

# 自动控制理论

## (二) 现代控制理论

自动化系 尚超

中央主楼418A 010-62782459

c-shang@tsinghua.edu.cn

# 线性定常系统的综合

对于一个给定的受控系统  $\Sigma(A, B, C)$ ，确定其控制法则，即设计控制器的结构参数，使其控制性能满足事先给定的指标要求，此类问题称为系统的综合问题。

- 分析问题：给定系统方程，输入  $u$  已知

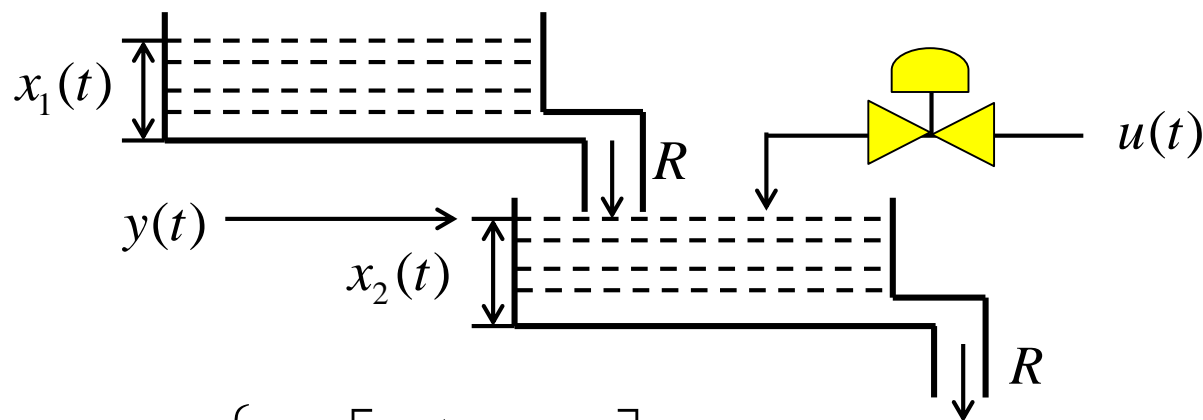
$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{系统运动行为（状态运动规律、稳定性）} \\ \text{结构特性（特征结构、能控、能观）} \end{cases}$$

- 综合问题：给定系统方程，指定期望的运动行为（性能指标）

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} \end{cases} \Rightarrow \text{确定系统输入 } u \text{ 的规律}$$

# 线性定常系统的综合

- 例1：水位的控制

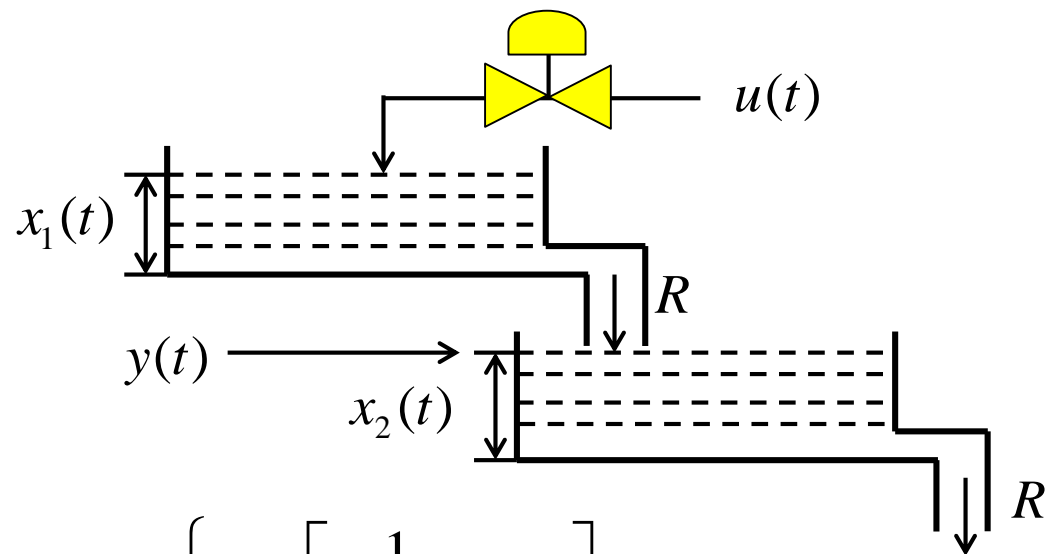


$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R} & 0 \\ \frac{1}{R} & -\frac{1}{R} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = [0 \quad 1] \mathbf{x} \end{cases}$$

- 分析问题：系统（状态）的运动规律，是否具有能控性和能观性

# 线性定常系统的综合

- 例1：水位的控制

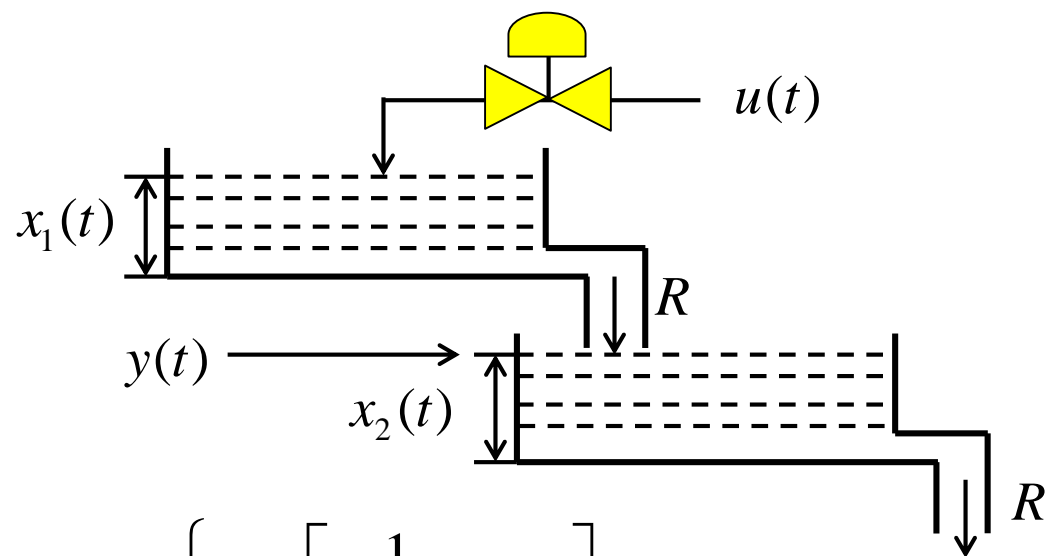


$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R} & 0 \\ \frac{1}{R} & -\frac{1}{R} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y = [0 \quad 1] \mathbf{x} \end{cases}$$

- 分析问题：系统（状态）的运动规律，是否具有能控性和能观性

# 线性定常系统的综合

- 例1：水位的控制



$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R} & 0 \\ \frac{1}{R} & -\frac{1}{R} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y = [0 \quad 1] \mathbf{x} \end{cases}$$

- 综合问题：系统能以怎样的方式达到性能指标的要求, 确定控制  $u$

# 线性定常系统的综合

- 系统综合的思路

1. 建立相应综合问题的“可综合条件”

例如可进行极点配置的条件

2. 建立用来确定输入  $u$  的方法（控制律），进行设计

例如反馈控制律  $u = w - Kx$

# 模块4 线性定常系统的综合

TD4-1-1 状态反馈和输出反馈（课本9.11.1节）

TD4-2-1 反馈对能控性/能观性的影响（课本9.11.2节）

TD4-3 闭环系统的极点配置（课本10.1.1-10.1.3节）

TD4-3-1 极点配置算法

TD4-3-2 极点配置算法举例

TD4-4-1 镇定问题（课本10.1.4节）

## TD4-1-1 状态反馈和输出反馈

无论在经典控制理论还是在现代控制理论中，反馈都是系统设计的重要方式。

但是，由于经典控制理论是用传递函数来描述系统的，因此它只能对输出量进行一定改造后用来作为反馈量。这种方式称为输出反馈，即量测输出量，再由输出测量值与给定的输入量进行比较后，确定闭环系统的控制规律。

