 1.7\text{rad/s}$$

$$\begin{aligned} \text{此时, 相角为 } \angle G(j\omega) &= -90^\circ - \arctan\omega_c - \arctan 2\omega_c \\ &= -90^\circ - \arctan 1.7 - \arctan 3.4 = -223^\circ \end{aligned}$$

下面确定交界频率：

$$\angle G(j\omega_g) = -90^\circ - \arctan\omega_g - \arctan 2\omega_g = -180^\circ$$

$$\Rightarrow \arctan\omega_g + \arctan 2\omega_g = 90^\circ$$

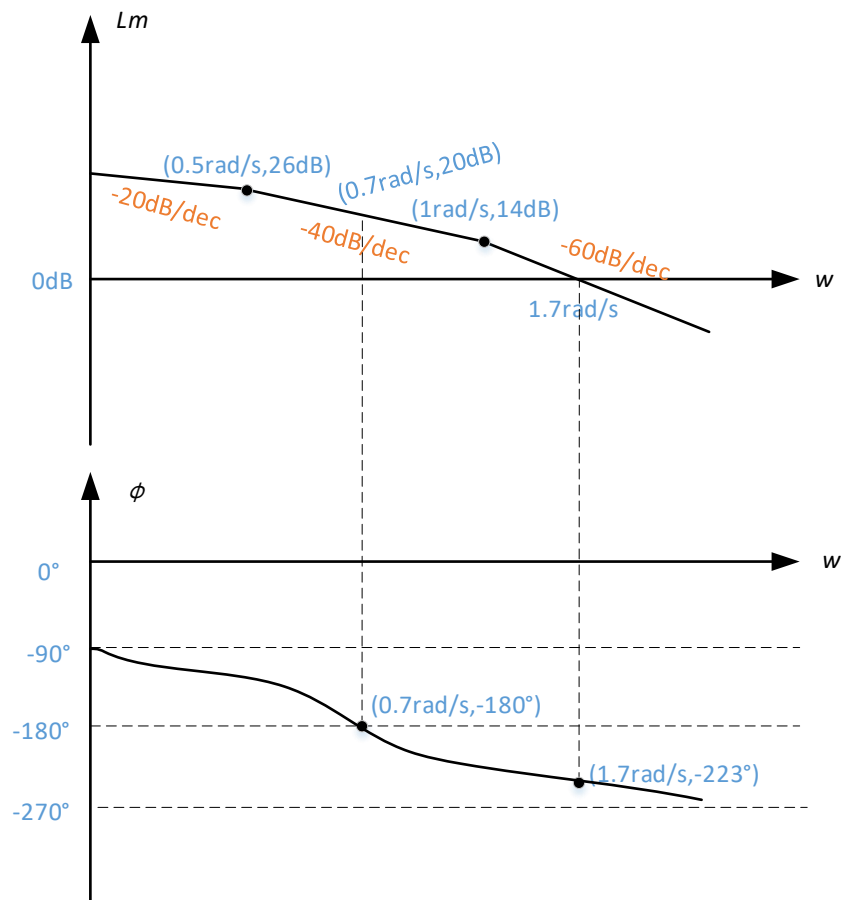
$$\Rightarrow \arctan \frac{3\omega_g}{1 - 2\omega_g^2} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow 1 - 2\omega_g^2 = 0$$

$$\Rightarrow \omega_g = 0.7$$

$$\text{此时, 增益为 } 20\lg|G(j\omega_g)| = 20\lg\frac{10}{0.7 \times 0.7 \times 2 \times 1} = 20\text{dB}$$

