

数值分析与算法 课程例题

第六章 非线性方程求根

Q: (5 分) 为求 $x^3 - x^2 - 1 = 0$ 在 $x_0 = 1.5$ 附近的一个根, 试将方程改写成另一等价形式并建立相应的迭代公式, 保证迭代公式的收敛性, 并以此计算具有四位有效数字的近似根。

A: 由方程 $x^3 - x^2 - 1 = 0$, 显然 $x \neq 0$, 故有

$$\frac{x^3 - x^2 - 1}{x^2} = 0$$

即

$$x = 1 + \frac{1}{x^2}$$

对应的迭代公式为(公式 2 分)

$$x_{k+1} = 1 + \frac{1}{x_k^2} \quad \text{..... (迭代式 1 分)}$$

设 $\varphi(x) = 1 + \frac{1}{x^2}$, 则 $\varphi'(x) = -\frac{2}{x^3}$, 在 $x_0 = 1.5$ 附近且 $x > \sqrt[3]{2}$ 时, $|\varphi'(x)| <$

1. 可知迭代公式收敛。由 $x_0 = 1.5$ 迭代计算有 (收敛 1 分)

$$x_1 = 1 + \frac{1}{x_0^2} = \frac{13}{9} = 1.44444$$

$$x_2 = 1 + \frac{1}{x_1^2} = \frac{250}{169} = 1.47929$$

依次有 $x_3 = 1.45698, x_4 = 1.47108, \dots, x_{19} = 1.465565, x_{20} = 1.465575, x_{21} = 1.465569 \dots$ 从而所求根的近似值为 $x^* = 1.466$ (结果 1 分)

综上所述, 方程可改成并构建迭代式 $x_{k+1} = 1 + \frac{1}{x_k^2}$, 求得近似根为 1.466.

注: 如有相似考题, 所标得分点不代表和考试得分点一模一样。