《自动控制理论(现代部分)》习题

第一章 控制系统的状态空间描述

1.1 已知如图 1.1 所示的网络系统，取 v_C、i_L 为状态变量，试写出系统的状态方程。

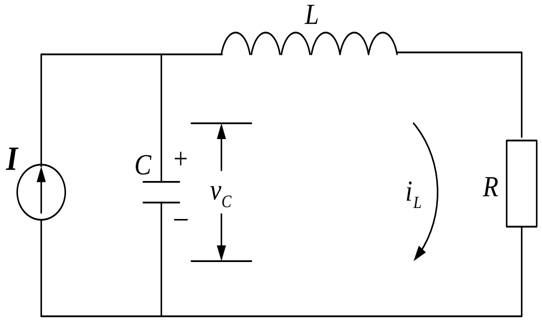

图 1.1

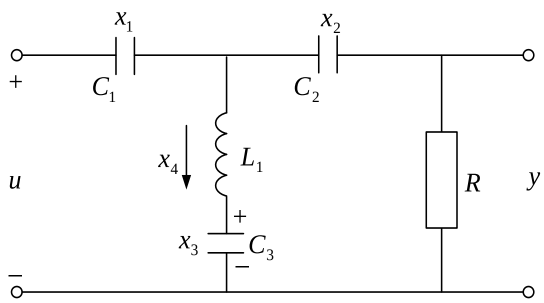

图 1.2

1.2 已知如图 1.2 所示的网络系统，输入电压为 u，输出电压为 y，加在电容 C_1、C_2、C_3 上的电压为 x_1、x_2、x_3，通过 L_1 的电流为 x_4，当设 $\underline{x}^T=[x_1,x_2,x_3,x_4]$ 时，得到小状态方程和输出方程为：

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}u$$
$$y=\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}+du$$

求 $\boldsymbol{A}$， $\boldsymbol{b}$， $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}$， d。

1.3 图 1.3 所示水箱系统中，管道阻尼系数均为 R，水箱截面积为单位截面积。设 $x_1(t)$、$x_2(t)$ 为水箱 I、II 的液位。流量 $y(t)$ 为输出，流量 $u(t)$ 为输入，求此水箱系统的状态方程和输出方程。

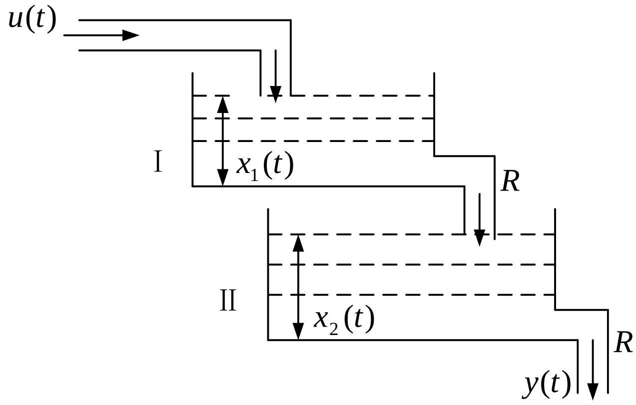

图 1.3

1.4 图 1.4 所示的一水槽系统。设水箱 1、2 的横截面积分别为 c_1、c_2，水位分别为 x_1、x_2，单位时间到水槽 1、2 的流入量为 u_1、u_2，试导出以 x_1、x_2 为状态变量的状态方程式，R_1、R_2 是管子的流阻，取水槽 1 单位时间的流出作为输出量 y，写出输出方程。

