# 误差分析

# 总论

误差 = 模型误差+观测误差+**方法误差（截断误差）+舍入误差**

本人才疏学浅，水平有限，纰漏之处，还望海涵@@，by 大伟

# 插值

- 泰勒展开截断误差：

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1},\xi\text{在}0\text{到}x\text{之间。}$$

- Lagrange 插值截断误差：

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x),\xi\text{在}x_0,\ldots,x_n\text{界定的区间内。}$$

其中，$\omega_{n+1}(x)=(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$

- 牛顿前插公式（等距）：

$$R_n(x)=\frac{t(t-1)\cdots(t-n)}{n!}h^{n+1}f^{(n+1)}(\xi),\xi\in(x_0,x_n)$$

- 埃尔米特插值截断误差（插值函数在插值节点的函数值、一阶导值相同）：

$$R_{2n+1}(x)=\frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}\omega_{n+1}^2(x),\xi\text{在}x_0,\ldots,x_n\text{界定的区间内。}$$

分段插值就是在每个分段区间上用以上方法分析，具体到：

- 分段线性插值：

$$|R(x)|\le\frac{1}{8}M_2\left(\frac{b-a}{n}\right)^2$$

- 分段埃尔米特：

$$|R(x)|\le\frac{1}{384}M_4\left(\frac{b-a}{n}\right)^4$$

- 三次样条插值：

$$|R(x)|\le\frac{5}{384}M_4\left(\frac{b-a}{n}\right)^4$$

# 最佳逼近

用插值多项式近似最佳一致逼近多项式（插值节点利用切比雪夫）

$$\max\left|f(x)-L_{n-1}^{*}(x)\right|\leq\frac{M_n(b-a)^n}{n!2^{2n-1}}$$

# 数值积分、微分

- 梯形公式

$$R_T=-\frac{(b-a)^3}{12}f''(\eta)$$

- 矩形公式：

$$R(f)=\frac{(b-a)^3}{24}f''(\eta)$$

- 辛普森公式：

$$R(f)=-\frac{(b-a)^5}{2880}f^{(4)}(\eta)$$

- 复化梯形

$$R(f)=-\frac{(b-a)h^2}{12}f''(\eta)$$

- 复化辛普森

$$R(f)=-\frac{(b-a)h^4}{2880}f^{(4)}(\eta)$$

# 常微分方程

见老师补充讲义，附在此处

- 欧拉法

已知 $\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$　　求 $y(x^*)$

$$h = \frac{x^* - x_0}{N}$$

总误差 $$|y_{n+1} - y(x_{n+1})| \le \overbrace{|\bar{y}_{n+1} - y(x_{n+1})|}^{\text{方法累积误差}} + \overbrace{|y_{n+1} - \bar{y}_{n+1}|}^{\text{存贮累积误差}}$$

其中 $\bar{y}_{n+1}$ 为不考虑存贮误差的计算结果

欧拉方法： $y_{n+1} = y_n + h f(x_n, y_n)$

方法累积误差：　　$\exists\, \xi_n, \eta_n$

$$\Delta_{n+1} = \left[1 + h \frac{\partial f}{\partial y}(x_n, \eta_n)\right] \Delta_n + \frac{h^2}{2} y^{(2)}(\xi_n)$$

若 $\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right| \le M$，$|y^2(x)| \le L$

则有　$$\Delta_{n+1} \le (1 + hM)\Delta_n + \frac{L \cdot h^2}{2}$$

可有　$$\Delta_{n+1} + \frac{1}{hM} \cdot \frac{Lh^2}{2} \le (1 + hM)\left[\Delta_n + \frac{1}{hM} \cdot \frac{Lh^2}{2}\right]$$

$$\le \cdots \le \underbrace{(1 + hM)^{n+1}}_{\text{趋近于常量}} \cdot \frac{1}{hM} \cdot \frac{Lh^2}{2}$$

欧拉方法 $y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$

如果考虑每步的存贮误差 $\frac{1}{2}\times 10^{-m}$

其存贮误差累积到 $n+1$ 步时，

$$\delta_{n+1} \le \left[1 + h\cdot\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x_n, y_n)\right|\right]\cdot \delta_n + \frac{1}{2}\times 10^{-m}$$

