自动控制理论（1）作业一 参考答案

作业内容：在学习绪论、教材第二章内容和电子讲义的基础上，试解答以下题目。

学习目的：控制系统的基本原理、控制系统的数学模型

提交时间：9月26日上课交，或交电子版致网络学堂截至9月26日24时

1、开放题: 选一篇阅读参考文献（如作业一附件中给出的[1-15]），试分析该文献中的控制系统的组成和工作原理，指出系统的给定、控制量、被控量（输出），并写出读后感，谈谈你关于反馈在该系统中的作用的认识，字数不限。

解：建议将文献中的控制系统与教材、讲义中的知识对照起来理解。

2、（书上 2.1 a. b. c. ，提示：用复数阻抗法）在图2.E.1中，以电压 $v(t)$ 为输入量。

(a) 以电压 $u_2(t)$ 为输出量，列写微分方程；

(b) 以电压 $u_3(t)$ 为输出量，列写微分方程；

(c) 设 $R_1 = R_2 = 0.1\,\mathrm{M\Omega}$，$C_1 = 10\,\mu\mathrm{F}$，$C_2 = 2.5\,\mu\mathrm{F}$，将 (a) 的结果写成数字形式。

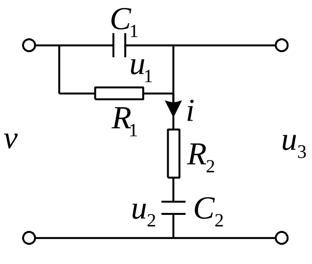

图2.E.1 含两个电容器的电路

解：(a) 由电路原理得

$$
\begin{cases}
V(s) = U_2(s) + R_2 I(s) + U_1(s) \\[2mm]
U_1(s) = \dfrac{R_1 \cdot \dfrac{1}{C_1 s}}{R_1 + \dfrac{1}{C_1 s}} \cdot I(s) \\[2mm]
U_2(s) = \dfrac{1}{C_2 s} \cdot I(s)
\end{cases}
$$

联立后得到

$$R_1R_2C_1C_2s^2U_2(s)+(R_1C_1+R_2C_2+R_1C_2)sU_2(s)+U_2(s)=R_1C_1sV(s)+V(s)$$

对上式两边求拉普拉斯逆变换得

$$R_1R_2C_1C_2\frac{\mathrm{d}^2u_2}{\mathrm{d}t^2}+(R_1C_1+R_2C_2+R_1C_2)\frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t}+u_2=R_1C_1\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+v$$

(b) 由电路原理得

$$\begin{cases} V(s)=U_3(s)+U_1(s) \\ \dfrac{U_1(s)}{V(s)}=\dfrac{\dfrac{R_1}{R_1C_1s+1}}{\dfrac{R_1}{R_1C_1s+1}+R_2+\dfrac{1}{C_2s}} \end{cases}$$

联立后得到

$$\begin{aligned} &R_1R_2C_1C_2s^2U_3(s)+(R_1C_1+R_2C_2+R_1C_2)sU_3(s)+U_3(s) \\ &\quad =R_1R_2C_1C_2s^2V(s)+(R_1C_1+R_2C_2)sV(s)+V(s) \end{aligned}$$

对上式两边求拉普拉斯逆变换得

$$\begin{aligned} &R_1R_2C_1C_2\frac{\mathrm{d}^2u_3}{\mathrm{d}t^2}+(R_1C_1+R_2C_2+R_1C_2)\frac{\mathrm{d}u_3}{\mathrm{d}t}+u_3 \\ &\quad =R_1R_2C_1C_2\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}t^2}+(R_1C_1+R_2C_2)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+v \end{aligned}$$

(c) 将电阻、电容数值代入，得到

$$0.25\frac{\mathrm{d}^2u_2}{\mathrm{d}t^2}+1.5\frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t}+u_2=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+v$$

3、（书上 2.4）

图示为一个两弹簧和两重块的运动系统． m_1 和 m_2 分别是两个重块的质量． x_1 和 x_2 分别是两个重块的位移． r_1 和 r_2 分别是两个弹簧的弹性系数（应力与变形幅度之比）. 弹簧本身的质量很小，可以略去不计． $u(t)$ 是外加力． 以 $x_2(t)$ 为输出量写出系统的运动方程．

