自动控制理论

（二）现代控制理论

自动化系 尚超
中央主楼418A 010-62782459
c-shang@tsinghua.edu.cn

模块2　线性连续定常系统状态方程的解

TD2-1-1 齐次方程的解

- 线性定常系统的状态方程为:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u},\ t \ge t_0$$
$$\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0$$

其中，$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^r$, $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{n\times r}$ 。这里讨论上述微分方程的求解方法。

- 一、齐次方程的解：首先考虑简单的情形，即输入 $\boldsymbol{u}$ 为零的齐次方程

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$$

的解。此时系统处于由初始状态引起的自由运动状态，所以齐次方程式的解也称自由解。

TD2−1−1 齐次方程的解

- 有如下命题:

  若初始时刻 t_0 时的状态给定为 $\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0$，则微分方程

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$$

存在唯一解:

$$\boldsymbol{x}(t)=e^{\boldsymbol{A}(t-t_0)}\boldsymbol{x}_0,\quad t\geq t_0$$

- 若初始时刻从 $t=0$ 开始，即 $\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0$，则方程 $\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的解为:

$$\boldsymbol{x}(t)=e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{x}_0,\quad t\geq 0$$

  其中，$e^{\boldsymbol{A}t}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 或 $e^{\boldsymbol{A}(t-t_0)}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 称为矩阵指数，表达式为

$$e^{\boldsymbol{A}t}\triangleq\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}t+\frac{1}{2!}\boldsymbol{A}^2t^2+\cdots+\frac{1}{k!}\boldsymbol{A}^kt^k+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\boldsymbol{A}^kt^k}{k!}$$

TD2-1-1 齐次方程的解

- 证明思路1：直接法
- 和通常的标量微分方程类似，先假定 $\dot{x} = Ax$ 的解为时间 t 的向量幂级数形式，即

$$x(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \cdots + b_k t^k + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k, \quad t \geq 0$$

将上式代入 $\dot{x} = Ax$ 可得：
$$\begin{aligned} & b_1 + 2b_2 t + 3b_3 t^2 + \cdots + k b_k t^{k-1} + \cdots \\ & = A\left(b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \cdots + b_k t^k + \cdots\right) \qquad t \geq 0 \end{aligned}$$

因为上式对 $t \geq 0$ 均成立，因此等式两边 t 的同次幂项的系数应相等，可得

$$\begin{cases} b_1 = Ab_0 \\ b_2 = \dfrac{1}{2} Ab_1 = \dfrac{1}{2!} A^2 b_0 \\ \quad\vdots \\ b_k = \dfrac{1}{k} Ab_{k-1} = \dfrac{1}{k!} A^k b_0 \end{cases}$$

∴ 上述命题得证。令 $t = 0$，可得：

$$b_0 = x(0) = b_0$$

代入可得：

TD2-1-1 齐次方程的解

$$\boldsymbol{x}(t)=\left(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}t+\frac{1}{2!}\boldsymbol{A}^2t^2+\cdots+\frac{1}{k!}\boldsymbol{A}^kt^k+\cdots\right)\boldsymbol{x}_0 \qquad (*)$$

$$=\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\boldsymbol{A}^kt^k\right)\boldsymbol{x}_0$$

- 仿照标量指数的定义

$$e^{at}\triangleq 1+at+\frac{1}{2!}a^2t^2+\cdots+\frac{1}{k!}a^kt^k+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^kt^k}{k!}$$

可定义矩阵指数为：

$$e^{\boldsymbol{A}t}\triangleq \boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}t+\frac{1}{2!}\boldsymbol{A}^2t^2+\cdots+\frac{1}{k!}\boldsymbol{A}^kt^k+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\boldsymbol{A}^kt^k}{k!}$$

因此，(*)式可以表示为 $\boxed{\boldsymbol{x}(t)=e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{x}_0}$ 。

- 若用 $(t - t_0)$ 代替 t，即初始时刻为 t_0，同样可证明 $\boxed{\boldsymbol{x}(t)=e^{\boldsymbol{A}(t-t_0)}\boldsymbol{x}_0,\ t\ge t_0}$ 。

TD2-1-1 齐次方程的解

- 证明思路2：Laplace 变换
- 对 $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 两边进行 Laplace 变换，可得

$$s \cdot \boldsymbol{x}(s) - \boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x}(s)$$

其中 $x(s) = L[x(t)]$ 为状态向量 $x(t)$ 的 Laplace 变换，经整理有：

$$(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x}(s) = \boldsymbol{x}_0$$

两边同乘 $(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}$，从而有：

$$\boldsymbol{x}(s) = (s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{x}_0$$

将上式作 Laplace 反变换，即得齐次方程的解：

$$\boldsymbol{x}(t) = L^{-1}\left[(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{x}_0\right]$$

$$= L^{-1}\left[(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\right]\boldsymbol{x}_0 \qquad \text{（拉氏反变换的线性性质）}$$

TD2-1-1 齐次方程的解

- 注意到：$(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\underbrace{\left(\frac{\boldsymbol{I}}{s}+\frac{\boldsymbol{A}}{s^2}+\frac{\boldsymbol{A}^2}{s^3}+\cdots+\frac{\boldsymbol{A}^k}{s^{k+1}}+\cdots\right)}_{\doteq(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}}=\boldsymbol{I}$

- 代入到 $\boldsymbol{x}(t)=L^{-1}\left[(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\right]\boldsymbol{x}_0$ 即得：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}(t)&=L^{-1}\left(\frac{\boldsymbol{I}}{s}+\frac{\boldsymbol{A}}{s^2}+\frac{\boldsymbol{A}^2}{s^3}+\cdots+\frac{\boldsymbol{A}^k}{s^{k+1}}+\cdots\right)\boldsymbol{x}_0\\&=\left(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}t+\frac{\boldsymbol{A}^2t^2}{2!}+\cdots+\frac{\boldsymbol{A}^kt^k}{k!}+\cdots\right)\boldsymbol{x}_0\\&=e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{x}_0\end{aligned}$$

$\therefore$ 得证。

TD2-1-1 齐次方程的解

- 线性定常系统的渐近稳定性及判据
- 状态方程为:

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}} &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u},\ t \ge t_0 \\ \boldsymbol{x}(t_0) &= \boldsymbol{x}_0 \end{aligned} \qquad (*)$$

