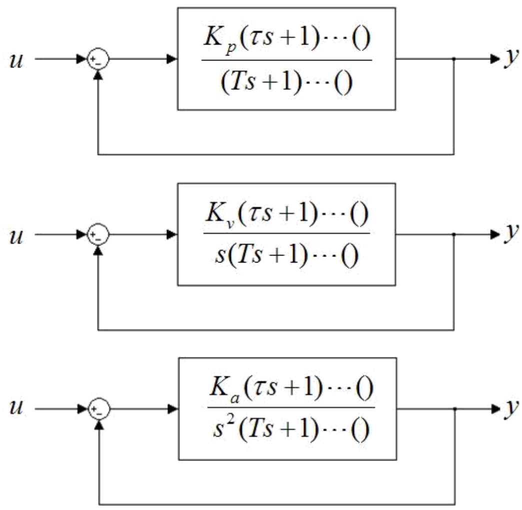
自动控制理论（1）作业五答案

作业内容：在学习绪论、教材第三章内容和电子讲义的基础上，试解答以下题目。
学习目的：控制系统设计的指标要求
提交时间：10月17日上课交，或交电子版致网络学堂截至10月17日24时

书上 3.15，3.16，3.17，3.18，3.19，3.20

1、书上3.15

3.15 对于图中所示的 0、1 、2 型系统，输入量都是电压，单位为 V ．分别求出其开环比例系数 K_p， K_v 和 K_a 的量纲和单位.



解：0型系统的开环比例系数K_p：无量纲，单位为1。

1型系统的开环比例系数K_v： 量纲T^{-1}，单位为s^{-1}。

2型系统的开环比例系数K_a：量纲T^{-2}，单位为 s^{-2} 。

2、书上3.16

3.16 对于单位反馈系统，若开环传递函数分别为(以下均有 $\tau > T > 0$)

(1)$G(s) = \frac{1}{Ts+1}$

(2)$G(s) = \frac{1}{s(Ts+1)}$

(3)$G(s) = \frac{\tau s+1}{s^2(Ts+1)}$

分别求出

(a) 当输入量为 $u(t) = c\cdot 1(t)$ 时，输出量 $y(t)$ 的静态值；

(b) 当输入量为 $u(t) = c\,t$ 时，输出量 $y(t)$ 的静态速度；

(c) 当输入量为 $u(t) = c\,t^2/2$ 时，输出量 $y(t)$ 的静态加速度.

解：(1)G(s)为0型系统。

(a)当输入量为$u(t) = c\cdot 1(t)$ 时，系统可达到稳定，静态误差系数K=1，静态误差等于$\frac{c}{1+K} = \frac{1}{2}c$，则$y(t)$ 的静态值为$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{t\to\infty} u(t) - \lim_{t\to\infty} e(t) = c - \frac{1}{2}c = \frac{1}{2}c$

(b)此时的输入量等于条件(a)下输入量的积分，根据线性系统的特性知，此时输出量y(t)等于条件(a)下输出量的积分，则此时输出量 $y(t)$ 的静态速度等于条件(a)下输出量 $y(t)$ 的静态值，即等于$\frac{1}{2}c$

(c)此时的输入量等于条件(b)下输入量的积分，根据线性系统的特性知，此时输出量y(t)等于条件(b)下输出量的积分，则此时输出量 $y(t)$ 的静态加速度等于条件(b)下输出量 $y(t)$ 的静态速度，即等于$\frac{1}{2}c$

(2) G(s)为I型系统。

(a) 当输入量为$u(t) = c\cdot 1(t)$ 时，系统可达到稳定，静态误差等于0，则$y(t)$ 的静态值为$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{t\to\infty} u(t) - \lim_{t\to\infty} e(t) = c - 0 = c$

(b)同理，输出量 $y(t)$ 的静态速度等于c

(c)同理，输出量 $y(t)$ 的静态加速度等于c

(3) G(s)为II型系统。

(a) 当输入量为$u(t) = c\cdot 1(t)$ 时，系统可达到稳定，静态误差等于0，则$y(t)$ 的静态值为$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{t\to\infty} u(t) - \lim_{t\to\infty} e(t) = c - 0 = c$

(b)同理，输出量 $y(t)$ 的静态速度等于c

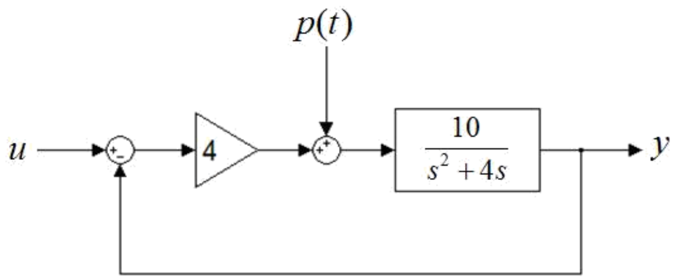
(c)同理，输出量 $y(t)$ 的静态加速度等于c

3、书上3.17

3.17 对于图中所示的系统，当 $u(t) = 4 + 6\,t$ ，$p(t) = -1(t)$ ，求

(a) 系统的静态误差 e_{st}.