Bode图如下图所示：



相角裕度为 $-223^\circ + 180^\circ = -43^\circ$ ，增益裕度为 -20dB ，可见系统在校正前是不稳定系统。

(3) 设计滞后校正装置。

设滞后装置的传递函数为 $G_c(s) = \frac{Ts+1}{\beta Ts+1}$

取校正后相角裕度为 $50^\circ + 12^\circ = 62^\circ$ ，则剪切频率处相角为 -118° 。

下面确定剪切频率：

$$\angle G(j\omega) = -90^\circ - \arctan\omega - \arctan 2\omega = -118^\circ$$

$$\Rightarrow \arctan\omega + \arctan 2\omega = 28^\circ$$

$$\Rightarrow \arctan \frac{3\omega}{1-2\omega^2} = 28^\circ$$

$$\Rightarrow \frac{3\omega}{1-2\omega^2} = 0.532$$

$$\Rightarrow \omega = 0.17$$

在剪切频率处校正前系统增益为

$$|G(j\omega)| = \left| \frac{K}{j\omega(j\omega+1)(2j\omega+1)} \right| = \left| \frac{10}{0.17(j0.17+1)(j0.34+1)} \right| = 56$$

则滞后校正装置须在此频率处具有 -56 的增益，故 $\beta = 56$

$$\text{取 } \frac{1}{T} = \frac{0.17}{5}, \text{ 解得 } T=30$$

故滞后校正装置的传递函数为

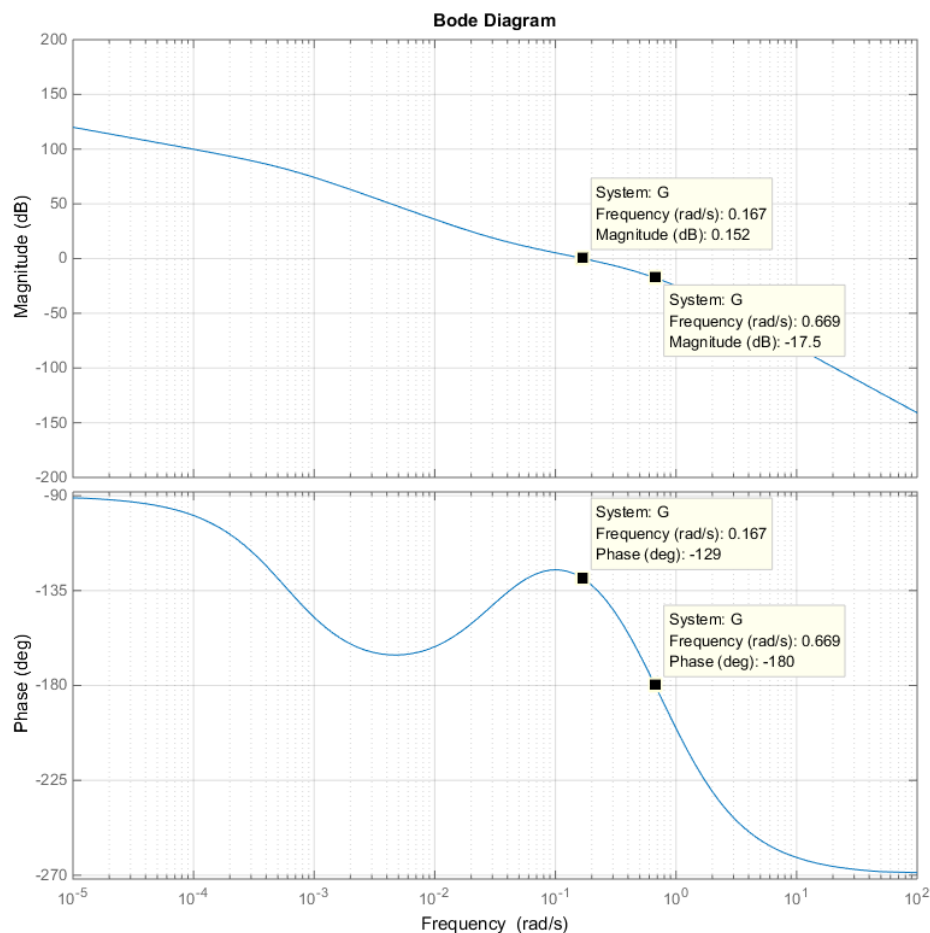
$$G_c(s) = \frac{Ts + 1}{\beta Ts + 1} = \frac{30s + 1}{1680s + 1}$$

