自动控制理论（1）作业十六

作业内容：在教材第七章内容和电子讲义的基础上，试解答以下题目。
学习目的：非线性系统分析
提交时间：12月26日上课交，或交电子版致网络学堂截至12月26日24时

书上 7.16, 7.17, 7.18

7.16

7.16 给定非线性系统 $\ddot{x}+\dot{x}+|x|=0$，试分析该系统奇点的性质，并用等倾线方法大致画出系统的相平面图.

解：

7.16 解：令 $x_1=x$，$x_2=\dot{x}$

则 $\begin{cases}\dot{x}_1=\dot{x}=x_2\\ \dot{x}_2=\ddot{x}=-\dot{x}-|x|=-x_2-|x_1|\end{cases}$

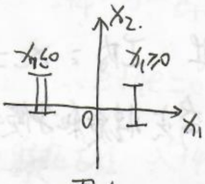


图1.

故以如图1. 当 $x_1\ge 0$ 时. 对应区域Ⅰ. $\dot{x}_2=-x_2-x_1$

当 $x_1\le 0$ 时. 对应区域Ⅱ. $\dot{x}_2=-x_2+x_1$.

① 当 $x_1\ge 0$ 时. $\begin{cases}\dot{x}_1=x_2=0\\ \dot{x}_2=-x_2-x_1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=0\\ x_2=0\end{cases}$ ∴ 奇点 (0,0) 為在区域Ⅰ中的实奇点.

$\begin{bmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix}$ 令 $x=x_1$ 则 $\dot{x}=\dot{x}_1=x_2$

$\ddot{x}=\ddot{x}_1=\dot{x}_2=-x_1-x_2$.

消去 x_2，$\ddot{x}=-x_1-\dot{x}=-x-\dot{x}$ ∴ $\ddot{x}+\dot{x}+x=0$

特征方程 $\lambda^2+\lambda+1=0$，特征根为 $\lambda_{1,2}=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

∴ (0,0) 是区域Ⅰ中的稳定焦点.

② 当 $x_1\le 0$ 时. 同理可得特征方程为：$\lambda^2+\lambda-1=0$ 特征根为 $\lambda_{1,2}=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{5}}{2}$

∴ (0,0) 是区域Ⅱ中的鞍点.

综上，奇点的性质为：(0,0) 是图1中区域Ⅰ中的稳定焦点，区域Ⅱ中的鞍点.

等倾线法：① $\alpha=0$ 时 Ⅰ内：$x_2=-x_1$ Ⅱ内：$x_2=x_1$

$\frac{dx_2}{dx_1}=\frac{-x_2-|x_1|}{x_2}=-1-\frac{|x_1|}{x_2}=\alpha$

② $\alpha=\infty$ 时 Ⅰ内：$x_2=0$ Ⅱ内：$x_2=0$

③ $\alpha=1$ 时 Ⅰ内 $x_2=\frac{-x_1}{2}$ Ⅱ内：$x_2=\frac{x_1}{2}$

∴ $x_2=\frac{-|x_1|}{1+\alpha}$

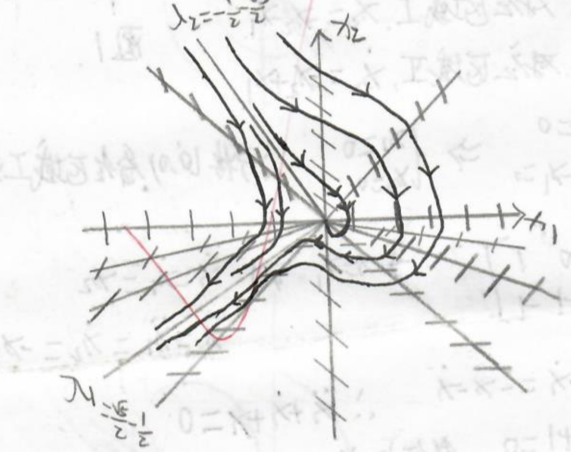
④ $\alpha=-1$ 时 Ⅰ内 $x_1=0$，Ⅱ内：$x_1=0$

⋮

当 $\alpha=2$ 时　I 内：$x_2=\frac{x_1}{3}$　II 内：$x_2=\frac{x_1}{3}$

当 $\alpha=-2$ 时　I 内：$x_2=x_1$　II 内：$x_2=-x_1$

所以根据奇点性质和等倾线绘制相轨迹：



右半平面，奇点为原点，稳定焦点

左半平面，奇点为原点、鞍点

7.17

7.17　给定系统如图 7.E.10 所示. 假定输入 $r=0$，系统仅受初始条件的作用. 试在 e-$\dot{e}$ 平面上画出该系统在 $K=0$ 和 $K=1$ 时的相平面图.