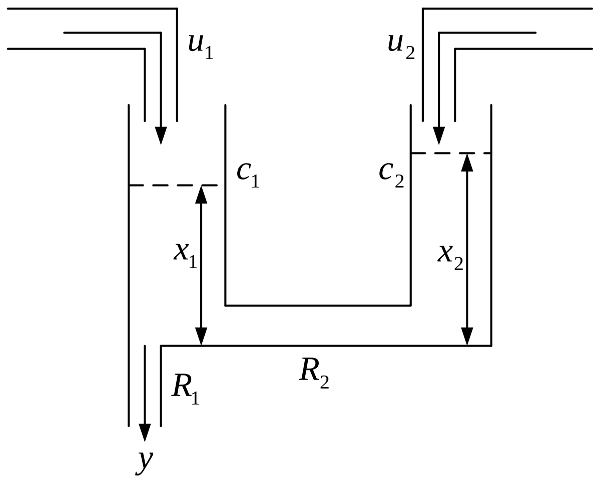

图 1.4

1.5 带阻尼的力学系统如图 1.5 所示，$u(t)$ 为外力，m_1、m_2 分别为二物体的质量，k

为弹簧系数，ξ_1、ξ_2 分别为物体 1、2 的粘性摩擦系数。y 为物体 1 的位移，是系统的输出。试写出系统的运动微分方程，求出传递函数，并写出状态空间表达式。（提示：设物体 1、2 的位移分别为 F_1、F_2）

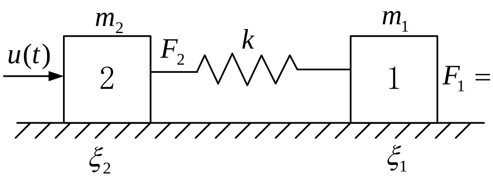

图 1.5

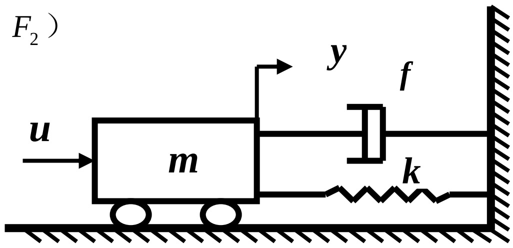

图 1.6

1.6 已知如图 1.6 所示的机械位移系统，图中 m 为小车的质量，u 为外作用力，y 为输出位移，f 为阻尼系数，k 为弹簧系数，选择小车的位移和速度为状态变量。

（1）试列写系统状态空间表达式；

（2）试写出输出位移 y 与外作用力 u 之间的传递函数。

1.7 在例 1.3 中若电动机轴上的负载转矩为 M_L，若仍以电枢电流 $\boldsymbol{i}_a$ 和转子转速 w 为一组状态变量，以电枢电压 e_0 和负载转矩 M_L 为输入变量，以转子转速 w 为输出变量，试列写出该系统的状态空间表达式。

1.8 设系统的差分方程为

$$y(k+3)+3y(k+2)+2y(k+1)+y(k)=u(k+2)+2u(k+1)+u(k)$$

输出为 $y(k)$，试写出系统的状态方程。

1.9 某国家有一亿人口，其中城市人口有一千万。假定城市每年有其前一年人口的 4% 迁到农村，而农村又有前一年人口的 2% 迁到城市，城市人口的自然增长率为 0.8%，农村人口的自然增长率为 1%，试建立城乡人口变化的数学模型（包括状态方程和初始条件。提示：设 $x_1(k)$ 为第 k 年城市人口数，$x_2(k)$ 为第 k 年农村人口数。人口变化按照先增长后迁移的方式计算。）

1.10 系统的运动方程为

$$\dddot{y}+7\ddot{y}+14\dot{y}+8y=3u$$

输入为 u，输出为 y，试写出它的能控标准 **I** 型和能观标准 **II** 型，并画出它们相应的系统模拟结构图。

1.11 已知系统:

$$\dddot{y}+7\ddot{y}+13\dot{y}+7y=\dddot{u}+8\ddot{u}+11\dot{u}+5u$$

输入为 u，输出为 y，试写出能控标准 **I** 型和能观标准 **II** 型，并画出它们相应的系统模拟结构图。

1.12 已知系统的方程为

$$\dddot{y}+3\ddot{y}+2\dot{y}=u$$

试导出系统的状态空间表达式。选取状态变量，使状态矩阵为对角标准型。

1.13 试求如下系统的状态空间表达式，使之成为解耦标准型。

$$\frac{y(s)}{u(s)}=\frac{2(s+3)}{(s+1)(s+2)}$$

1.14 系统的传递函数为：

$$g(s)=\frac{6s^2+27s+15}{s(s^2+8s+15)}$$

试写出对角标准型。（要求：先部分分式展开，画出模拟结构图，在模拟结构图上设置状态变量，再写出对角标准型的状态空间表达式）

1.15 将如下系统转化为特征值规范型。

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}0 & 0 & -6\\ 1 & 0 & -11\\ 0 & 1 & -6\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 0\end{bmatrix}u\\ y=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}\end{cases}$$