其中，$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^r$, $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{n\times r}$。当输入信号 $\boldsymbol{u}$ 为零时，若系统对任意初始状态 $\boldsymbol{x}_0$ 的自由解

$$\boldsymbol{x}(t) = e^{\boldsymbol{A}(t-t_0)}\boldsymbol{x}_0, \qquad t \ge t_0$$

总满足 $\lim_{t\to\infty} \boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{0}$ ，那么则称线性系统 (*) 是渐近稳定的。

- 判据：系统(*)是渐近稳定的，当且仅当 $\boldsymbol{A}$ 的特征值均具有负实部。
- 分析：可以根据矩阵指数的性质证明。

模块2　线性连续定常系统状态方程的解

TD2-1-1　齐次方程的解（课本2.7）

TD2-1-2　非齐次方程的解（课本2.7）

TD2-2-1　状态转移矩阵的定义性质（课本2.8）

TD2-2-2　状态转移矩阵的性质（课本2.8）

TD2-2-3　状态转移矩阵的计算方法（课本2.7）

TD2-1-2 非齐次方程的解

- 这里我们讨论线性定常系统在控制作用 $\boldsymbol{u}(t)$ 下的强制运动。
- 考虑一般的非齐次方程

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u} \qquad (*)$$

在初始时刻 t_0 时，初始状态为 $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0$，则其解为

$$\boldsymbol{x}(t) = e^{\boldsymbol{A}(t-t_0)}\boldsymbol{x}_0 + \int_{t_0}^{t} e^{\boldsymbol{A}(t-\tau)}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau, \qquad (**)$$

初始时刻 $t_0 = 0$ 时的状态为 $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}(0)$，其解为:

$$\boldsymbol{x}(t) = e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{x}(0) + \int_{0}^{t} e^{\boldsymbol{A}(t-\tau)}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau, \qquad (***)$$

显然，线性系统(*)式的解由两部分组成:

- (**)和(***)的第一项表示由初始状态引起的自由运动
- (**)和(***)的第二项表示由控制作用引起的强制运动

TD2-1-2 非齐次方程的解

- 证明：将(*)写为： $\dot{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t)$
- 上式两边同时左乘 $e^{-\boldsymbol{A}t}$ 可得：$e^{-\boldsymbol{A}t}(\dot{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}) = e^{-\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t)$
- 即： $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[e^{-\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{x}(t)\right] = e^{-\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t) \qquad (****)$$
- 对 t 在 $t \sim t_0$ 之间进行积分，可得： $e^{-\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{x}(t)\Big|_{t_0}^{t} = \int_{t_0}^{t} e^{-\boldsymbol{A}\tau}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau$

即： $$e^{-\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{x}(t) = e^{-\boldsymbol{A}t_0}\boldsymbol{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{-\boldsymbol{A}\tau}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau$$

上式两边同乘 $e^{\boldsymbol{A}t}$ 可得：

$$\boldsymbol{x}(t) = e^{\boldsymbol{A}(t-t_0)}\boldsymbol{x}_0 + \int_{t_0}^{t} e^{\boldsymbol{A}(t-\tau)}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau,$$

(**)式得证！

TD2-1-2 非齐次方程的解

- 重写(****)式：$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[e^{-At}\boldsymbol{x}(t)\right]=e^{-At}\boldsymbol{Bu}(t)$
- 对 τ 在 $0\sim t$ 之间进行积分，可得：

$$\boldsymbol{x}(t)=e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{x}(0)+\int_0^t e^{\boldsymbol{A}(t-\tau)}\boldsymbol{Bu}(\tau)\mathrm{d}\tau$$

- 定义状态转移矩阵：$\boldsymbol{\phi}(t)=e^{\boldsymbol{A}t}$
- (**)式和(***)式可分别写成如下形式：

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\phi}(t-t_0)\boldsymbol{x}(t_0)+\int_{t_0}^t \boldsymbol{\phi}(t-\boldsymbol{\tau})\boldsymbol{Bu}(\boldsymbol{\tau})\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}$$

以及

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\phi}(t)\boldsymbol{x}(0)+\int_0^t \boldsymbol{\phi}(t-\boldsymbol{\tau})\boldsymbol{Bu}(\boldsymbol{\tau})\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}$$

TD2-1-2 非齐次方程的解

- 在特殊的控制信号（如脉冲函数、阶跃函数或斜坡函数）的作用下，非齐次方程的解可简化为：
- ① $\boldsymbol{u}(t)$ 为脉冲函数时，$\boldsymbol{u}(t)=\boldsymbol{k}\delta(t),\ \boldsymbol{x}(0^-)=\boldsymbol{x}(0)$ ，有：

$$\boldsymbol{x}(t)=e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{x}(0)+e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{B}\boldsymbol{k}$$

  其中 $\boldsymbol{k}$ 为常数向量，与 $\boldsymbol{u}(t)$ 具有相同的维数。

- ② $\boldsymbol{u}(t)$ 为阶跃函数时，$\boldsymbol{u}(t)=\boldsymbol{k}\cdot 1(t),\ \boldsymbol{x}(0^-)=\boldsymbol{x}(0)$

$$\boldsymbol{x}(t)=e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{x}(0)+\boldsymbol{A}^{-1}\left(e^{\boldsymbol{A}t}-\boldsymbol{I}\right)\boldsymbol{B}\boldsymbol{k}$$

- ③ $\boldsymbol{u}(t)$ 为斜坡函数时，$\boldsymbol{u}(t)=\boldsymbol{k}\cdot t\cdot 1(t),\ \boldsymbol{x}(0^-)=\boldsymbol{x}(0)$

$$\boldsymbol{x}(t)=e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{x}(0)+\left[\boldsymbol{A}^{-2}\left(e^{\boldsymbol{A}t}-\boldsymbol{I}\right)-\boldsymbol{A}^{-1}t\right]\boldsymbol{B}\boldsymbol{k}$$

TD2-1-2 非齐次方程的解

- 与齐次方程类似，非齐次方程也可利用 Laplace 变换求解
- 对非齐次方程 $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}$ 两边进行 Laplace 变换

$$s\boldsymbol{x}(s) - \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(s) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(s)$$

