自动控制理论（1）作业七答案

作业内容：在教材第四章内容和电子讲义的基础上，试解答以下题目。
学习目的：线性控制系统的频率响应分析
提交时间：10月31日上课交，或交电子版致网络学堂截至10月31日24时

书上 4.6，4.7，4.9，4.11，4.16， 4.22

1、书上4.6

4.6 某对象的传递函数为

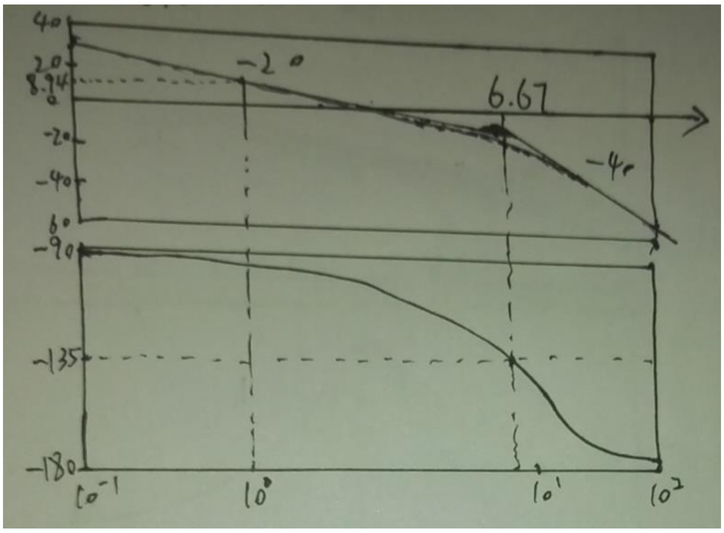
$$\frac{2.8}{s(0.15s+1)},$$

画出它的折线对数幅频特性、对数幅频特性和对数相频特性图.

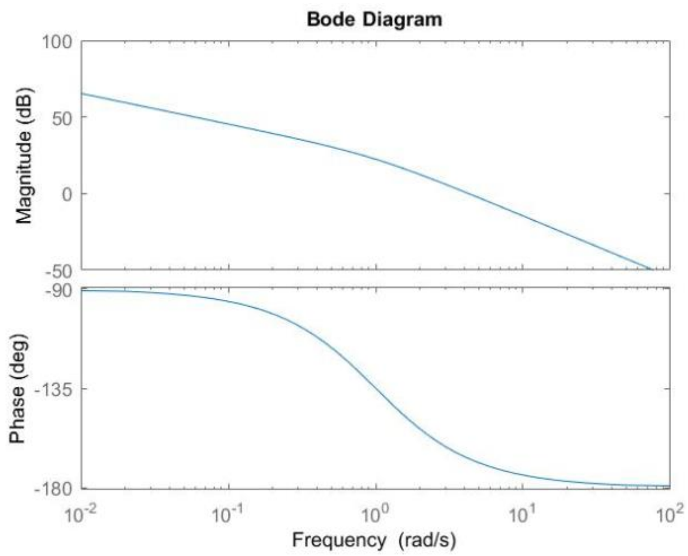
解：该对象可看作比例环节、积分环节、惰性环节串联而成。

转折频率为1/0.15≈6.7rad/s

手工作图：



Matlab作图：



2、书上4.7

4.7 某对象的传递函数为$G(s)=\frac{2.8(\tau s+1)}{s(0.15s+1)}$，若（1）$\tau$=0.05，（2）$\tau$=0.5 分别画出它的对数幅频和对数相频特性图.