(b) 要减小关于扰动 $p(t)$ 的静态误差，应提高系统中哪个框的比例系数，为什么？



解：(a) 单独施加u(t)时，因为速度误差系数为$\lim_{s\to 0} s\cdot 4\cdot\frac{10}{s^2+4s}=10$，所以静态误差为$\frac{6}{10}$

单独施加$p(t)$时，静态误差为$\frac{1}{4}$

故系统的静态误差为$e_{st}=\frac{6}{10}+\frac{1}{4}=0.85$

(b)应增大比例环节的放大系数。

4、书上3.18

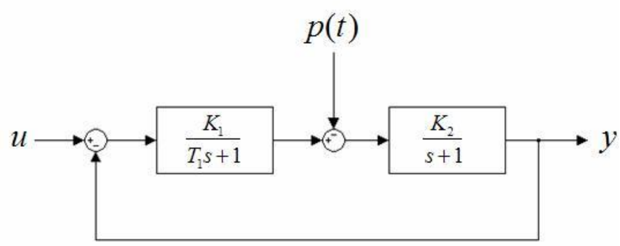
3.18 对于图中所示系统，求

(a) 当 $u(t)=0$ ，$p(t)=1(t)$ 时的静态误差 e_{st} .

(b) 当 $u(t)=1(t)$ ，$p(t)=1(t)$ 时的静态误差 e_{st} .

(c) 如果要求减小 e_{st} ，应如何调整 K_1 和 K_2 ？

(d) 在扰动 $p(t)$ 的作用点之前加入积分单元，对静差 e_{st} 有什么影响？若在 $p(t)$ 的作用点之后加入积分单元，结果又如何？



解：(a) 当 $u(t)=0$ 时，由$\mathrm{E(s)}=-[\mathrm{E(s)}\cdot\frac{K_1}{T_1s+1}-P(t)]\cdot\frac{K_2}{s+1}$

得$\mathrm{E(s)}=\frac{K_2(T_1s+1)P(s)}{(T_1s+1)(s+1)+K_1K_2}$

由终值定理得$e_{st}=\lim_{s\to 0} sE(s)=\lim_{s\to 0} s\frac{K_2(T_1s+1)\cdot\frac{1}{s}}{(T_1s+1)(s+1)+K_1K_2}=\frac{K_2}{1+K_1K_2}$

(b)单独施加 $u(t)=1(t)$时，

开环传递函数为$\mathrm{G(s)}=\frac{K_1}{T_1s+1}\cdot\frac{K_2}{s+1}$，可见为 0 型系统。

位置误差系数为$\lim_{s\to 0}\frac{K_1}{T_1s+1}\cdot\frac{K_2}{s+1}=K_1K_2$

静态误差为$\frac{1}{1+K_1K_2}$

所以，当 $u(t)=1(t)$ ，$p(t)=1(t)$ 时的静态误差$e_{st}=\frac{1+K_2}{1+K_1K_2}$

(c) $e_{st}=\frac{1+K_2}{1+K_1K_2}$

把e_{st}视为K_1和K_2的二元函数，分别求偏导数。

(i) $\frac{de_{st}}{K_1}=\frac{-K_2(1+K_2)}{(1+K_1K_2)^2}$<0，故$e_{st}$是$K_1$的减函数。要减小$e_{st}$，应增大$K_1$。

(ii) $\frac{de_{st}}{K_2}=\frac{1-K_1}{(1+K_1K_2)^2}$

若$K_1>1$，则e_{st}是K_2的减函数，要减小e_{st}，应增大K_2；
若K_1 <1，则e_{st}是K_2的增函数，要减小e_{st}，应减小K_2；
若K_1 =1，则$e_{st}=1$，e_{st}不随K_2变化而变化。
(d) (i)先考察加入积分单元对单独施加u(t)时静态误差的影响。

无论在哪里加入积分单元，系统都由0型系统变为1型系统，静态误差由$\frac{1}{1+K_1K_2}$变为0 。

(ii)再考察加入积分单元对单独施加p(t)时静态误差的影响。

单独施加干扰p(t)时，静态误差可表示为E(s)= $\frac{G_2(s)P(s)}{1+G_1(s)G_2(s)}=\frac{G_2(s)}{1+G_1(s)G_2(s)}\cdot\frac{1}{s}$