若 $\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right| \le M$，则有

$$\delta_{n+1} \le (1+hM)\cdot \delta_n + \frac{1}{2}\times 10^{-m}$$

$$\begin{aligned} \delta_{n+1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{hM}\cdot 10^{-m} &\le (1+hM)\left[\delta_n + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{hM}\cdot 10^{-m}\right] \\ &\le \cdots \le (1+hM)^{n+1}\left[\delta_0 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{hM}\cdot 10^{-m}\right] \\ &= (1+hM)^{n+1}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{hM}\cdot 10^{-m} \end{aligned}$$

同时考虑方法累积误差与存贮累积误差时？

- 改进欧拉法

改进欧拉法

$$\begin{cases}\bar{y}_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)\\ y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, \bar{y}_{n+1})]\end{cases}$$

方法累积误差：

$$\begin{cases}\bar{\Delta}_{n+1} \le (1+hM)\Delta_n + \frac{L}{2}\cdot h^2\\ \Delta_{n+1} \le \Delta_n + \frac{h}{2}\cdot M\cdot \Delta_n + \frac{h}{2}M\cdot \bar{\Delta}_{n+1} + \frac{T\cdot h^3}{12}\end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \Delta_{n+1} \le \left(1+hM+\frac{h^2}{2}M^2\right)\cdot \Delta_n + \left(\frac{LM}{4}+\frac{T}{12}\right)\cdot h^3$$

其中 $\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| \le M$, $\left|y^{(2)}(x)\right| \le L$, $\left|y^{(3)}(x)\right| \le T$

舍入误差累积：

$$\begin{cases}\bar{\delta}_{n+1} \le (1+hM)\delta_n + \frac{1}{2}\times 10^{-m}\\ \delta_{n+1} \le \delta_n + \frac{h}{2}M\cdot \delta_n + \frac{h}{2}\cdot M\cdot \bar{\delta}_{n+1} + \frac{1}{2}\times 10^{-m}\end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \delta_{n+1} \le \left(1+hM+\frac{h^2\cdot M^2}{2}\right)\delta_n + \left(1+\frac{hM}{2}\right)\cdot \frac{1}{2}\times 10^{-m}$$

# 方程求根

- 牛顿法

见补充讲义

对于一般的非线性方程求根方法，都有

$$e_{n+1} = \varphi'(x^*)e_n + \frac{1}{2}\varphi''(x^*)e_n^2 + \cdots + \frac{1}{m!}\varphi^{(m)}(\xi)e_n^m$$

牛顿法 $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \qquad \varphi'(x^*) = 0$$

有 $e_{n+1} = \dfrac{1}{2}\varphi''(\xi_n)e_n^2$

选初始区间 $[x^*-\delta, x^*+\delta]$，记其上 $\max|\varphi''(x)| = M$

则有 $|e_{n+1}| \le \dfrac{M}{2}|e_n|^2$

$$\frac{M}{2}|e_{n+1}| \le \left[\frac{M}{2}|e_n|\right]^2 \le \cdots \le \left[\frac{M}{2}|e_0|\right]^{2^{n+1}}$$

即 $|e_{n+1}| \le \dfrac{2}{M}\cdot\left[\dfrac{M}{2}|e_0|\right]^{2^{n+1}}$

当 $\dfrac{M}{2}\cdot|e_0| < 1$ 时收敛

事实上此条件要求并不高，

比较 $\begin{cases} |e_{n+1}| \le \dfrac{M}{2}\cdot|e_n|^2 \\ |e_{n+1}| \le L\cdot|e_n| \end{cases}$ $\dfrac{M}{2}\cdot|e_0|$ 与 $L$ 相当

1阶收敛 $|e_n| \sim L^n$

2阶收敛 $|e_n| \sim L^{2^n}$

# 线性方程组求解

- A、b 均有误差

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} = cond(A)\left(\frac{\|\delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}\right)$$