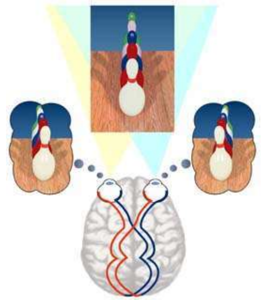
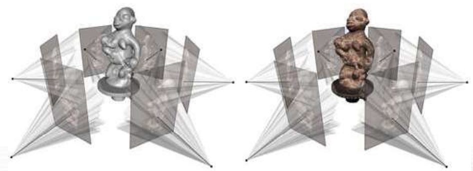
第七章 线性方程组的数值解

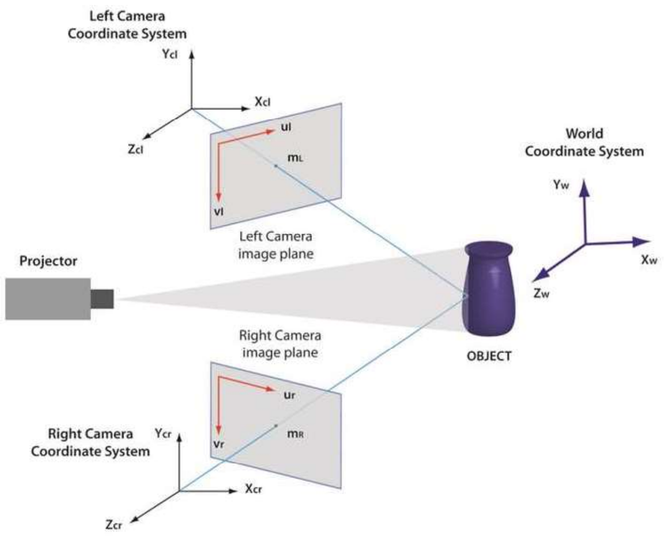
问题描述

- Ax=b，A、b已知，求x
- 应用例子：立体视觉





思考：如何从两幅/多幅不同的图片恢复3D信息（深度）？



$$x_j = P * X_j$$

已知x_j和映射矩阵P时，不能求出X_j；
如果还知道$x'_j = P' * X_j$中的x'_j和映射矩阵P′，则可通过求解线性方程组求取

注意：实际应用时需要考虑各种误差

$Ax=b$, A可逆时，有两大类方法：

- 直接法：当A为低阶矩阵
- 迭代法：当A为大型稀疏矩阵

若A不可逆，则属于广义逆问题：

有解问题为min $||Ax-b||$

有唯一解：min $||x||$

第一节 高斯消去法

$$
\begin{cases}
a_{11}^{(1)}x_1+a_{12}^{(1)}x_2+\cdots+a_{1n}^{(1)}x_n=b_1^{(1)} & (1)\\
a_{21}^{(1)}x_1+a_{22}^{(1)}x_2+\cdots+a_{2n}^{(1)}x_n=b_2^{(1)} & (2)\\
\cdots & \\
a_{n1}^{(1)}x_1+a_{n2}^{(1)}x_2+\cdots+a_{nn}^{(1)}x_n=b_n^{(1)} & (n)
\end{cases}
$$

一、基本方法

1. (1)不变，(2)~(n)对(1)消元，消去(2)~(n)中x_1项，

设$a_{11}^{(1)}\neq 0$，新(i)=旧(i)$-\dfrac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}\times(1)$

$$
\begin{cases}
a_{11}^{(1)}x_1+a_{12}^{(1)}x_2+\cdots+a_{1n}^{(1)}x_n=b_1^{(1)}\\
a_{22}^{(2)}x_2+\cdots+a_{2n}^{(2)}x_n=b_2^{(2)}\\
\cdots\\
a_{n2}^{(2)}x_2+\cdots+a_{nn}^{(2)}x_n=b_n^{(2)}
\end{cases}
$$

2. (1),(2)不变，(3)~(n)对(2)消元，消去(3)~(n)中x_2项。... 经n-1步消元后，得到上三角形方程组。

$$
\begin{cases}
a_{11}^{(1)}x_1+a_{12}^{(1)}x_2+\cdots+a_{1n}^{(1)}x_n=b_1^{(1)}\\
a_{22}^{(2)}x_2+\cdots+a_{2n}^{(2)}x_n=b_2^{(2)}\\
\cdots\\
a_{nn}^{(n)}x_n=b_n^{(n)}
\end{cases}
$$