而在现代控制理论中是用系统的内部状态变量来描述系统特性的，所以除了上述的反馈外，通常采用状态反馈，即利用系统的全部状态变量作为反馈量。

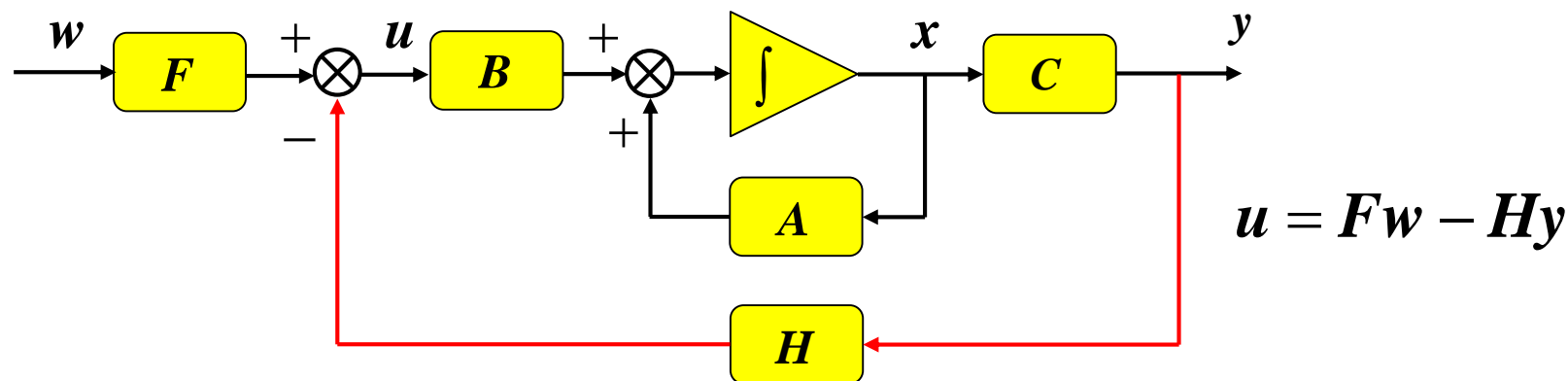


## TD4-1-1 状态反馈和输出反馈

- 基本形式：考虑如下线性定常系统

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} \end{cases} \quad (1)$$

- 输入  $u$ 、状态变量  $x$ 、输出  $y$  的维数是  $r, n, m$ ，输出反馈的基本形式如下图所示。



## TD4-1-1 状态反馈和输出反馈

设  $H$  是  $r \times m$  阶矩阵，用  $Hy$  作为反馈量构成闭环系统，并对输入量  $w$  作线性变换，变换矩阵为  $F$ ，控制律为  $u$ ：

$$u = Fw - Hy = Fw - HCx \quad (2)$$

- 将 (2) 式代入原方程，即可导出闭环系统的方程：

$$\dot{x} = Ax + B(Fw - HCx) = (A - BHC)x + BFw$$

- 这样，闭环系统就可表示为 
$$\begin{cases} \dot{x} = (A - BHC)x + BFw \\ y = Cx \end{cases} \quad (3)$$

## TD4-1-1 状态反馈和输出反馈

- 输出反馈的闭环系统为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{BHC})\mathbf{x} + \mathbf{BF}\mathbf{w} \\ \mathbf{y} = \mathbf{Cx} \end{cases} \quad (3)$$

- 显然，其传递函数阵为（从  $\mathbf{w}$  至  $\mathbf{y}$ ）

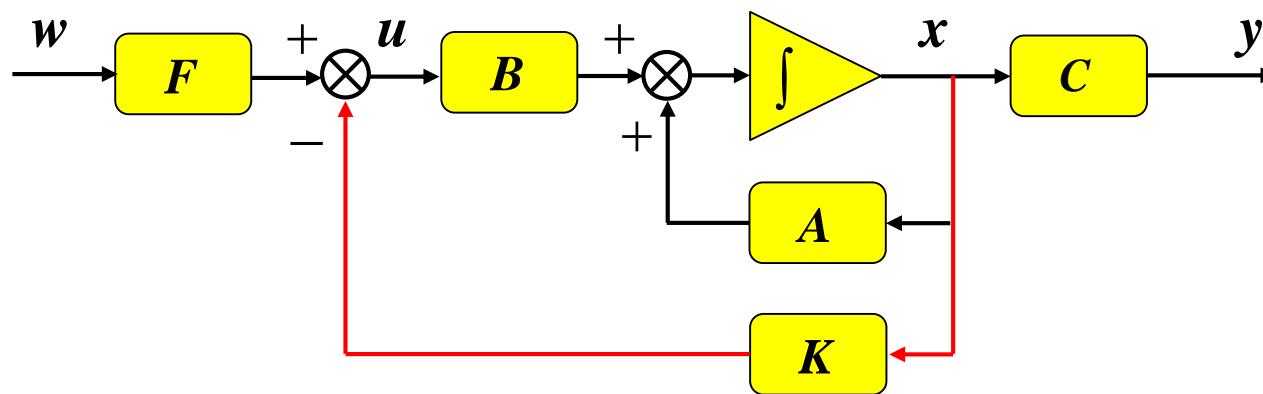
$$\mathbf{G}_{H,F}(s) = \mathbf{C}(\mathbf{sI} - \mathbf{A} + \mathbf{BHC})^{-1} \mathbf{BF}$$

- 若  $\mathbf{F} = \mathbf{I}$ ，即对输入不作变换，就变为单纯的输出反馈。此时，闭环系统模型具有如下形式：

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{BHC})\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{w} \\ \mathbf{y} = \mathbf{Cx} \end{cases}$$
$$\mathbf{G}_H(s) = \mathbf{C}(\mathbf{sI} - \mathbf{A} + \mathbf{BHC})^{-1} \mathbf{B}$$

## TD4-1-1 状态反馈和输出反馈

- 状态反馈的基本形式如下图所示



设  $K$  是  $r \times n$  阶矩阵，用  $Kx$  作为反馈量构成闭环，对输入量  $w$  也作线性变换，则得控制律： $u = Fw - Kx$ 。

这种反馈方式称为状态反馈。

## TD4-1-1 状态反馈和输出反馈

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} \end{cases} \quad u = \mathbf{F}\mathbf{w} - \mathbf{K}\mathbf{x}$$

- 状态反馈的闭环系统状态空间表达式为：

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{BK})\mathbf{x} + \mathbf{BF}\mathbf{w} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} \end{cases}$$

- 其传递函数为：  $G_{K,F}(s) = \mathbf{C}(\mathbf{sI} - \mathbf{A} + \mathbf{BK})^{-1} \mathbf{BF}$

- 若  $\mathbf{F} = \mathbf{I}$ ，则状态反馈的闭环方程和传递函数为：
$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{BK})\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{w} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} \end{cases}$$

$$G_K(s) = \mathbf{C}(\mathbf{sI} - \mathbf{A} + \mathbf{BK})^{-1} \mathbf{B}$$

## TD4-1-1 状态反馈和输出反馈

- 状态反馈的闭环方程和传递函数为：

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{BK})\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{w} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} \end{cases}$$
$$\mathbf{G}_K(s) = \mathbf{C}(\mathbf{sI} - \mathbf{A} + \mathbf{BK})^{-1} \mathbf{B}$$

- 重写输出反馈的闭环传递函数为：

$$\mathbf{G}_H(s) = \mathbf{C}(\mathbf{sI} - \mathbf{A} + \mathbf{BHC})^{-1} \mathbf{B}$$