- 化简为：

$$\left(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}\right)\boldsymbol{x}(s) = \boldsymbol{x}(0) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(s)$$

- 所以有：$\boldsymbol{x}(s) = \left(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}\right)^{-1}\left[\boldsymbol{x}(0) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(s)\right]$
- 进一步进行 Laplace 反变换，可得：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}(t) &= L^{-1}\left\{\left(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}\right)^{-1}\boldsymbol{x}(0)\right\} + \boxed{L^{-1}\left\{\left(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}\right)^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(s)\right\}} \\ &= \phi(t)\boldsymbol{x}(0) + \boxed{\int_0^t \phi(t-\tau)\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau}\end{aligned}$$

频域相乘
时域卷积

TD2-1-2 非齐次方程的解

- 例：已知系统的状态方程为：

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} -12 & 2/3 \\ -36 & -1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 1/3 \\ 1 \end{bmatrix} u,\ \ u(t) = 1(t)$$ 为单位阶跃函数

初始条件为 $\boldsymbol{x}(0) = [2,\ 1]^{\mathrm{T}}$，求此非齐次状态方程的解 $\boldsymbol{x}(t)$。

- 解：

$$(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1} = \begin{bmatrix} s+12 & -2/3 \\ 36 & s+1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{s+1}{(s+4)(s+9)} & \dfrac{2/3}{(s+4)(s+9)} \\ \dfrac{-36}{(s+4)(s+9)} & \dfrac{s+12}{(s+4)(s+9)} \end{bmatrix}$$

此外，

$$\boldsymbol{x}(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix},\ u(s) = \frac{1}{s},\ \boldsymbol{b}u(s) = \begin{bmatrix} 1/3s \\ 1/s \end{bmatrix},\ \boldsymbol{x}(0) + \boldsymbol{b}u(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{6s+1}{3s} \\ \dfrac{s+1}{s} \end{bmatrix}$$

TD2-1-2 非齐次方程的解

- 从而有：

$$\boldsymbol{x}(s)=(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\left[\boldsymbol{x}(0)+\boldsymbol{b}u(s)\right]$$

$$=\begin{bmatrix}\dfrac{s+1}{(s+4)(s+9)} & \dfrac{2/3}{(s+4)(s+9)}\\ \dfrac{-36}{(s+4)(s+9)} & \dfrac{s+12}{(s+4)(s+9)}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dfrac{6s+1}{3s}\\ \dfrac{s+1}{s}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{2s^2+3s+1}{s(s+4)(s+9)}\\ \dfrac{s-59}{(s+4)(s+9)}\end{bmatrix}$$

- 部分分式分解：

$$\boldsymbol{x}(s)=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{36s}-\dfrac{21/20}{s+4}+\dfrac{136/45}{s+9}\\ -\dfrac{63/5}{s+4}+\dfrac{68/5}{s+9}\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{Laplace 反变换}}\boldsymbol{x}(t)=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{36}-\dfrac{21}{20}e^{-4t}+\dfrac{136}{45}e^{-9t}\\ -\dfrac{63}{5}e^{-4t}+\dfrac{68}{5}e^{-9t}\end{bmatrix}$$

模块2　线性连续定常系统状态方程的解

TD2-1-1　齐次方程的解（课本2.7）

TD2-1-2　非齐次方程的解（课本2.7）

TD2-2-1　状态转移矩阵的定义性质（课本2.8）

TD2-2-2　状态转移矩阵的性质（课本2.8）

TD2-2-3　状态转移矩阵的计算方法（课本2.7）

TD2-2-1 状态转移矩阵的定义

- 齐次方程 $\dot{x} = \boldsymbol{A}x$ 的自由解为:

$$\boldsymbol{x}(t) = e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{x}(0) \quad \text{或} \quad \boldsymbol{x}(t) = e^{\boldsymbol{A}(t-t_0)}\boldsymbol{x}_0$$

上式的物理意义是系统在 $t \geq 0$ 或 $t \geq t_0$ 的任意瞬时的状态 $\boldsymbol{x}(t)$，仅仅是初始状态向量 x_0 的一种变换关系，变换矩阵为 e^{At} 或 $e^{\boldsymbol{A}(t-t_0)}$。指数矩阵 e^{At} 或 $e^{\boldsymbol{A}(t-t_0)}$ 是一个大小为 $n \times n$ 的函数矩阵。这意味着，它使得状态向量随着时间的推移在不断地作坐标变换，即不断地在状态空间中作转移。

- 因此指数矩阵 e^{At} 或 $e^{\boldsymbol{A}(t-t_0)}$ 也称为状态转移矩阵，通常表示为:

$$\boldsymbol{\phi}(t) = e^{\boldsymbol{A}t} \quad \text{或} \quad \boldsymbol{\phi}(t-t_0) = e^{\boldsymbol{A}(t-t_0)}$$