解：（1）τ=0.05

该对象可看作由以下四个典型环节串联而成：

1)比例环节:2.8

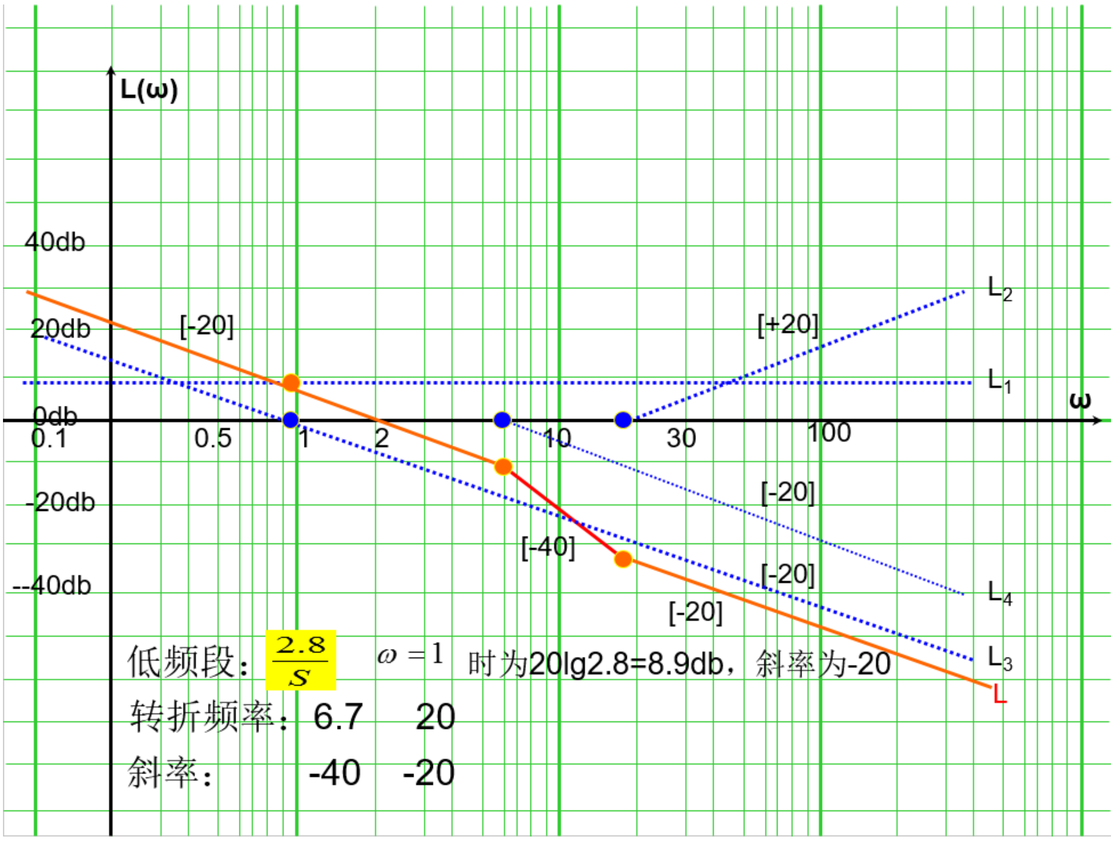
2)微分环节:0.05s+1

3)积分环节:1/s

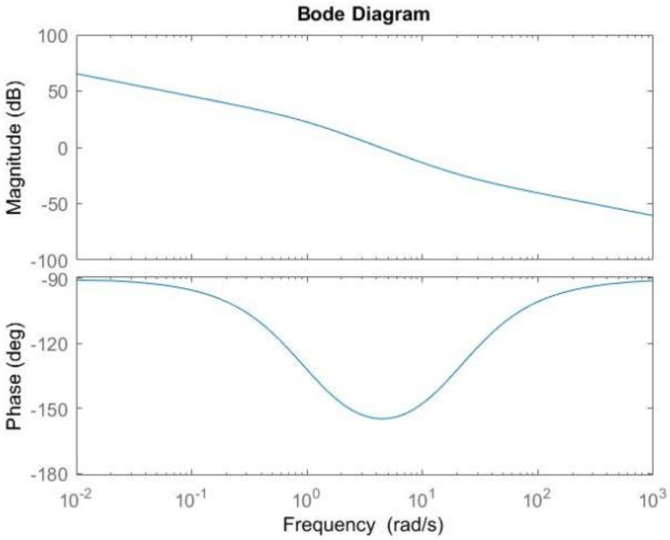
4)惰性环节:1/(0.15s+1)

