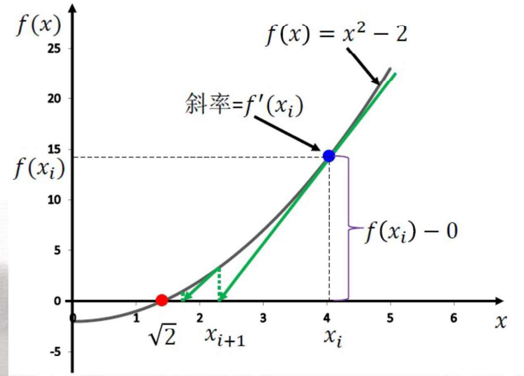
第六章 方程求根

第一节 引言

- 问题：如何求取$\sqrt{2}$？

注意：希望算法能够达到任意精度

是否收敛？精度？速度？



一、基本思路

$f(x) = 0$的根x^*

给出x_0，构造序列$x_1, \cdots, x_n, \cdots$，$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x^*$

二、误差要求

1. 给定$\epsilon > 0$，若$|x_n - x^*| < \epsilon$，则$x_n \approx x^*$，实际应用时可采用事后估计法
2. 给定$\delta > 0$，若$|f(x_n)| < \delta$，则$x_n \approx x^*$。

思考：二者的关系？

三、根的隔离

确定有根区间

1) 画图
2) 数值实验
3) 物理背景等先验知识

如果$f(x) \in C[a, b]$且$f(a) \cdot f(b) < 0$，则$f(x) = 0$在(a, b)内一定有实根。

求根可采用二分法，但收敛慢。

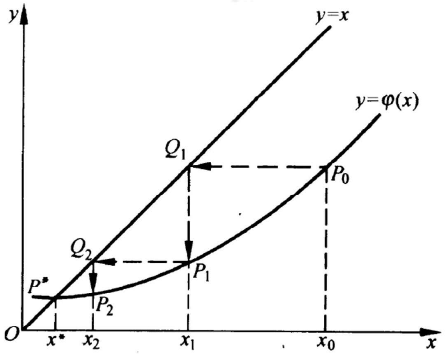
第二节 迭代法一般理论

一、迭代法的描述

$x = \varphi(x)$

$x_{n+1} = \varphi(x_n)$

$\lim_{n\to\infty} x_n = x^*$



对$f(x) = 0$

由$x = x \pm f(x)$

可令$\varphi(x) = x \pm f(x)$

则有$x = \varphi(x)$

关键：$\varphi(x)$的构造

1. 是否收敛
2. 收敛速度（误差估计）

- 例：求$f(x) = x^3 + 4x^2 - 10 = 0$在[1,2]的根

方法1：$\varphi_1(x) = x - x^3 - 4x^2 + 10$

方法2：$4x^2 = 10 - x^3 \Rightarrow \varphi_2(x) = \frac{1}{2}\sqrt{10 - x^3}$

方法3：$x^2 = \frac{10}{x} - 4x \Rightarrow \varphi_3(x) = \sqrt{\frac{10}{x} - 4x}$

方法4：$x^2 = \frac{10}{4+x} \Rightarrow \varphi_4(x) = \sqrt{\frac{10}{4+x}}$

取x_0=1.5

真实根：1.365230013

迭代次数	方法1	方法2	方法3	方法4
0	1.5	1.5	1.5	1.5
1	-0.875	1.2869538	0.8165	1.3483997
2	6.732	1.4025408	2.9969	1.3673764
3	-469.7	1.3454584	$(-8.65)^{1/2}$	1.3649570
4	1.03e8	1.3751703		1.3652647
…		…		…
8		1.3659167		1.3652300
…		…		
23		1.3652300		

二、收敛性

- 定理1：设连续函数$\varphi(x)$在[a,b]上满足

1. $\varphi(x) \in [a, b]$
2. $\forall x, \bar{x} \in [a, b]$存在0<L<1（L称为李普希兹常数）使$|\varphi(x) - \varphi(\bar{x})| \le L|x - \bar{x}|$

