自动控制理论

（二）现代控制理论

自动化系 尚超
中央主楼418A 010-62782459
c-shang@tsinghua.edu.cn

模块6　李雅普诺夫稳定性分析

TD6-1-1 基本概念

- 1. 标量函数的定号性
- [定义 1.1] 称标量函数 $V(\boldsymbol{x})$ 正定（半正定）：若 $V(\mathbf{0}) = 0$，且对任意非零的 $\boldsymbol{x}$，都有 $V(\boldsymbol{x}) > 0 \left(V(\boldsymbol{x}) \geq 0\right)$。
- [定义 1.2] 称标量函数 $V(\boldsymbol{x})$ 负定（半负定）：若 $-V(\boldsymbol{x})$ 是正定（半正定）的。
- [定义 1.1] 正定或半正定（负定或半负定）统称为非负定（非正定），无任何定号性称为不定。
- 注意，$V(\mathbf{0}) = 0$ 是定号性的必要条件。在不引起混淆时，可直接用 $V(\boldsymbol{x}) > 0$ 表示正定，其余类推。

TD6-1-1 基本概念

- 1. 标量函数的定号性
- 注意：定号性可以是原点邻域上的局部性质，

  如：标量函数 $V(\boldsymbol{x})=[(x_1^2+x_2^2)-1](x_1^2+x_2^2)$ 在域 $\left\{\Omega \mid x_1^2+x_2^2<1\right\}$ 上是负定的。
- 例如，在二维空间中：

$x_1^2+x_2^2$ 正定　　$(x_1+x_2)^2$ 半正定

$-(x_1^4+x_2^2)$ 负定　　$-x_1^2$ 半负定

TD6-1-1 基本概念

- 1. 标量函数的定号性
- 二次型函数 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\boldsymbol{x}$ 的定号性，**A** 是实对称矩阵
- [定理1.1] 实对称矩阵 **A** 是正定（半正定）的，当且仅当所有特征值均大于（大于等于）零。
- [定理1.2] 实对称矩阵 **A** 是正定（半正定）的，当且仅当所有主子式均大于（大于等于）零。

实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的各阶顺序主子式：

$$\Delta_1 = a_{11}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \cdots\cdots, \quad \Delta_n = |\boldsymbol{A}|$$

TD6−1−1 基本概念

- 标量函数的定号性
- [定理（赛尔维斯特判据）] 实对称矩阵 **A** 为
- （1）正定当且仅当 $\Delta_k > 0,\ k = 1, 2, \cdots, n$
- （2）负定当且仅当 $(-1)^k \Delta_k > 0,\ k = 1, \cdots, n$

- 在判断矩阵 **A** 的正定性时，可将主子式简化为顺序主子式
- 在判断矩阵 **A** 的半正定性时，不可将主子式简化为顺序主子式

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

TD6−1−1 基本概念

- 向量的 2 范数：实数向量 $\boldsymbol{z}\in\mathbb{R}^n$，其 2 范数定义为：

$$\|\boldsymbol{z}\| \doteq \sqrt{z_1^2+z_2^2+\cdots+z_n^2}$$

- [定义1.4] 对于系统 $\dot{\boldsymbol{x}}=f(\boldsymbol{x},t)$，满足 $\boldsymbol{0}=f(\boldsymbol{x}_e,t)$ 的状态 $\boldsymbol{x}_e$ 称为系统的平衡状态或平衡点。
- [定义1.5] 若一平衡点附近足够小的邻域内都没有其他的平衡点，则称之为孤立平衡点。

$$\begin{cases}\dot{x}_1(t)=x_2(t)\\ \dot{x}_2(t)=-x_1(t)\end{cases}\qquad \begin{cases}\dot{x}_1(t)=x_2(t)\\ \dot{x}_2(t)=-\sin\left(x_1(t)\right)\end{cases}\qquad \begin{cases}\dot{x}_1(t)=x_2(t)\\ \dot{x}_2(t)=-x_1(t)x_2(t)\end{cases}$$