转折频率为6.7、20

先分别绘制四个典型环节的对数幅频、相频曲线，然后叠加得到题述对象的对数幅频、相频曲线。



利用Matlab作图得：



（2）τ=0.5

该对象可看作由以下四个典型环节串联而成：

1)比例环节:2.8

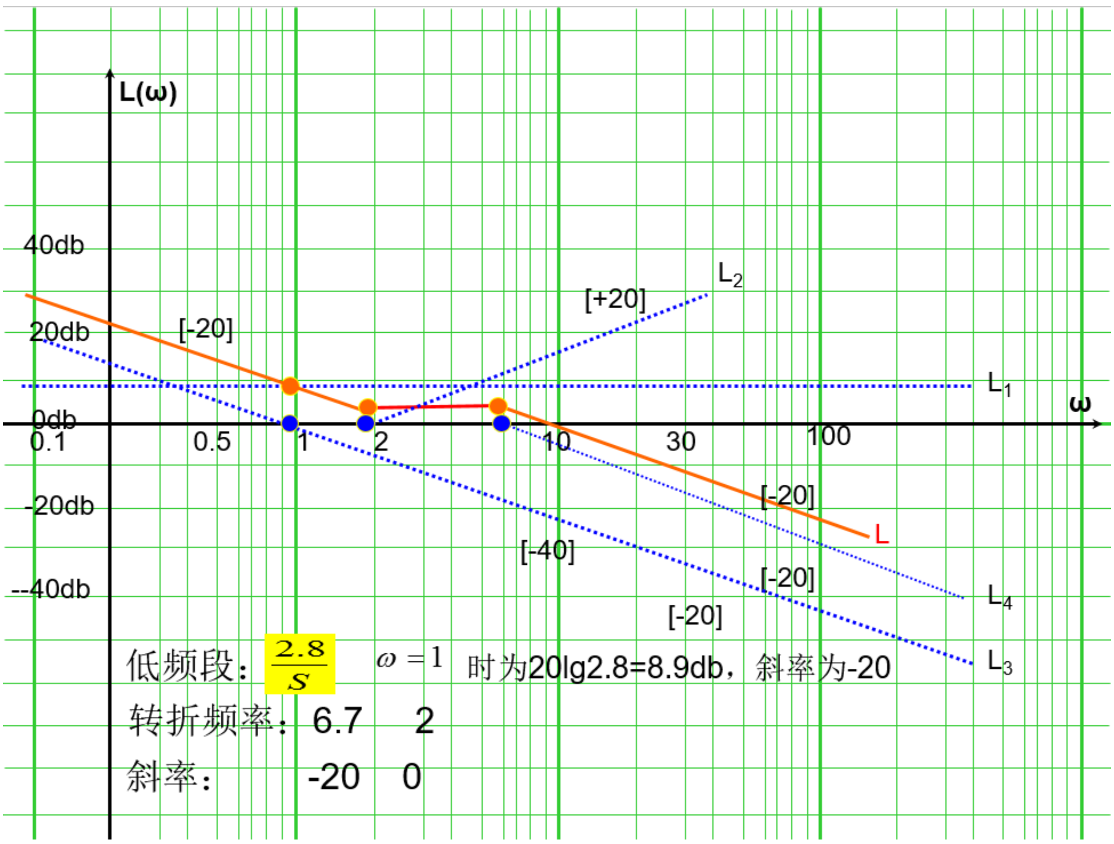
2)微分环节:0.5s+1

3)积分环节:1/s

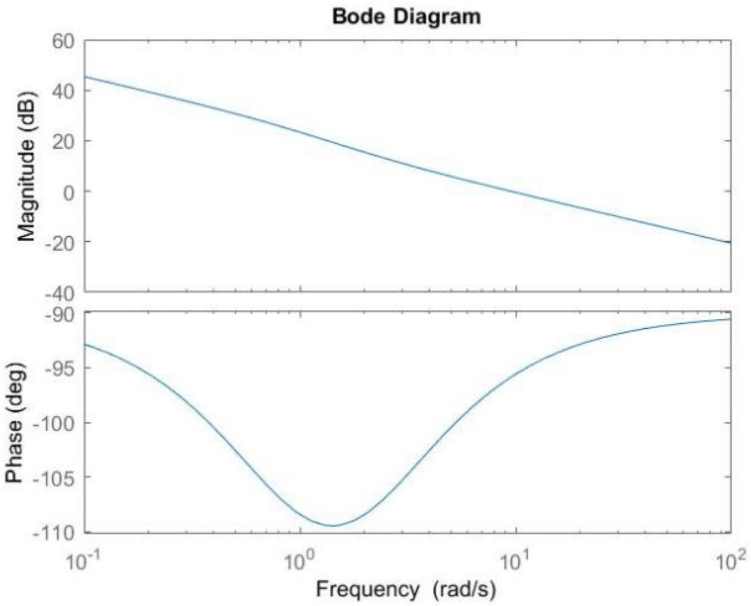
4)惰性环节:1/(0.15s+1)

