数值分析与算法 课程例题

第四章　　数值积分与数值微分

Q：（5 分）用复化梯形公式 T_n 求 $\int_0^1 e^{x^2+x}\mathrm{d}x$，分析其方法误差，结果用 n 表示。

A：由复化梯形公式，设 $f(x)=e^{x^2+x}$, $x_k=kh$, $h=\frac{1}{n}$, $k=0,1,\dots,n$. 有

$$T_n=\frac{h}{2}\sum_{k=0}^{n-1}[f(x_k)+f(x_{k+1})]=\frac{1}{2n}[f(0)+2\sum_{k=1}^{n-1}f(kh)+f(1)]$$

即　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　……（公式 2 分）

$$T_n=\frac{1}{2n}[1+2\sum_{k=1}^{n-1}e^{\left(\frac{k}{n}\right)^2+\frac{k}{n}}+e^2]$$

复化梯形公式的方法误差为

$$R_n(f)=-\frac{1}{12}h^2f''(\eta),\qquad \eta\in[0,1]$$

由 $f(x)=e^{x^2+x}$，得　　　　　　　　　　　　　　　　　　　……（公式 1 分）

$$f'(x)=e^{x^2+x}(2x+1)$$

$$f''(x)=e^{x^2+x}(2x+1)^2+2e^{x^2+x}=e^{x^2+x}(4x^2+4x+3)$$

故有方法误差　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　……（求导 1 分）

$$|R_n(f)|\le\frac{1}{12}\left(\frac{1}{n}\right)^2e^2(4+4+3)=6.8\cdot\frac{1}{n^2}$$　　　　……（结果 1 分）

综上所述，所求积分值为 $\frac{1}{2n}[1+2\sum_{k=1}^{n-1}e^{\left(\frac{k}{n}\right)^2+\frac{k}{n}}+e^2]$, 方法误差不超过 $6.8\cdot\frac{1}{n^2}$.

注：如有相似考题，所标得分点不代表和考试得分点一模一样。