- 从闭环传递函数可看出，输出反馈和状态反馈均可改变系统的极点。
- 但是，反馈的引入并不增加新的状态变量，即闭环系统和开环系统具有相同的阶数。

## TD4-1-1 状态反馈和输出反馈

- 输出反馈 
$$\begin{cases} \dot{x} = (A - BHC)x + Bw \\ y = Cx \end{cases} \quad \begin{matrix} K = HC \\ r \times n \quad r \times m \quad m \times n \end{matrix}$$

- 状态反馈 
$$\begin{cases} \dot{x} = (A - BK)x + Bw \\ y = Cx \end{cases} \quad \begin{matrix} r=m=1, \quad n=2 \\ [k_1, k_2] = h[c_1, c_2] \end{matrix}$$

比较闭环状态空间表达式可以看出，当  $K = HC$  时，状态反馈和输出反馈的控制效果是完全相同的。凡是输出反馈阵  $H$  所能达到的效果，通过状态反馈阵  $K = HC$  来代替，可实现相同的控制效果。

反之，由于已知  $K$ 、 $C$  时，不一定存在  $H$  阵使得  $K = HC$ ，这说明通过状态反馈可能获得比输出反馈更好的效果，而输出反馈仅是状态反馈的某种特例。由闭环状态方程可知，适当选择反馈阵  $K$ ，可以改善系统性能或满足一定的设计指标。

## TD4-1-1 状态反馈和输出反馈

- 例2：考虑如下二阶系统

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_1 & -a_2 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{c}^T = [\beta_1 \quad \beta_2]$$

试分析状态反馈对系统性能产生的影响。

- 解：系统  $\Sigma(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c}^T)$  的传递函数为：
$$G(s) = \frac{\beta_2 s + \beta_1}{s^2 + a_2 s + a_1}$$

取状态反馈  $\mathbf{k}^T = [k_1, k_2]$ ,  $\mathbf{F} = \mathbf{I}$

$$\text{则 } \mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_1 & -a_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [k_1, k_2] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -(a_1 + k_1) & -(a_2 + k_2) \end{bmatrix}$$



## TD4-1-1 状态反馈和输出反馈

- 闭环传递函数为:  $G_K(s) = \frac{\beta_2 s + \beta_1}{s^2 + (a_2 + k_2)s + (a_1 + k_1)}$

则极点为  $\lambda^* = \frac{-(a_2 + k_2) \pm \sqrt{(a_2 + k_2)^2 - 4(a_1 + k_1)}}{2}$

显然, 只要适当选择  $k_1, k_2$ , 即可任意配置闭环极点。

- 如果  $k_1 = \frac{(a_2 + k_2)^2}{4} - a_1$  则闭环有两个相同的实极点, 并且在  $k_2 > -a_2$  时, 系统是稳定的;
- 如果  $k_1 < \frac{(a_2 + k_2)^2}{4} - a_1$  闭环系统有两个相异的实极点;
- 如果  $k_1 > \frac{(a_2 + k_2)^2}{4} - a_1$  闭环系统成为振荡系统, 在  $k_2 > -a_2$  时系统稳定。

## TD4-1-1 状态反馈和输出反馈

- 如果  $k_1 > \frac{(a_2 + k_2)^2}{4} - a_1$  闭环系统成为振荡系统，在  $k_2 > -a_2$  时系统稳定。

进一步，我们可以分析系统的稳态偏差，分别为：

$$e_p = 1 - \frac{\beta_1}{a_1 + k_1}, \quad e_v = t \left( 1 - \frac{\beta_1}{a_1 + k_1} \right) + \frac{\beta_1(a_2 + k_2) - \beta_2(a_1 + k_1)}{(a_1 + k_1)^2}$$

- 若要求  $e_p = 0$ ，就需  $k_1 = -a_1 + \beta_1$ ，这时  $e_v = \frac{a_2 + k_2 - \beta_2}{\beta_1}$
- 若还要求  $e_v = 0$ ，就必须有  $k_2 = -a_2 + \beta_2$ ，那么自然要求  $\beta_2 > 0$ ，否则系统就不稳定了。

# 模块4 线性定常系统的综合

TD4-1-1 状态反馈和输出反馈（课本9.11.1节）

TD4-2-1 反馈对能控性/能观性的影响（课本9.11.2节）

TD4-3 闭环系统的极点配置（课本10.1.1-10.1.3节）

TD4-3-1 极点配置算法

TD4-3-2 极点配置算法举例

TD4-4-1 镇定问题（课本10.1.4节）

## TD4-2-1 反馈对能控性和能观性的影响

为简单起见，不失一般性假设  $D = \mathbf{0}$  及  $F = I$ ，并考察在该条件下反馈对能控性与能观性的影响。此时，原系统可表示为：

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} \end{cases}$$

令  $u = w - \mathbf{K}\mathbf{x}$ ，闭环系统的状态空间表达式为：

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{x} + \mathbf{B}w \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} \end{cases} \quad (1)$$

- **结论：**状态反馈不影响系统的能控性，但不一定保持系统的能观性；  
输出反馈不影响系统的能控性和能观性。

# TD4-2-1 反馈对能控性和能观性的影响

- 1、状态反馈不影响系统的能控性

计算式(1)的能控性矩阵，因为

$$(A - BK)B = AB - BKB = AB - BP \quad (\text{这里 } P = KB)$$

$$(A - BK)^2 B = (A - BK)(AB - BP) = A^2 B + (B, AB \text{ 的线性组合})$$

$$(A - BK)^3 B = (A - BK)(A^2 B + (B, AB \text{ 的线性组合}))$$

$$= A^3 B + (B, AB, A^2 B \text{ 的线性组合})$$

$$\vdots$$
$$\vdots$$

$$(A - BK)^{n-1} B = A^{n-1} B + (B, AB, A^2 B, \dots, A^{n-2} B \text{ 的线性组合})$$

$$\begin{bmatrix} B & (A - BK)B & \dots & (A - BK)^{n-1} B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1} B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & * & \dots & * \\ 0 & I & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \dots & 0 & I \end{bmatrix}$$

## TD4-2-1 反馈对能控性和能观性的影响

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B} & (\mathbf{A} - \mathbf{BK})\mathbf{B} & \cdots & (\mathbf{A} - \mathbf{BK})^{n-1}\mathbf{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{AB} & \cdots & \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & * & \cdots & * \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

- 上式中最后一个矩阵为非奇异矩阵，因而有：

$$\text{rank} \begin{bmatrix} \mathbf{B} & (\mathbf{A} - \mathbf{BK})\mathbf{B} & \cdots & (\mathbf{A} - \mathbf{BK})^{n-1}\mathbf{B} \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{AB} & \cdots & \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B} \end{bmatrix} \quad (2)$$

式(2)表明状态反馈不影响系统能控性，即若原系统是完全能控的，加上任意状态反馈后，所得到的闭环系统也完全能控。若原系统是不完全能控的，不论加上什么样的状态反馈，所得到的闭环系统仍然不完全能控。

## TD4-2-1 反馈对能控性和能观性的影响

- 2、状态反馈不一定能保持系统的能观性

状态反馈有可能改变系统的能观性，即若原系统完全能观，在某些状态反馈作用下，所得的闭环系统可能是不完全能观的。

若原系统不完全能观，在某些状态反馈作用下，所得的闭环系统可能成为完全能观。

对此，可以举例说明。

## TD4-2-1 反馈对能控性和能观性的影响

- 例1: 系统运动方程为

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad y = [0 \quad 1] \mathbf{x} \quad \mathbf{Q}_g = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ 该系统不完全能观}$$

若取状态反馈  $k_1^T = [1 \quad 1]$  时, 闭环系统为:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{b}k_1^T) \mathbf{x} + \mathbf{b}w = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} w \\ y = [0 \quad 1] \mathbf{x} \end{cases} \quad \mathbf{Q}_g = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \text{ 该系统完全能观}$$

若取状态反馈  $k_2^T = [0 \quad 1]$  时, 闭环系统为:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{b}k_2^T) \mathbf{x} + \mathbf{b}w = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} w \\ y = [0 \quad 1] \mathbf{x} \end{cases} \quad \mathbf{Q}_g = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ 此时该系统仍然不完全能观}$$



## TD4-2-1 反馈对能控性和能观性的影响

- 例1: 系统运动方程为  $\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$

当  $y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x$  时, 系统是完全能观的, 若取  $k_3^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$  时, 闭环系统不完全能观, 若取  $k_4^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$  时, 闭环系统仍是完全能观的。

当  $y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x$  时, 系统完全能观, 加任意的状态反馈后所得的闭环系统仍是完全能观的。(为什么?)

