自动控制理论（1）作业十一

作业内容：在教材第四章内容和电子讲义的基础上，试解答以下题目。
学习目的：根轨迹方法
提交时间：11月21日上课交，或交电子版致网络学堂截至11月21日24时

书上 6.2, 6.5, 6.7

1、书上6.2
已知单位负反馈控制系统的开环传递函数为

$$G(\mathrm{s}) = \frac{K(s+2)}{s(s+4)(s+8)(s^2+2s+5)}, K \geq 0$$

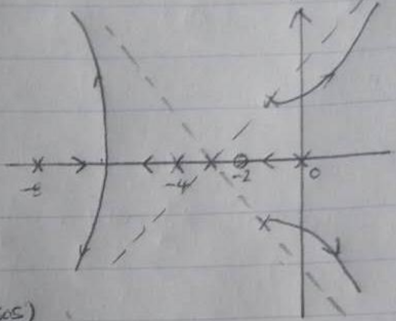
试画出系统的根轨迹，并求系统临界稳定时的增益K.
解：

6.2 $G_{oL}(S) = \dfrac{K(S+2)}{S(S+4)(S+8)(S^2+2S+5)}$ 开环零点为$S=-2$，开环极点为 $S=0, -4, -8, -1\pm j2$

渐近线夹角 $\varphi = \dfrac{\pm(2k+1)\pi}{5-1} = \pm 45°, \pm 135°$ 与轴交点 $\sigma_a = \dfrac{-4-8-2+2}{4} = -3$

$K = -\dfrac{S(S+4)(S+8)(S^2+2S+5)}{S+2}$

$= -\dfrac{S^5+14S^4+61S^3+124S^2+160S}{S+2}$



令 $\dfrac{dk}{ds}=0$，得 $(S^5+14S^4+61S^3+124S^2+160S)$

$-(S+2)(5S^4+56S^3+183S^2+248S+160)=0$

整理得：$4S^5+52S^4+234S^3+490S^2+496S+320=0$

解得 $S=-6.478$，显然是分离会合点

离开极点 $-1+j2$ 的角度为 $\varphi_{p_1} = \pi - \sum_{k=2} \arg(P_1-P_k) + \arg(P_1-z_1)$

$= 180° - 90° - 33.69° - 15.95° - 116.57° + 63.43° = -12.78$

将 $s=j\omega$ 代入方程 $s^5+14s^4+61s^3+124s^2+(160+k)s+2k=0$，得

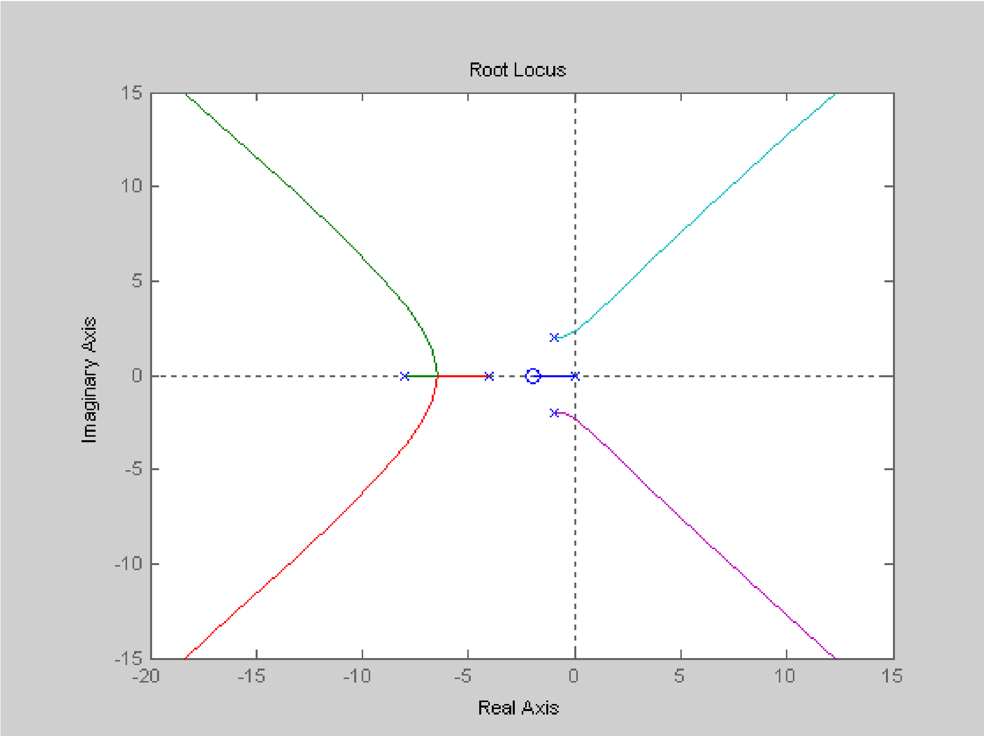
$j\omega^5 + 14\omega^4 - 61j\omega^3 - 128\omega^2 + (160+k)j\omega + 2k = 0$