(4) 验证校正后系统的性能是否符合题目要求。

滞后校正后系统开环传递函数为

$$G_c(s)G(s) = \frac{10(30s + 1)}{s(s + 1)(2s + 1)(1680s + 1)}$$

Bode图如下：



相角裕度为 51° ，增益裕度为17.5dB，满足题目要求。

注：

(1) 可参考课件TAC5-11-1.pdf的例题。

(2) 校正装置的传递函数不唯一，但必须使校正后的系统性能达到题目的要求。

(3) 可利用计算器、MATLAB辅助解题。

利用MATLAB绘制Bode图的代码如下：

```
num=10*conv([0 1],[30 1]);
den=conv([1 0],conv([1 1],conv([2 1],[1680 1])));
```

```

G=tf(num,den);
bode(G);
grid;
[Gm,Pm,Wcg,Wcp]=margin(G)
输出：
Gm =                %增益裕度
    7.5743
Pm =                %相角裕度
    50.6934
Wcg =               %相角穿越频率
    0.6715
Wcp =               %幅值穿越频率
    0.1699

```

5.5 已知系统结构如图5.E.4所示，其中 $G(s) = \frac{0.2}{s(0.5s+1)(0.1s+1)}$ 为系统固有部分的传递函数， $G_c(s)$ 为校正装置的传递函数。设计 $G_c(s)$ 保证 $K_v=100s^{-1}$ 且动态性能尽可能好。

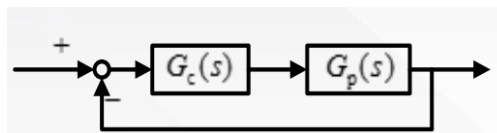


图5.E.4

解：

6.5 $G_p(s) = \frac{0.2}{s(0.5s+1)(0.1s+1)} = \frac{4}{s(s+2)(s+10)}$

为了保证有较好的动态响应,截止频率 ω_c , 稳定裕量 K_g, γ 应尽可能大

首先确保 $K_v = 100s^{-1}$, 即 $k_c G_p(s) = \frac{100}{s(0.5s+1)(0.1s+1)} \Rightarrow K_c = 500$

作出其Bode图, 结果如下:

不妨要求 $\omega_c = 10 \text{ rad/s}$, $\gamma = 30^\circ$

先加一超前装置, 使 $\omega = 10$ 处
相角约为 -150° . 令 $s = j10$, 则 $\angle k_c G_p(s) = -213.9^\circ$

$\varphi = 33.9 + 30^\circ = 63.9^\circ$

取 $\varphi_m = 70^\circ$, $\alpha = \frac{1 + \sin \varphi_m}{1 - \sin \varphi_m} \approx 32$

$T_1 = \frac{1}{\sqrt{\alpha} \omega_c} = \frac{1}{\sqrt{32} \times 10} \approx 0.0177$

$\therefore G_{kad}(s) = \frac{1 + 0.5657s}{1 - 0.0177s}$

再加一滞后装置, 使 $\omega = 10$ 处幅值为1.

令 $s = j10$, 则 $|k_c G_p(s) G_{kad}(s)| \approx 7.84$

取 $\beta = 8$, $\frac{1}{T_2} = \frac{\omega_c}{T_0} = \frac{10}{T_0} = 1$, $T_2 = 1$, $G_{lag}(s) = \frac{1+s}{1+8s}$

综上, $G_c(s) = K_c G_{kad}(s) G_{lag}(s) = 500 \cdot \frac{1+0.5657s}{1-0.0177s} \cdot \frac{1+s}{1+8s}$

此时, $G_c(s) G_p(s) = \frac{100(1+s)(1+0.5657s)}{s(1+0.5s)(1+0.1s)(1+8s)(1-0.0177s)}$

经检验, 此时 $\omega_c = 9.9 \text{ rad/s}$, $\gamma = 31.6^\circ$, $K_g = 12.8 \text{ dB}$

6.17

6.17 在例 6.7.1 中, 校正前的开环传递函数与超前校正装置传递函数分别为

$$G_p(s) = \frac{4}{s(s+2)}, \quad G_c(s) = 4.73 \frac{s+2.93}{s+5.46}$$

校正后闭环系统的主导极点满足 $\omega_n = 4 \text{ rad/s}$ 和 $\zeta = 0.5$, 校正后的静态速度误差系数为 $K_v = 5.0765 \text{ s}^{-1}$.

