数值分析与算法 课程例题

第七章　线性方程组的数值解

（15 分）Q：$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} D & & & \\ & D & & \\ & & \ddots & \\ & & & D \end{bmatrix}$，其中$D=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$。试设计迭代法来求解$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{f}$，其中$\boldsymbol{f}=(1,1,\dots,1)^T$。要求 $\boldsymbol{x}$ 的计算结果误差（每个分量）小于10^{-10}。注意：应考虑在计算过程中有存储误差（即舍入误差）。

A：

设$\boldsymbol{A}$的形式中共有n个D

采用基本迭代法，将$\boldsymbol{A}$分解为$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{M}-\boldsymbol{N}$，

$$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix} M_0 & & & \\ & M_0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & M_0 \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{N}=\begin{bmatrix} N_0 & & & \\ & N_0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & N_0 \end{bmatrix}$$

其中$M_0=\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ 2 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$，$N_0=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$，$M_0^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 0 \\ -\frac{8}{9} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$

于是可得，$x^{(k+1)}=Bx^{(k)}+g$，

$$B=M^{-1}N=\begin{bmatrix} B_0 & & & \\ & B_0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_0 \end{bmatrix},\quad g=M^{-1}f=\begin{bmatrix} g_0 \\ g_0 \\ \vdots \\ g_0 \end{bmatrix}$$

其中$B_0=M_0^{-1}N_0=\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{4}{9} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$，$g_0=[\begin{matrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{9} \end{matrix}]$

……（公式与计算 3 分）

由于$\rho(\boldsymbol{B})=\frac{1}{3}$，迭代法收敛，此时$\|B\|_{\infty}=\frac{7}{9}<1$

……（计算 2 分）

误差分析：

记x的准确值x^{*}，$\varepsilon^{(k)}$为第 k 步迭代结束后的误差向量，即$\varepsilon^{(k)}=x^{*}-x^{(k)}$

在迭代法中，方法误差产生于初始迭代向量$x^{(0)}$，由雅可比迭代法的形式$x^{(k+1)}=Bx^{(k)}+g$ 可知

$$\Delta^{(k+1)}=B\Delta^{(k)}$$

故可得

$$\left\|\Delta^{(k)}\right\|=\|B\|^{k}\Delta^{(0)}$$

……（公式 2 分）

舍入误差则产生于 x 的每一个分量，记存储精确到小数点后第 m 位，则每一次迭代引入的舍入误差向量为

$$\delta_0=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\times 10^{-m}\\ \vdots\\ \frac{1}{2}\times 10^{-m}\end{bmatrix}$$

于是累积舍入误差满足

$$\begin{aligned}\left\|\delta^{(k+1)}\right\| &\le \|B\|\left\|\delta^{(k)}\right\|+\|\delta_0\|\le\cdots\\ &\le \|B\|^{k+1}\left\|\delta^{(0)}\right\|+(1+\|B\|+\cdots+\|B\|^{k})\|\delta_0\|=\frac{1-\|B\|^{k+1}}{1-\|B\|}\|\delta_0\|\end{aligned}$$

……（公式 2 分）

故总体误差满足

$$\left\|\varepsilon^{(k)}\right\| \leq \left\|\Delta^{(k)}\right\| + \left\|\delta^{(k)}\right\| \leq \|B\|^k \Delta^{(0)} + \frac{1-\|B\|^{k+1}}{1-\|B\|}\|\delta_0\|$$

根据迭代法的事后估计法，

$$\left\|\varepsilon^{(k)}\right\| \leq \|B\|^k \frac{\left\|x^{(1)} - x^{(0)}\right\|}{1-\|B\|} + \frac{1-\|B\|^k}{1-\|B\|}\|\delta_0\|$$

……（公式 2 分）

根据要求，$\boldsymbol{x}$ 的计算结果误差（每个分量）小于10^{-10}，将两种误差对半分，即

$$\left\|\Delta^{(k)}\right\| \leq \frac{1}{2} \times 10^{-10}, \left\|\delta^{(k)}\right\| \leq \frac{1}{2} \times 10^{-10}$$

选取$x^{(0)} = [0,0,\dots,0]^T$，则$x^{(1)} = g$，$\left\|x^{(1)} - x^{(0)}\right\|_\infty = \frac{2}{3}$

根据$\|B\|_\infty = \frac{7}{9}$，$\|\delta_0\|_\infty = \frac{1}{2} \times 10^{-m}$

……（计算 2 分）

可解得$k \geq 98.75$。选择$k = 99$，解得$m \geq 10.6$。

因此选取$x^{(0)} = [0,0,\dots,0]^T$，$m = 11$，迭代99次及以上可达到所求精度。

……（结果 2 分）