则有

$$x_n = \frac{b_n^{(n)}}{a_{nn}^{(n)}},$$

$$x_i = \frac{\left[b_i^{(i)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}^{(i)} x_j\right]}{a_{ii}^{(i)}}, i = n-1, \cdots, 2, 1$$

二、计算量

加减法≈ $\frac{n^3}{3}$　　乘除法≈ $\frac{n^3}{3}$

三、使用条件：$a_{kk}^{(k)} \neq 0, k = 1, \cdots, n$

- 定理1：高斯消去法能进行的充分必要条件是系数矩阵A的各阶顺序主子式均不为0.

$$\Delta_1 = a_{11},\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \cdots, \Delta_n = |A|$$

四、高斯主元素消去法

1. 列主元素消去法

在$a_{kk}^{(k)}, \cdots, a_{nk}^{(k)}$中选模最大的元$a_{i_k,k}^{(k)}$，对换$i_k, k$行；

能够进行的充分必要条件是A可逆（思考）

2. 行主元素消去法：x_k和x_{j_k}也需要互换
3. 全面主元素消去法：相当于前二者的结合

思考：比较三种方法，各方法有何优缺点？

- 第一讲，P45

防止被除数远大于除数

$$\begin{cases} 0.00001x_1 + x_2 = 1 \\ 2x_1 + x_2 = 2 \end{cases}$$

（当先求取x_2，再待人第一式中求取x_1时）

五、矩阵的三角分解

$Ax=b,A$为nxn矩阵，x,b为向量

- 定理2：如果矩阵A的1~n-1阶顺序主子式都不为0，则A=LU，其中L为单位下三角矩阵，U为上三角矩阵，且分解唯一。

证明：“存在性”由高斯消去法可知。

“唯一性”：$A=LU=L_1U_1$

则有$U=(L^{-1}L_1)U_1$

其中$(L^{-1}L_1)$为单位下三角矩阵

U和U_1对角线前n-1个元不为0

对$U=(L^{-1}L_1)U_1$进行等式两边的比较可得

$L^{-1}L_1=I$

注：看$U_{ij}(i>j)$即 $\begin{array}{cccc} U_{21} & U_{31} & \cdots & U_{n1} \\ & U_{32} & \cdots & U_{n2} \\ & & \cdots & \end{array}$

第二节 矩阵的三角分解法

一、直接法 $LUx=b \Rightarrow Ly=b\ Ux=y$

即高斯消去法

思考：如何具体求出L和U？计算量？

二、追赶法：可用于三对角线方程组（常微分方程边值问题求解）

$$A=\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & & \\ & & \cdots & & \\ & & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & a_n & b_n \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \alpha_1 & & & & \\ \gamma_2 & \alpha_2 & & & \\ & & \cdots & & \\ & & \gamma_{n-1} & \alpha_{n-1} & \\ & & & \gamma_n & \alpha_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \beta_1 & & & \\ & 1 & \beta_2 & & \\ & & \cdots & & \\ & & & 1 & \beta_{n-1} \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$
\left.\begin{array}{r l}
b_1 = \alpha_1 & \\
c_1 = \alpha_1\beta_1 & \\
a_i = \gamma_i & i \geq 2 \\
b_i = \gamma_i\beta_{i-1} + \alpha_i & i \geq 2 \\
c_i = \alpha_i\beta_i & i \geq 2
\end{array}\right\} \Rightarrow
\begin{cases}
\alpha_1 = b_1 \\
\beta_1 = \dfrac{c_1}{b_1} \\
\gamma_i = a_i \\
\alpha_i = b_i - \gamma_i\beta_{i-1} \\
\beta_i = \dfrac{c_i}{\alpha_i}
\end{cases}
$$