TD6-1-1 基本概念：李雅普诺夫稳定性

- [定义1.6] 假设 $\boldsymbol{x}_e$ 是系统 $\dot{\boldsymbol{x}} = f(\boldsymbol{x})$ 的孤立平衡点。若对于任意给定正实数 $\varepsilon > 0$ 和时刻 $t_0 > 0$，都存在 $\delta(\varepsilon, t_0) > 0$，使得从满足不等式

$$\|\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{x}_e\| \le \delta(\varepsilon, t_0)$$

的任意初始状态 $\boldsymbol{x}_0$ 出发的系统运动 $\boldsymbol{x}(t)$ 均成立

$$\|\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{x}_e\| \le \varepsilon,\ t \ge t_0$$

则称平衡状态 $\boldsymbol{x}_e$ 是（在李雅普诺夫意义下）稳定的。

- 称平衡状态 $\boldsymbol{x}_e$ 不稳定：若 $\boldsymbol{x}_e$ 不满足上述稳定的条件。

TD6-1-1 基本概念：李雅普诺夫稳定性

- [定义1.7] 称平衡状态 $\boldsymbol{x}_e$ 渐近稳定：若 $\boldsymbol{x}_e$ 稳定，且存在一个邻域 S（吸引域），初始状态 $\boldsymbol{x}(0)$ 从 S 内出发的运动恒有：

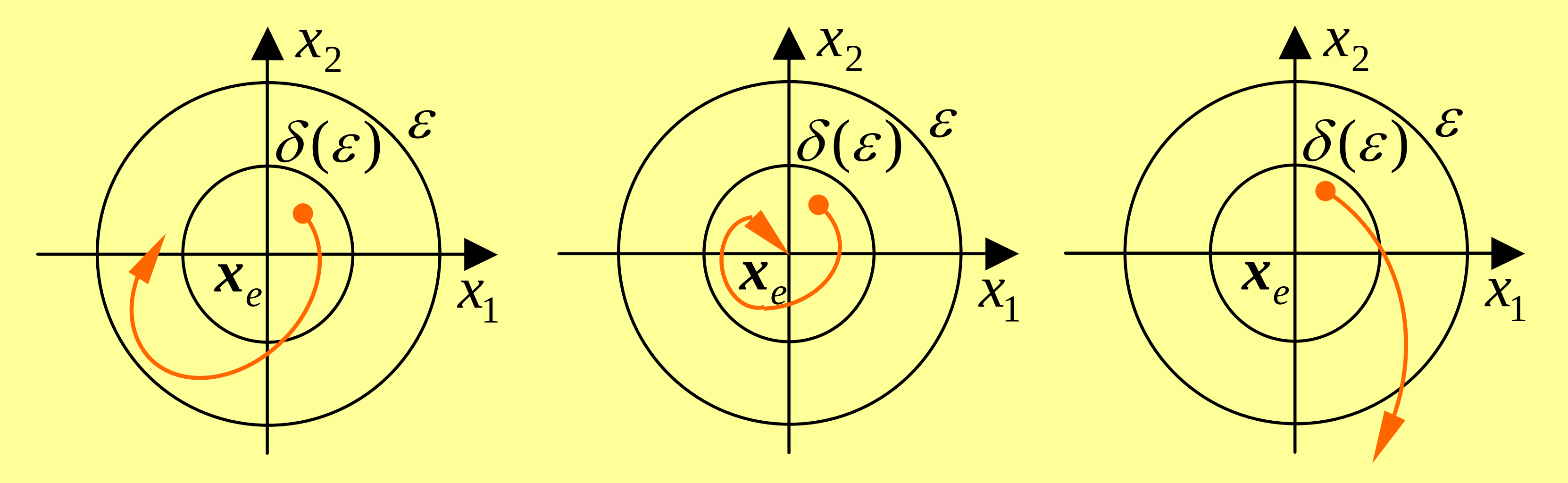
$$\lim_{t\to\infty}\left\|\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{x}_e\right\|=0$$

- [定义1.8] 称平衡状态 $\boldsymbol{x}_e$ 全局渐近稳定：若 $\boldsymbol{x}_e$ 渐近稳定，并且其吸引域 S 充满了整个状态空间。

