自动控制理论（1）作业四答案

作业内容：在学习绪论、教材第三章内容和电子讲义的基础上，试解答以下题目。
学习目的：控制系统设计的指标要求
提交时间：10月17日上课交，或交电子版致网络学堂截至10月17日24时

书上 3.5，3.8，3.9，3.10，3.11，3.12，3.14

1、书上3.5

3.5 用劳斯稳定判据判断下列各系统的稳定性．这些系统的特征多项式分别是：

(a) $s^6+4s^5-4s^4+4s^3-7s^2-8s+10$ ；

(b) $s^6+6s^4+3s^3+2s^2+s+1$ ；

(c) $25s^5+105s^4+120s^3+122s^2+20s+1$ ；

(d) $(s+2)(s+4)(s^2+6s+25)+666.25$ ；

(e) $s^4+8s^3+18s^2+16s+5$ ．

解：(a) 特征多项式各系数不同号，故不稳定。

(b) 特征多项式缺项，故不稳定。

(c)列写Routh表：

s^5	25	120	20
s^4	105	122	1
s^3	90.95	19.76	
s^2	99.19	1	
s^1	18.84		
s^0	1		

因为第一列系数全为正数，所以系统稳定。

(d)特征多项式为$s^4+12s^3+69s^2+198s+866.25$

列写Routh表为：

s^4	1	69	866.25
s^3	12	198	
s^2	52.5	866.25	
s^1	0 (ε)		
s^0	866.25		

因为ε上下同号，所以存在一对纯虚根，系统临界稳定。

(e) 特征多项式为 $s^4+8s^3+18s^2+16s+5$

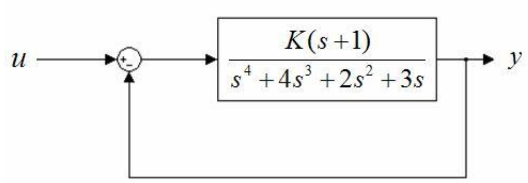
列写Routh表为

s^4	1	18	5
s^3	8	16	
s^2	16	5	
s^1	13.5		
s^0	5		

因为第一列系数全为正数，所以系统稳定。

2、书上**3.8**

3.8 对于图中所示的系统，用劳斯稳定判据确定系统稳定时系数 K 的取值范围．



解：开环传递函数为$G(s)=\frac{K(s+1)}{s^4+4s^3+2s^2+3s}$

闭环传递函数$G_B(s)=\frac{G(s)}{1+G(s)}=\frac{K(s+1)}{s^4+4s^3+2s^2+(K+3)s+K}$

特征多项式为$s^4+4s^3+2s^2+(K+3)s+K$

列写Routh表为：

s^4	1	2	K
s^3	4	$\mathrm{K}+3$	
s^2	$\dfrac{5-K}{4}$	K	
s^1	$\dfrac{K^2+14K-15}{K-5}$		
s^0	K		

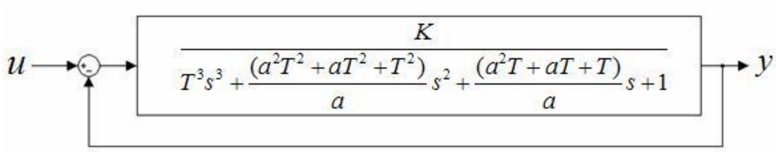
欲使系统稳定，要求

$$\begin{cases} \dfrac{5-K}{4}>0 \\ \dfrac{K^2+14K-15}{K-5}>0 \\ K>0 \end{cases}$$

即$0<\mathrm{K}<1$

3、书上3.9

3.9 对于图中所示的系统，分析系统稳定性与常系数 a (>0) 的关系．由此可以得出什么结论？



解：系统的特征多项式为

$$a_3s^3+a_2s^2+a_1s+a_0=\mathrm{T}^3s^3+\left(a+\frac{1}{a}+1\right)T^2s^2+\left(a+\frac{1}{a}+1\right)Ts+(K+1)$$

列写Routh表为：

s^3	T^3	$\left(a+\dfrac{1}{a}+1\right)T$
s^2	$\left(a+\dfrac{1}{a}+1\right)T^2$	$K+1$
s^1	$\dfrac{(a+\frac{1}{a}+1)^2T^3-(K+1)T^3}{\left(a+\frac{1}{a}+1\right)T^2}$	
s^0	$K+1$	

系统稳定的充要条件是

$$\frac{(a+\frac{1}{a}+1)^2T^3-(K+1)T^3}{\left(a+\frac{1}{a}+1\right)T^2}>0$$

即$K<(a+\frac{1}{a}+1)^2-1$

因此，若$K<(a+\frac{1}{a}+1)^2-1$，则系统稳定；

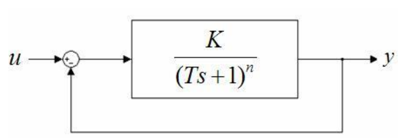
若$K=(a+\frac{1}{a}+1)^2-1$，则系统临界稳定；

若$K>(a+\frac{1}{a}+1)^2-1$，则系统不稳定。

结论：随着K逐渐增大，系统由稳定系统变为不稳定系统，可见系统稳定性与开环增益有关。保持系统结构不变，改变系统的参数可能会改变系统的稳定性。增大开环增益，系统稳定性变差。

