

数值分析与算法 课程例题

第一章 绪论

Q: (5 分) 设 $Y_0 = 28$, 按递推公式:

$$Y_n = Y_{n-1} - \frac{1}{100}\sqrt{783} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

计算到 Y_{100} 。若取 $\sqrt{783} \approx 27.982$ (5 位有效数字), 且假设每步迭代计算的加减乘除误差不超过 5×10^{-6} , 试问 Y_{100} 的误差上限是多少?

A: 设变量 x 的误差绝对值为 Δx . 由题意,

$$\Delta Y_0 = 0, \Delta(\sqrt{783}) \leq \frac{1}{2} \times 10^{-3} \quad \dots\dots (\text{条件 1 分})$$

且有

$$\Delta Y_n = \Delta\left(Y_{n-1} - \frac{1}{100}\sqrt{783}\right) \leq \Delta Y_{n-1} + \frac{1}{100}\Delta(\sqrt{783}) + \Delta_{\text{calc}} \quad \dots\dots (\text{分析 2 分})$$

即

$$\Delta Y_n \leq \Delta Y_{n-1} + \frac{1}{100} \times \frac{1}{2} \times 10^{-3} + 5 \times 10^{-6} = \Delta Y_{n-1} + 1 \times 10^{-5}$$

故

$$\Delta Y_n \leq \Delta Y_0 + n \cdot 1 \times 10^{-5} = n \cdot 1 \times 10^{-5} \quad \dots\dots (\text{推导 1 分})$$

所以

$$\Delta Y_{100} \leq 100 \times 10^{-5} = 0.001 \quad \dots\dots (\text{结果 1 分})$$

所求 Y_{100} 的误差上限为 0.001.

注: 如有相似考题, 所标得分点不代表和考试得分点一模一样。