1.16 已知系统传递函数为

$$g(s)=\frac{2s^2+6s+5}{s^3+4s^2+5s+2}$$

试写出它的约当标准型。并画出相应的系统结构图。

1.17 已知系统的状态空间表达式为

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & -3 & 0\\ 0 & 0 & -4\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}1 & -1\\ -5 & 4\\ 5 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}y_1\\ y_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ -2 & -3 & -4\end{bmatrix}\boldsymbol{x}\end{cases}$$

试求系统的传递函数阵。

1.18 已知如下两个子系统：

$$\Sigma_1:\quad \dot{\boldsymbol{x}}_1=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}\boldsymbol{x}_1+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u_1,\ \ y_1=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{x}_1$$

$$\Sigma_2:\quad \dot{\boldsymbol{x}}_2=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -4 & -4\end{bmatrix}\boldsymbol{x}_2+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u_2,\quad y_2=\begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix}\boldsymbol{x}_2$$

(1) 求并联系统的状态空间表达式；

(2) 求 $\sum_1$ 在前，$\sum_2$ 在后的串联系统状态空间表达式；

(3) 求 $\sum_1$ 为主通道，$\sum_2$ 为反馈通道的反馈连接系统的状态空间表达式。

1.19 已知反馈系统的结构如图 1.7 所示，试列出系统的状态空间表达式。

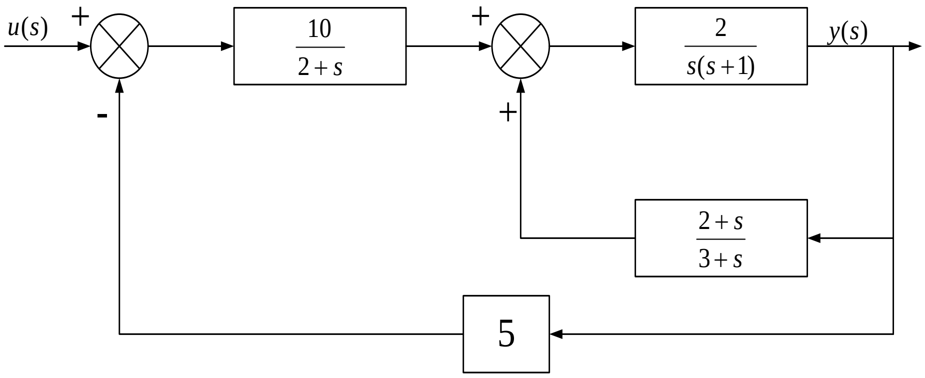

图 1.7

第二章 线性系统状态方程的解

2.1 给定系统矩阵 $\boldsymbol{A}$ 如下，求它们的转移矩阵

（1）$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$,　　　（2）$\begin{bmatrix} -0.5 & 4.5 \\ -0.5 & 2.5 \end{bmatrix}$

2.2 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\theta \\ 0 & \theta & 0 \end{bmatrix}$

求矩阵指数 e^{At}

2.3 已知四阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

求其矩阵指数，并将此结果推广到一般的 n 阶方阵情况。

2.4 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$,

试用如下的方法求转移矩阵 $e^{\boldsymbol{A}t}$：

（1）利用 $e^{\boldsymbol{A}t}$ 的级数展开法；

（2）利用 Laplace 变换法。

2.5 系统 $\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的转移矩阵 $\Phi(t)$ 以如下形式给出时，试确定系统矩阵 $\boldsymbol{A}$

$$\Phi(t)=\begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & (1-2t)e^{-2t} & 4te^{-2t} \\ 0 & -te^{-2t} & (1+2t)e^{-2t} \end{bmatrix}.$$