以上说明, 状态反馈可能改变系统的能观性。

## TD4-2-1 反馈对能控性和能观性的影响

- 3、输出反馈能保持系统的能控性和能观性

因为对任意输出反馈系统都可以对应于一个等价的状态反馈系统。而状态反馈保持能控性，这证明了输出反馈可保持能控性。

接下来证明，输出反馈可保持能观性。

带有输出反馈的状态空间表达式为：

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{BHC})\mathbf{x} + \mathbf{Bw} \\ \mathbf{y} = \mathbf{Cx} \end{cases} \quad (3)$$

## TD4-2-1 反馈对能控性和能观性的影响

显然，只要证明以下等式即可。

$$\text{rank} \begin{bmatrix} C \\ C(A-BHC) \\ \vdots \\ C(A-BHC)^{n-1} \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

思路与证明状态反馈能保持能控性的方法类似，同学们可自行完成证明。

因此，可得到如下结论：

状态反馈不影响系统的能控性，但不一定保持系统的能观性；

输出反馈不影响系统的能控性和能观性。

# 模块4 线性定常系统的综合

TD4-1-1 状态反馈和输出反馈（课本9.11.1节）

TD4-2-1 反馈对能控性/能观性的影响（课本9.11.2节）

TD4-3 闭环系统的极点配置（课本10.1.1-10.1.3节）

TD4-3-1 极点配置算法

TD4-3-2 极点配置算法举例

TD4-4-1 镇定问题（课本10.1.4节）

## TD4-3-1 极点配置算法

控制系统的各种特性或各种品质指标，很大程度上由系统的极点决定。

因此，系统的综合形式之一，可以在  $s$  平面上给定一组所希望的极点，通过状态反馈阵  $k$  的选择，使闭环系统  $\Sigma_k(A - bk^T, b, c^T)$  的极点恰好处于期望的一组极点的位置上。由于期望极点位置有任意性，因此极点的配置同样应当具有任意性。

这就是所谓的极点配置问题。

# TD4-3-1 极点配置算法

## • 1、期望极点的选取

对于期望极点的选取，实际上是确定综合目标的问题。这里仅提出一般应了解的方面。

(1) 对于  $n$  维受控系统，应当且只应当指定  $n$  个期望极点。

(2) 对期望极点位置的选取，要研究它们对系统品质的影响，它们与零极点分布状况的关系，从工程实际需要出发加以解决。

(3) 期望极点可以是实数或共轭复数对。

工程实际需要涵盖了抗干扰能力、灵敏度等性能指标，所以选取极点位置实际上是一项复杂的工作。

# TD4-3-1 极点配置算法

## • 2、极点配置定理

对于单输入单输出系统  $\Sigma(A, b, c^T)$ ，在  $s$  平面上预先任意指定  $n$  个极点，则存在状态反馈律：

$$u(t) = -k^T x(t) + w(t)$$

使闭环系统  $\Sigma_k(A - bk^T, b, c^T)$  极点位于预先指定位置上的充分必要条件是原系统  $\Sigma(A, b, c^T)$  完全能控。

- 证明：之前我们已证明，状态反馈不影响系统的能控性。因此，若一个系统不完全能控，则状态反馈无法改变系统的不能控模态。这证明了系统可任意配置极点的必要条件是受控系统  $\Sigma(A, b, c^T)$  是完全能控的。

## TD4-3-1 极点配置算法

下面证明充分性:

由于  $\Sigma(A, b, c^T)$  能控, 那么一定可以通过某种非奇异变换, 转化成能控规范型  $\Sigma(\tilde{A}, \tilde{b}, \tilde{c}^T)$ , 其中

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{I}_{n-1} \\ -p_1 & -p_2 \cdots -p_n \end{bmatrix}, \quad \tilde{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{c}^T = [c_1 \quad \cdots \quad c_n]$$

对于状态反馈阵  $\tilde{k}^T = [\tilde{k}_1 \quad \tilde{k}_2 \quad \cdots \quad \tilde{k}_n]$ , 有

$$\tilde{A} - \tilde{b}\tilde{k}^T = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{I}_{n-1} \\ -\left(p_1 + \tilde{k}_1\right) & -\left(p_2 + \tilde{k}_2\right) \cdots -\left(p_n + \tilde{k}_n\right) \end{bmatrix}$$

可见状态反馈系统  $\tilde{\Sigma}_k = (\tilde{A} - \tilde{b}\tilde{k}^T, \tilde{b}, \tilde{c}^T)$  仍为能控标准型。



## TD4-3-1 极点配置算法

状态反馈系统的特征多项式为：

$$f(s) = \left| s\mathbf{I} - (\tilde{\mathbf{A}} - \tilde{\mathbf{b}}\tilde{\mathbf{k}}^T) \right| = s^n + (p_n + \tilde{k}_n)s^{n-1} + \cdots + (p_1 + \tilde{k}_1) \quad (1)$$

假定任意给定的  $n$  个极点分布为  $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ ，则希望的特征多项式为：

$$f^*(s) = \prod_{i=1}^n (s - \lambda_i) = s^n + a_n^* s^{n-1} + a_{n-1}^* s^{n-2} + \cdots + a_1^* \quad (2)$$

比较上面两式，可知： $p_i + \tilde{k}_i = a_i^* \ (i = 1, 2, \cdots, n)$

则  $\tilde{k}_i = a_i^* - p_i \ (i = 1, 2, \cdots, n)$

所以  $\tilde{\mathbf{k}}^T = [a_1^* - p_1, \ a_2^* - p_2, \ \cdots, \ a_n^* - p_n]$

## TD4-3-1 极点配置算法

而原系统  $\Sigma(A, b, c^T)$  的线性反馈律应为:

$$u = w - k^T x$$

由  $\tilde{x} = T^{-1}x$ , 即  $x = T\tilde{x}$ , 代入上式得:

$$u = w - \underset{\doteq \tilde{k}}{k^T T} \tilde{x}$$

所以  $\tilde{k}^T = k^T T$ , 即  $k^T = \tilde{k}^T T^{-1}$ 。

由于线性非奇异变换不改变系统的特征多项式, 因此,  $k$  即为所求的反馈增益向量。

上面只是对单输入系统作了证明。不难看出, 定理也能推广至一般的多输入系统。

## TD4-3-1 极点配置算法

上述证明过程也给出了单变量系统极点配置的方法，现归纳如下：

- (1) 对于给定的系统  $\Sigma(A, b)$  化为能控标准型  $\tilde{\Sigma}(\tilde{A}, \tilde{b})$ ;
- (2) 导出系统  $\tilde{\Sigma}(\tilde{A}, \tilde{b})$  的特征多项式，它也是原系统的特征多项式：

$$f(s) = s^n + p_n s^{n-1} + p_{n-1} s^{n-2} + \cdots + p_1$$

- (3) 根据给定的极点分布  $(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$ ，导出希望的闭环特征多项式：

$$f^*(s) = \prod_{i=1}^n (s - \lambda_i) = s^n + a_n^* s^{n-1} + a_{n-1}^* s^{n-2} + \cdots + a_1^*$$