则对于任意初值$x_0 \in [a, b]$，迭代过程$x_{n+1} = \varphi(x_n)$产生的序列x_n收敛且收敛到真值x^*，$x^* = \varphi(x^*)$

证明：条件1保证了$x=\varphi(x)$有解，即$\exists x^*$满足$x^*=\varphi(x^*)$

条件1还保证了$\varphi(x_n)\in[a,b]$成立，与条件2一起，有

$$|x_n-x^*|=|\varphi(x_{n-1})-\varphi(x^*)|\le L|x_{n-1}-x^*|$$
$$\le L^2|x_{n-2}-x^*|\le\cdots\le L^n|x_0-x^*|$$

因为L<1所以$L^n\to0$, 所以$|x_n-x^*|\to0$

这也保证了x^*的唯一性

- 例：已知$x=e^{-x}$在$[\frac{1}{2},\ln2]$上有一根x^*，求x^*

1) $e^{-x}\in[\frac{1}{2},\ln2]$

2) $(e^{-x})'=-e^{-x}$

$|(e^{-x})'|=e^{-x}\le e^{-\frac{1}{2}}<1$

选$x_0=\frac{1}{2},x_1=0.606531,\cdots,x_{14}=0.567119$

- 定理2：设x^*是$x=\varphi(x)$的根， 如果

1. $\varphi'(x)$在x^*附近连续
2. $|\varphi'(x^*)|<1$

则$x_{n+1}=\varphi(x_n)$在x^*附近具有局部收敛性。

证明：由于$|\varphi'(x^*)|<1$，又$\varphi'(x)$在x^*附近连续，所以$\exists x^*$邻域$R:[x^*-\delta,x^*+\delta]$，$\forall x\in R$,

$$|\varphi'(x)-\varphi'(x^*)|\le\epsilon=\frac{1-|\varphi'(x^*)|}{2}$$

即有

$$|\varphi'(x)|\le|\varphi'(x^*)|+\frac{1-|\varphi'(x^*)|}{2}=\underbrace{\frac{1+|\varphi'(x^*)|}{2}}_{L}<1$$

类似定理1可证。

- 例：求$\sqrt{2}$，即求$x^2-2=0$的根

思考：由$x=x^2+x-2$推出$\varphi(x)=x^2+x-2$是否合适？

如何构造$\varphi(x)$？

由$x=ax^2+x-2a$有$\varphi(x)=ax^2+x-2a$, $\varphi'(x)=2ax+1$ 。若选$x_0\in(1,2)$，由$|\varphi'(x)|<1$可以推出$a\in(-\frac{1}{2},0)$。

选$a=-\frac{1}{4}$即可（验证定理1的条件）

三、收敛速度和误差分析

$e_n = x_n - x^*$

$$e_{n+1} = x_{n+1} - x^* = \varphi(x_n) - \varphi(x^*)$$

$$=\varphi'(x^*)e_n + \varphi^{(2)}(x^*)\frac{e_n^2}{2} + \cdots + \varphi^{(p)}(x^*)\frac{e_n^p}{p!} + \cdots$$

若$\varphi'(x^*) = \varphi^{(2)}(x^*) = \cdots = \varphi^{(p-1)}(x^*) = 0$

则 $e_{n+1} \approx c \cdot e_n^p$　　p阶收敛

在满足定理1的条件时,$|x_{k+1} - x_k| \le L^k|x_1 - x_0|$

$$\begin{aligned}|x_{k+p} - x_k| &\le |x_{k+p} - x_{k+p-1}| + \cdots |x_{k+1} - x_k| \\ &\le (L^{p-1} + \cdots + 1)|x_{k+1} - x_k| \\ &= \frac{1 - L^p}{1 - L}|x_{k+1} - x_k| \le \frac{1}{1 - L}|x_{k+1} - x_k|\end{aligned}$$

令$p \to \infty$ 有 $|x_k - x^*| \le \frac{1}{1-L}|x_{k+1} - x_k|$　　(*)