2.6 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是 2×2 的常数矩阵，关于系统的状态方程式 $\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$，有

$$\boldsymbol{x}(0)=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}\text{时，}\quad \boldsymbol{x}(t)=\begin{bmatrix}e^{-2t}\\-e^{-2t}\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}(0)=\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}\text{时，}\quad \boldsymbol{x}(t)=\begin{bmatrix}2e^{-t}\\-e^{-t}\end{bmatrix}$$

试确定系统的转移矩阵 $\boldsymbol{\Phi}(t)$ 和矩阵 $\boldsymbol{A}$。

2.7 已知系统方程

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}0&1\\-3&-4\end{bmatrix}\boldsymbol{x},\quad \boldsymbol{x}(0)=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$$

试求 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$。

2.8 已知给定系统方程为

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}2&1&0\\0&2&1\\0&0&2\end{bmatrix}\boldsymbol{x}$$

试求出用初始条件 $x_1(0)$、$x_2(0)$ 和 $x_3(0)$ 来表示的解。

2.9 验证 $\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}2&-e^{t}\\e^{-t}&1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}$ 的转移矩阵为 $\Phi(t,0)=\begin{bmatrix}e^{2t}\cos t&-e^{2t}\sin t\\e^{t}\sin t&e^{t}\cos t\end{bmatrix}$

并求出 $\Phi(t,1)$。

2.10 给定连续线性定常系统，已知其状态转移矩阵 $\Phi(t)$ 为

$$\Phi(t)=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}(e^{-t}+e^{3t})&\frac{1}{4}(-e^{-t}+e^{3t})\\-e^{-t}+e^{3t}&\frac{1}{2}(e^{-t}+e^{3t})\end{bmatrix},$$

试据此定出系统矩阵 $\boldsymbol{A}$。

2.11 考虑如下的线性时变系统：$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{u}(t)$，其中输入矩阵 $\boldsymbol{B}(t)$ 是时间 t 的函数。假设初始时刻 t_0 时，初始状态为 $\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0$。试证明，非齐次状态方程的解为：

$$\boldsymbol{x}(t)=e^{\boldsymbol{A}(t-t_0)}\boldsymbol{x}_0+\int_{t_0}^{t}e^{\boldsymbol{A}(t-\tau)}\boldsymbol{B}(\tau)\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau.$$

2.12 计算下列线性时变系统的状态转移矩阵 $\Phi(t,0)$ 和 $\Phi^{-1}(t,0)$

（1） $\boldsymbol{A}(t)=\begin{bmatrix}t&0\\0&0\end{bmatrix}$ （2） $\boldsymbol{A}(t)=\begin{bmatrix}0&e^{-t}\\-e^{-t}&0\end{bmatrix}$

2.13 已知系统的状态方程为：

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -2\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}u,\ \ \boldsymbol{x}(0)=\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix},\ \ u(t)=1(t)$$

求此状态方程的解。

2.14 设连续系统的状态方程为

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}u$$

假定采样周期为 2 秒，试将系统方程离散化，并导出离散时间状态方程。

2.15 已知离散系统如下，求解 $\boldsymbol{x}(k)$

$$\boldsymbol{x}(k+1)=\begin{bmatrix}1/2 & -1/2 & 1\\ 0 & 1/2 & 2\\ 0 & 0 & 1/2\end{bmatrix}\boldsymbol{x}(k),\ \ \boldsymbol{x}(0)=\begin{bmatrix}2\\4\\6\end{bmatrix}$$

2.16 用题 1.9 中所建立的数学模型，求解第 k 年的城乡人口。

第三章 线性系统的能控性和能观性

3.1 试判断下列系统的能控性。

（1） $\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}u$ （2） $\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\end{bmatrix}$

3.2 试判断下面系统状态的能控性

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -6 & -11 & -6\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}u$$