- (4) 确定能控标准型  $\tilde{\Sigma}(\tilde{A}, \tilde{b})$  的状态  $\tilde{x}$  的反馈向量：

$$\tilde{k}^T = [a_1^* - p_1, \quad a_2^* - p_2, \quad \cdots, \quad a_n^* - p_n]$$

## TD4-3-1 极点配置算法

- (5) 原系统  $\Sigma(A, b)$  的状态的反馈阵  $k^T = \tilde{k}^T T^{-1}$ ;
- (6) 输入变换阵  $F$  对单变量系统是标量，可由综合指标中对系统静态误差要求来确定。

当然，具体综合某个特定系统的状态反馈不一定完全遵照上述步骤，可根据具体问题进行适当变化。详见例2。

# 模块4 线性定常系统的综合

TD4-1-1 状态反馈和输出反馈（课本9.11.1节）

TD4-2-1 反馈对能控性/能观性的影响（课本9.11.2节）

TD4-3 闭环系统的极点配置（课本10.1.1-10.1.3节）

TD4-3-1 极点配置算法

TD4-3-2 极点配置算法举例

TD4-4-1 镇定问题（课本10.1.4节）

## TD4-3-2 极点配置算法举例

- 例1: 已知图(a)所示的受控系统, 其传递函数为

$$w(s) = \frac{0.0139}{s(0.167s+1)(0.083s+1)} = \frac{1}{s(s+6)(s+12)}$$

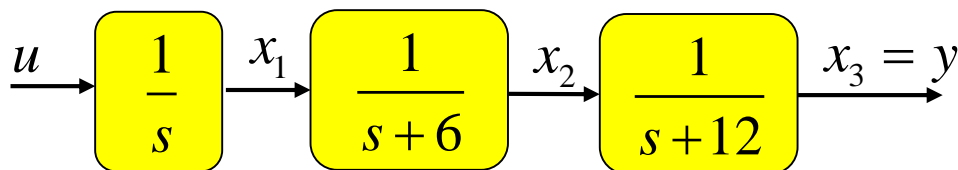


图 (a)

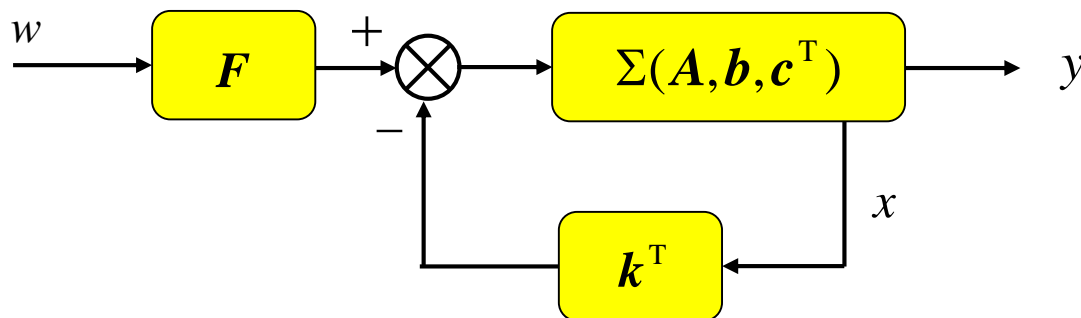


图 (b)

综合指标为:

输出超调量:  $M_p \leq 5\%$

峰值时间:  $t_p \leq 0.5$  秒

静态误差:  $e_p = 0, e_v = 0.2$

## TD4-3-2 极点配置算法举例

- 解：考虑到综合指标既有动态要求，又有静态要求，所以采用状态反馈和输入变换相结合的形式，即如图1 (b) 所示。

(1) 将给定指标化为期望极点，确定期望模型。

希望极点数  $n=3$ 。现在选取：一对为主导极点对  $\lambda_1$  和  $\lambda_2$ ，另一个为远方极点  $\lambda_3$ ，如图2所示。

可以认为动态特性主要由主导极点决定，而远方极点只有微小影响。主导极点对构成二阶系统模型，有关系式  $|\lambda_1| = |\lambda_2| = \omega_n$ ,  $\theta = \cos^{-1} \zeta$ ，其中  $\zeta$ ：阻尼系数， $\omega_n$ ：自然振动频率。

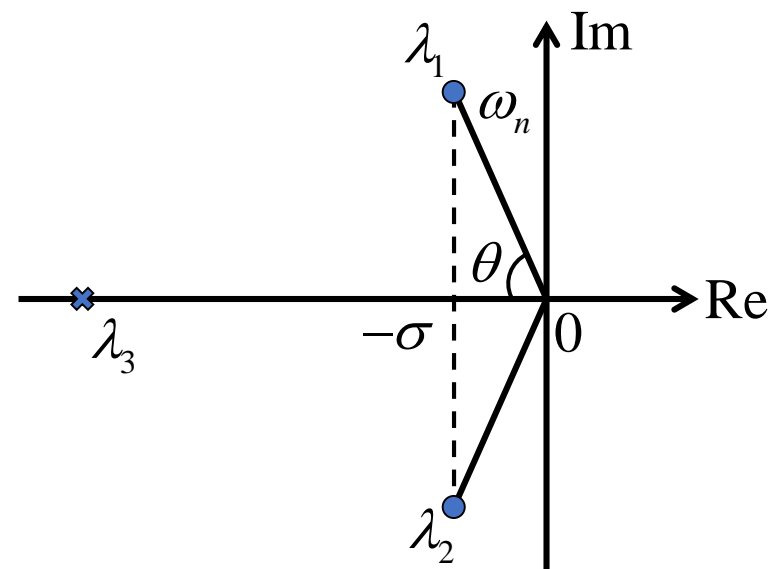


图2

## TD4-3-2 极点配置算法举例

由于系统性能主要由主导极点对决定，所以按综合指标首先决定主导极点对  $\lambda_1$ 、 $\lambda_2$ 。为此，利用二阶模型关系式来求  $\zeta$  和  $\omega_n$ ：

$$\begin{cases} M_p = e^{-\zeta\pi\sqrt{1-\zeta^2}} \leq 5\% \\ t_p = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} \leq 0.5s \end{cases}$$

- 利用  $M_p = e^{-\zeta\pi\sqrt{1-\zeta^2}} \leq 5\%$  求  $\zeta$ ：

$$\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2} \geq 3.14, \text{ 从而有 } \zeta \geq \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707, \text{ 于是选取 } \zeta = 0.707。$$

- 由  $t_p = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} \leq 0.5s$  求  $\omega_n$ ：

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{\sqrt{2}\pi}{\omega_n} \leq 0.5, \text{ 从而有 } \omega_n \geq \frac{\pi}{0.5 \times 0.707} \doteq 9, \text{ 选 } \omega_n = 10。$$



## TD4-3-2 极点配置算法举例

这样可确定主导极点对：

$$\lambda_{1,2} = -\omega_n \cos \theta \pm j\omega_n \sin \theta = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} = -7.07 \pm j7.07$$

而远方极点  $\lambda_3$  的选择应该使其和原点距离远大于  $|\lambda_1|$ 。选取

$$\lambda_3 = -10|\lambda_1| = -100$$

于是希望的闭环系统特征多项式为：

$$\begin{aligned} f^*(s) &= (s+100)(s+7.07-j7.07)(s+7.07+j7.07) \\ &= (s+100)(s^2+14.1s+100) \\ &= s^3+114.1s^2+1510s+10000 \end{aligned}$$

(2) 校核模型的静态指标，确定变换放大器系数  $F$

因为原系统无零点，所以闭环系统的传递函数为：
$$G_k(s) = \frac{F}{f^*(s)}$$

## TD4-3-2 极点配置算法举例

$$f^*(s) = s^3 + 114.1s^2 + 1510s + 10000 = s^3 + \alpha_3^*s^2 + \alpha_2^*s + \alpha_1^*$$

