

自动控制理论（I）作业六答案

作业内容：在学习绪论、教材第三章内容和电子讲义的基础上，试解答以下题目。

学习目的：控制系统设计的指标要求

提交时间：10月24日上课文，或交电子版致网络学堂截至10月24日24时

书上 3.21, 3.22, 3.23, 3.25, 3.26

1、书上3.21

3.21 假设某系统对于单位阶跃输入信号的响应为

$$y(t) = 1 + 0.2 e^{-60t} - 1.2 e^{-10t}.$$

(a) 求该系统的闭环传递函数.

(b) 确定该系统的阻尼系数.

解：(a) $Y(s) = L[y(t)] = \frac{1}{s} + \frac{0.2}{s+60} - \frac{1.2}{s+10} = \frac{600}{s(s+60)(s+10)}$

$$R(s) = L[r(t)] = \frac{1}{s}$$

则系统的闭环传递函数为

$$G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{600}{s^2 + 70s + 600}$$

(b)

$$G(s) = \frac{600}{s^2 + 70s + 600} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\varepsilon\omega_n s + \omega_n^2}$$

则

$$\omega_n^2 = 600$$

$$2\varepsilon\omega_n = 70$$

解得 $\omega_n = 24.5 \text{ rad/s}$, $\varepsilon = 1.43$

2、书上3.22

3.22 已知系统框图如图所示.

(a) 求图 a 所示系统的阻尼系数，并简评其动态性能.

(b) 若对图 a 的系统加入速度反馈，成为图 b，对系统的动态性能有何影响？

(c) 欲使图 b 的系统的阻尼系数成为 0.7，应取 γ 为何值？

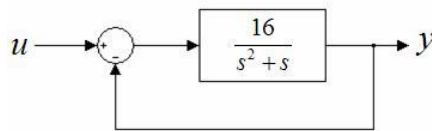
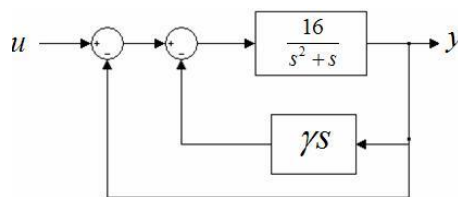


图 a



图b

解：(a)系统闭环传递函数为

$$G_B(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\varepsilon\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{16}{s^2 + s + 16}$$

则

$$\omega_n^2 = 16$$

$$2\varepsilon\omega_n = 1$$

解得 $\omega_n = 4 \text{ rad/s}$, $\varepsilon = 1/8 < 1$, 故系统为欠阻尼系统。

(b) 系统闭环传递函数为

$$G_B(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\varepsilon\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{16}{s^2 + (16\gamma + 1)s + 16}$$

则

$$\omega_n^2 = 16$$

$$2\varepsilon\omega_n = 16\gamma + 1$$

解得 $\omega_n = 4 \text{ rad/s}$, $\varepsilon = \frac{1}{8} + 2\gamma$, 阻尼系数增大了, 无阻尼自然振荡频率不变。

(c) 令 $\varepsilon = \frac{1}{8} + 2\gamma = 0.7$

则 $\varepsilon = \frac{1}{8} + 2\gamma = 0.7$

$\gamma = 0.2875$

3、书上3.23

3.23 设在上题图中取 $\gamma = 0.2$ 。对于图 a, b 的系统, 分别作出它们的阶跃响应曲线和在单位斜坡信号作用下的误差曲线。

解: 图a系统的闭环传递函数为

$$G_a(s) = \frac{16}{s^2 + s + 16}$$

开环传递函数为

$$\frac{16}{s^2 + s}$$

速度误差系数为 $K_v = 16$

图b系统的闭环传递函数为

$$G_b(s) = \frac{16}{s^2 + 4.2s + 16}$$

开环传递函数为

$$\frac{16}{s^2 + 4.2s}$$

速度误差系数 $K_v = 3.8$

两系统都是欠阻尼系统, 都是I型系统, 在单位阶跃信号作用下, 都能达到稳定, 稳态误差都为0; 在单位斜坡信号作用下也能达到稳定, 稳态误差分别为0.0625、0.2625。

利用MATLAB绘制曲线的代码如下:

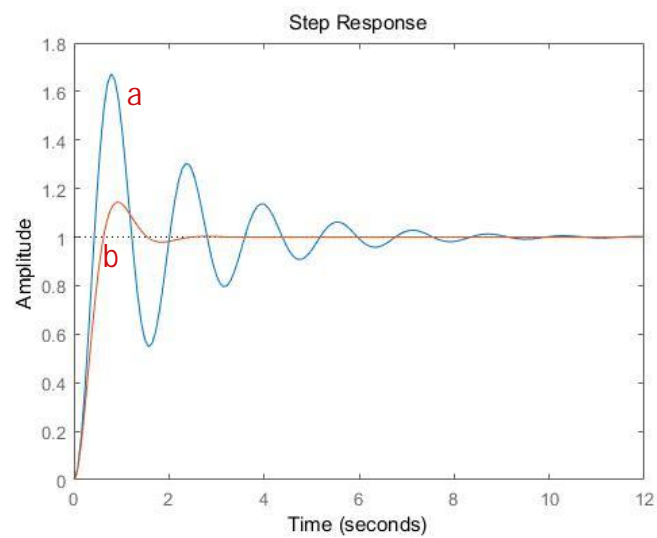
```
>> num=[16];den=[1 1 16];
>> A=tf(num den)
>> den=[1 4.2 16];
```

```

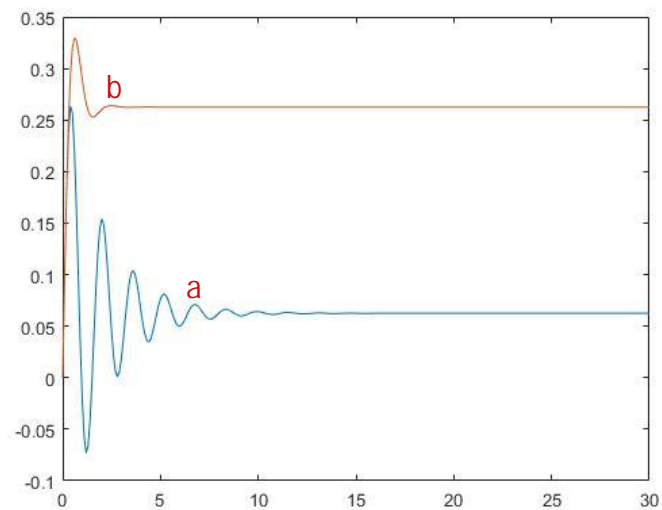
>> B=tf(num den)
>> step(A)
>> hold on
>> step(B)
>> t=0:0.1:30;u=t;
>> [y]=lsim(A,u,t);y=y';
>> plot(t,u-y);
>> hold on
>> [y]=lsim(B,u,t);y=y';
>> plot(t,u-y);

```

单位阶跃输入响应曲线



单位斜坡输入误差曲线



由以上曲线可以看出，添加了速度反馈之后，系统的阻尼系数变大，输入为阶跃函数时，系统的振荡幅度、振荡次数、调整时间和超调量均减小；在输入为斜坡函数时，稳态误差增大。

4、书上3.25

3.25 某单位反馈系统的闭环传递函数为

$$H(s) = \frac{b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0},$$

其中 $b_1 = a_1$, $b_0 = a_0$. 试分别求出在单位斜坡函数输入下和在单位等加速度函数输入下系统的静态误差.

解：系统开环传递函数为

$$G(s) = \frac{H(s)}{1 - H(s)}$$

将H(s)代入，得

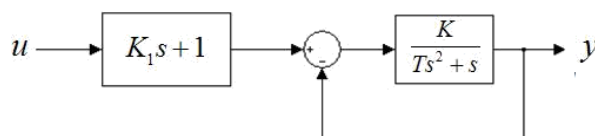
$$G(s) = \frac{a_1 s + a_0}{s^2 \sum_{k=2}^n a_k s^{k-2}}$$

可见系统为II型系统。

在单位斜坡函数输入下，系统可达到稳定，静态误差等于0。在单位加速度函数输入下，系统可达到稳定，由于加速度误差系数等于 $\lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s) = \frac{a_0}{a_2}$ ，故静态误差等于 $\frac{a_2}{a_0}$ 。

5、书上3.26

3.26 在图中所示的系统中，假设输入信号是斜坡函数，证明：通过适当地调节 K_1 可使系统关于输入量的静态误差为零。



解：系统闭环传递函数为 $G_B(s) = (K_1 s + 1) \cdot \frac{K}{Ts^2 + s}$

等效开环传递函数为 $G(s) = \frac{G_B(s)}{1 - G_B(s)} = \frac{KK_1 s + K}{Ts^2 + (1 - KK_1)s}$

若 $1 - KK_1 \neq 0$ ，则系统为 I 型系统，速度误差系数为 $\lim_{s \rightarrow 0} sG(s) = \frac{K}{1 - KK_1}$ ，斜坡函数输入下静态误差等于 $\frac{1 - KK_1}{K} \neq 0$ 。

若 $1 - KK_1 = 0$ ，则 $G(s) = \frac{G_B(s)}{1 - G_B(s)} = \frac{s + K}{Ts^2}$ ，系统为 II 型系统，斜坡函数输入下静态误差等于 0。

综上，通过调节 K_1 ，使其等于 $\frac{1}{K}$ ，可使系统关于输入量的静态误差为零。