数值分析与算法 课程例题

第二章 插值法

Q：（10 分）已知 $f(x)=\ln x$ 的数值表：

x	0.4	0.5	0.6
$\ln x$	-0.916291	-0.693147	-0.510826

以上述 3 个点作为插值节点，用拉格朗日插值计算 $\ln 0.54$ 的值，并分析在 $[0.4, 0.6]$ 区间内该插值方法的方法误差上界。

A：设表中各节点自变量依次为 $x_0, x_1, \dots, x_n$, 对应的函数值为 $y_0, y_1, \dots, y_n$ $(n=2)$，则由拉格朗日插值基函数

$$l_k(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_{n-1})(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_{n-1})(x_k-x_n)}$$

得 $l_0(0.54)=\frac{0.04\times(-0.06)}{(-0.1)\times(-0.2)}=-0.12$，同理有 $l_1(0.54)=0.84$, $l_2(0.54)=0.28.$

从而根据

$$L_n(x)=\sum_{i=0}^{n} l_i(x)\cdot y_i$$ ……（公式 3 分）

有 $\ln 0.54 \approx L_n(0.54)=(-0.12)\times(-0.916291)+0.84\times(-0.693147)+$
$0.28\times(-0.510826)=-0.615320.$ ……（计算 2 分）

再由拉格朗日插值的方法误差

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$$ ……（公式 2 分）

其中，

$$\left|f^{(n+1)}(\xi)\right|=\left|(\ln x)^{(3)}|_{x=\xi\in[0.4,0.6]}\right|=\left|\frac{2}{\xi^3}\right|\le\frac{2}{0.4^3}$$ ……（导数 1 分）

下面再求 $(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$ 的最值，等价于求定义在 $[-0.1, 0.1]$ 上

的函数 $g(x)=x(x+0.1)(x-0.1)$ 的最大最小值。

$$g(x)=x(x^2-0.01)=x^3-0.01x$$

$$g'(x)=3x^2-0.01=3\left(x-\frac{\sqrt{3}}{30}\right)\left(x+\frac{\sqrt{3}}{30}\right)$$

函数极值在 $\pm\frac{\sqrt{3}}{30}$ 取得，最值必在极点和端点处取得，解得 $-3.85\times10^{-4}\leq g(x)\leq 3.85\times10^{-4}$. 故有

$|(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)|\leq 3.85\times10^{-4}$ ……（最值 1 分）

从而方法误差为

$|R_n(x)|\leq\frac{2}{0.4^3}\times\frac{1}{3!}\times3.85\times10^{-4}=2.005\times10^{-2}$ ……（结果 1 分）

综上所述，$\ln 0.54$ 的近似值为 -0.615320，方法误差不超过 0.02005.

注：如有相似考题，所标得分点不代表和考试得分点一模一样。