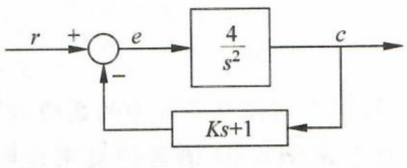


图 7.E.10　题 7.17 的系统

解：

解：① k=0 时，系统误差 $E(s)=R(s)-C(s)=R(s)-\frac{4}{s^2+4}R(s)=\frac{s^2}{s^2+4}R(s)$

∴ $\ddot{e}+4e=\ddot{r}$ ∵输入 $r=0$ ∴ $\ddot{r}=0$ ∴ $\ddot{e}+4e=0$ $e(0)=0$ $\dot{e}(0)=0$

令 $\begin{cases}x_1=e\\x_2=\dot{e}\end{cases}$ ∴ $\begin{cases}\dot{x}_1=x_2\\\dot{x}_2=-4x_1\end{cases}$ 奇点为 $(0,0)$. 特征方程 $\lambda^2+4=0$ ∴ $\lambda_1=2i, \lambda_2=$

∴ $(0,0)$ 为中心点.

且 $\alpha=\frac{-4x_1}{x_2}$ ∴ $x_2=\frac{-4x_1}{\alpha}$

$\alpha=0$ 时 $x_1=0$

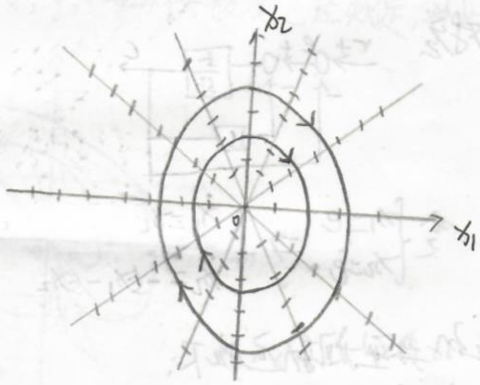
$\alpha=\infty$, $x_2=0$

$\alpha=1$, $x_2=-4x_1$

$\alpha=-1$, $x_2=4x_1$

$\alpha=4$, $x_2=-x_1$

$\alpha=-4$, $x_2=x_1$



② k=1 时 系统误差 $E(s)=R(s)-C(s)=\left(1-\frac{4}{s^2+4s+4}\right)R(s)=\frac{s^2+4s}{s^2+4s+4}R(s)$

∴ $\ddot{e}+4\dot{e}+4e=\ddot{r}+4\dot{r}$ ∵输入 $r=0$ ∴ $\ddot{r}=0$ $\dot{r}=0$ ∴ $\ddot{e}+4\dot{e}+4e=0$.

而 $e(0)=0$ $\dot{e}(0)=0$ $\ddot{e}(0)=0$ 令 $\begin{cases}x_1=e\\x_2=\dot{e}\end{cases}$ ⇒ $\begin{cases}\dot{x}_1=x_2\\\dot{x}_2=-4x_1-4x_2\end{cases}$ 特征方程 $\lambda^2+4\lambda+4=0$ $\lambda_1=\lambda_2=-2$.

∴ 奇点 $(0,0)$ 为稳定节点.

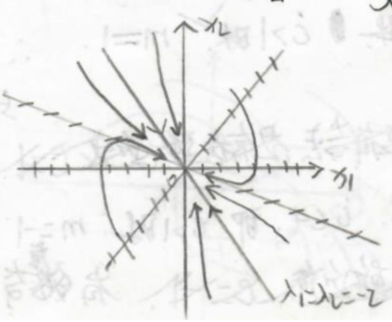
且 $\alpha=\frac{-4x_1-4x_2}{x_2}$ ∴ $x_2=\frac{-4x_1}{4+\alpha}$

$\alpha=0$, $x_2=-x_1$

$\alpha=\infty$ $x_2=0$

$\alpha=-2$ $x_2=-2x_1$

$\alpha=-8$ $x_2=x_1$



k=0, 奇点为原点，中心点

k=1, 奇点为原点，稳定节点

7.18

7.18 图 7.E.11 是一个具有非线性反馈增益的二阶系统，图中 $K=5$，$J=1$，$a=1$.