由位置误差定义

$$e_p \triangleq \lim_{t \rightarrow \infty} |1 - y_p(t)| = \lim_{s \rightarrow 0} \left| s \left( \frac{1}{s} - \frac{G_k(s)}{s} \right) \right| = \left| 1 - \frac{F}{\alpha_1^*} \right| = 0 \quad (\text{因为要求 } e_p = 0)$$

所以,  $F = \alpha_1^* = 10000$ 。再校核速度误差  $e_v$  是否满足要求。

$$e_v \triangleq \lim_{t \rightarrow \infty} |t - y_t(t)| = \lim_{s \rightarrow 0} \left| s \left( \frac{1}{s^2} - \frac{G_k(s)}{s^2} \right) \right| = \lim_{s \rightarrow 0} \left| \frac{1 - G_k(s)}{s} \right|$$

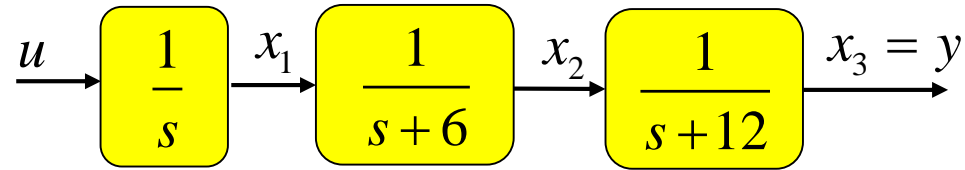
因为

$$1 - G_k(s) = 1 - \frac{F}{f^*(s)} = 1 - \frac{10000}{s^3 + 114.1s^2 + 1510s + 10000} = \frac{s^3 + 114.1s^2 + 1510s}{s^3 + 114.1s^2 + 1510s + 10000}$$

$$\text{所以 } e_v = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^2 + 114.1s + 1510}{s^3 + 114.1s^2 + 1510s + 10000} = 0.1510 < 0.2, \text{ 满足要求。}$$

## TD4-3-2 极点配置算法举例

(3) 确定系统的状态空间表达式并化为能控标准型



$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u \\ \dot{x}_2 = x_1 - 6x_2 \\ \dot{x}_3 = x_2 - 12x_3 \\ y = x_3 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -6 & 0 \\ 0 & 1 & -12 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y = [0 \quad 0 \quad 1] \mathbf{x} \end{cases}$$

原系统的一个实现为  $\Sigma(A, \mathbf{b}, \mathbf{c}^T)$ , 其中:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -6 & 0 \\ 0 & 1 & -12 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}^T = [0 \quad 0 \quad 1]$$

## TD4-3-2 极点配置算法举例

原系统的一个实现为  $\Sigma(A, b, c^T)$ , 其中:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -6 & 0 \\ 0 & 1 & -12 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad c^T = [0 \quad 0 \quad 1]$$

可求得变换阵  $T$ :  $T^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -12 \\ 1 & -18 & 144 \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} 72 & 18 & 1 \\ 12 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

于是可得能控标准型  $\Sigma(\tilde{A}, \tilde{b}, \tilde{c}^T)$ , 其中:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -72 & -18 \end{bmatrix}, \quad \tilde{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{c}^T = [1 \quad 0 \quad 0]$$

## TD4-3-2 极点配置算法举例

(4) 确定能控标准型  $\Sigma(\tilde{A}, \tilde{b}, \tilde{c}^T)$  的状态反馈阵  $\tilde{k}^T$ 。

令  $\tilde{k}^T = [\tilde{k}_1, \tilde{k}_2, \tilde{k}_3]$ , 由以下两式求出反馈阵  $\tilde{k}^T$ :

$$f^*(s) = s^3 + 114.1s^2 + 1510s + 10000$$

$$f(s) = s^3 + 18s^2 + 72s$$

则

$$\tilde{k}_1 = \alpha_1^* - p_1 = 10000 - 0 = 10000$$

$$\tilde{k}_2 = \alpha_2^* - p_2 = 1510 - 72 = 1438$$

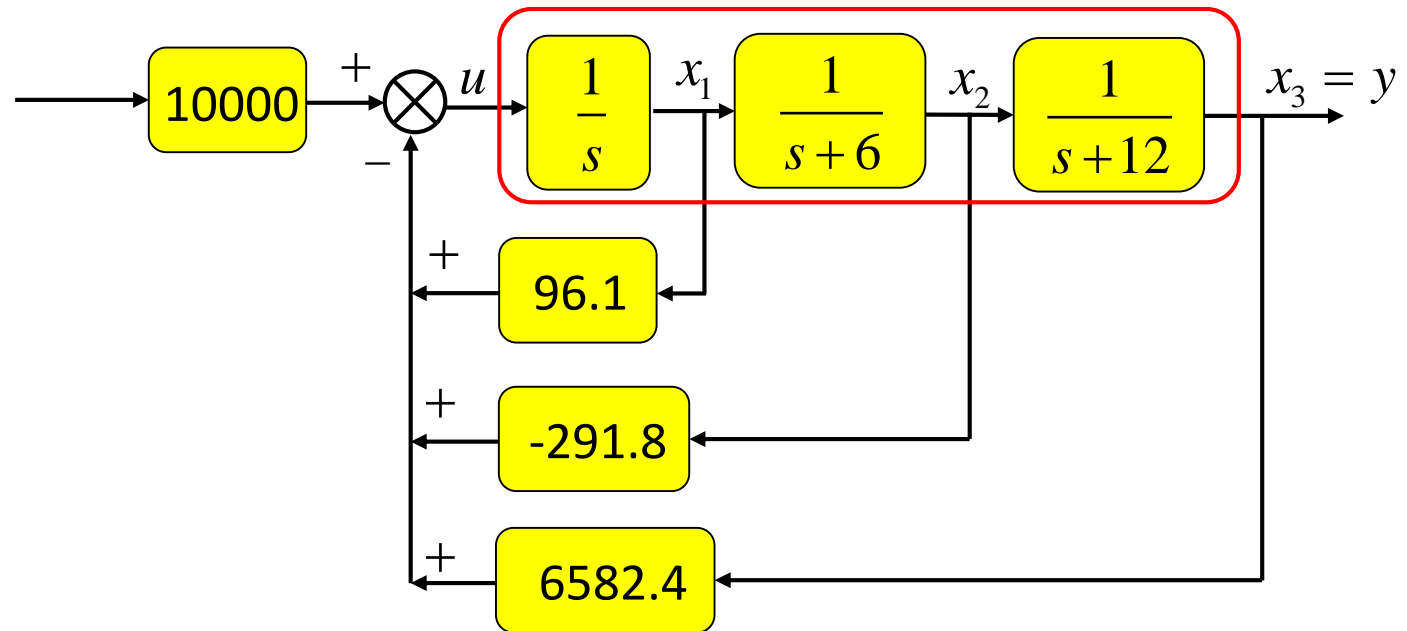
$$\tilde{k}_3 = \alpha_3^* - p_3 = 114.1 - 18 = 96.1$$

## TD4-3-2 极点配置算法举例

(5) 确定原系统  $\Sigma(A, b, c^T)$  的状态反馈  $k^T$

$$k^T = \tilde{k}^T T^{-1} = [10000 \quad 1438 \quad 96.1] \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -12 \\ 1 & -18 & 144 \end{bmatrix}$$
$$= [96.1 \quad -291.8 \quad 6582.4]$$

(6) 画出方框图：



## TD4-3-2 极点配置算法举例

- 例2：某倒立摆的状态方程为：

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 11 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} u$$

其特征多项式是： $f(\lambda) = |\lambda I - A| = \lambda^4 - 11\lambda^2 = \lambda^2(\lambda^2 - 11)$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \lambda_3 = \sqrt{11}, \lambda_4 = -\sqrt{11}$$

系统很不稳定，这和我们从物理意义上预计的一致。现在要设计状态反馈，使系统稳定，并且使  $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2, \lambda_{3,4} = -1 \pm j$ 。