转折频率为2、6.7

先分别绘制四个典型环节的对数幅频、相频曲线，然后叠加得到题述对象的对数幅频、相频曲线。

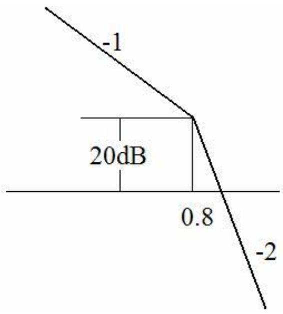


利用Matlab作图得：



3、书上4.9

4.9 某最小相位对象的折线对数幅频特性如图中所示．求它的传递函数．画出它的对数幅频特性和对数相频特性图．



解：根据对数幅频折线图的斜率及转角点分布情况，自左向右单元分解分析可知：图形第一段斜率=-1，说明对象的传递函数中包含积分放大因子 K/s ，转角频率=0.8 处斜率由-1 变为-2，说明对象的传递函数中包含惰性因子 1/(Ts+1).由图上已知数据：

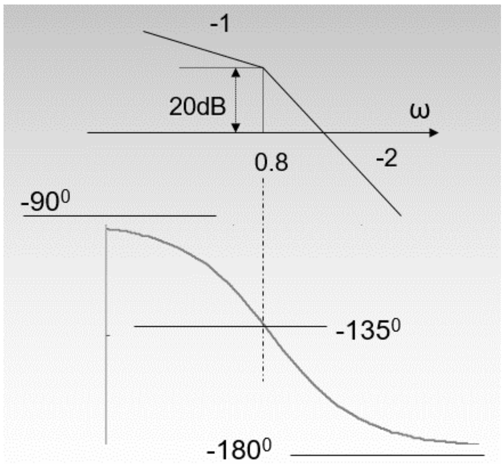
因为有：$T=\dfrac{1}{\omega}=\dfrac{1}{0.8}=1.25,$

$$20\lg\left|\frac{K}{j\omega}\right|=20\lg\frac{K}{\omega}=20\lg\frac{K}{0.8}=20dB$$