- 平衡状态唯一是全局渐近稳定的必要条件。

TD6-1-1 基本概念：李雅普诺夫稳定性

李雅普诺夫稳定性的示意图



稳定　　渐近稳定　　不稳定

模块6　李雅普诺夫稳定性分析

TD6-2-1 李雅普诺夫第一方法（间接法）

- 设 x_e 是定常系统 $\dot{x}=f(x)$ 的平衡状态，在平衡点附近的线性化模型为：

$$\dot{\boldsymbol{y}}=\mathbf{A}\boldsymbol{y},\quad \mathbf{A}=\left.\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial\mathbf{x}^T}\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_e}=\left.\begin{bmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}\\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}\end{bmatrix}\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_e}$$

其中 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_e$

- 判别定理

[定理2.1] 若 $\mathbf{A}$ 的特征值均具有负实部，x_e 是渐近稳定的；若存在某个特征值具有正实部，x_e 是不稳定的；其它情况，则不能判定。

TD6-2-1 李雅普诺夫第一方法（间接法）

- 例：判断下列系统在原点处的稳定性： $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \cos x_1 \\ \dot{x}_2 = -\sin x_1 - x_2 \end{cases}$

- 解：原点是系统的平衡点，在原点处线性化可得：

$$\mathbf{A} = \left. \begin{bmatrix} -x_2 \sin x_1 & \cos x_1 \\ -\cos x_1 & -1 \end{bmatrix} \right|_{x=0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

特征根均在左半开平面内，因此原点为该系统的渐近稳定平衡点。

- 注意：线性化方法不能给出全局稳定性的判断（why ?），但该例系统有多个平衡点，因而不可能在原点处全局渐近稳定。

TD6-2-1 李雅普诺夫第一方法（间接法）

- 例：判断下列系统在原点处的稳定性：$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1^3 - 4x_2 \\ \dot{x}_2 = 3x_1 - x_1 x_2 \end{cases}$

- 解：原点是系统的平衡点，在原点处线性化可得 Jacobi 矩阵：

$$\mathbf{A} = \left. \begin{bmatrix} -3x_1^2 & -4 \\ 3 - x_2 & -x_1 \end{bmatrix} \right|_{x=0} = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

两个特征根均在虚轴上，线性化方法失效。

TD6-2-1 李雅普诺夫第二方法（直接法）

- 设原点是定常系统 $\dot{\boldsymbol{x}} = f(\boldsymbol{x})$ 的平衡状态。$V(x)$ 是正定的能量函数（标量函数），它沿着系统状态轨线对时间 t 的导数为：

$$\dot{V}(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial V(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}}\dot{\boldsymbol{x}} = \frac{\partial V(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}} f(\boldsymbol{x})$$

李雅普诺夫第二方法基于 $V(x)$ 和 $\dot{V}(\boldsymbol{x})$的定号性，判别系统平衡状态的稳定性。

TD6-2-1 李雅普诺夫第二方法（直接法）

- [定理2.2] $V(\boldsymbol{x})$ 正定，$\dot{V}(\boldsymbol{x})$ 负定，则原点是渐近稳定的；进而，若 $\|\boldsymbol{x}\| \to \infty$ 时，$V(\boldsymbol{x}) \to \infty$，则原点是全局渐近稳定的。
- [定理2.3] $V(\boldsymbol{x})$ 正定，$\dot{V}(\boldsymbol{x})$ 半负定，则原点是稳定的；此外，若 $\dot{V}(\boldsymbol{x})$ 除原点外沿状态轨线不恒为零，则原点是渐近稳定的；再进一步，若 $\|\boldsymbol{x}\| \to \infty$ 时，$V(\boldsymbol{x}) \to \infty$，则原点是全局渐近稳定的。

- [定理2.4] $V(\boldsymbol{x})$ 正定，$\dot{V}(\boldsymbol{x})$ 正定，则原点是不稳定的。
- 注意：以上均为充分条件，找不到满足定理条件的 $V(\boldsymbol{x})$，不能下结论。
- 若 $V(\boldsymbol{x})$ 代表广义能量，则 $\dot{V}(\boldsymbol{x})$ 代表广义功率。$\dot{V}(\boldsymbol{x}) < 0$，说明系统沿着状态轨线运动不断地消耗能量。