(1) 设 $r=0$，试在 e-$\dot{e}$ 平面上画出该系统在不同初始条件下的典型相轨迹；

(2) 在系统处于静止状态时加斜坡输入 $r=Vt$，试在 e-$\dot{e}$ 平面上画出系统的相轨迹.

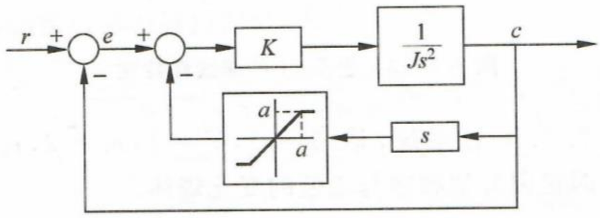
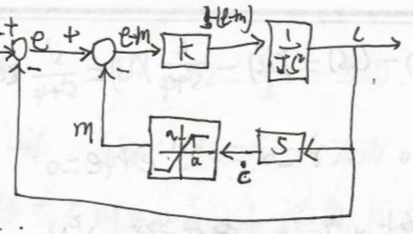


图 7.E.11　题 7.18 的非线性系统

解：

7.18 解：



如上图，设非线性环节的输出为 m.

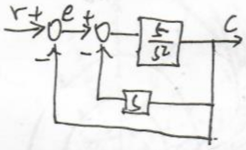
有如下方程：$\begin{cases} E(s) = R(s) - C(s) \\ C(s) = [E(s) - M(s)] \cdot \frac{5}{s^2} \\ M(s) = s\,C(s) \cdot F(s) \end{cases}$

其中 $F(s)$ 代表非线性操作.

① ~~初始时~~. $|\dot{c}|<1$ 时. $M(s) = s \cdot C(s)$. 而 $\dot{e} = \dot{r} - \dot{c} = -\dot{c}$

$\therefore |\dot{e}|<1$.

对应



$\therefore C(s) = \frac{5}{s^2+5s+5} R(s)$ $E(s) = R(s) - C(s) = \frac{s^2+5s}{s^2+5s+5} R(s)$

$\therefore \ddot{e} + 5\dot{e} + 5e = \ddot{r} + 5\dot{r} = 0$

令 $\begin{cases} x_1 = e \\ x_2 = \dot{e} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -5x_1 - 5x_2 \end{cases}$

$\therefore (0,0)$ 是奇点 使 $\lambda^2 + 5\lambda + 5 = 0$ $\lambda_1 = \frac{-5-\sqrt{5}}{2}$ $\lambda_2 = \frac{-5+\sqrt{5}}{2}$

$\therefore (0,0)$ 是稳定节点.

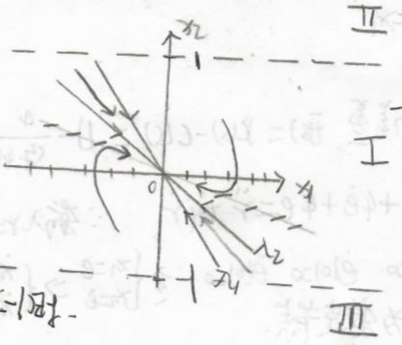
对应的~~典型~~相轨迹如下：

在图中将三个区域分割是：

Ⅰ：$|\dot{c}|<1$，即 $|\dot{e}|<1$

Ⅱ：$\dot{c}<-1$ 即 $\dot{e} = -\dot{c} > 1$

Ⅲ：$\dot{c}>1$ 即 $\dot{e} = -\dot{c} < -1$.



→ 非完整结果.

即 $\dot{e}<-1$ 时.

② 若~~初始时~~. $\dot{c}>1$ 时. $m=1$. $\therefore e = r - c$

$5(e-1) = \ddot{c} = (\ddot{r} - \ddot{e})$ $\therefore \ddot{e} + 5e = \ddot{r} + 5 = 5$.

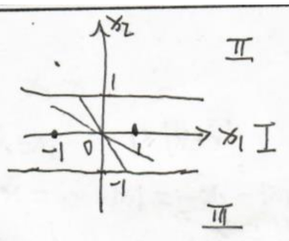
~~这时没有奇点 但存在渐近线 e=1~~

$\begin{cases} x_1 = \dot{e} = x_2 = 0 \\ x_2 = \ddot{e} = 5 - 5x_1 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \end{cases}$ ~~是~~虚奇点 $(1,0)$ 为中心点

③ 若~~初始时~~. $\dot{c}<-1$，即 $\dot{e}>1$ 时. $m=-1$ $5(e+1) = \ddot{c} = -\ddot{e}$ $\therefore \ddot{e} + 5e = -5$.