(a) 现重新进行设计, 令超前校正装置的传递函数为

$$G_c(s) = K_c \frac{s+1}{s+p}, \quad 2.857$$

闭环主导极点不变, 试求该校正装置传递函数中的参数 K_c 与 p ;

(b) 求相应的静态速度误差系数 K_v , 简要说明超前校正装置传递函数零点和极点的位置对静态速度误差系数的影响.

解: (a) $G_c(s)G_p(s) = \frac{4K_c(s+1)}{s(s+p)(s+2)}$

$$G_c(s_d)G_p(s_d) = \frac{4K_c(s_d+1)}{s_d(s_d+p)(s_d+2)} = -1$$

将 $s_d = -2 \pm j2\sqrt{3}$ 代入上式, 得到关于 K_c 和 p 的方程组,

解得 $K_c = 3.429$, $p = 2.857$

(b) $G_c(s)G_p(s) = \frac{13.716(s+1)}{s(s+2.857)(s+2)}$

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG_c(s)G_p(s) = \frac{13.716}{2.857 \cdot 2} = 2.4$$

超前校正装置传递函数的零点和极点越往左, 则静态速度误差系数越大。

6.19

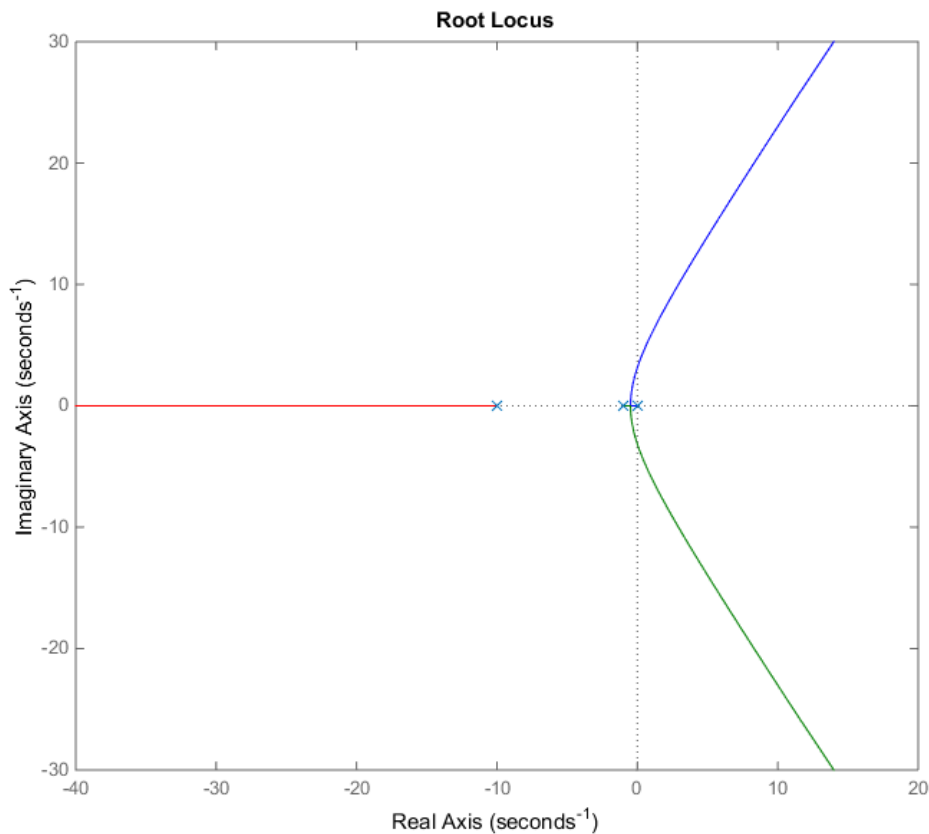
6.19 已知某负反馈控制系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{15}{s(s+1)(0.1s+1)}.$$