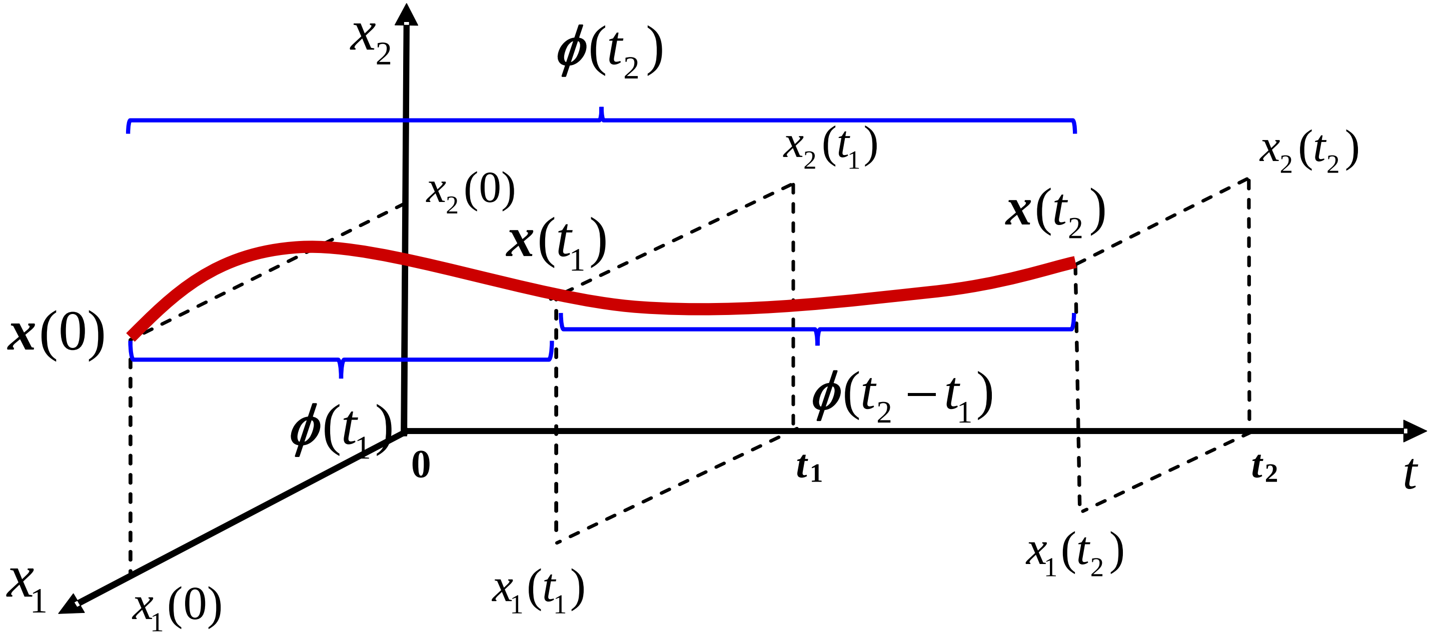
其中，$\boldsymbol{\phi}(t)$ 表示从 $\boldsymbol{x}(0)$ 到 $\boldsymbol{x}(t)$ 的状态转移矩阵，$\boldsymbol{\phi}(t-t_0)$ 表示从 $\boldsymbol{x}(t_0)$ 到 $\boldsymbol{x}(t)$ 的状态转移矩阵.

TD2-2-1 状态转移矩阵的定义

- 因此，齐次方程 $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的解可以表示为：

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{\phi}(t)\boldsymbol{x}_0 \quad 或 \quad \boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{\phi}(t-t_0)\boldsymbol{x}_0$$

可以看出，系统作自由运动时，它的运动形态将由状态转移矩阵唯一决定，包含了系统自由运动的全部信息。其几何意义表示如下：

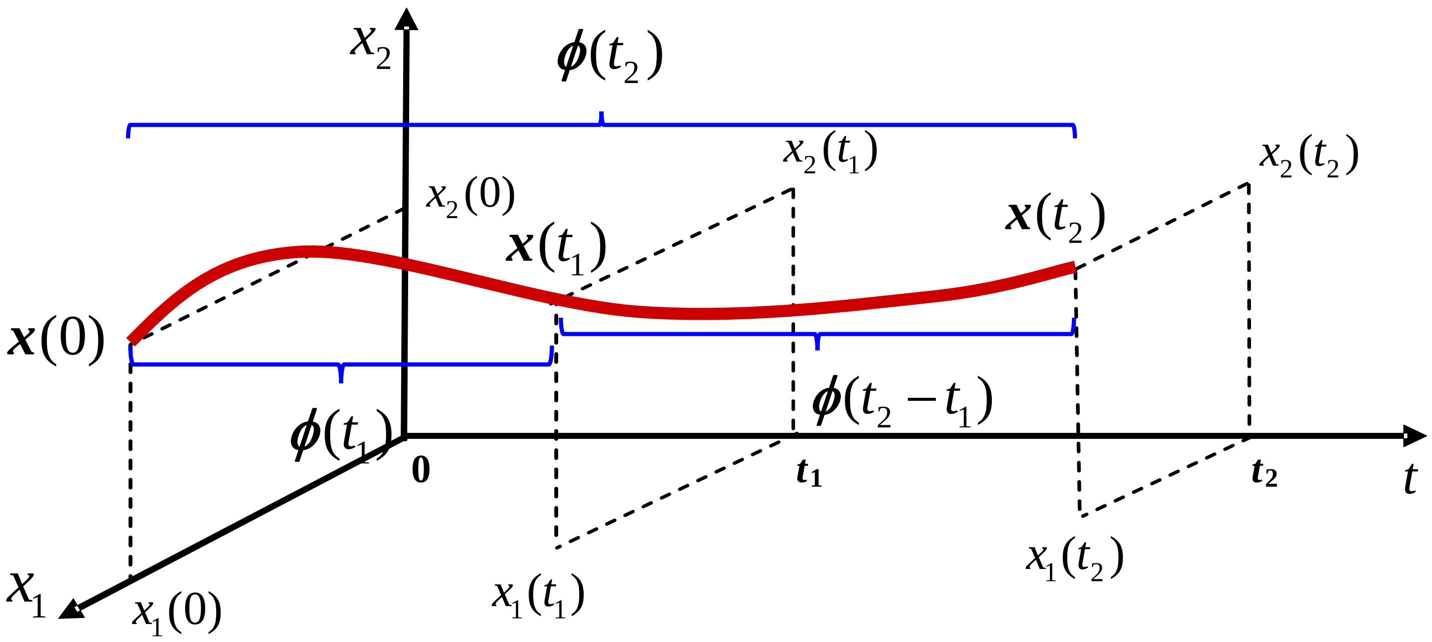


TD2-2-1 状态转移矩阵的定义

- 图中设 $t=0$ 时，状态的初态为 $\boldsymbol{x}(0)=\begin{bmatrix}x_1(0) & x_2(0)\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ ，若已知状态转移矩阵 $\boldsymbol{\phi}(t_1)$，则 $t=t_1$ 的状态为：