递推过程 i=2, ..., n

$Ly = f$

$$
\begin{bmatrix}
\alpha_1 & & & & \\
\gamma_2 & \alpha_2 & & & \\
& & \cdots & & \\
& & & \gamma_n & \alpha_n
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}
$$

$$
\left.\begin{array}{l}
\alpha_1 y_1 = f_1 \\
\gamma_i y_{i-1} + \alpha_i y_i = f_i
\end{array}\right\} \Rightarrow
\begin{array}{l}
y_1 = \dfrac{f_1}{b_1} \\
y_i = \dfrac{f_i - a_i y_{i-1}}{b_i - a_i\beta_{i-1}}
\end{array}
$$

$$i = 2, 3, \cdots, n$$

$Ux = y$

$$
\begin{bmatrix}
1 & \beta_1 & & & \\
& 1 & \beta_2 & & \\
& & \cdots & & \\
& & 1 & \beta_{n-1} & \\
& & & 1 &
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}
$$

$$
\left.\begin{array}{l}
x_n = y_n \\
x_i + \beta_i x_{i+1} = y_i
\end{array}\right\} \Rightarrow
\begin{array}{l}
x_n = y_n \\
x_i = y_i - \beta_i x_{i+1}
\end{array}
$$

$$i = n-1, n-2, \cdots, 1$$

三、平方根法（适用于对称正定矩阵）

$A = A^T$ 且 $\forall$ 向量 $x \neq 0$ $x^T A x > 0$

三角分解

$$
U = \begin{bmatrix}
u_{11} & & & \\
& u_{22} & & \\
& & \ddots & \\
& & & u_{nn}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
1 & \frac{u_{12}}{u_{11}} & \cdots & \frac{u_{1n}}{u_{11}} \\
& 1 & \cdots & \\
& & \ddots & \\
& & & 1
\end{bmatrix}
= DU_0
$$

$A = LDU_0 \quad A^T = U_0^T D^T L^T$

由分解的唯一性， $L = U_0^T$ 所以 $A = LDL^T$

可将Ax=b分解，得到如下两种方法：

平方根法：
$$\begin{cases} L_1 y = b\,(L_1 = LD^{\frac{1}{2}}) \\ L_1^T x = y \end{cases}$$

或用改进的平方根法：
$$\begin{cases} Lz = b \\ Dy = z \\ L^T x = y \end{cases}$$

思考：比较二者的计算量及适用性

第三节 范数与误差分析

一、向量范数

- 定义：按某种规则将每个$x \in R^n$对应于一个非负实数$||x||$，且满足下列条件：

1. $||x|| > 0$ 当$x \neq 0$时
2. $||cx|| = |c| \cdot ||x||, \forall c \in R$
3. $||x+y|| \leq ||x|| + ||y||$

则称$||x||$为x的范数

- 例：

$$||x_|||_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

$$||x||_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

$$||x||_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

二、矩阵范数

- 定义：按某种规则将每个$A \in R^{n\times n}$对应一个非负实数$||A||$，且满足：

1. $||A|| > 0$ 当$A \neq 0$时
2. $||cA|| = |c| \cdot ||A||, \forall c \in R$
3. $||A+B|| \leq ||A|| + ||B||$
4. $||AB|| \leq ||A|| \cdot ||B||$

则称$||A||$为A的范数

若又满足

5. $||Ax|| \leq ||A|| \cdot ||x||$

则称$||A||$为与向量范数相容的矩阵范数

- 例：

$$||A||_1 = \max_{1\le j\le n}\left(\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|\right)$$ 列范数，与$||x||_1$相容

$$||A||_\infty = \max_{1\le i\le n}\left(\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|\right)$$ 行范数，与$||x||_\infty$相容

$$||A||_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^T A)}$$ （最大特征值）与$||x||_2$相容

三、误差分析

- 误差来源

1. 系数扰动 A, b（观测误差或先前步骤带来的误差）

$$Ax = b$$

$$\left.\begin{aligned} A &\Rightarrow A+\delta A \\ b &\Rightarrow b+\delta b \end{aligned}\right\} x \Rightarrow x+\delta x$$

分析$\frac{||\delta A||}{||A||}, \frac{||\delta b||}{||b||}$对$\frac{||\delta x||}{||x||}$的影响

- 例1：

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 3.0001 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4.0001 \end{bmatrix}$$

$$x = (1 \quad 1)^T, \det A = 10^{-4}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2.9999 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4.0002 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{x} = (-2 \quad 10)^T$$