3.3 判断下面系统的能控性

（1） $\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}-3 & 1 & 0\\ 0 & -3 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\\ 2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\end{bmatrix}$

（2） $\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}1 & 3 & 2\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 3\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\end{bmatrix}$

3.4 设系统方程为

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 1 & 0\\ 0 & \lambda_1 & 1\\ 0 & 0 & \lambda_1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}a\\ b\\ c\end{bmatrix}u$$

试确定满足状态完全能控条件的 a 、b 和 c 。

3.5　给定二阶系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}a & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}b\\ -1\end{bmatrix}u$$

为使系统具有能控性，试确定常数 a 和 b 所应满足的关系式。

3.6　已知如下倒置摆状态方程，试判断其能控性和能观性。

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 11 & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 0\\ -1\end{bmatrix}u\\ y=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{x}\end{cases}$$

3.7　设系统方程为

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}u\\ y=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{x}\end{cases}$$

试确定满足状态完全能控和完全能观条件的 a、b、c 和 d。

3.8　设三阶系统

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}\lambda & 1 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \lambda\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}a\\ b\\ c\end{bmatrix}u\\ y=\begin{bmatrix}a & b & c\end{bmatrix}\boldsymbol{x}\end{cases}$$

(1)问能否通过适当选择常数 a、b 和 c，使系统具有能控性；

(2)试问能否通过适当选择常数 a、b 和 c，使系统具有能观性。

3.9　判断下列系统的能观性

（1）$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & -3\end{bmatrix}\boldsymbol{x}\\ y=\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}\end{cases}$$

（2）$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ -1 & -2 & 0\\ 3 & 0 & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{y}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{x}\end{cases}$$

（3） $\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} \end{cases}$

3.10 设系统的传递函数为

$$g(s) = \frac{s+a}{s^3+7s^2+14s+8}$$

试问 a 等于多少时，系统将是不能控的； a 等于多少时，系统将是不能观的。

3.11 在 3.10 题中，若取 $a=1$，试选择一组状态变量，将系统的状态方程写成

（1）能控但不能观的；

（2）能观但不能控的。

3.12 试证明能控标准型一定完全能控，能观标准型一定完全能观。

3.13 （1）给定如下连续系统：

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 0 & \beta \\ -\beta & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ \beta \end{bmatrix} u \qquad (\beta \neq 0)$$

试证明该连续系统是状态完全能控的；

（2）设采样周期为 T，考察其离散化系统的能控性。

3.14 如图 3.1 所示 $L-R-C$ 网络

（1）试分析控制电压 $u(t)$ 对电压 $x_1(t)$ 和电流 $x_2(t)$ 的可控条件；

（2）设电流 i 为能测量的输出量，试分析该网络能观条件。

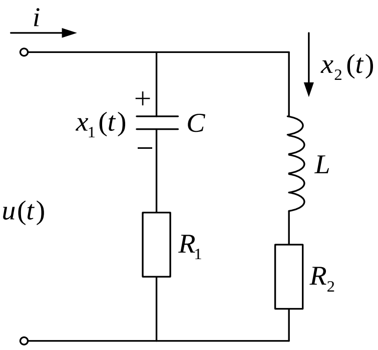

图 3.1

3.15 已知系统

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -24 & -26 & -9 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} \end{cases}$$

（1）试将系统化为约当标准型；

（2）考察可控状态、可观状态各为多少。

3.16 已知系统为

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}0\\4\\3\end{bmatrix}u$$

此系统能否变换成能控标准型？若能，则将系统变换成能控标准型。

3.17 Σ_1、Σ_2为两个能控且能观的单输入单输出系统

$$\Sigma_1:\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}_1=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -3 & -4\end{bmatrix}\boldsymbol{x}_1+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}u_1\\ y_1=\begin{bmatrix}2 & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}_1\end{cases}\qquad \Sigma_2:\begin{cases}\dot{x}_2=-2x_2+u_2\\ y_2=x_2\end{cases}$$