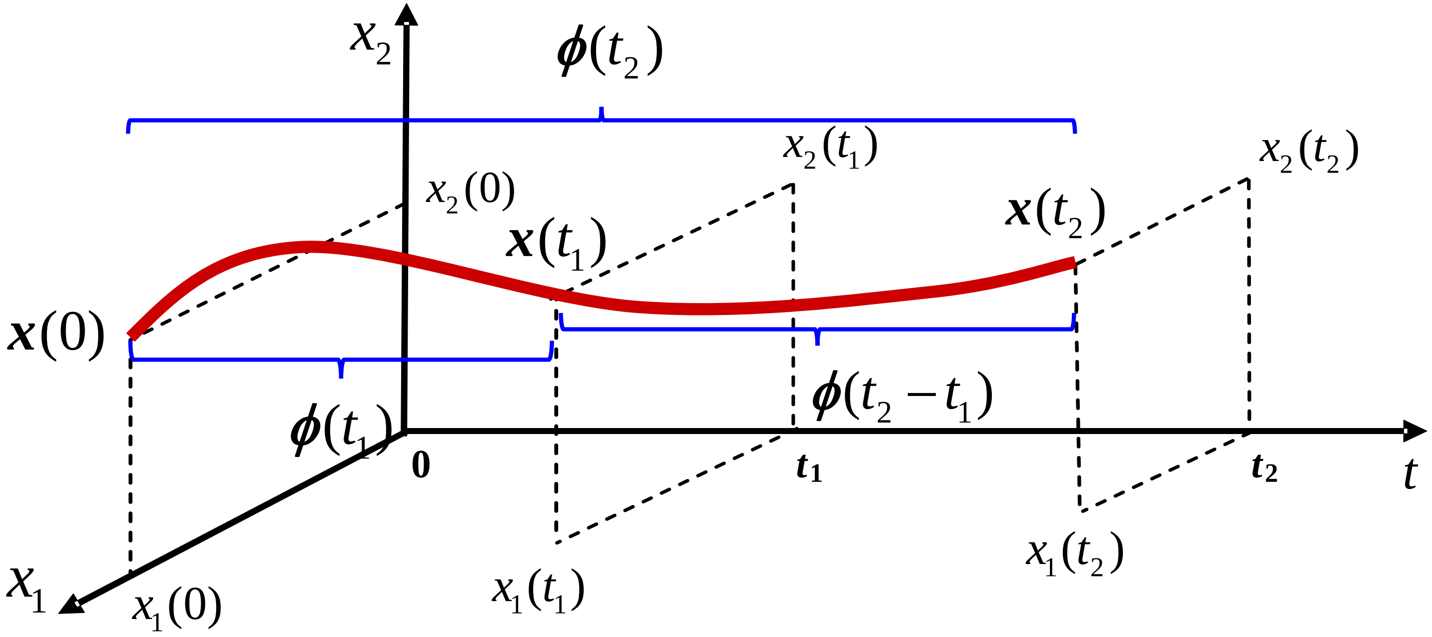
$$\boldsymbol{x}(t_1)=\begin{bmatrix}x_1(t_1) & x_2(t_1)\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{\phi}(t_1)\boldsymbol{x}(0)$$

若已知状态转移矩阵 $\boldsymbol{\phi}(t_2)$，则 $t=t_2$ 的状态为：$\boldsymbol{x}(t_2)=\begin{bmatrix}x_1(t_2) & x_2(t_2)\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{\phi}(t_2)\boldsymbol{x}(0)$



TD2-2-1 状态转移矩阵的定义

- 表明状态从 $\boldsymbol{x}(0)$ 开始，随着时间的推移，它将按 $\boldsymbol{\phi}(t_1)$ 或 $\boldsymbol{\phi}(t_2)$ 作自由运动，最后状态转移到 $\boldsymbol{x}(t_1)$ 或 $\boldsymbol{x}(t_2)$，相应地在状态空间中描绘出一条如下图所示的运动轨线。
- 若 t_1 为初始时刻，$\boldsymbol{x}(t_1)$ 为初始状态，则 $t = t_2$ 的状态为：$\boldsymbol{x}(t_2) = \boldsymbol{\phi}(t_2 - t_1) \cdot \boldsymbol{x}(t_1)$



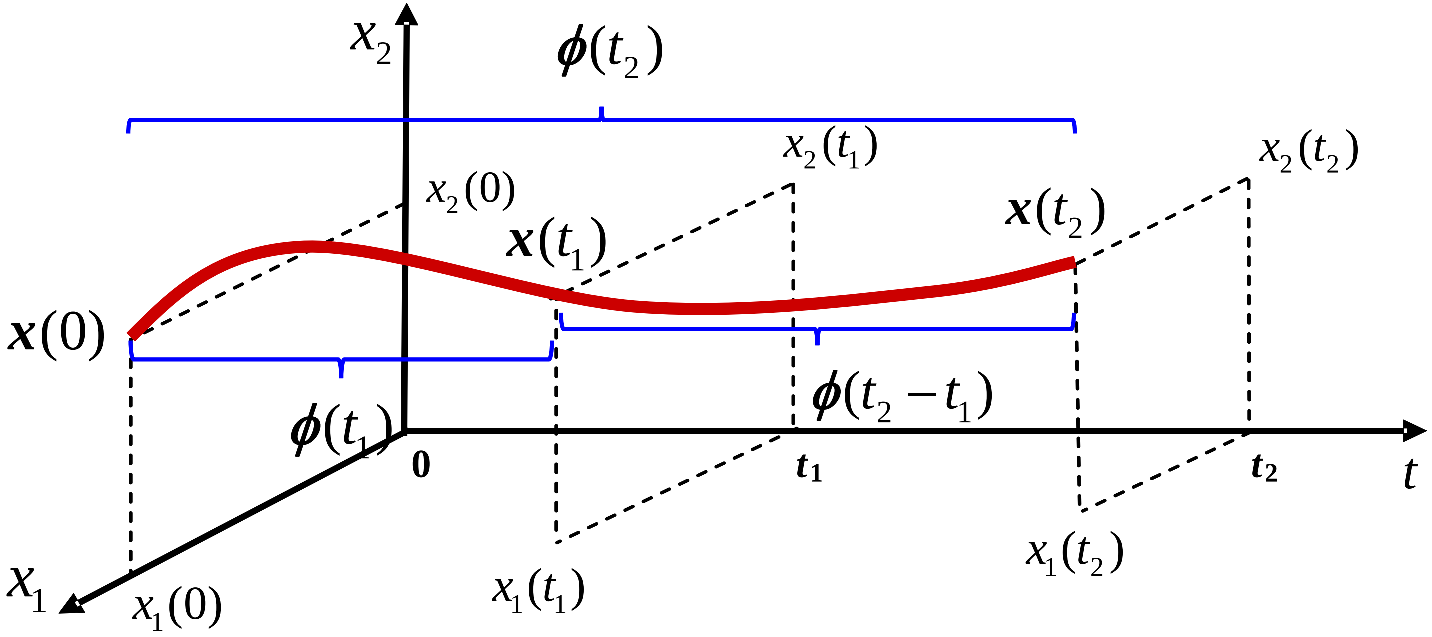
TD2-2-1 状态转移矩阵的定义

$$\boldsymbol{x}(t_1)=\begin{bmatrix} x_1(t_1) & x_2(t_1) \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{\phi}(t_1)\boldsymbol{x}(0)$$

$$\boldsymbol{x}(t_2)=\begin{bmatrix} x_1(t_2) & x_2(t_2) \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{\phi}(t_2-t_1)\boldsymbol{x}(t_1)$$

- 将 $\boldsymbol{x}(t_1)$ 代入上式，则得 $\boldsymbol{x}(t_2)=\boldsymbol{\phi}(t_2-t_1)\cdot\boldsymbol{\phi}(t_1)\cdot\boldsymbol{x}(0)$

  表示从 $\boldsymbol{x}(0)$ 转移到 $\boldsymbol{x}(t_1)$，再由 $\boldsymbol{x}(t_1)$ 转移到 $\boldsymbol{x}(t_2)$ 的运动轨线。



模块2　线性连续定常系统状态方程的解

TD2-1-1　齐次方程的解（课本2.7）

TD2-1-2　非齐次方程的解（课本2.7）

TD2-2-1　状态转移矩阵的定义性质（课本2.8）

TD2-2-2　状态转移矩阵的性质（课本2.8）

TD2-2-3　状态转移矩阵的计算方法（课本2.7）

TD2-2-2 状态转移矩阵的性质

- 注意到:

$$\phi(t_2-t_1)\phi(t_1)=\phi(t_2) \text{ 或 } e^{\boldsymbol{A}(t_2-t_1)}e^{\boldsymbol{A}t_1}=e^{\boldsymbol{A}t_2}$$

这种关系称为组合性质。

- 在经典控制理论中，求解高阶微分方程时，对初始条件的处理相当困难。通常假定初始时刻 $t = 0$, $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{0}$，即从零初始条件出发去计算系统的输出响应。
- 而从以上分析中可以看出，在现代控制理论中，利用状态转移矩阵，对任意时刻的状态量 $\boldsymbol{x}(t)$，可以由任意指定的初始时刻 t_0 的初始向量 $\boldsymbol{x}(t_0)$ 求得。
- 换言之，矩阵微分方程的解，在时间上可以任意分段求取。这是状态空间模型描述的又一优点。

TD2-2-2 状态转移矩阵的性质

- 性质1： $\boldsymbol{\phi}(t-t)=\boldsymbol{\phi}(0)=\boldsymbol{I}$ 或 $e^{\boldsymbol{A}(t-t)}=e^{\boldsymbol{A}0}=\boldsymbol{I}$
- 证明：由

$$e^{\boldsymbol{A}t} \triangleq \boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}t+\frac{1}{2!}\boldsymbol{A}^2t^2+\cdots+\frac{1}{k!}\boldsymbol{A}^kt^k+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\boldsymbol{A}^kt^k}{k!}$$

直接可证得。意味着状态向量从 t 时刻又转移到 t 时刻，显然状态向量是不变的。

- 性质2： $\boldsymbol{\phi}(t)\cdot\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{\tau})=\boldsymbol{\phi}(t+\boldsymbol{\tau})$ 或 $e^{\boldsymbol{A}t}\cdot e^{\boldsymbol{A}\tau}=e^{\boldsymbol{A}(t+\tau)}$

称之为组合性质，意味着从 $t=-\tau$ 转移到 $t=0$，再从 $t=0$ 转移到 $t=t$ 的组合，即

$$\boldsymbol{\phi}(t-0)\cdot\boldsymbol{\phi}(0-(-\boldsymbol{\tau}))=\boldsymbol{\phi}(t+\boldsymbol{\tau})$$

也可由 e^{At} 的定义得到。

TD2–2–2 状态转移矩阵的性质

- 性质3：$[\phi(t)]^{-1}=\phi(-t)$ 或 $(e^{\boldsymbol{A}t})^{-1}=e^{-\boldsymbol{A}t}$
- 证明：根据 $e^{\boldsymbol{A}t}$ 定义式

$$e^{-\boldsymbol{A}t}e^{\boldsymbol{A}t}=\left(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}t+\frac{1}{2!}\boldsymbol{A}^2t^2-\cdots\right)\left(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}t+\frac{1}{2!}\boldsymbol{A}^2t^2+\cdots\right)=\boldsymbol{I}$$

直接可证得。

- 这意味着转移矩阵总是非奇异的，必有逆矩阵。
- 利用该性质，在已知 $\boldsymbol{x}(t)$ 的情况下，可以反求出所有 t 时刻以前的状态 $\boldsymbol{x}(t_0)$，$t_0<t$

TD2-2-2 状态转移矩阵的性质

- 性质4：$\dot{\boldsymbol{\phi}}(t)=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{\phi}(t)=\boldsymbol{\phi}(t)\cdot\boldsymbol{A}$ 或 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e^{\boldsymbol{A}t}=\boldsymbol{A}\cdot e^{\boldsymbol{A}t}=e^{\boldsymbol{A}t}\cdot\boldsymbol{A}$
- 证明：根据状态转移矩阵 e^{At} 定义

$$e^{\boldsymbol{A}t}\triangleq\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}t+\frac{1}{2!}\boldsymbol{A}^2t^2+\cdots+\frac{1}{k!}\boldsymbol{A}^kt^k+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\boldsymbol{A}^kt^k}{k!}$$

由于此无穷级数对有限 t 值是绝对收敛的，所以上式两边可对 t 求导，得：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e^{\boldsymbol{A}t}\triangleq\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2t+\frac{1}{2!}\boldsymbol{A}^3t^2+\frac{1}{3!}\boldsymbol{A}^4t^3\cdots$$

因此：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e^{\boldsymbol{A}t}\triangleq\boldsymbol{A}\cdot\left(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}t+\frac{1}{2!}\boldsymbol{A}^2t^2+\frac{1}{3!}\boldsymbol{A}^3t^3\cdots\right)=\boldsymbol{A}\cdot e^{\boldsymbol{A}t}$$

或者：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e^{\boldsymbol{A}t}\triangleq\left(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}t+\frac{1}{2!}\boldsymbol{A}^2t^2+\frac{1}{3!}\boldsymbol{A}^3t^3\cdots\right)\cdot\boldsymbol{A}=e^{\boldsymbol{A}t}\cdot\boldsymbol{A}$$

即：$\dot{\boldsymbol{\phi}}(t)=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{\phi}(t)=\boldsymbol{\phi}(t)\cdot\boldsymbol{A}$。证毕。

TD2-2-2 状态转移矩阵的性质

- 性质5：设有 $n\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$，当且仅当 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$ 时（即：$\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 可交换），有

$$e^{\boldsymbol{A}t}\cdot e^{\boldsymbol{B}t}=e^{(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})t}$$

而当 $\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$ 时，则有 $e^{\boldsymbol{A}t}\cdot e^{\boldsymbol{B}t}\neq e^{(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})t}$ 。

- 证明：根据定义，有：

$$\begin{aligned}&e^{(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})t}-e^{\boldsymbol{A}t}\cdot e^{\boldsymbol{B}t}\\&=\frac{\boldsymbol{BA}-\boldsymbol{AB}}{2!}t^2+\frac{\boldsymbol{BA}^2+\boldsymbol{ABA}+\boldsymbol{B}^2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BAB}-2\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}-2\boldsymbol{AB}^2}{3!}t^3+\cdots\end{aligned}$$

上式仅当$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$ 时为0。

TD2-2-2 状态转移矩阵的性质

- 性质6：若 $\boldsymbol{A}$ 为对角阵，即 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\Lambda}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & 0\\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n\end{bmatrix}=\mathrm{diag}\{\lambda_1,\cdots,\lambda_n\}$

则有：

$$e^{\Lambda t}=\phi(t)=\begin{bmatrix}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}t^k\lambda_1^k & & & 0\\ & \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}t^k\cdot\lambda_2^k & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}t^k\lambda_n^k\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}e^{\lambda_1 t} & & & 0\\ & e^{\lambda_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e^{\lambda_n t}\end{bmatrix}$$

TD2-2-2 状态转移矩阵的性质

- 性质7：若 $\boldsymbol{A}$ 能通过非奇异变换进行对角化，即 $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}=\boldsymbol{\Lambda}$，则有：

$$e^{\boldsymbol{A}t}=\boldsymbol{\phi}(t)=\boldsymbol{T}e^{\boldsymbol{\Lambda}t}\boldsymbol{T}^{-1}$$

- 证明：根据 $e^{\boldsymbol{A}t}$ 的定义 $e^{\boldsymbol{A}t}\triangleq \boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}t+\frac{1}{2!}\boldsymbol{A}^2t^2+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\boldsymbol{A}^kt^k}{k!}$

由于 $\boldsymbol{A}$ 能通过非奇异变换进行对角线化

$$\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}=\boldsymbol{\Lambda}$$

$$\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{T}=\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}=\boldsymbol{\Lambda}^2$$

$$\vdots$$

$$\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{T}=(\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T})\cdots(\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T})=\boldsymbol{\Lambda}^k$$

于是有：

TD2-2-2 状态转移矩阵的性质

$$\boldsymbol{T}^{-1}e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{T}=\boldsymbol{T}^{-1}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}t^k\boldsymbol{A}^k\right)\boldsymbol{T}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}t^k\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{T}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}t^k(\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T})^k=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}t^k\boldsymbol{\Lambda}^k$$

$$=\begin{bmatrix}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}t^k\lambda_1^k & & & 0\\ & \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}t^k\lambda_2^k & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}t^k\lambda_n^k\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}e^{\lambda_1 t} & & & 0\\ & e^{\lambda_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e^{\lambda_n t}\end{bmatrix}=e^{\boldsymbol{\Lambda}t}$$

$$\boldsymbol{T}^{-1}e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{T}=e^{\boldsymbol{\Lambda}t} \Rightarrow e^{\boldsymbol{A}t}=\boldsymbol{\phi}(t)=\boldsymbol{T}e^{\boldsymbol{\Lambda}t}\boldsymbol{T}^{-1}$$

TD2-2-2 状态转移矩阵的性质

- 性质8：若 $\boldsymbol{A}$ 为约当型矩阵

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{J}=\begin{bmatrix}\lambda & 1 & & 0\\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1\\ 0 & & & \lambda\end{bmatrix}$$

则可得：

$$e^{Jt}=\phi(t)=e^{\lambda t}\begin{bmatrix}1 & t & \frac{1}{2!}t^2 & \cdots & \frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}\\ 0 & 1 & t & \cdots & \frac{1}{(n-2)!}t^{n-2}\\ \vdots & \vdots & 1 & \ddots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \frac{1}{2!}t^2\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & t\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\end{bmatrix}$$

- 证明：与性质6类似。

TD2-2-2 状态转移矩阵的性质

- 性质9：若 $\boldsymbol{A}$ 能通过非奇异变换变成约当标准型，即 $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}=\boldsymbol{J}$ ，则有：

$$e^{\boldsymbol{A}t}=\phi(t)=\boldsymbol{T}e^{\boldsymbol{J}t}\boldsymbol{T}^{-1}$$

- 证明：与性质7类似。

模块2　线性连续定常系统状态方程的解

TD2-1-1　齐次方程的解（课本2.7）

TD2-1-2　非齐次方程的解（课本2.7）

TD2-2-1　状态转移矩阵的定义性质（课本2.8）

TD2-2-2　状态转移矩阵的性质（课本2.8）

TD2-2-3　状态转移矩阵的计算方法（课本2.7）

TD2-2-3 状态转移矩阵的计算

- 在具体分析线性定常系统时，不可避免地要遇到计算 $\phi(t)$ 和 e^{At} 的问题。下面讨论状态转移矩阵的几种计算方法：

- 1. 直接利用 e^{At} 的级数展开。根据矩阵指数的定义，e^{At} 可以展开成幂级数：

$$e^{At} \triangleq \boldsymbol{I} + \boldsymbol{A}t + \frac{1}{2!}\boldsymbol{A}^2t^2 + \cdots + \frac{1}{k!}\boldsymbol{A}^kt^k + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\boldsymbol{A}^kt^k}{k!} \qquad (*)$$