- 例2 $\begin{bmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32 \\ 33 \\ 33 \\ 31 \end{bmatrix} \Rightarrow x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\delta b = (0.1, -0.1, 0.1, -0.1)^T$$

$$\Rightarrow x+\delta x = (9.2, -12.6, 4.5, -1.1)^T$$

$$A+\delta A = \begin{bmatrix} 10 & 7 & 8.1 & 7.2 \\ 7.08 & 5.04 & 6 & 5 \\ 8 & 5.98 & 9.89 & 9 \\ 6.99 & 4.99 & 9 & 9.98 \end{bmatrix} \Rightarrow x+\delta x = \begin{bmatrix} -81 \\ 137 \\ -34 \\ 22 \end{bmatrix}$$

1) $\delta A = 0, \delta b \neq 0$

$A(x+\delta x) = b + \delta b$

由$Ax = b$，有$A\delta x = \delta b, \delta x = A^{-1}\delta b$

$$\left.\begin{array}{r} ||\delta x|| \leq ||A^{-1}|| \cdot ||\delta b|| \\ ||b|| \leq ||A|| \cdot ||x|| \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \frac{||\delta x||}{||x||} \leq ||A|| \cdot ||A^{-1}|| \cdot \frac{||\delta b||}{||b||}$$

2) $\delta A \neq 0, \delta b = 0$时

$$(A+\delta A)(x+\delta x) = b$$

$$x + \delta x = (A+\delta A)^{-1}b$$

又$x = A^{-1}b$，则有

$$\begin{aligned} \delta x &= [(A+\delta A)^{-1} - A^{-1}]b \\ &= [I - A^{-1}(A+\delta A)](A+\delta A)^{-1}b \\ &= -A^{-1}\delta A(x+\delta x) \end{aligned}$$

所以 $||\delta x|| \leq ||A^{-1}|| \cdot ||\delta A|| \cdot ||x+\delta x||$

$$\frac{||\delta x||}{||x||} \approx \frac{||\delta x||}{||x+\delta x||} \leq ||A^{-1}|| \cdot ||A|| \cdot \frac{||\delta A||}{||A||}$$

思考：考虑$\delta A \neq 0, \delta b \neq 0$时的情形（相当于两种误差之和）

记$Cond(A) = ||A|| \cdot ||A^{-1}||$ 为条件数，如果Cond(A)较大，则A称为病态。

2. 舍入误差（解方程组各步骤）

与计算机字长、方程组大小有关

舍入误差的事先分析一般比较复杂，可以采用事后估计。

一般的事后估计法：

如果$\bar{x}$为$Ax = b$的一个近似解，x^*为精确解，则有$x^* - \bar{x} = A^{-1}(b - A\bar{x})$

$||x^* - \bar{x}|| \leq ||A^{-1}|| \cdot ||b - A\bar{x}||$

又 $\dfrac{1}{||x^*||} \leq \dfrac{||A||}{||b||}$

有 $\dfrac{||x^* - \bar{x}||}{||x^*||} \leq ||A|| \cdot ||A^{-1}|| \cdot \dfrac{||b - A\bar{x}||}{||b||}$

注：误差来源可以是舍入误差的累积，也可以是迭代法的方法误差所带来的

思考：有无模型误差、方法误差？

实际应用时：

1. 用哪种范数？
2. 如何判断条件数是否很大？
3. 有些情况下可以对矩阵的行列作数乘来改变条件数

第四节 迭代法

由$Ax = b$（其中A可逆）推出$x = Bx + f$

迭代法：$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + f$

如何推导或构造B？

关键：收敛性、误差分析

一、雅可比迭代法 Ax=b

$$A = D + L + U$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & & & \\ a_{21} & 0 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & 0 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & a_{n-1,n} \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$(D + L + U)x = b$$
$$Dx = -(L + U)x + b$$
$$x = -D^{-1}(L + U)x + D^{-1}b$$

令 $B = -D^{-1}(L + U) \quad f = D^{-1}b$

则有 $x = Bx + f$

迭代公式 $x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + f$

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}[b_i - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}]$$