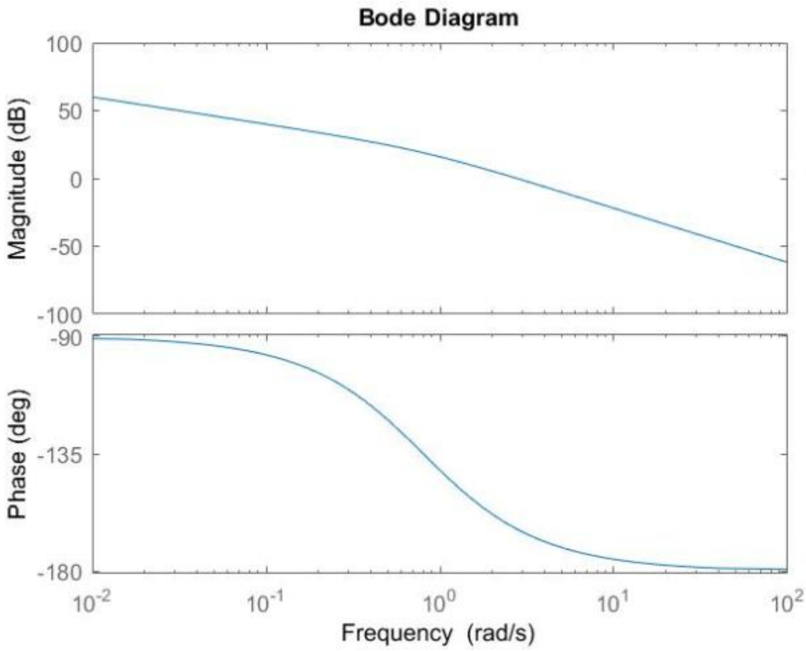
$K=0.8\times10=8$

传递函数：$G(s)=\dfrac{K}{s(Ts+1)}=\dfrac{8}{s(1.25s+1)}$

对数相频特性图：



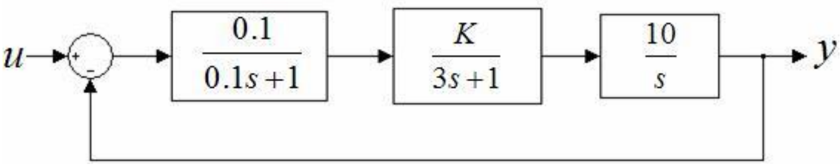
利用 Matlab 作图得：



易错点：题目给出的是折线对数幅频特性图，不是精确的对数幅频特性图，下面的解法是错误的：$20\lg\left|\frac{K}{0.8(j1.25\cdot0.8+1)}\right| = 20 \Rightarrow K = 11.3$

4、书上4.11

4.11 图示的系统中，K = 5 .

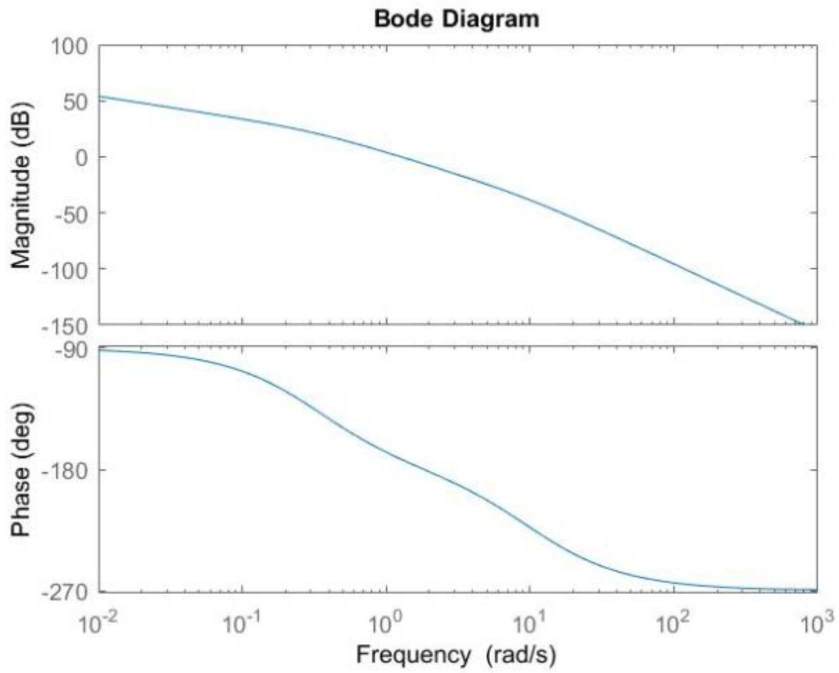


(1) 求开环传递函数.
(2) 画出开环对数频率特性图.
(3) 求截止角频率 ω_c .
(4) 求闭环传递函数.
(5) 写出闭环系统的微分方程.

解：（1）开环传递函数为

$$G_O(s) = \frac{5}{s(0.1s+1)(3s+1)}$$

（2）



（3）利用Matlab求得截止角频率 ω_C=1.2645

（4）闭环传递函数为

$$G_C(s) = \frac{\frac{5}{0.3s^3+3.1s^2+s}}{1+\frac{5}{0.3s^3+3.1s^2+s}} = \frac{5}{0.3s^3+3.1s^2+s+5}$$

（5）闭环系统的微分方程为

$$0.3\frac{\mathrm{d}^3y(t)}{\mathrm{d}t^3} + 3.1\frac{\mathrm{d}^2y(t)}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} + 5\mathrm{y(t)} = 5\mathrm{u(t)}$$

5、书上4. 16

4.16 已知图 a 的系统是最小相位的. $Q(s)$ 的开环折线对数幅频特性如图 b 所示. 求出开环传递函数 $Q(s)$ ；画出开环对数相频特性曲线； 求出开环比例系数 K 和截止角频率 ωcut ；求出闭环传递函数 $H(s)$ 和闭环系统的微分方程.