要求闭环主导极点的阻尼系数为 0.75、无阻尼自然振荡频率不小于 4rad/s. 试用

根轨迹方法确定串联校正装置的参数。

解: 校正前根轨迹如下图所示:



题目要求 $\zeta = 0.75, \omega_n = 4 \text{ rad/s}$,

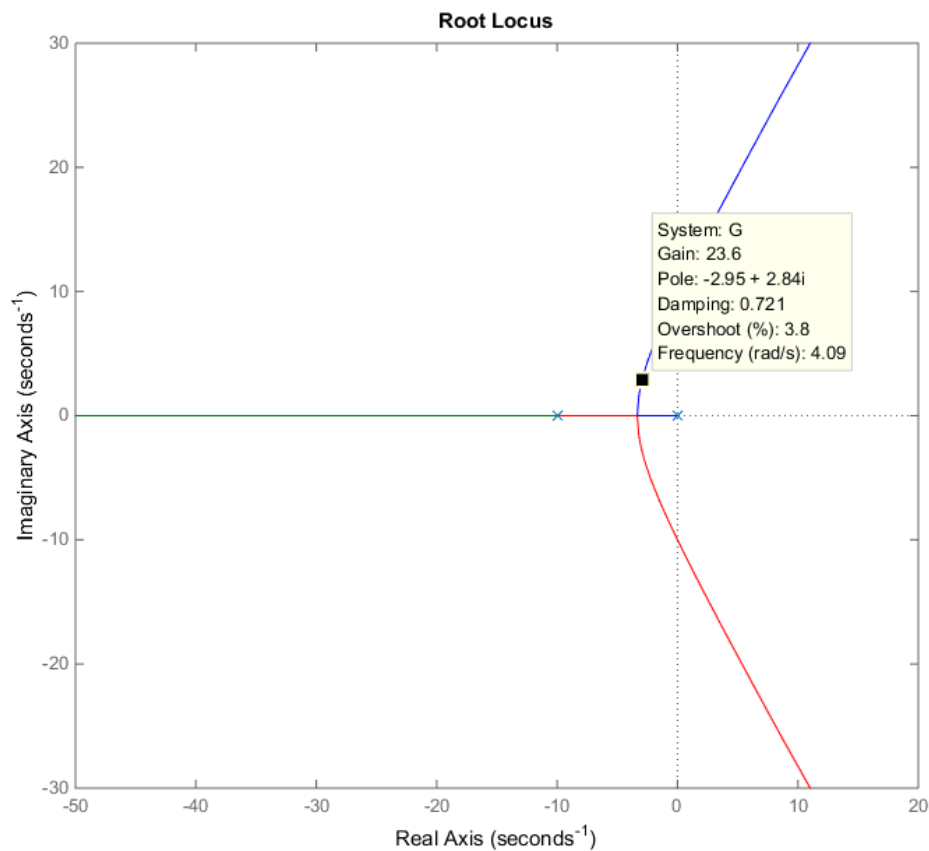
则希望的闭环极点为 $s_d = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = -3 \pm j2.6$

设校正装置的传递函数为 $G_c(s) = \frac{K_c(s+1)}{s+p}$, 则 $G_c(s)G_p(s) = \frac{15K_c}{s(s+p)(0.1s+1)}$

由 $G_c(s_d)G_p(s_d) = \frac{15K_c}{s_d(s_d+p)(0.1s_d+1)} = -1$, 解得 $K_c = 1.49, p = 10$

故 $G_c(s) = \frac{1.49(s+1)}{s+10}$

校正后根轨迹图如下图所示:



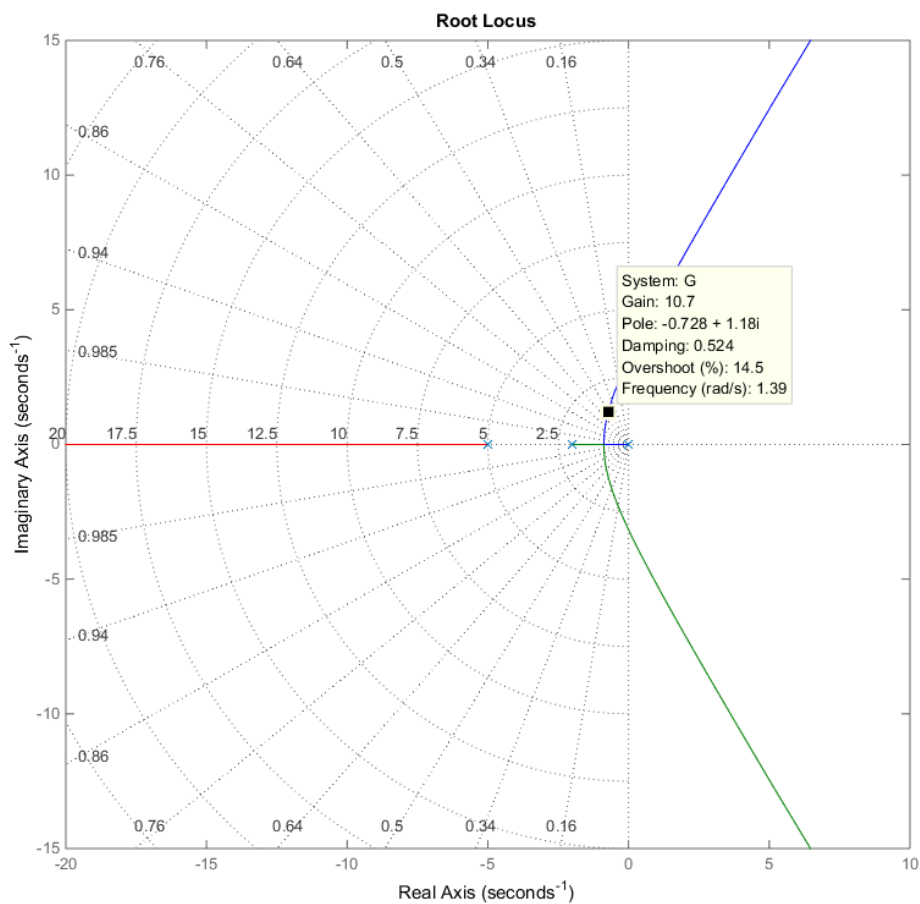
6.20

设单位负反馈控制系统的开环传递函数 $G_p(s) = \frac{10}{s(s+2)(s+5)}$, 试设计校正装

置 $G_c(s)$, 使闭环系统主导极点位于 $s = -2 \pm j2\sqrt{3}$, 且静态速度误差系数为

$K_v = 50s^{-1}$ 。

解: 校正前根轨迹如下图所示:



先加一超前校正装置 $G_{c1}(s) = \frac{K_c(s+2)}{s+p}$

$$G_{c1}(s)G_p(s) = \frac{10K_c}{s(s+5)(s+p)}$$

由 $G_{c1}(s_d)G_p(s_d) = \frac{10K_c}{s_d(s_d+5)(s_d+p)} = -1$ 解得 $p=20, K_c=33.6$

此时静态速度误差系数为 $K_v = \frac{10K_c}{5p} = 3.36 < 50$

再加一滞后装置 $G_{c2}(s) = \frac{s+\frac{1}{T}}{s+\frac{1}{\beta T}}$, 此时 $K_v = \frac{10K_c\beta}{5p} = 3.36\beta = 50$, 则 $\beta = 14.9$

取 $\frac{1}{T} = 0.01$, 则 $\frac{1}{\beta T} = 0.00067$, 故 $G_{c2}(s) = \frac{s+0.01}{s+0.00067}$

此时, $G_{c1}(s)G_{c2}(s)G_p(s) = \frac{336(s+0.01)}{s(s+5)(s+20)(s+0.00067)}$, 主导极点为 $-2 \pm j3.4$, 静态

速度误差系数为 $K_v = 5s^{-1}$

校正后系统的根轨迹图如下图所示:

