

自动控制理论（1）作业十八

作业内容：在教材第八章内容和电子讲义的基础上，试解答以下题目。

学习目的：采样系统

不交

书上 8.12, 补充题.

补充题：根据Jury判据确定如下闭环特征方程所有根均在单位圆内的参数 $K(>0)$ 的取值范围。

$$\varphi(z) = z^2 - Kz + K - 0.5$$

参考解答：

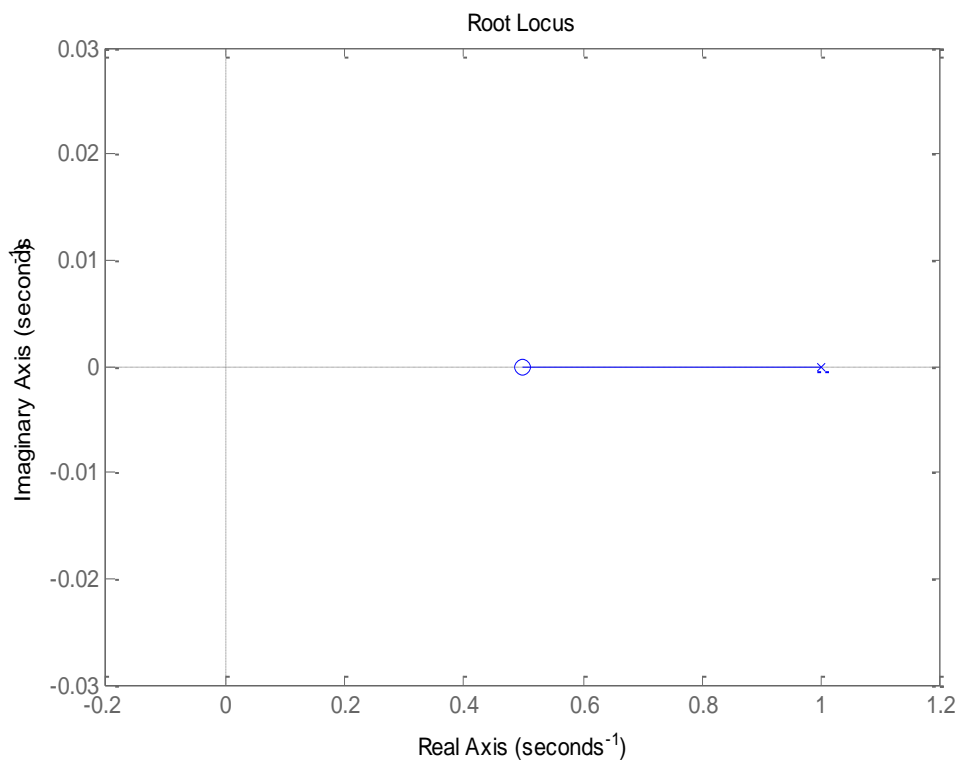
8.12

1) 无零阶保持器时，开环脉冲传递函数为 $G_p(z)$ 。由 $G_p(s)=K(1+1/s)$ ，查表得

$$G_p(z)=K(1+z/(z-1))=K(2z-1)/(z-1)$$

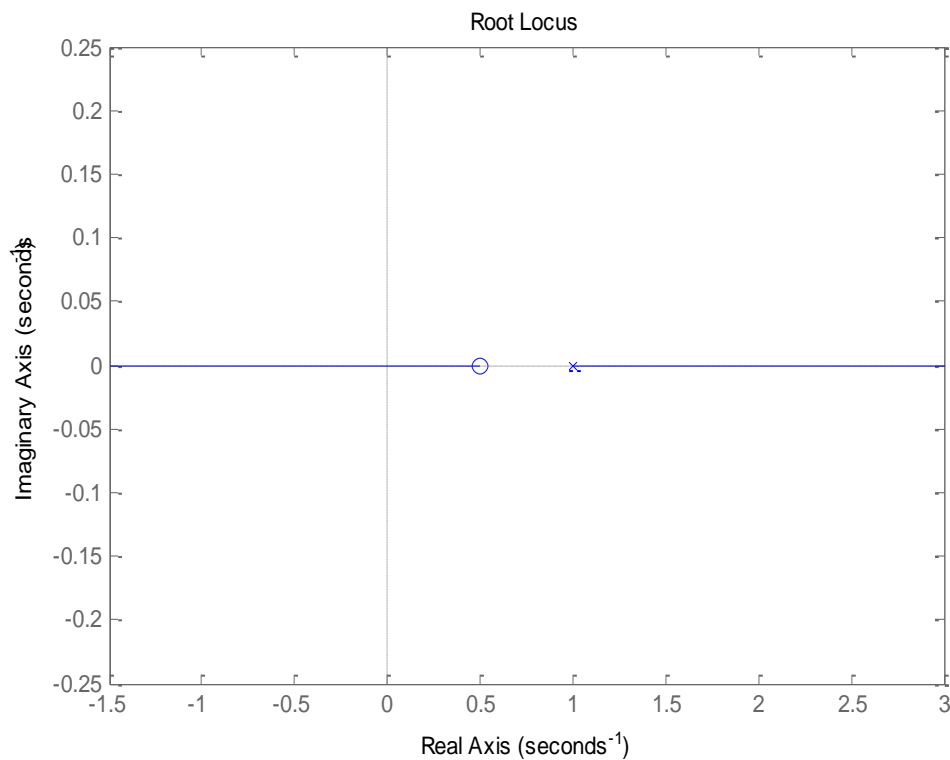
于是开环零点为 $z=1/2$ ，开环极点为 $z=1$ 。

根轨迹



于是，对于 $K>0$ ，闭环系统的根总是在单位圆内，系统是稳定的。

对于 $K<0$ ，需要考虑补根轨迹，



这时只有当|K|足够大时才使得闭环极点落入单位圆。以下求根轨迹与单位圆的交点。闭环脉冲传递函数为 $G(z)=G_p(z)/(1+G_p(z))$ ，即

$$G(z)=K(2z-1)/((1+2K)z-(1+K))$$

于是闭环特征多项式为 $(1+2K)z-(1+K)=0$ 。令其为零： $(1+2K)z-(1+K)=0$ ，并且取 $z=-1$ ，求得 $K=-2/3$ 。于是 $K<-2/3$ 时闭环系统都是稳定的。