即 $\begin{cases} \omega^5 - 61\omega^3 + (160+k)\omega = 0 \\ 14\omega^4 - 124\omega^2 + 2k = 0 \end{cases}$

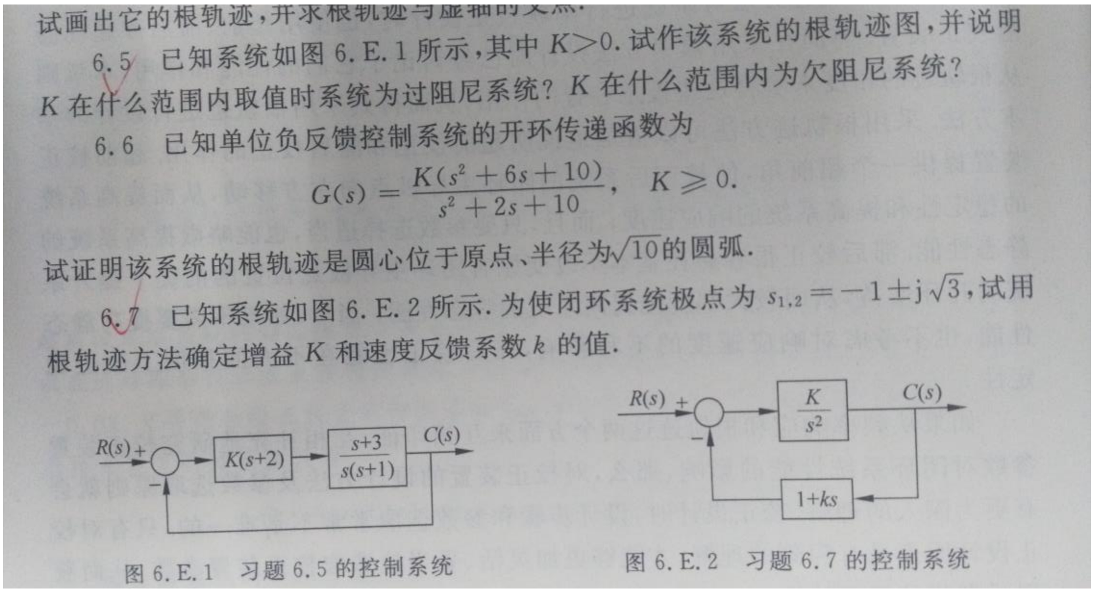
解得 $\omega = \pm 2.29$，$K = 132.59$

∴ 根轨迹如图所示，临界稳定时 $k = 132.59$

利用MATLAB绘制的根轨迹为：



2、书上6.5


试画出它的根轨迹，并求根轨迹与虚轴的交点.