可用$|x_{k+1} - x_k|$来判断x_k与x^*的误差

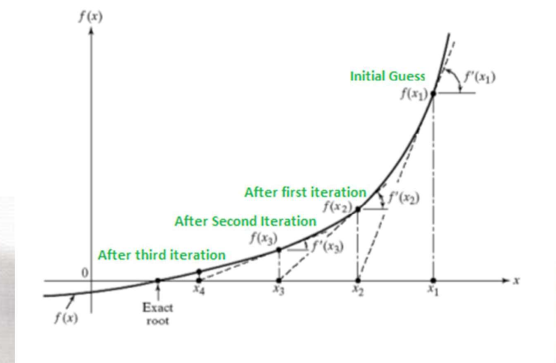
$|x_k - x^*| \le \frac{L^k}{1-L}|x_1 - x_0|$　　(**)

第三节 牛顿法

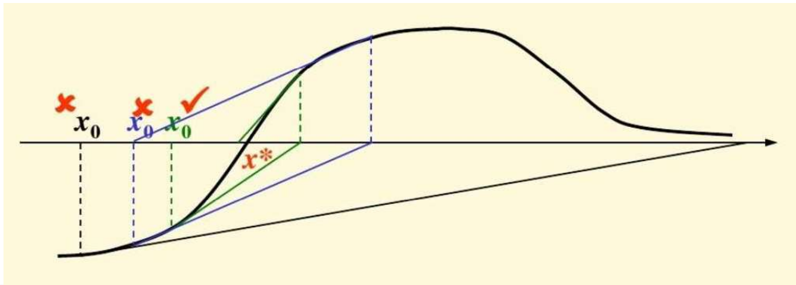
一、牛顿迭代公式

选　$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$, $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

初始值x_0选取很重要，应离x^*近



初始值的选取很重要



$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}, \varphi'(x^*) = 1 - 1 + \frac{f(x^*)f^{(2)}(x^*)}{[f'(x^*)]^2} = 0$

所以，牛顿法是2阶收敛的。

令 $\varphi(x) = x + a(x)f(x)$

$$\varphi'(x) = 1 + a'(x)f(x) + a(x)f'(x)$$
$$\varphi'(x^*) = 1 + a'(x^*)f(x^*) + a(x^*)f'(x^*)$$
$$= 1 + a(x^*)f'(x^*)$$

$\Rightarrow a(x^*) = -\dfrac{1}{f'(x^*)}$ 选 $a(x) = -\frac{1}{f'(x)}$

- 例：用牛顿法求$\sqrt{2}$，即求$x^2 - 2 = 0$的正根迭代公式？

初始值的选择？

方法误差分析？

思考1：分析舍入误差的影响

思考2：如何更精确地分析牛顿法的方法误差？L？

1阶收敛：$e_{n+1} = \varphi'(\xi_n) \cdot e_n$

2阶收敛：$e_{n+1} = \frac{1}{2}\varphi''(t_n) \cdot e_n^2$

对于一般性非线性方程求根

$e_{n+1} = \varphi'(x^*)e_n + \frac{1}{2}\varphi''(x^*)e_n^2 + \cdots + \frac{1}{m!}\varphi^{(m)}(\xi)e_n^m$

牛顿法：$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \varphi(x_n), \varphi'(x^*) = 0$

有 $e_{n+1} = \frac{1}{2}\varphi^{(2)}(\xi_n)e_n^2$

选初始区间$[x^* - \delta, x^* + \delta]$，

记其上 $\max|\varphi''(x)| = M$

则 $|e_{n+1}| \le \dfrac{M}{2}|e_n|^2$

$$\frac{M}{2}|e_{n+1}| \le \left[\frac{M}{2}|e_n|\right]^2 \le \cdots \le \left[\frac{M}{2}|e_0|\right]^{2^{n+1}}$$