（1）Σ_1、Σ_2如图 3.2 所示串联起来，试求串联系统的状态方程。

（2）考察此串联系统的能控性和能观性。

（3）试求此串联系统的传递函数，并验证（2）中的结果。

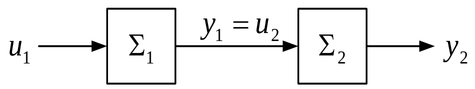

图 3.2

3.18 已知系统状态方程为：

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -2 & 4\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}u\\ y=\begin{bmatrix}-1 & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}\end{cases}$$

试将方程化成能观标准型。

3.19 已知系统

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}-2 & 2 & 1\\ 0 & -2 & 0\\ 1 & -4 & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}u\\ y=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}\end{cases}$$

（1）求此系统的传递函数；

（2）此系统能控否？如不完全能控，试求其能控子系统；

（3）此系统能观否？如不完全能观，试求其能观子系统。

3.20 求如下系统的能控标准型

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 2\\ 1 & 3 & 4\\ 0 & 5 & 6\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{u}\\ y=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{x}\end{cases}$$

3.21　根据右边的系统结构图，写出其状态方程和输出方程，并判断系统的能控性和能观性。

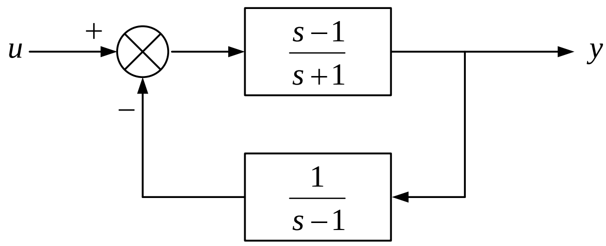

图 3.3

3.22　求如下系统的一个最小实现

$$G(s)=\begin{bmatrix} \dfrac{2s+3}{s^2+3s+2} & \dfrac{1}{s^2+3s+2} \\ \dfrac{3}{s+1} & \dfrac{3}{s+1} \end{bmatrix}$$

第四章 线性定常系统极点配置与镇定

4.1 试用能控性矩阵$\boldsymbol{Q}_C$和能观性矩阵$\boldsymbol{Q}_O$证明：

（1）状态反馈不改变系统的能控性；

（2）输出反馈不改变系统的能控性和能观性。

4.2 系统$\Sigma(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}^T)$为完全能控的单输入单输出系统，试证明应用状态反馈配置极点时，其零点保持不变。

4.3 考虑如下系统：

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}u \\ y=\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\boldsymbol{x} \end{cases}$$

（1）　画出其系统结构图。

（2）　若其动态性能不满足要求，可否任意配置极点？

（3）　若指定闭环极点在－3，－3 处，求状态反馈阵$\boldsymbol{k}^{\mathrm{T}}$。

4.4 有系统为

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix} -1 & -6 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}u$$

此系统是否稳定？若不稳定，能否设计状态反馈使之稳定？

4.5 已知系统

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ -3 & 0 & -4 \end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}u \\ y=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\boldsymbol{x} \end{cases}$$

（1）　该系统能否通过状态反馈实现极点的任意配置？

（2） 若要使闭环系统极点均为－2，应如何设计状态反馈阵？

4.6 试求下列系统的状态反馈阵 $\boldsymbol{k}^{\mathrm{T}}$，使系统的极点为 -1, -1+$j$, -1-$j$，并画出系统方程模拟结构图。

a) $\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}0&1&2\\1&3&4\\0&5&6\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}u$ b) $\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}3&-2&0\\0&0&1\\4&-3&0\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}u$

4.7 下列系统能否镇定？

a) $\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&1\\1&0&0\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}u\\ y=\begin{bmatrix}0&1&0\end{bmatrix}\boldsymbol{x}\end{cases}$ b) $\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}0&-2\\1&-3\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}u\\ y=\begin{bmatrix}0&1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}\end{cases}$

4.8 已知多变量系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-4\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}1&1\\1&-1\\-1&0\end{bmatrix}\boldsymbol{u}$$