6.5 已知系统如图 6.E.1 所示，其中 $K>0$. 试作该系统的根轨迹图，并说明 K 在什么范围内取值时系统为过阻尼系统？K 在什么范围内为欠阻尼系统？

6.6 已知单位负反馈控制系统的开环传递函数为

$$G(s)=\frac{K(s^2+6s+10)}{s^2+2s+10},\quad K\geqslant 0.$$

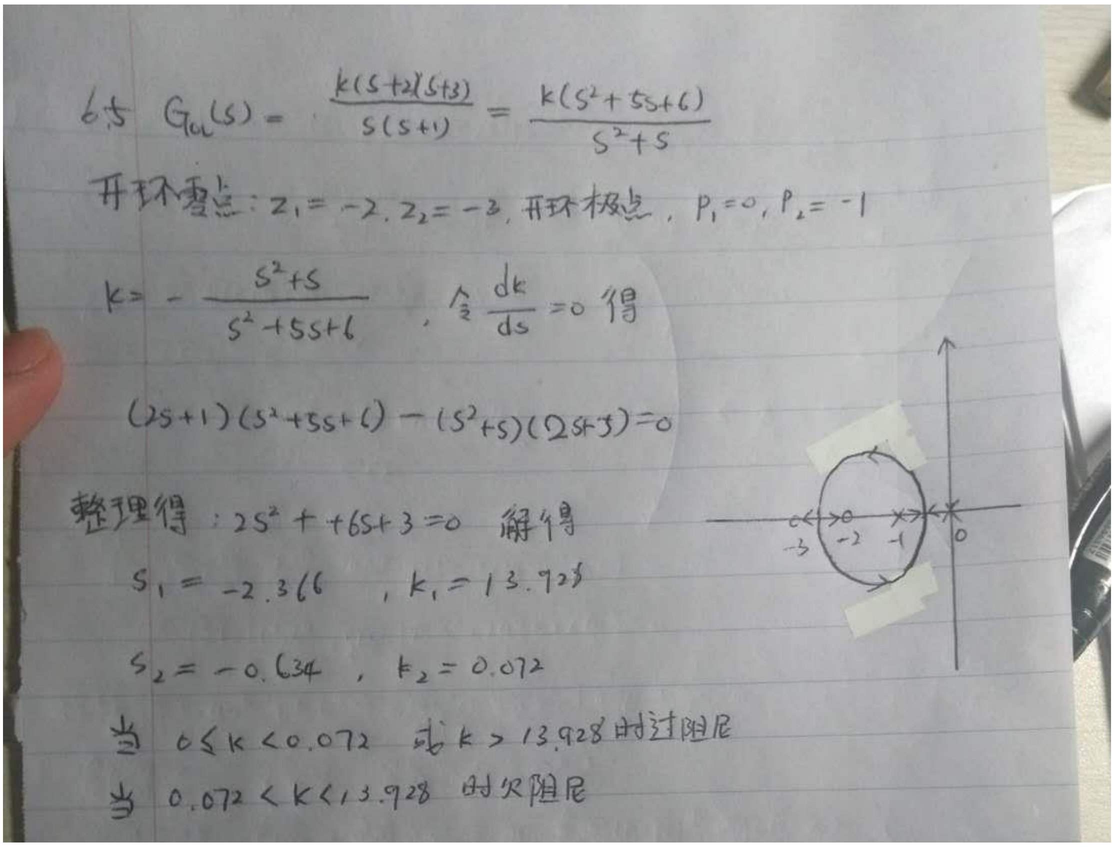
试证明该系统的根轨迹是圆心位于原点、半径为$\sqrt{10}$的圆弧.

6.7 已知系统如图 6.E.2 所示. 为使闭环系统极点为 $s_{1,2}=-1\pm j\sqrt{3}$，试用根轨迹方法确定增益 K 和速度反馈系数 k 的值.