即 $|e_{n+1}| \le \frac{2}{M}\left[\frac{M}{2}|e_0|\right]^{2^{n+1}}$

当$\frac{M}{2}|e_0| < 1$时，收敛

事实上此要求并不高

比较 $|e_{n+1}| \le \frac{M}{2}|e_n|^2$ $\frac{M}{2}|e_0|$与L相当

$|e_{n+1}| \le L|e_n|$

一阶收敛：$|e_n| \sim L^n$

二阶收敛：$|e_n| \sim L^{2^n}$

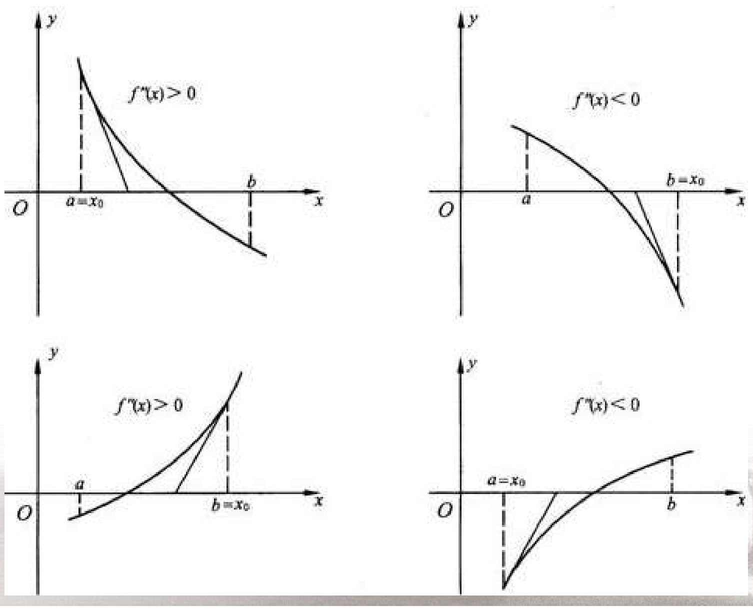
牛顿法在$[a,b]$上收敛的定理：

设$f(x)\in C^{(2)}[a,b]$满足：

1. $f(a)\cdot f(b)<0$
2. $\forall x\in[a,b], f'(x)\neq 0$
3. $f''(x)$在[a,b]上不变号
4. $\frac{|f(c)|}{b-a}\leq|f'(c)|$, c=a或b时 （选取初值 $x_0\in[a,b]$使得$f(x_0)f''(x_0)>0$）

则$\forall x\in[a,b]$，牛顿迭代法收敛。

http://netedu.xauat.edu.cn/jpkc/netedu/jpkc2009/jsff/content/dzja/3.4.htm
https://wenku.baidu.com/view/bd1ba4db81c758f5f61f67fa.html



- 实际应用时往往采用牛顿下山法：

$$\bar{x}_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

检查$|f(\bar{x}_{k+1})|<|f(x_k)|$成立与否？

1. 若成立， $x_{k+1}=\bar{x}_{k+1}$
2. 若不成立， $x_{k+1}=\lambda\bar{x}_{k+1}+(1-\lambda)x_k$

λ从1开始逐次减半尝试，直到$|f(x_{k+1})|<|f(x_k)|$

- 重根问题：

当x^*是f(x)的多重根时，分母$f'(x^*)=0$

实际上，$f(x)=(x-x^*)^m g(x)$

$$\varphi(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)}=x-\frac{(x-x^*)g(x)}{(x-x^*)g'(x)+mg(x)}$$

$$\varphi'(x^*)=1-\frac{1}{m}$$ 线性收敛

两种改良方法：

1. 令$\varphi(x)=x-m\frac{f(x)}{f'(x)}$，需知道m，此时 $\varphi'(x^*)=1-m\frac{1}{m}=0$
2. 令$u(x)=\frac{f(x)}{f'(x)}$，则u(x)以x^*为单根

第四节 弦截法和抛物线法

一、弦截法

用$f(x_n), f(x_{n-1})$构造插值多项式

$$P_1(x) = f(x_n) + f[x_n, x_{n-1}](x - x_n)$$

用$P_1(x)$的根近似x^*，作为x_{n+1}

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f[x_n, x_{n-1}]}$$

（相当于用$f[x_n, x_{n-1}]$代替$f'(x_n)$）

记 $e_{n+1} = x_{n+1} - x^*$

$$P_1(x_{n+1}) = f(x_n) + f[x_n, x_{n-1}](x_{n+1} - x_n)$$
$$P_1(x^*) = f(x_n) + f[x_n, x_{n-1}](x^* - x_n)$$