4、书上**3.10**

3.10 对于图中所示系统，分以下 3 种情况分别确定使系统稳定的 K 值的 范围：(a) $n=3$；(b) $n=4$；(c) $n=5$．从中可以得出什么结论？



解：闭环系统特征多项式为$(Ts+1)^n+K$
(a)n=3，根据Routh判据，可求得当-1<K<8时，系统稳定。
(b)n=4，根据Routh判据，可求得当-1<K<4时，系统稳定。
(a)n=5，根据Routh判据，可求得当-1<K<2.885时，系统稳定。
结论：当系统结构变化时，系统稳定性发生变化。

5、书上3.11

3.11 已知系统的开环传递函数为

$$G(s)=\frac{K}{(s+2)(s+4)(s^2+6s+25)}$$

要求用劳斯判据确定使该系统在单位反馈下达到临界稳定的 K 值，并求出这时的振荡频率.

解：闭环系统的特征多项式为$s^4+12s^3+69s^2+198s+200+K$
列写Routh表为：

s^4	1	69	200+K
s^3	12	198	
s^2	52.5	200+K	
s^1	(15990-24K)/105		
s^0	200+K		

当(15990-24K)/105=0，即 K=666.25 时，系统临界稳定。
此时，辅助方程为 52.5 s^2+(200+K)=0
解得 s=±j4.06
故振荡频率为 4.06

6、书上 **3.12**

3.12 某系统的开环传递函数为

$$G(s)=\frac{K(s+1)}{s(2s+1)\ (\tau s+1)}$$

要求用劳斯判据确定使该系统在单位反馈下达到临界稳定的 K 和 τ （均为正值）的取值范围.

解：闭环系统特征方程为 1+G(s)=0，即$2\tau s^3+(2+\tau)s^2+(1+K)s+K=0$
列写Routh表为：

s^3	2τ	$1+K$
s^2	$2+\tau$	K
s^1	$\frac{2+2K+\tau-K\tau}{2+\tau}$	
s^0	K	

已知 K 和 τ 均为正值

则系统临界稳定的条件是$\frac{2+2K+\tau-K\tau}{2+\tau}=0$

即$K=\frac{\tau+2}{\tau-2}$

又因为$K>0,\tau>0$

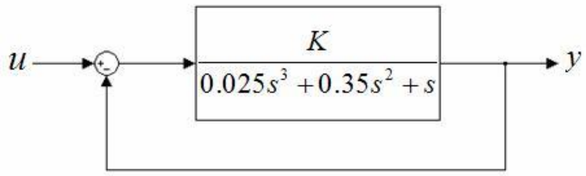
故$\begin{cases} K = \frac{\tau+2}{\tau-2} \\ K > 1 \\ \tau > 2 \end{cases}$

7、书上 **3.14**

3.14 对于图中所示的控制系统，求出

(a) 使系统稳定的 K 值范围；

(b) 若为了使系统在某些参数稍有变化时仍能保持稳定而要求闭环系统全部极点都位于复数平面上直线 $\mathrm{Re}\, s = -1$ 的左方，确定允许 K 的取值范围.（提示：命 $s = \mu - 1$ ）



解：(a)闭环系统特征多项式为$0.025s^3 + 0.35s^2 + s + K$

列写Routh表为：

s^3	0.025	1
s^2	0.35	K
s^1	$(0.35 - 0.025\mathrm{K})/0.35$	
s^0	K	

系统稳定的充要条件是

$$\begin{cases} \dfrac{0.35 - 0.025\mathrm{K}}{0.35} > 0 \\ K > 0 \end{cases}$$

解得0<*K*<14

(b) 命 $s = \mu - 1$，则闭环系统特征多项式为

$$0.025(\mu-1)^3 + 0.35(\mu-1)^2 + (\mu-1) + K = 0.025\mu^3 + 0.275\mu^2 + 0.375\mu + (K - 0.675)$$

列写Routh表为：

s^3	0.025	0.375
s^2	0.275	$K - 0.675$
s^1	$\frac{0.12-0.025K}{0.275}$	
s^0	$K - 0.675$	

闭环系统全部极点都位于复数平面上直线 $\mathrm{Re}\, s = -1$ 的左方的充要条件是

$$\begin{cases} \dfrac{0.12 - 0.025K}{0.275} > 0 \\ K - 0.675 > 0 \end{cases}$$

解得0.675<*K*<4.8