## TD4-3-2 极点配置算法举例

- 解：(1) 检查系统的能控性，求取能控性矩阵

$$\mathbf{Q}_k = [\mathbf{b} \quad \mathbf{A}\mathbf{b} \quad \mathbf{A}^2\mathbf{b} \quad \mathbf{A}^3\mathbf{b}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -11 \\ -1 & 0 & -11 & 0 \end{bmatrix}$$

因为  $|\mathbf{Q}_k| = 100$ ,  $\text{rank } \mathbf{Q}_k = 4$  , 所以系统完全能控。

(2) 化为能控标准型或直接计算，本题采用后者，所以本步骤省略。

(3) 求闭环系统的特征多项式。令  $\mathbf{k}^T = [k_1 \quad k_2 \quad k_3 \quad k_4]$



## TD4-3-2 极点配置算法举例

$$\begin{aligned} f_k(s) &= \left| s\mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T) \right| = \left| s\mathbf{I} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -11 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} [k_1 \quad k_2 \quad k_3 \quad k_4] \right| \\ &= \begin{vmatrix} s & -1 & 0 & 0 \\ k_1 & s+k_2 & 1+k_3 & k_4 \\ 0 & 0 & s & -1 \\ -k_1 & -k_2 & -k_3-11 & s-k_4 \end{vmatrix} = s^4 + (k_2 - k_4)s^3 + (k_1 - k_3 - 11)s^2 - 10k_2s - 10k_1 \end{aligned}$$

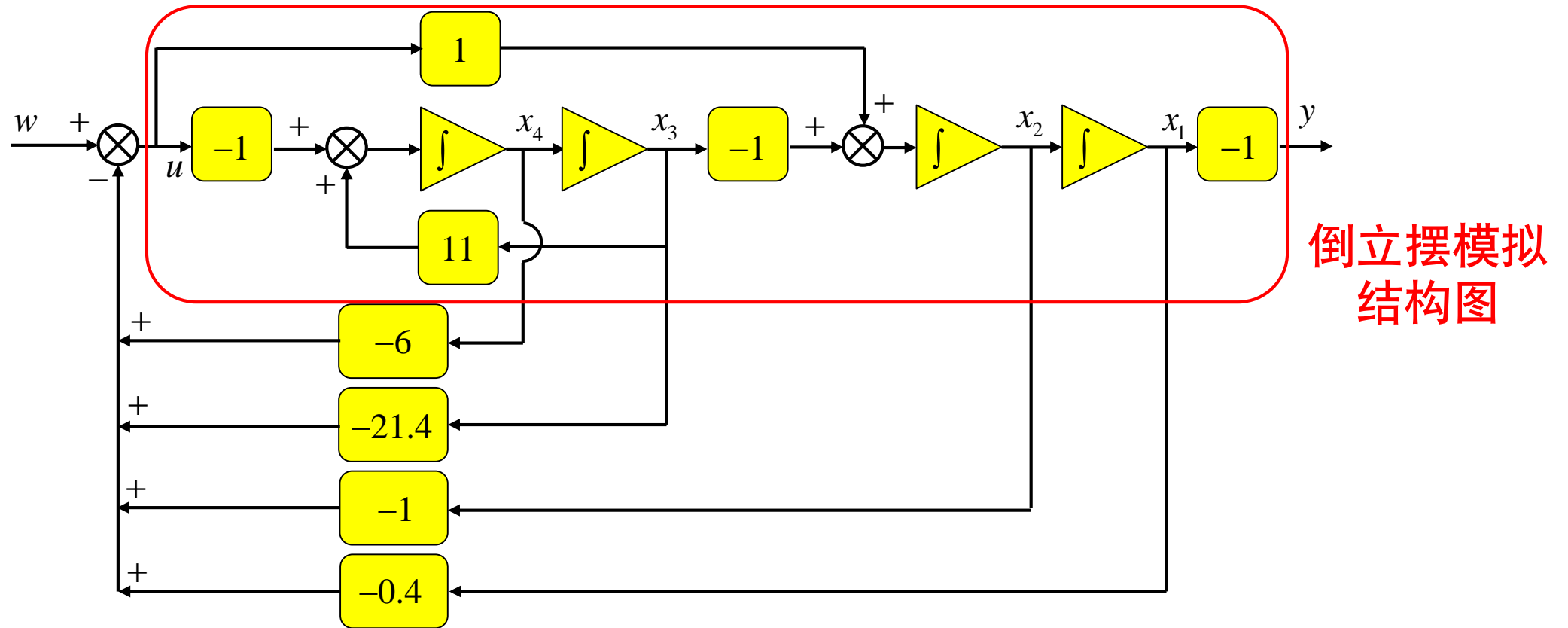
(4) 期望的特征多项式为  $f^*(s) = (s+1)(s+2)(s+1+j)(s+1-j) = s^4 + 5s^3 + 10s^2 + 10s + 4$

上述两式对应项系数应相等，即得：  $k_1 = -0.4, k_2 = -1, k_3 = -21.4, k_4 = -6$

所以有：  $\mathbf{k}^T = [-0.4 \quad -1 \quad -21.4 \quad -6]$

## TD4-3-2 极点配置算法举例

(5) 画出反馈系统模拟结构图



## TD4-3-2 极点配置算法举例

由极点配置定理可知，系统完全能控是闭环极点任意配置的条件。换言之，系统完全能控，则可以任意配置全部  $n$  个闭环极点。并且，对于单变量系统，实现极点配置的状态反馈阵  $k^T$  是唯一的。

当不满足条件时，显然不能任意配置闭环极点，但是，有可能配置一些特定的极点组。

## TD4-3-2 极点配置算法举例

问：若系统不完全能控，能否实现极点任意配置？

系统不完全能控，则不能任意配置全部  $n$  个闭环极点；

若系统能控子系统的维数为  $r$  ( $r < n$ )，则只能任意配置可控的  $r$  个极点；当其余  $(n-r)$  个不能控的极点恰好出现在所期望的极点组中，则可以配置该特定的极点组。

由于状态反馈无法改变系统的不能控模态，当系统不完全能控时，若希望的极点组中包含了系统所有不能控模态时，这组期望极点也是可以配置的。

## TD4-3-2 极点配置算法举例

- 例1：右图所示为一电容电阻构成的电路，设  $RC = 1/3$ ,

则得系统的状态方程为：
$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

系统的特征值为  $\lambda = -1, \lambda = -3$

将系统化为如下的对角标准型 
$$\dot{\tilde{x}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \tilde{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

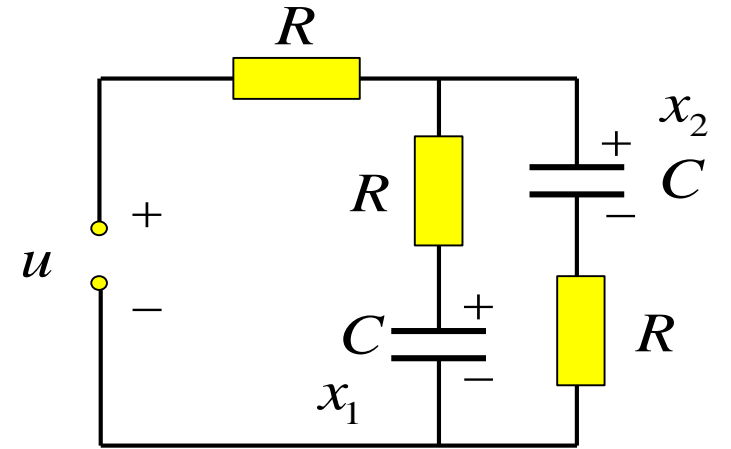


图1

易知，模态  $e^{-t}$  可被  $u$  控制，而模态  $e^{-3t}$  无法被  $u$  控制。

因此系统不完全能控，则不能通过状态反馈任意配置 2 个闭环极点。然而，当要求配置的希望极点是  $\{-4, -3\}$ ，即包含了系统的不能控模态时，这组期望极点也是可以配置的。