二、高斯-赛德尔迭代法（G-S法）

利用已计算出的$x_j^{(k+1)}, j=1,\cdots,i-1$来计算$x_i^{(k+1)}$

$$x_i^{(k+1)}=\frac{1}{a_{ii}}[b_i-\sum_{j=1}^{i-1}a_{ij}x_j^{(k+1)}-\sum_{j=i+1}^{n}a_{ij}x_j^{(k)}]$$

从矩阵形式上看

$$x^{(k+1)}=D^{-1}[b-Lx^{(k+1)}-Ux^{(k)}]$$

相当于$(D+L)x^{(k+1)}=b-Ux^{(k)}$

$$x^{(k+1)}=\underbrace{-(D+L)^{-1}U}_{B}\,x^{(k)}+\underbrace{(D+L)^{-1}b}_{f}$$

三、迭代法的收敛性

记误差向量 $\epsilon^{(k)}=x^{(k)}-x^*$

由$x^{(k+1)}=Bx^{(k)}+f$和 $x^*=Bx^*+f$（假定x^*存在），有 $\epsilon^{(k+1)}=B\epsilon^{(k)}=\cdots=B^{k+1}\epsilon^{(0)}$

- 定理3：迭代法$x^{(k+1)}=Bx^{(k)}+f$对于任意$x^{(0)}$都收敛的充分必要条件是$\rho(B)<1$，其中，$\rho(B)=\max\limits_{1\le i\le n}|\lambda_i|$, 谱半径

证明：任意$\epsilon^{(0)}$下迭代法收敛$\Leftrightarrow B^k\to 0$

考虑将B相似化简化为Jordan标准型

注：显然，$\rho(B)$越小则收敛速度越快

- 定理4：迭代法收敛的充分条件是$||B||<1$，其中$||B||$是一种与向量范数相容的矩阵范数。

证明：　$Bx=\lambda x$

$$|\lambda|\cdot||x||=||\lambda x||=||Bx||\le||B||\cdot||x||$$

$$\Rightarrow|\lambda|\le||B||$$

所以，$\rho(B)\le||B||$

如何由Ax=b（其中A可逆）构造一般迭代法？

$Ax=b\Leftrightarrow x=(I-TA)x+Tb$，其中T可逆

关键：构造T

可构造T为行变换矩阵（若干初等矩阵的乘积），使得TA是上三角矩阵（类似于列主元素消去法），甚至是对角形且对角线上的元在(0,2)中。

注意：还要使得$||I-TA||<1$，以方便误差分析

- 结论：

1. 按照上述方法可以对任意Ax=b（其中A可逆）构造出收敛的迭代公式
2. 但这种构造过程的计算量相当于直接法，对于大型矩阵并不适用
3. 对于特殊类型的大型矩阵，一般还是直接套用特别的公式，如雅可比迭代法和G-S迭代法

- 定义：设$A=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}$，如果$|a_{ii}|>\sum_{j=1,j\neq i}^{n}|a_{ij}|$，则称A为严格对角优势矩阵。
- 定理5：设Ax=b，若A为严格对角优势矩阵，则雅可比迭代法和高斯-赛德尔迭代法均收敛。

证明：

1. 证$\det(A)\neq 0$ 即A可逆（存在），也说明严格对角优势矩阵可逆。

用反证法：假设$\det(A)=0$，则$\exists u\neq 0$使$Au=0$。

无妨设 $|u_t|=\max_{1\le i\le n}|u_i|>0$

则 $\sum_{j=1}^{n} a_{tj}u_j=0$

$$a_{tt}u_t=-\sum_{j=1,j\neq t}^{n} a_{tj}u_j$$

$$|a_{tt}|\cdot|u_t|=|\sum_{j=1,j\neq t}^{n} a_{tj}u_j|\le\sum_{j=1,j\neq t}^{n}|a_{tj}|\cdot|u_j|$$

$$\le\sum_{j=1,j\neq t}^{n}|a_{tj}|\cdot|u_t|$$

所以，有 $|a_{tt}|\le\sum_{j=1,j\neq t}^{n}|a_{tj}|$ 矛盾。

2. 证$\rho(B)<1$

雅可比法：$B=-D^{-1}(L+U)$

$$\begin{aligned}\det(\lambda I-B)&=\det[\lambda I+D^{-1}(L+U)]\\&=\det[D^{-1}(\lambda D+L+U)]\\&=\det(D^{-1})\det(\lambda D+L+U)\end{aligned}$$

$$\det(\lambda I-B)=0\Leftrightarrow\det(\lambda D+L+U)=0$$

若$|\lambda|\ge 1$，则$\lambda D+L+U$为严格对角优势阵，由1可知，可逆。

所以，$\det(\lambda D+L+U)=0\Leftrightarrow|\lambda|<1\Rightarrow\rho(B)<1$

也可直接证明$||B||_\infty < 1$

G-S法：$B = -(D+L)^{-1}U$

$$\det(\lambda I - B) = \det[(D+L)^{-1}]\det(\lambda D + \lambda L + U)$$

$$\det(\lambda I - B) = 0 \Leftrightarrow \det(\lambda D + \lambda L + U) = 0$$

$\lambda D + \lambda L + U$在$|\lambda| \geq 1$时为严格对角优势矩阵，可逆，所以

$$\det(\lambda D + \lambda L + U) = 0 \Rightarrow |\lambda| < 1 \Rightarrow \rho(B) < 1$$

思考：以上定理中，雅可比法和G-S法，哪种的$\rho(B)$更小？

- 例：$\begin{bmatrix} 10 & 3 & 1 \\ 2 & -10 & 3 \\ 1 & 3 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ -5 \\ 14 \end{bmatrix} \Rightarrow x^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Jacobi	k-=0	K=1	K=2	K=3	K=4	K=5	K=6
x_1^k	0	1.4	1.11	0.929	0.9906	1.01159	1.000251
x_2^k	0	0.5	1.20	1.055	0.9645	0.9953	1.005795
x_3^k	0	1.4	1.11	0.929	0.9906	1.01159	1.000251
$\|\|x^k - x^*\|\|_\infty$	1	0.5	0.20	0.071	0.035	0.01159	0.005795

Gauss-Seidel	k-=0	K=1	K=2	K=3	K=4
x_1^k	0	1.4	0.9234	0.99134	0.99154
x_2^k	0	0.78	0.99248	1.0310	0.99578
x_3^k	0	1.026	1.1092	0.99159	1.0021
$\|\|x^k - x^*\|\|_\infty$	1	0.4	0.1092	0.031	0.0085

- 定理6：如果A正定对称，则G-S法收敛。（充分性）

- 定理：设A对称，且其对角元素$a_{ii} > 0, i = 1, \ldots n$，则方程组的Jacobi方法收敛的充分必要条件是A和2D-A均为正定矩阵。

- 定理6：如果A正定对称，则G-S法收敛。

证明：即证$\rho\{(D+L)^{-1}U\} < 1, L = U^T$

记λ为$(D+L)^{-1}U$的特征值，则有

$$(D+L)^{-1}Uy = \lambda y$$

$$\lambda((D+L)y, y) = (Uy, y)$$

$$\lambda = \frac{(Uy, y)}{(Dy, y) + (Ly, y)}$$

记$(Uy, y) = \alpha + i\beta, (Dy, y) = \gamma > 0$

则有$(Ly, y) = \alpha - i\beta, 2\alpha + \gamma > 0$

$$\lambda = \frac{\alpha + i\beta}{\gamma + \alpha - i\beta}$$

$$|\lambda|^2 = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{(\gamma + \alpha)^2 + \beta^2}$$

分母-分子$=\gamma(\gamma + 2\alpha) > 0$

得证 $|\lambda| < 1$

第五节 逐次超松弛迭代法（SOR法）

对G-S法做加速

G-S法：

$$x^{(k+1)} = D^{-1}[b - Lx^{(k+1)} - Ux^{(k)}]$$
$$= x^{(k)} + \underbrace{D^{-1}[b - Lx^{(k+1)} - (D+U)x^{(k)}]}_{\text{剩余向量}}$$

引入松弛因子ω

$$(1-\omega)x^{(k)} + \omega x^{(k+1)} = x^{(k)} + \omega(x^{(k+1)} - x^{(k)})$$

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \omega D^{-1}[b - Lx^{(k+1)} - (D+U)x^{(k)}]$$

整理可得

$$(D + \omega L)x^{(k+1)} = [(1-\omega)D - \omega U]x^{(k)} + \omega b$$

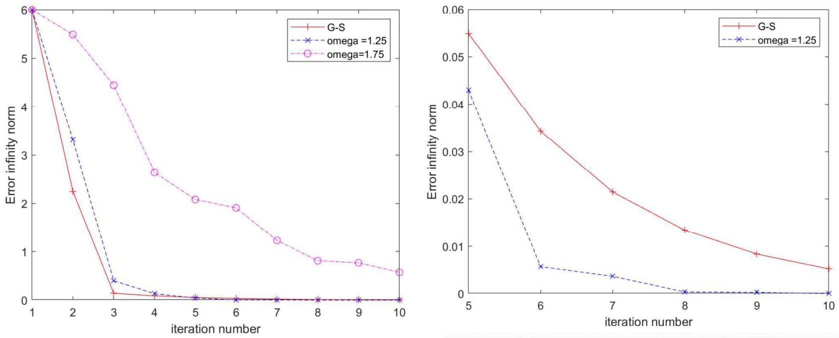
$$x^{(k+1)} = (D + \omega L)^{-1}[(1-\omega)D - \omega U]x^{(k)}$$
$$+ \omega(D + \omega L)^{-1}b$$
$$= L_\omega x^{(k)} + f$$

其中$L_\omega = (D + \omega L)^{-1}[(1-\omega)D - \omega U]$是关键

- 例：$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 \\ 30 \\ -24 \end{bmatrix} \Rightarrow x^* = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -5 \end{bmatrix}$

$x^{(0)} = [1\ 1\ 1]^T$，G-S, SOR ($\omega = 1.25, \omega = 1.75$)

- G-S: $x^{(10)} = [3.005238\quad 3.995634\ -5.001091]$
- SOR $\omega = 1.25$: $x^{(10)} = [3.000002\quad 4.000014\quad -5.000022]$
- SOR $\omega = 1.75$: $x^{(10)} = [3.042294\quad 4.006919\quad -5.572998]$



- 定理7：SOR法收敛的必要条件是$0 < \omega < 2$

证明：收敛的充要条件是$\rho(L_\omega) < 1$，记L_ω的特征值为λ_i，则$|\lambda_1\lambda_2 \cdots \lambda_n| < 1$

$$
\begin{aligned}
|\lambda_1 \cdots \lambda_n| &= |\det(L_\omega)| \\
&= |\det[(D+\omega L)^{-1}]\det[(1-\omega)D - \omega U]| \\
&= \left|\frac{\det[(1-\omega)D-\omega U]}{\det(D+\omega L)}\right| \\
&= \left|\frac{(1-\omega)^n a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}}{a_{11}\cdots a_{nn}}\right| \\
&= |(1-\omega)^n| < 1 \Rightarrow 0 < \omega < 2
\end{aligned}
$$

- 定理8：如果A正定对称且$0 < \omega < 2$，则SOR法收敛。

思考：如何证明？

ω最佳值 $\omega = \frac{2}{1+\sqrt{1-\rho^2(B_0)}} > 1$

其中B_0为雅可比迭代矩阵

迭代法的事后估计法：

$$||x^{(k)} - x^*|| \le \frac{||B||}{1-||B||} \cdot ||x^{(k)} - x^{(k-1)}||$$

迭代法中舍入误差（存储误差）的影响：

$$||\delta_{k+1}|| \le ||B|| \cdot ||\delta_k|| + ||\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\cdot 10^{-m} \\ \vdots \\ \frac{1}{2}\cdot 10^{-m} \end{pmatrix}||$$

思考：迭代法的计算量？

方程组求解总结

- 方程组求解 Ax=b
  - 直接法
    - 高斯法
    - 高斯主元素消去法
    - 三角分解法（同高斯法）
      - 追赶法
      - 平方根法
  - 迭代法
    - 雅可比法
    - G-S法
    - SOR法
    - 一般法

*迭代收敛理论（如何设计迭代矩阵B）

*A、b有误差时对x的影响分析