即：

$$e^{At}$$

$$= \boldsymbol{I} + \frac{\boldsymbol{A}t}{1!} + \frac{\boldsymbol{A}t}{2}\left(\frac{\boldsymbol{A}t}{1!}\right) + \frac{\boldsymbol{A}t}{3}\left(\frac{\boldsymbol{A}^2t^2}{2!}\right) + \cdots + \frac{\boldsymbol{A}t}{k}\left(\frac{\boldsymbol{A}^{k-1}t^{k-1}}{(k-1)!}\right) + \cdots\cdots \qquad (**)$$

显然，即使 $\boldsymbol{A}$ 结构简单，利用上式计算也并不容易。式（**）中圆括号内每一项完全等于前一项。它给出了一种方便的递推方案，易于编程实现。

- 然而，由于 e^{At} 的收敛较慢，与其它方法相比，这种方法计算时间较长。

TD2-2-3 状态转移矩阵的计算

- 2. 利用 Laplace 反变换法求 e^{At}

$$e^{\boldsymbol{A}t}=L^{-1}\left[(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\right]$$

这种方法归结为计算 $(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}$，$(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}$ 称为预解矩阵。

根据如下公式计算:

$$(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}=\frac{\mathrm{adj}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})}{|s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|}$$

这是一种最为常用的计算方法，在维数较小时非常实用、然而，在维数较大时计算比较复杂，需要熟悉常用的 Laplace 反变换。

TD2−2−3 状态转移矩阵的计算

- 3. 变换 A 为对角标准型或约当标准型来计算 e^{At}
- 情形 1：A 特征值互异。当 A 有两两相异特征值时，必能找到非奇异矩阵 T，使下式成立：

$$\boldsymbol{\Lambda}=\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}$$

由性质7可得：$e^{\boldsymbol{A}t}=\boldsymbol{\phi}(t)=\boldsymbol{T}\cdot e^{\boldsymbol{\Lambda}t}\cdot\boldsymbol{T}^{-1}$

- 例：已知 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}$，求 $e^{\boldsymbol{A}t}$。
- 解：$f(\lambda)=|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{bmatrix}\lambda & -1\\ 2 & \lambda+3\end{bmatrix}=\lambda^2+3\lambda+2 \Rightarrow \lambda_1=-1,\quad \lambda_2=-2$

由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_1=\lambda_1\boldsymbol{p}_1 \Rightarrow \begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p_{11}\\ p_{21}\end{bmatrix}=(-1)\begin{bmatrix}p_{11}\\ p_{21}\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}p_{11}\\ p_{21}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}$

TD2-2-3 状态转移矩阵的计算

- 由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_2=\lambda_2\boldsymbol{p}_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_{12} \\ p_{22} \end{bmatrix}=(-2)\begin{bmatrix} p_{12} \\ p_{22} \end{bmatrix}$ ➡ $\begin{bmatrix} p_{12} \\ p_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$

- 于是得:

$$\boldsymbol{T}=[\boldsymbol{p}_1 \quad \boldsymbol{p}_2]=\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{T}^{-1}=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$e^{\boldsymbol{A}t}=\boldsymbol{T}e^{\boldsymbol{\Lambda}t}\boldsymbol{T}^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 2e^{-t}-e^{-2t} & e^{-t}-e^{-2t} \\ -2e^{-t}+2e^{-2t} & -e^{-t}+2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

TD2-2-3 状态转移矩阵的计算

- 情形 2：$\boldsymbol{A}$ 的特征值有重根。在特征值有重根的情况下，根据性质 9 可知

$$e^{\boldsymbol{A}t} = \boldsymbol{T}\cdot e^{\boldsymbol{J}t}\cdot \boldsymbol{T}^{-1} \quad \text{其中：} \boldsymbol{J} = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}$$

- 例：已知 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ -4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，求 e^{At}

- 解：先求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值：$f(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda+3 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda+3 & -1 \\ 4 & 0 & \lambda \end{bmatrix} = \lambda(\lambda+3)^2 + 4 = (\lambda+1)^2(\lambda+4)$

即得：$\lambda_1 = \lambda_2 = -1 \quad \lambda_3 = -4$

TD2-2-3 状态转移矩阵的计算

- 则: $J=\begin{bmatrix}-1&1&0\\0&-1&0\\0&0&-4\end{bmatrix}$, $e^{Jt}=\begin{bmatrix}e^{-t}&te^{-t}&0\\0&e^{-t}&0\\0&0&e^{-4t}\end{bmatrix}$ （性质 8 ）
- 进一步可知: $T=\begin{bmatrix}1&1&1\\2&3&-1\\4&8&1\end{bmatrix}$ $T^{-1}=\frac{1}{9}\begin{bmatrix}11&7&-4\\-6&-3&3\\4&-4&1\end{bmatrix}$
- 所以 $e^{At}=T\cdot e^{Jt}\cdot T^{-1}$

$$=\begin{bmatrix}1&1&1\\2&3&-1\\3&8&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^{-t}&te^{-t}&0\\0&e^{-t}&0\\0&0&e^{-4t}\end{bmatrix}\frac{1}{9}\begin{bmatrix}11&7&-4\\-6&-3&3\\4&-4&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}e^{-t}&te^{-t}+e^{-t}&e^{-4t}\\2e^{-t}&2e^{-t}+3e^{-t}&-e^{-4t}\\4e^{-t}&4te^{-t}+8e^{-t}&e^{-4t}\end{bmatrix}\frac{1}{9}\begin{bmatrix}11&7&-4\\-6&-3&3\\4&-4&1\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{9}\begin{bmatrix}5e^{-t}-6te^{-t}+4e^{-4t}&4e^{-t}-3te^{-t}-4e^{-4t}&-e^{-t}+3te^{-t}+e^{-4t}\\4e^{-t}-12te^{-t}-4e^{-4t}&5e^{-t}-6te^{-t}+4e^{-4t}&e^{-t}+6te^{-t}-e^{-4t}\\-4e^{-t}-24te^{-t}+4e^{-4t}&4e^{-t}-12te^{-t}-4e^{-4t}&8e^{-t}+12te^{-t}+e^{-4t}\end{bmatrix}$$ （性质 9 ）