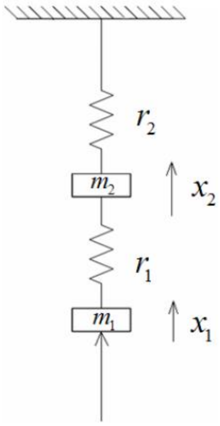

图2.E.4 双弹簧运动系统

解： 由牛顿第二定律知：

$$对m_1：u-(x_1-x_2)r_1-m_1\mathrm{g}=m_1\frac{\mathrm{d}^2x_1}{\mathrm{d}t^2}$$

$$对m_2：(x_1-x_2)r_1-m_2\mathrm{g}-x_2r_2=m_2\frac{\mathrm{d}^2x_2}{\mathrm{d}t^2}$$

联立以上两式得

$$m_2\frac{\mathrm{d}^4x_2}{\mathrm{d}t^4}+\left(r_1+r_2+\frac{m_2}{m_1}r_1\right)\frac{\mathrm{d}^2x_2}{\mathrm{d}t^2}+\frac{r_1r_2}{m_1}x_2+(\frac{m_2}{m_1}+1)r_1\mathrm{g}=\frac{r_1}{m_1}u$$

4、（书上 2.5 a）图2.E.5是一个简单随动系统的示意图。其数据如下：电位器的比例系数为 0.1 V / rad，放大器的电压放大倍数为 100，电动机电枢电路的电感为 $L=0.5$ H，电阻为 $R=10\ \Omega$，电动机转子连同转动部分的机电时间常数T_m为 0.4 s，电动机的比例系数k_d为 0.2 V / (rad•s^{-1})，减速器的减速比为 20 : 1，负载力矩为 M_L。

(a) 列写关于 $\varphi(t)$ 的微分方程；

(b) 列写关于电动机力矩 $M(t)$ 的微分方程；

(c) 说明这个数学模型中忽略了哪些次要因素；

(d) 如果 $M_L=0$，且假设在时刻 $t=0$ 有 $\psi=0$，$\varphi=0$，仔细考虑以下：这时系统是否有可能运动？为什么？

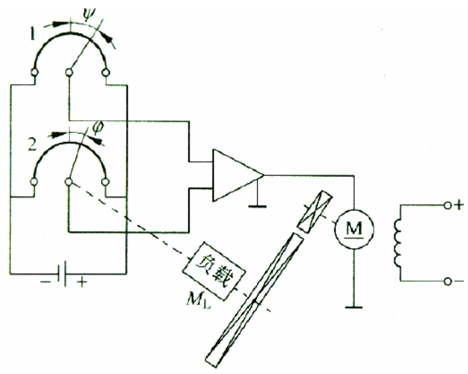

图2.E.5 简单随动系统示意图

解：

(a) 电位器组方程：$e = k_1(\psi - \varphi)$ （1）

$$k_1 = 0.1$$

放大器组方程：$u = k_2 e$ （2）

$$k_2 = 100$$

电动机组方程：

$$T_a T_m \frac{\mathrm{d}^2\omega}{\mathrm{d}t^2} + T_m \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} + \omega = \frac{u}{k_d} - \frac{R_a}{k_d^2}\left(T_a \frac{\mathrm{d}M'_{\mathrm{L}}}{\mathrm{d}t} + M'_{\mathrm{L}}\right) \qquad (3)$$

其中：$T_a = \dfrac{L_a}{R_a} = 0.05$，$k_d = 0.2$，$T_m = 0.4$，$k_3 = 20$。

传动机构：$\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\omega}{k_3}$ （4）

利用 $\omega = k_3\dot{\varphi}$ 和 $u = k_1 k_2 \psi - k_1 k_2 \varphi$ 代入（3），可得

$$T_a T_m k_3 \frac{\mathrm{d}^3\varphi}{\mathrm{d}t^3} + T_m k_3 \frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} + k_3 \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} + \frac{k_1 k_2}{k_d}\varphi = \frac{k_1 k_2}{k_d}\psi - \frac{R_a}{k_d^2}\left(T_a \frac{\mathrm{d}M_{\mathrm{L}}}{\mathrm{d}t} + M_{\mathrm{L}}\right)$$

即

$$0.4\frac{\mathrm{d}^3\varphi}{\mathrm{d}t^3} + 8\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} + 20\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} + 50\varphi = 50\psi - 12.5\frac{\mathrm{d}M_{\mathrm{L}}}{\mathrm{d}t} - 250M_{\mathrm{L}}$$

(b)、(c)、(d)、(e):（略）