设计状态反馈阵 $\boldsymbol{K}$，要求闭环极点为－1，－2，－3。（提示：可尝试 $\boldsymbol{K}=\boldsymbol{f}\boldsymbol{k}^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{f}=[1\ \ 0]^{\mathrm{T}}$）

第五章 线性定常系统状态观测器

5.1 已知系统

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&1\\0&0&2\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}u\\ y=\begin{bmatrix}1&1&0\end{bmatrix}\boldsymbol{x}\end{cases}$$

构造状态观测器，使其极点为－2，－3，－4。画出观测器结构图。

5.2 设受控系统为：

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}1&3\\0&-1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}u\\ y=\begin{bmatrix}1&1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}\end{cases}$$

试设计极点为－2，－2 的全维观测器，并画出观测器模拟结构图。

5.3 已知系统的状态空间表达式为：

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}0&1\\0&-1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}u\\ y=\begin{bmatrix}10&0\end{bmatrix}\boldsymbol{x}\end{cases}$$

试设计一个极点为－15，－15 的全维观测器。

5.4 已知系统

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} \end{cases}$$

试设计一个降维观测器，使观测器的极点为－3，－4。

5.5 已知系统

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 \\ -11 & -12 & -12 \\ 13 & 14 & 13 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} \end{cases}$$

试确定一个降维观测器，使观测器的极点为－2，－3。

5.6 设系统传递函数为

$$g(s) = \frac{1}{s(s+6)}$$

试确定一个二维的观测器，要求观测器的两个极点均为－10。

5.7 设控制对象传递函数为$g(s)=1/s^3$，

（1）确定一个线性状态反馈阵，使闭环系统极点为－3，$-\frac{1}{2} \pm j\sqrt{\frac{3}{2}}$；

（2）确定极点为－5、－5 的降维观测器。

第六章 李雅普诺夫稳定性

6.1 判断下列函数的定号性：

（a） $V(\boldsymbol{x}) = x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 - 5x_2x_3 - 2x_1x_3$

（b） $V(\boldsymbol{x}) = -x_1^2 - 3x_2^2 - 11x_3^2 + 2x_1x_2 - x_2x_3 - 2x_1x_3$

（c） $V(\boldsymbol{x}) = x_1^2 + 5x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_2x_3$

6.2 判断下列系统在原点处是否大范围渐近稳定，并说明理由。

（a） $\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_2 + x_1^2 \\ \dot{x}_2 = -x_2 + 2x_1 - x_1^2 \end{cases}$ （b） $\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_1x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_2 + 2x_1 - x_1^2 \end{cases}$

6.3 判断下列系统在原点处的稳定性：

（a） $\ddot{x} + \sin x = 0$

（b） $\ddot{x} + 5x^4\dot{x} + x^3 = 0$

6.4 判断下述系统在原点处的稳定性。

$$\ddot{x}+\dot{x}+g(x)=0$$

其中，$g(x)$为连续函数，与x同号，且$g(0)=0$，$g(x)\neq 0, \forall x\neq 0$。

6.5 判断下述非线性系统在原点处的稳定性。

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{D}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{x}$$

其中，$\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n)^T$，$\boldsymbol{A}=-\boldsymbol{A}^T$，$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{x})=\mathrm{diag}(x_1^2,\cdots,x_n^2)$。

6.6 用克拉索夫斯基方法确定参数 a 和 b 的取值范围，保证下述非线性系统在原点处大范围渐近稳定：

$$\begin{cases}\dot{x}_1=ax_1+x_2\\ \dot{x}_2=x_1-x_2+bx_2^5\end{cases}$$

6.7 用变量梯度法判断下述非线性系统在原点处的稳定性：

$$\begin{cases}\dot{x}_1=-2x_1-2x_1x_2^4\\ \dot{x}_2=-x_2\end{cases}$$

6.8 判断下述非线性系统在原点处的稳定性：

$$\begin{cases}\dot{x}=2y-\dfrac{2x}{1+x^2},\\ \dot{y}=-\dfrac{2x+2y}{1+x^2}\end{cases}$$