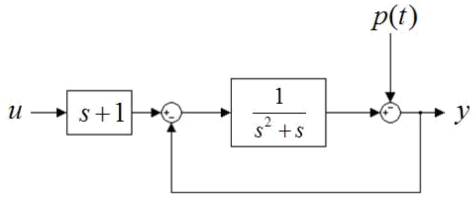
由终值定理得$e_{st}=\lim\limits_{s\to 0}sE(s)=\lim\limits_{s\to 0}\frac{G_2(s)}{1+G_1(s)G_2(s)}$

若在扰动 $p(t)$ 的作用点之前加入积分单元，则e_{st}由$\frac{K_2}{1+K_1K_2}$变为0；若在扰动 $p(t)$ 的作用点之后加入积分单元，则e_{st}由$\frac{K_2}{1+K_1K_2}$变为$\frac{1}{K_1}$。

综上，若在扰动 $p(t)$ 的作用点之前加入积分单元，则e_{st}由$\frac{1+K_2}{1+K_1K_2}$变为0；若在扰动 $p(t)$ 的作用点之后加入积分单元，则e_{st}由$\frac{1+K_2}{1+K_1K_2}$变为$\frac{1}{K_1}$（若$K_1>1$则静态误差变小了，若$K_1=1$则静态误差不变，若$K_1<1$则静态误差变大了）。

5、书上3.19

3.19 控制系统的结构如图中所示．设 $u(t)=t\ 1(t)$，$p(t)=1(t)$ ，定义 $e(t)=u(t)-y(t)$ ．试求系统的静态误差．



解：根据框图有

$$[(s+1)U(s)-Y(s)]\cdot\frac{1}{s^2+s}-P(s)=Y(s)$$

且

$$E(s)=U(s)-Y(s)$$

$$P(s)=\frac{1}{s}$$

$$U(s)=\frac{1}{s^2}$$

联立以上两式可得

$$\mathrm{Y(s)}=\frac{(s+1)^2(1-s)}{s^2(s^2+s+1)}$$

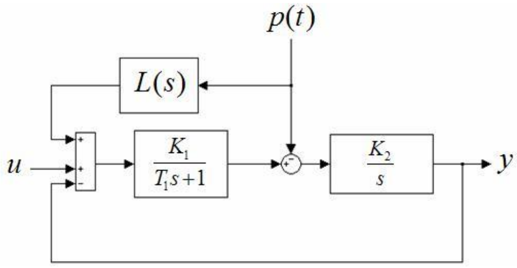
$$\mathrm{E(s)}=\frac{s+2}{s^2+s+1}$$

系统的静态误差为

$$\lim_{\mathrm{t}\to\infty} e(\mathrm{t})=\lim_{\mathrm{s}\to 0} sE(\mathrm{s})=\lim_{\mathrm{s}\to 0}\frac{s(s+2)}{s^2+s+1}=0$$

6、书上3.20

3.20　有一控制系统如图。定义 $e(t)=u(t)-y(t)$. 设扰动信号为阶跃函数，欲使系统无静差，即$\lim_{\mathrm{t}\to\infty} e(\mathrm{t})=0$，应选择怎样的补偿装置$L(s)$？



解：根据框图得

$$[\mathrm{U(s)}+\mathrm{P(s)L(s)}-\mathrm{Y(s)}]\cdot\frac{K_1}{T_1 s+1}-P(s)=\frac{s}{K_2}\cdot Y(s)$$

有静态误差定义得

$$\mathrm{E(s)}=\mathrm{U(s)}-\mathrm{Y(s)}$$

且已知

$$\mathrm{P(s)}=\frac{1}{s}$$

联立以上两式，得

$$\mathrm{Y(s)}=\frac{\frac{K_1(sU(s)+L(s))}{s(T_1 s+1)}-\frac{1}{s}}{\frac{s}{K_2}+\frac{K_1}{T_1 s+1}}$$

要使$\lim_{\mathrm{t}\to\infty} e(\mathrm{t})=\lim_{\mathrm{s}\to 0}\mathrm{s}E(\mathrm{s})=0$，则$\lim_{\mathrm{s}\to 0}\mathrm{s}(-\mathrm{Y(s)})=\lim_{\mathrm{s}\to 0}-\frac{\frac{K_1(sU(s)+L(s))}{T_1 s+1}-1}{\frac{s}{K_2}+\frac{K_1}{T_1 s+1}}=0$

解得$L(\mathrm{s})=\frac{1}{K_1}$