相减得

$$-P_1(x^*) = f[x_n, x_{n-1}](x_{n+1} - x^*) = f'(\xi_1)e_{n+1}$$
$$\xi_1 \in [x_{n-1}, x_n] \qquad (1)$$

插值余项

$$f(x) - P_1(x) = \frac{f^{(2)}(\xi_2)}{2}(x - x_n)(x - x_{n-1})$$

$$-P_1(x^*) = \frac{f^{(2)}(\xi_2)}{2}(x^* - x_n)(x^* - x_{n-1})$$
$$= \frac{f^{(2)}(\xi_2)}{2}e_n e_{n-1} \qquad (2)$$

(1)+(2): $$e_{n+1} = \frac{f^{(2)}(\xi_2)}{2f'(\xi_1)}e_n e_{n-1}$$

如果x_n和x_{n-1}在x^*的邻域R: $[x^* - \delta, x^* + \delta]$中

$\xi_1, \xi_2 \in R$，令 $M = \frac{\max_{x\in R}|f^{(2)}(x)|}{2\min_{x\in R}|f'(x)|}$， (3)

则$|e_{n+1}| \le M|e_n||e_{n-1}|$

取δ足够小，使得$M\delta < 1$

（可先选 $\delta_0 \to M_0 \to \delta$，此时$M \le M_0$）

$|e_{n+1}| \le M\delta^2 < \delta$ 即$x_{n+1} \in R$

$$|e_2| \le M|e_1| \cdot |e_0| \le M\delta^2 = \frac{(M\delta)^2}{M}$$
$$|e_3| \le M|e_2| \cdot |e_1| \le \frac{(M\delta)^3}{M}$$
$$\cdots$$
$$|e_n| \le \frac{(M\delta)^n}{M} \xrightarrow{n\to\infty} 0 \quad \text{收敛}$$

收敛速度 $\frac{f^{(2)}(\xi_2)}{2f'(\xi_1)} \approx \frac{f^{(2)}(x^*)}{2f'(x^*)} \triangleq K$

则 $e_{n+1} \approx K e_n e_{n-1}$

假设 $e_n = c e_{n-1}^p$

$$e_{n+1} = c e_n^p = K e_n e_{n-1} = K e_n e_n^{\frac{1}{p}} c^{-\frac{1}{p}}$$

$$\Rightarrow p = 1 + \frac{1}{p},\ p = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618$$

二、抛物线法

用x_n, x_{n-1}, x_{n-2}构造$P_2(x)$

把$P_2(x)$的根作为x_{n+1}

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2f(x_n)}{\omega \pm \sqrt{\omega^2 - 4f(x_n)f[x_n, x_{n-1}, x_{n-2}]}}$$

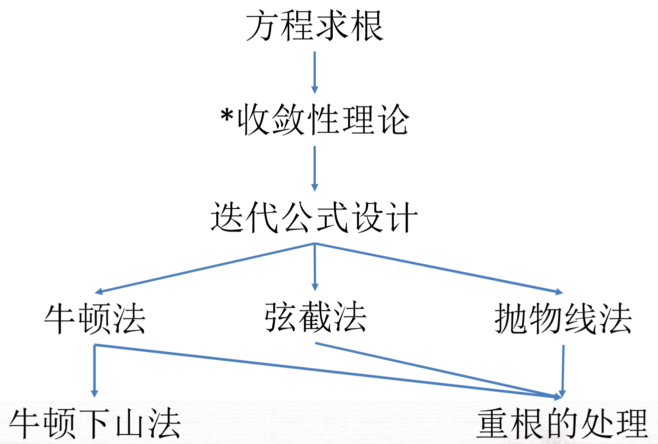
其中

$\omega = f[x_n, x_{n-1}] + f[x_n, x_{n-1}, x_{n-2}](x_n - x_{n-1})$

根式前$\pm$选择与ω符号一致

$$p \approx 1.840$$

方程求根总结



- 思考：对几种方法进行比较，分析各自的适用性

牛顿法（直接法vs牛顿下山法）

弦截法

抛物线法