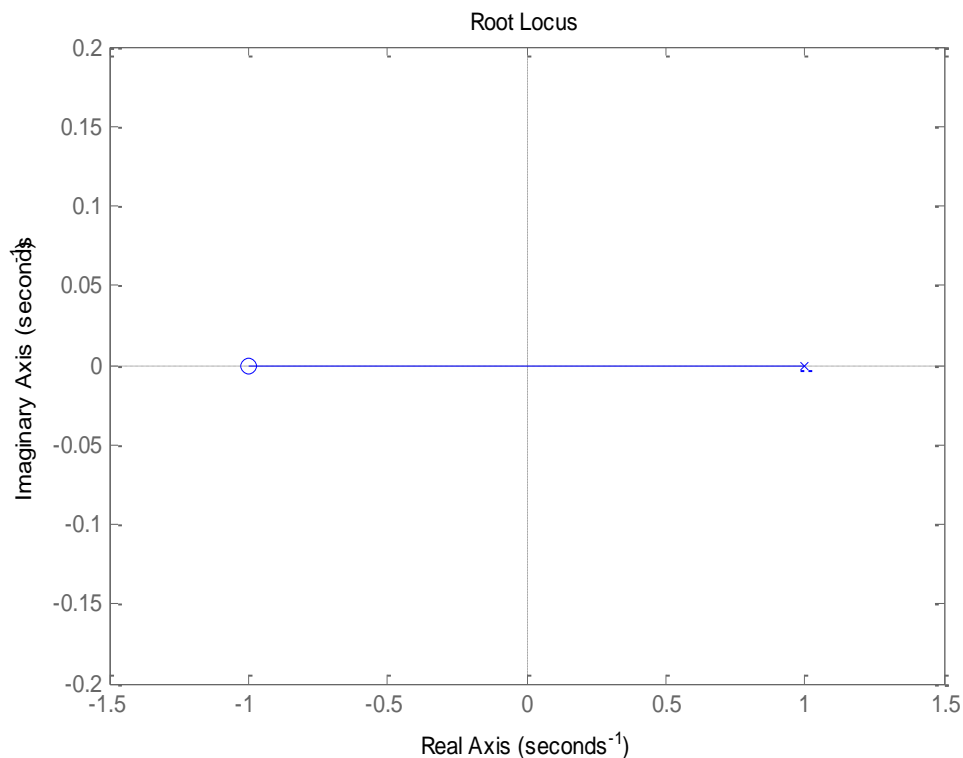
总之，使闭环系统稳定的K范围为 $K>0$ ，和 $K<-2/3$ 。

2) 有零阶保持器时，开环脉冲传递函数为

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{1}{z}\right) Z\left[\frac{G_p(s)}{s}\right] &= \left(1 - \frac{1}{z}\right) Z\left[\frac{K(1+s)}{s^2}\right] = K \left(1 - \frac{1}{z}\right) Z\left[\frac{1}{s^2} + \frac{1}{s}\right] \\ &= K \left(1 - \frac{1}{z}\right) \left[\frac{Tz}{(z-1)^2} + \frac{z}{z-1}\right] \\ &= K \frac{T + (z-1)}{(z-1)} \end{aligned}$$

开环零点 $z=1-T$ ，开环极点 $z=1$

根轨迹(对应 $T=2$ 情形)



当 $0 < T < 2$ 时，对于 $K > 0$ ，闭环的极点都在单位圆内。对于 $K < 0$ ，考虑补根轨迹， $|K|$ 足够大才能使闭环极点落入单位圆。闭环特征多项式 $(K + 1)(z - 1) + KT$ 等于零，以 $z = -1$ 代入，解得 $K = 2/(T - 2)$ 。于是， $K < 2/(T - 2)$ 能保证闭环稳定。

当 $T > 2$ 时，对于 $K > 0$ 不能总是保证闭环极点在单位圆内。闭环特征多项式 $(K + 1)(z - 1) + KT$ 等于零，以 $z = -1$ 代入，解得 $K = 2/(T - 2)$ 。于是， $0 < K < 2/(T - 2)$ 时才能保证闭环稳定。对于 $K < 0$ ，补根轨迹始终在单位圆外，闭环不稳定。

总之，使闭环稳定的参数范围如下：

当 $0 < T < 2$ 时， $K < 2/(T - 2)$ 和 $K > 0$ ；

当 $T > 2$ 时， $0 < K < 2/(T - 2)$ 。

补充题：

$$\varphi(z) = z^2 - Kz + K - 0.5$$

由Jury判据，对于二阶系统，闭环特征多项式的根都在单位圆内的充要条件是：

$$\varphi(1) > 0, \varphi(-1) > 0, a_2 > |a_0|$$

对此题，有 $\varphi(1) = 1 - K + K - 0.5 = 0.5 > 0$

$$\varphi(-1) = 1 + K + K - 0.5 = 2K + 0.5 > 0$$

$$a_2 = 1 > |a_0| = |K - 0.5|$$

由 $K > 0$ 综合得出条件： $0 < K < 3/2$