第二次数值分析大作业

何东阳 2019011462 自96

1 求解$W_0(z)$ — 数值法解微分方程

(1) 证明

$$
\begin{gathered}
\text{已知}we^{w}=z\text{，可以写作：}\\
w(z)e^{w(z)}=z\text{，两边同时对}z\text{求导}(z\neq -\frac{1}{e})\\
(w(z)e^{w(z)})'=1\\
w(z)'e^{w(z)}+w(z)w(z)'e^{w(z)}=1\\
\text{又}w(z)e^{w(z)}=z\text{，所以可得：}\\
w(z)'=\frac{1}{z+e^{w(z)}}\text{，得证}
\end{gathered}
$$

(2) 编程求解与误差分析

我编程求解使用的方法是改进的欧拉法，预测使用的是欧拉二步公式，校正使用的是梯形公式。

$$
\begin{cases}\bar{y}_{n+1}=y_n+hf\left(x_n,y_n\right)\\ y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}\left[f\left(x_n,y_n\right)+f\left(x_{n+1},\bar{y}_{n+1}\right)\right]\end{cases}
$$

分析**方法误差**

$$
\begin{gathered}
\begin{cases}\bar{\Delta}_{n+1}\leq(1+hM)\Delta_n+\frac{L}{2}h^2\\ \Delta_{n+1}\leq\Delta_n+\frac{h}{2}M\Delta_n+\frac{h}{2}M\bar{\Delta}_{n+1}+\frac{T\cdot h^3}{12}\end{cases}\\
\Rightarrow\Delta_{n+1}\leq\left(1+hM+\frac{h^2}{2}M^2\right)\Delta_n+\left(\frac{LM}{4}+\frac{T}{12}\right)h^3\\
\text{其中}\ \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right|\leq M,\left|y^{(2)}(x)\right|\leq L,\left|y^{(3)}(x)\right|\leq T\\
\Delta_{n+1}+\frac{\frac{LM}{4}+\frac{T}{12}h^3}{hM+\frac{h^2}{2}M^2}\leq(1+hM+\frac{h^2}{2}M^2)^{n+1}\cdot\frac{\frac{LM}{4}+\frac{T}{12}h^3}{hM+\frac{h^2}{2}M^2}
\end{gathered}
$$

又

$$
\begin{gathered}
\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right|=\frac{1}{(z+e^{W(z)})^2}\cdot e^{W(z)}\leq 1\\
\left|y^{(2)}(x)\right|=\frac{1}{(z+e^{W(z)})^2}(1+W(z)'e^{W(z)})\leq 2\\
\left|y^{(3)}(x)\right|=\frac{2}{(z+e^{W(z)})^3}(1+W(z)'e^{W(z)})\leq 9
\end{gathered}
$$

因此可以得到

$$M=1, L=2, T=9$$

带入得到方法误差为：

$$\Delta_{n+1} \leq 0.25 \times 10^{-m}$$

分析**舍入误差**

$$\begin{cases} \bar{\delta}_{n+1} & \leq (1+hM)\delta_n + \frac{1}{2} \cdot 10^{-m} \\ \delta_{n+1} & \leq \delta_n + \frac{h}{2}M\delta_n + \frac{h}{2}M\bar{\delta}_{n+1} + \frac{1}{2} \cdot 10^{-m} \end{cases}$$
$$\Rightarrow \delta_{n+1} \leq \left(1 + hM + \frac{h^2}{2}M^2\right)\delta_n + \left(1+\frac{hM}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} \cdot 10^{-m}$$
$$\delta_{n+1} \leq \left(\left(1+hM+\frac{h^2}{2}M^2\right)^{n+1} - 1\right)\frac{\left(1+\frac{hM}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} \cdot 10^{-m}}{hM + \frac{h^2}{2}M^2}$$

代入M, L, T得到：

$$\delta_{n+1} \leq 0.25 \times 10^{-m}$$

以$z=2$为例解出来的得到（精确到小数点后六位）

$$W_0(2) = 0.852606$$

3 求解定积分

本报告中**a = 1**：

(1)

$$\begin{aligned} \int_0^a W_0(z)dz &= \int_{w_0(0)}^{w_0(a)} wd(we^w) \\ &= \int_{w_0(0)}^{w_0(a)} w(w+1)e^w dw \\ &= w(w+1)e^w|_{w_0(0)}^{w_0(a)} - (2w+1)e^w|_{w_0(0)}^{w_0(a)} + 2e^w|_{w_0(0)}^{w_0(a)} \end{aligned}$$

分析方法误差：

此题使用解析解直接带求值，因此没有方法误差。

分析舍入误差：

$$|\Delta \mathrm{A}| \leq \max\left|\left(\frac{\partial I}{\partial x}\right)\right| |\Delta x|$$
$$= \max\left|\left(\frac{\partial I}{\partial x}\right)\right| \times \frac{1}{2} \times 10^{-m}$$
$$= M \times \frac{1}{2} \times 10^{-m}$$

其中M是当 $z=1$时的积分一次导数的最大值。

(2)

因为此题的积分无法计算出确切的解析表达式，因此我使用复化梯形公式进行了积分的估算：

首先，将原积分进行换元为

$$
W_0(z)=t^2
$$
$$
z=t^2e^{t^2}
$$
$$
I=\int_0^{\sqrt{W_0(a)}}\left(2t^2+2t^4\right)e^{t^2}dt
$$

又复化梯形公式为：

$$
I=\frac{h}{2}\left[f(a)+2\sum_{k=1}^{n-1}f\left(x_k\right)+f(b)\right]
$$
$$
f(t)=(2t^2+2t^4)e^{t^2}
$$

误差分析：

分析方法误差：

$$
|R[f]|=\frac{n\cdot h^3}{12}|f''(\eta)|=\frac{ah^2}{12}|f''(\eta)|
$$

又，

$$
f''(t)=\left(8t^6+44t^4+44t^2+4\right)e^{t^2},0\leq t\leq\sqrt{W_0(a)}
$$

故，

$$
f''(\eta)\leq\left(8W_0^3(a)+44W_0^2(a)+44W_0(a)+4\right)e^{W_0(a)}
$$

所以方法误差：

$$
|R[f]|\leq\frac{ah^2}{12}\left(8W_0^3(a)+44W_0^2(a)+44W_0(a)+4\right)e^{W_0(a)}
$$

分析舍入误差：

$$
\delta\leq\left|\frac{\partial I}{\partial h}\right|\delta h+\sum_{0\leq k\leq n}\left|\frac{\partial I}{\partial f\left(x_k\right)}\right|\delta f\left(x_k\right)+\frac{1}{2}\times10^{-m}
$$
$$
\delta f\left(x_k\right)\leq\left|f'\left(x_k\right)\right|\delta x_k+\frac{1}{2}\times10^{-\mathrm{m}}
$$
$$
\delta h,\delta x_k\leq\frac{1}{2}\times10^{-\mathrm{m}}
$$

代入以下值的上界即可，

$$
\left|\frac{\partial I}{\partial h}\right|,\left|f'\left(x_k\right)\right|,\sum_{0\leq k\leq n}\left|\frac{\partial I}{\partial f\left(x_k\right)}\right|
$$

(3)

代入$a=1$，第一问得到**0.330366**，第二问得到**0.550832**