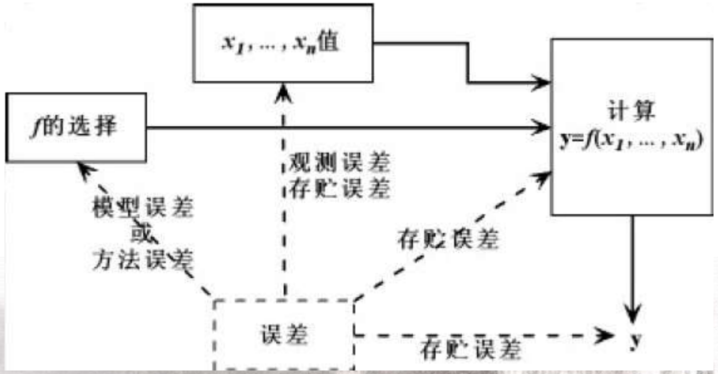
总结及第八章简介

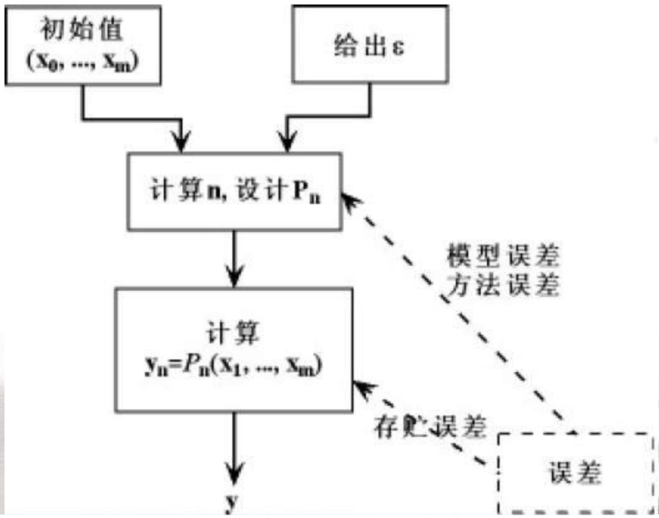
A类型

- 对应：插值，逼近，数值积分，数值微分，线性方程组直接法等



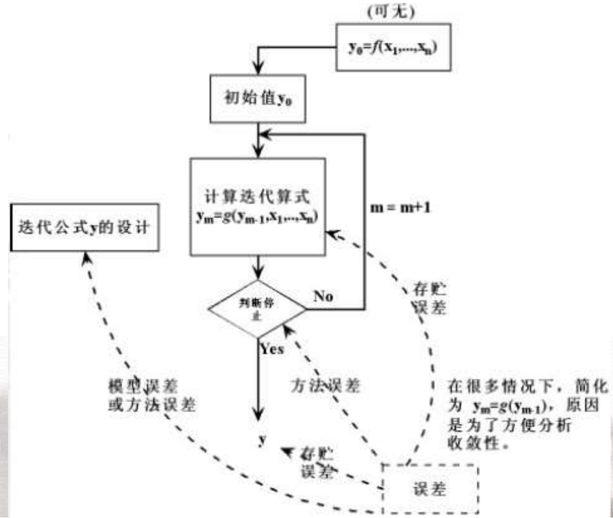
B类型

- 对应：插值，逼近，数值积分，常微分方程数值解（B+C）等（与A相比更实用）



C类型

- 对应：数值积分加速法，常微分方程（B+C），方程求根，线性方程组迭代法



矩阵特征值求解

一、 特征值和特征向量（定义，性质）

设矩阵$A \in R^{n\times n}$，求$\lambda \in C, x \in R^n$，使得

$$Ax = \lambda x$$

等价于求A的特征方程$\rho(\lambda) = \det(\lambda I - A)$的根

性质：

- λ^k为A^k的特征值
- λ^{-1}为A^{-1}的特征值
- 若A、B为相似矩阵，即存在非奇异矩阵P使得$B = P^{-1}AP$，则A、B的特征值相同；若y为B的特征向量，则Py为A的特征向量

二、 幂法（原理、步骤）

设矩阵$A \in R^{n\times n}$ 有n个线性无关的特征向量$x_1, \cdots x_n$，对应特征值为$\lambda_1, \cdots \lambda_n$，已知A的主特征值$\lambda_1$为实根且满足$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_n|$

任取一非零向量$v_0 = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n$，假设$\alpha_1 \neq 0$，构造$v_k = Av_{k-1} = A^k v_0$

$$v_k = \alpha_1 \lambda_1^k x_1 + \cdots + \alpha_n \lambda_n^k x_n$$

$$= \lambda_1^k \left(\alpha_1 x_1 + \underbrace{\alpha_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k x_2 + \cdots + \alpha_n \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^k x_n}_{\epsilon_k} \right)$$

$$\frac{(v_{k+1})_i}{(v_k)_i} = \frac{\lambda_1^{k+1}(\alpha_1 x_1 + \epsilon_{k+1})_i}{\lambda_1^k(\alpha_1 x_1 + \epsilon_k)_i} \xrightarrow{k\to\infty} \lambda_1$$

- 思考1：幂法的收敛速度由什么决定？如何加速？
- 思考2：$\alpha_1 = 0$？如何判定$\alpha_1 \neq 0$？
- 思考3：实际计算时需要归一化
- 思考4：若A的主特征值为实数的重根？

三、 反幂法（原理、步骤）

设矩阵$A \in R^{n\times n}$ 有n个特征向量$x_1, \cdots x_n$，对应特征值为$\lambda_1, \cdots \lambda_n$, 满足

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_n| > 0$$

则A^{-1}的特征值为

$$\left|\frac{1}{\lambda_n}\right| \geq \left|\frac{1}{\lambda_{n-1}}\right| \geq \cdots \geq \left|\frac{1}{\lambda_1}\right|$$

对应的特征向量为$x_n, \cdots x_1$

四、 QR法（原理、步骤）

设非奇异矩阵$A \in R^{n \times n}$，则存在正交矩阵Q及上三角矩阵R，使得A=QR，且当R对角线元素为正时，分解唯一。

令$B = RQ = Q^T AQ$，则A、B为相似矩阵，特征值相同

$$\begin{cases} A_1 = A \\ A_k = Q_k R_k \quad (QR\text{分解}) \\ A_{k+1} = R_k Q_k = Q_K^T A_k Q_k \end{cases}$$

设$A \in R^{n \times n}$，其特征值满足$|\lambda_1| > |\lambda_2| > \cdots > |\lambda_n| > 0$，其特征向量$x_1, \cdots x_n$所构成的矩阵$X = [x_1, \cdots, x_n]$满足$X^{-1} = LU$（$X^{-1}$有LU分解），则$A_k$本质上收敛于上三角矩阵，且

$$\lim_{k \to \infty} a_{ii}^{(k)} = \lambda_i, i = 1, \cdots, n$$

- 思考：比较以上几种方法的适用性及优缺点；如何进行误差分析？