## TD4-3-2 极点配置算法举例

若系统不完全能控，能否配置极点？

如何配置极点？可直接进行计算。

(1) 确定可以配置的极点组；

$$(2) f_k(s) = \left| sI - (A - bk^T) \right|$$

$$(3) f^*(s) = \prod_{i=1}^n (s - \lambda_i)$$

(4) 系数相等，联立方程求解得到。

有无其他方法？

# 模块4 线性定常系统的综合

TD4-1-1 状态反馈和输出反馈（课本9.11.1节）

TD4-2-1 反馈对能控性/能观性的影响（课本9.11.2节）

TD4-3 闭环系统的极点配置（课本10.1.1-10.1.3节）

TD4-3-1 极点配置算法

TD4-3-2 极点配置算法举例

TD4-4-1 镇定问题（课本10.1.4节）

## TD4-4-1 状态空间中系统的镇定问题

假定线性系统  $\Sigma(A, B, C)$  完全能控，则一定存在线性状态反馈  $K$ ，使闭环系统  $\Sigma_K(A - BK, B, C)$  极点可任意配置。换言之，对完全能控的不稳定系统，总可以求得线性状态反馈阵  $K$ ，使系统变为渐近稳定，即  $A - BK$  的特征值均在  $s$  平面的左边。这就是镇定问题。

可见，镇定问题是极点配置问题的一个特例。

在镇定问题中，只要求极点配置在  $s$  平面的左边，而不必在具体某个位置上。所以对系统  $\Sigma(A, B, C)$ ，若存在状态反馈阵  $K$ ，使闭环系统  $\Sigma_K(A - BK, B, C)$  的极点都具有负实部，则称原系统是状态反馈可镇定的。



# TD4-4-1 状态空间中系统的镇定问题

## • 1、状态反馈可镇定的条件

线性系统状态反馈可镇定的充分必要条件为：系统不能控的部分是渐近稳定的。

对此说明如下：假定系统已按能控性分解为如下形式：

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ \mathbf{0} & A_{22} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} B_1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \text{ 设状态反馈阵为 } K = [K_1 \quad K_2], \text{ 则}$$

$$\text{闭环系统的状态矩阵为: } A - BK = \begin{bmatrix} A_{11} - B_1 K_1 & A_{12} - B_1 K_2 \\ \mathbf{0} & A_{22} \end{bmatrix}$$

$$\text{其特征多项式为: } f_K(s) = |sI - (A - BK)| = |sI_1 - A_{11} + B_1 K_1| \cdot |sI_2 - A_{22}|$$

## TD4-4-1 状态空间中系统的镇定问题

特征多项式为：

$$f_K(s) = |s\mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{BK})| = |s\mathbf{I}_1 - \mathbf{A}_{11} + \mathbf{B}_1\mathbf{K}_1| \cdot |s\mathbf{I}_2 - \mathbf{A}_{22}|$$

显然,  $\Sigma_1(\mathbf{A}_{11}, \mathbf{B}_1)$  是能控部分, 所以上式中的  $|s\mathbf{I}_1 - \mathbf{A}_{11} + \mathbf{B}_1\mathbf{K}_1|$  部分可以通过极点配置的方法使  $\mathbf{A}_{11} + \mathbf{B}_1\mathbf{K}_1$  的极点具有负实部, 而  $\Sigma_2(\mathbf{A}_{22}, 0)$  是不能控部分, 上式中的行列式  $|s\mathbf{I}_2 - \mathbf{A}_{22}|$  说明无法通过极点配置方法改变  $\mathbf{A}_{22}$  的极点, 而必须要求  $\mathbf{A}_{22}$  的极点具有负实部。结论得证。

## TD4-4-1 状态空间中系统的镇定问题

- 例1: 右图所示为一电容电阻构成的电路, 设  $RC = \frac{1}{3}$ , 则得系统的状态方程

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

该系统是否状态反馈可镇定?

解: 系统的特征值为  $\lambda = -1, \lambda = -3$

将系统化为对角标准型

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

可知模态  $e^{-t}$  可以被  $u$  控制, 而模态  $e^{-3t}$  不可被  $u$  控制, 则不能控的极点为  $-3$ , 是渐近稳定的, 因此该系统是状态反馈可镇定的。

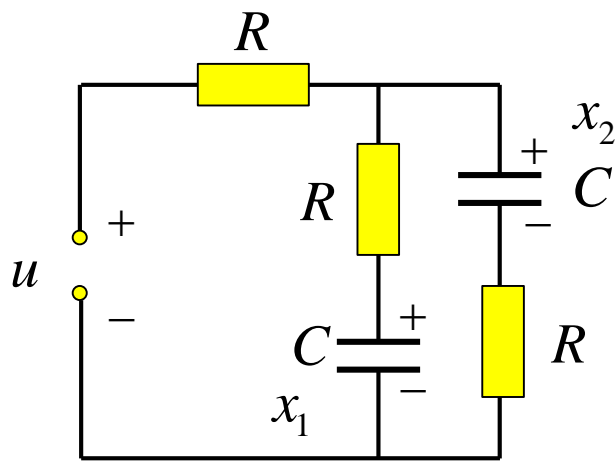


图1

## TD4-4-1 状态空间中系统的镇定问题

- 例2：分析如下不稳定系统能否通过状态反馈成为稳定系统。

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

- 解：  $\mathbf{Q}_k = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$ ,  $\text{rank } \mathbf{Q}_k = 2$ , 所以原系统不完全能控。

$$\text{取 } \mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}, \text{ 则 } \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & -5 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \mathbf{T}^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

可见，其不能控部分极点为 -2，是渐近稳定的。因此，原系统能通过状态反馈变为稳定系统。

# TD4-4-1 状态空间中系统的镇定问题

## • 2、输出反馈能镇定的条件

对于输出反馈，我们知道它保持了系统的能控性和能观性，即输出反馈不能改变系统的不能控模态和不能观模态。

假定已经将系统  $\Sigma(A, B, C)$  进行 Kalman 结构分解：

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & \mathbf{0} & A_{13} & \mathbf{0} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & A_{33} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & A_{43} & A_{44} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, C = [C_1 \quad \mathbf{0} \quad C_3 \quad \mathbf{0}]$$

其中  $(A_{11}, B_1, C_1)$  是能控且能观的； $(A_{22}, B_2, \mathbf{0})$  是能控不能观的；

$(A_{33}, \mathbf{0}, C_3)$  是不能控而能观的； $(A_{44}, \mathbf{0}, \mathbf{0})$  是不能控又不能观的。

则对于这样的系统输出反馈镇定的充分必要条件为：1) 能控又能观部分是能镇定的；2) 其它的三部分均是渐近稳定的。

## TD4-4-1 状态空间中系统的镇定问题

对此说明如下：设输出反馈阵为  $H$ ，则闭环系统矩阵为：

$$A - BHC = \begin{bmatrix} A_{11} - B_1HC_1 & \mathbf{0} & A_{13} - B_1HC_3 & \mathbf{0} \\ A_{21} - B_2HC_1 & A_{22} & A_{23} - B_2HC_3 & A_{24} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & A_{33} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & A_{43} & A_{44} \end{bmatrix}$$

其特征多项式为：

$$\begin{aligned} f_H(s) &= |sI - (A - BHC)| \\ &= |sI_1 - (A_{11} - B_1HC_1)| \cdot |sI_2 - A_{22}| \cdot |sI_3 - A_{33}| \cdot |sI_4 - A_{44}| \end{aligned}$$

可以看出，当且仅当  $A_{11} - B_1HC_1$  具有负实部的极点，即能控又能观部分为输出反馈能镇定， $A_{22}$ ， $A_{33}$ ， $A_{44}$  均具有负实部的极点。即其余三部分为渐近稳定的时候，闭环系统才是渐近稳定的。

这说明了结论的正确性。