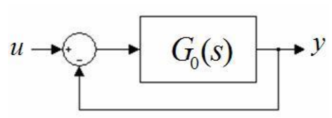


图 a

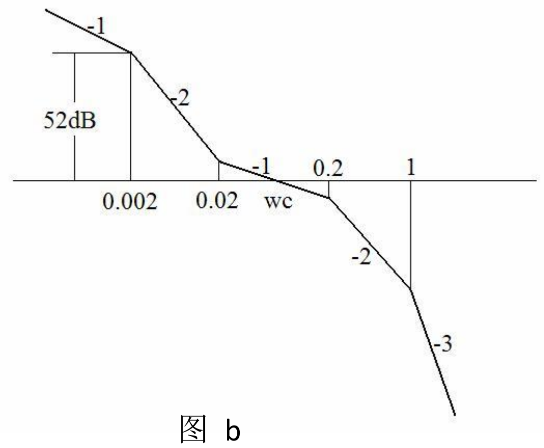


图 b

解：由伯德图的转折频率、斜率可知开环传递函数 $Q(s)$具有以下形式：

$$Q(s)=\frac{K(1+50s)}{s(1+500s)(1+5s)(1+s)}$$

由于伯德图过点（0.002rad/s,52dB），

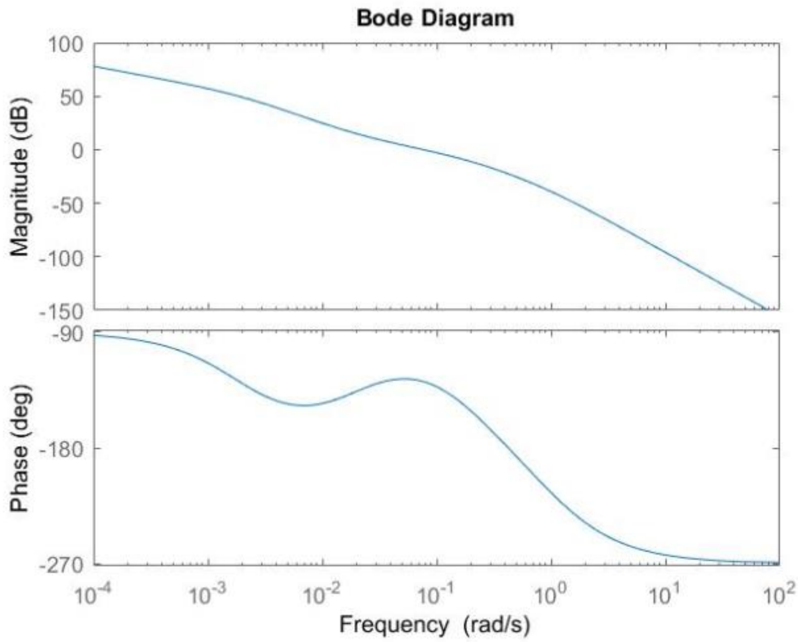
则$20\lg\left|\frac{K}{0.002}\right|=52\text{dB}$

解得 K=0.8

故

$$Q(s)=\frac{0.8(1+50s)}{s(1+500s)(1+5s)(1+s)}$$

开环对数幅频、相频特性曲线为



开环比例系数 K=0.8

令$20\lg\left|\frac{0.8\cdot 50w_{\text{cut}}}{w_{\text{cut}}\cdot 500w_{\text{cut}}}\right|=0$，可近似求得截止角频率 $\omega_{\text{cut}}\approx 0.08\text{rad/s}$，

也可以使用 Matlab 求得较精确的截止角频率。

闭环传递函数$H(s)=\frac{0.8+40s}{2500s^4+3000s^3+500s^2+40s+0.8}$

闭环系统的微分方程为

$$2500\frac{\mathrm{d}^4y(t)}{\mathrm{d}t^4}+3000\frac{\mathrm{d}^3y(t)}{\mathrm{d}t^3}+500\frac{\mathrm{d}^2y(t)}{\mathrm{d}t^2}+40\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}+0.8\mathrm{y(t)}$$
$$=40\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}+0.8\mathrm{u(t)}$$