~~有渐近线 e=-1~~. 有虚奇点 $(-1,0)$，且为中心点.

综上：



相平面分三个区域：

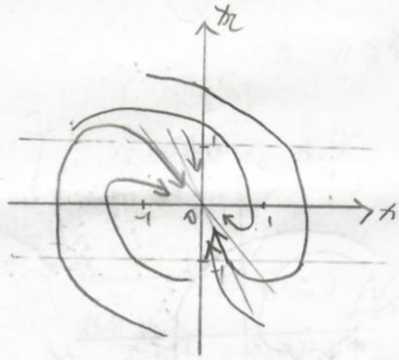
Ⅰ中：$\ddot{e}+5\dot{e}+5e=0$，以(0,0)为稳定节点。

Ⅱ中：$\ddot{e}+5e=-5$，以虚奇点(-1,0)为中心点。

Ⅲ中：$\ddot{e}+5e=5$，以虚奇点(1,0)为中心点。

实奇点

~~不同初始条件下~~：由于这道题目中 K, T, a, r 各种参数都已经规定，所以相轨迹为



(2) 当 $r=Vt$ 时，$\dot{r}=V$ $\ddot{r}=0$ ∴ Ⅰ中：$\ddot{e}+5\dot{e}+5e=5V$.

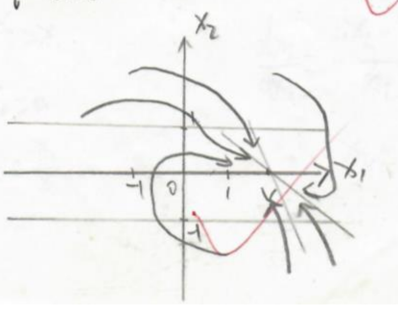
Ⅱ中：$\ddot{e}+5e=-5$

Ⅲ中：$\ddot{e}+5e=5$

则对Ⅰ中 $\begin{cases}x_1=e\\x_2=\dot{e}\end{cases}$ $\begin{cases}\dot{x}_1=x_2=0\\\dot{x}_2=5V-5x_1-5x_2=0\end{cases}$ $\Rightarrow\begin{cases}x_1=V\\x_2=0\end{cases}$ ∴有实奇点(V,0)，且为稳定节点。

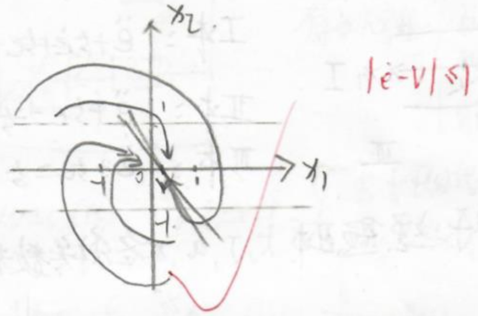
∴分三种情况讨论

① $V>1$ 时，相轨迹大致为

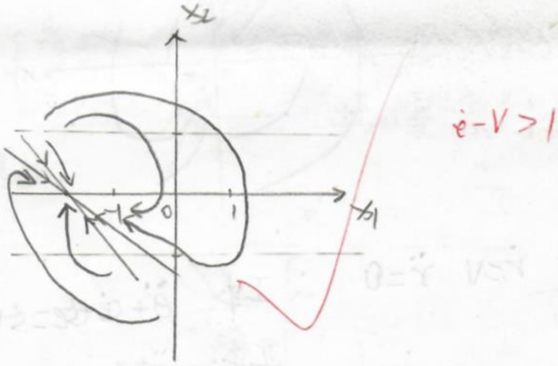


$\dot{e}-V<-1$

② $-1<v<1$时.



③ $v<-1$时



（1）$\dot{e}>1$时，奇点（-1，0）为稳定中心点

$\dot{e}<-1$时，奇点（1，0）为稳定中心点

$|\dot{e}|\leq 1$时，奇点（0，0）为稳定节点

（2）$\dot{e}-v>1$时，奇点（-1，0）为稳定中心点

$\dot{e}-v<-1$时，奇点（1，0）为稳定中心点

$|\dot{e}-v|\leq 1$时，奇点（v，0）为稳定节点