图 6.E.1 习题 6.5 的控制系统

图 6.E.2 习题 6.7 的控制系统

解：



6.5 $G_{o}(s) = \frac{k(s+2)(s+3)}{s(s+1)} = \frac{k(s^2+5s+6)}{s^2+s}$

开环零点：$z_1=-2$，$z_2=-3$，开环极点，$p_1=0$，$p_2=-1$

$k=-\frac{s^2+s}{s^2+5s+6}$，令 $\frac{dk}{ds}=0$ 得

$(2s+1)(s^2+5s+6)-(s^2+s)(2s+5)=0$

整理得：$2s^2+6s+3=0$ 解得

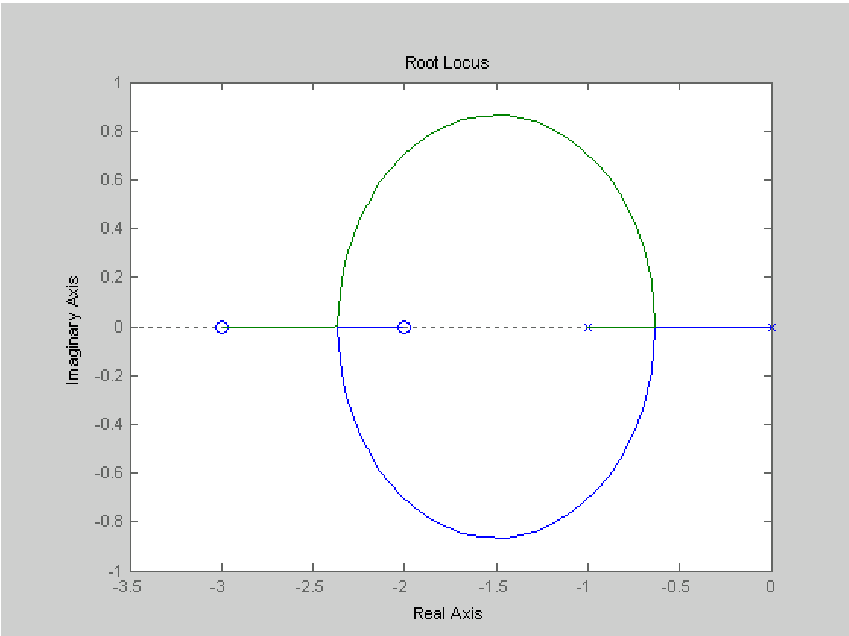
$s_1=-2.366$，$k_1=13.928$

$s_2=-0.634$，$k_2=0.072$

当 $0\le k<0.072$ 或 $k>13.928$ 时过阻尼

当 $0.072<k<13.928$ 时欠阻尼

利用MATLAB绘制的根轨迹为：



当$0 < K < 0.0718$或$K > 13.9282$时系统是过阻尼的；当$0.0718 < K < 13.9282$时系统是欠阻尼的。

3、书上6.7

解：系统开环传递函数为$G(s) = \frac{K(1+ks)}{s^2}$

闭环特征方程为$s^2 + Kks + K = 0$

由$\begin{cases} (-1+j\sqrt{3}) + (-1-j\sqrt{3}) = -Kk \\ (-1+j\sqrt{3})(-1-j\sqrt{3}) = K \end{cases}$

得$\begin{cases} K = 4 \\ k = 0.5 \end{cases}$

6.7 ① 韦达定理法：

$G(s)F(s) = \frac{K(1+ks)}{s^2}$，闭环特征方程为 $s^2 + Kks + K = 0$

由韦达定理得 $\begin{cases} S_1 + S_2 = -Kk = -2 \\ S_1 \cdot S_2 = K = 4 \end{cases}$ $\therefore K = 4,\ k = \frac{1}{2}$

② 根轨迹法：零点 $z_1 = -\frac{1}{k}$，极点 $p_{1,2} = 0$，视 k 为常量

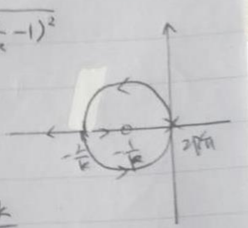
实轴上的根轨迹为 $(-\infty, -\frac{1}{k})$，令 $\frac{dK}{ds} = 0$ 得 $ks^2 + 2s = 0$

解得 $s_1 = 0$（舍），$s_2 = -\frac{2}{k}$（是分离会合点）

易知根轨迹的一部分是半径为 $\frac{1}{k}$，圆心为 $-\frac{1}{k}$ 的圆

故 $\frac{1}{k} = \left| -1 \pm j\sqrt{3} - (-\frac{1}{k}) \right| = \left| \frac{1}{k} - 1 + j\sqrt{3} \right| = \sqrt{3 + (\frac{1}{k} - 1)^2}$

解得 $k = \frac{1}{2}$



$S = -1 \pm j\sqrt{3}$ 点处开环传递函数幅值为 1

故 $1 = \left| \frac{K[1 + \frac{1}{2}(-1+j\sqrt{3})]}{(-1+j\sqrt{3})^2} \right| = \frac{K(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}j\sqrt{3})}{|-1+j\sqrt{3}|} = \frac{K}{4}$

解得 $K = 4$

$\therefore K = 4,\ k = \frac{1}{2}$