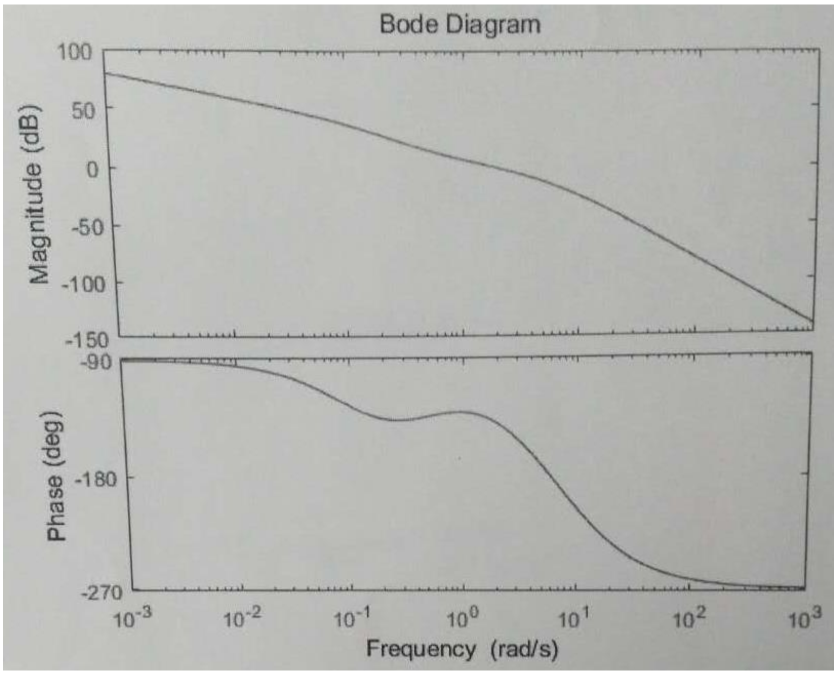
6、书上4.22

4.22 已知某系统的开环传递函数为

$$G(s)=\frac{10(2s+1)}{s(10s+1)(0.25s+1)(0.1s+1)},$$

且为单位反馈，画出其开环对数频率特性图．写出闭环传递函数及系统的微分方程．如果输入信号为 $u(t)=\sin 0.01t$，求静态下输出量 $y(t)$ 的表达式．又如果 $u(t)=\sin 20t$，求静态下输出量 $y(t)$ 的表达式．

解：开环对数频率特性图为：



闭环传递函数为

$$\mathrm{H(s)}=\frac{20s+10}{0.25s^4+3.525s^3+10.35s^2+21s+10}$$

系统的微分方程为

$$0.25\frac{\mathrm{d}^4y(t)}{\mathrm{d}t^4}+3.525\frac{\mathrm{d}^3y(t)}{\mathrm{d}t^3}+10.35\frac{\mathrm{d}^2y(t)}{\mathrm{d}t^2}+21\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}+10\mathrm{y(t)}$$
$$=20\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}+10\mathrm{u(t)}$$

闭环系统的频率特性为

$$\mathrm{H(j\omega)}=\frac{j20\omega+10}{0.25\omega^4-j3.525\omega^3-10.35\omega^2+j21\omega+10}$$

若输入信号$\mathrm{u(t)=sin0.01t}$，则$\omega=0.01$

此时

$$H(j\omega)=\frac{j20\omega+10}{0.25\omega^4-j3.525\omega^3-10.35\omega^2+j21\omega+10}\approx\frac{j0.2+10}{j0.21+10}$$

$$|H(j\omega)|=\frac{\sqrt{0.2^2+100}}{\sqrt{0.21^2+100}}\approx 1$$

$$\varphi H(j\omega)\approx 0$$

静态下输出量$y(t)\approx u(t)=\sin 0.01t$
若输入信号$u(t)=\sin 20t$，则$\omega=20$
此时

$$H(j\omega)=\frac{j20\omega+10}{0.25\omega^4-j3.525\omega^3-10.35\omega^2+j21\omega+10}$$
$$\approx\frac{j400+10}{40000-j28200-4140+j420+10}=\frac{j400+10}{35870-j27780}$$

$$|H(j\omega)|=\frac{\sqrt{400^2+100}}{\sqrt{35870^2+27780^2}}\approx 0.0088$$

$$\varphi H(j\omega)=\varphi(j400+10)-\varphi(35870-j27780)=\arctan\frac{400}{10}-\arctan\frac{-27780}{35870}$$
$$=1.55\ \ \mathrm{rad}+0.66\ \ \mathrm{rad}=2.21\ \ \mathrm{rad}=127^\circ$$

静态下输出量$y(t)\approx 0.0088\sin(20t+127^\circ)$
也可以先画出闭环系统的对数频率特性图，然后在图上分别找到频率分别为0.01、20处的幅度增益、相位增益，然后写出静态下输出量的表达式。