TD6-2-1 李雅普诺夫方法

- 例：判断如下系统在原点的稳定性：

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1^3 - 4x_2 \\ \dot{x}_2 = 3x_1 - 7x_2 \end{cases}$$

- 解：原点是唯一平衡点，下面由第二方法判定其稳定性。

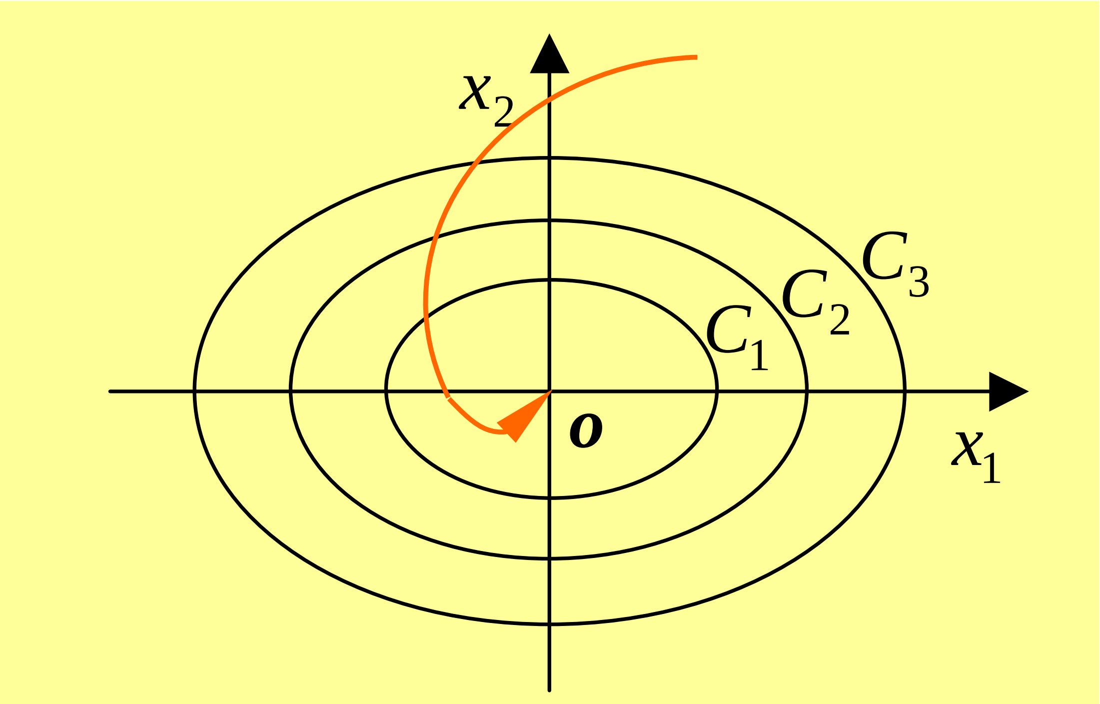
取 $V(\boldsymbol{x}) = 3x_1^2 + 4x_2^2 > 0$

得 $\dot{V}(\boldsymbol{x}) = 6x_1 \cdot \dot{x}_1 + 8x_2 \cdot \dot{x}_2 = -6x_1^4 - 56x_2^2 < 0$

当 $\|\boldsymbol{x}\| \to \infty$ 时，$V(\boldsymbol{x}) \to \infty$，原点全局渐近稳定。

TD6-2-1 李雅普诺夫方法

- 下图是该例子中$V(\boldsymbol{x})=C \quad (C_3>C_2>C_1>0)$ 的图形，它是一族包围原点的、闭的、随$C\to 0$ 向原点收缩的椭圆。



$$V(\boldsymbol{x})=3x_1^2+4x_2^2>0 \qquad \dot{V}(\boldsymbol{x})=-6x_1^4-56x_2^2<0$$

TD6-2-1 李雅普诺夫方法

- 例：判断如下系统在原点的稳定性：$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\dfrac{2x_1}{(1+x_1^2)^2} + 2x_2 \\ \dot{x}_2 = -\dfrac{2x_1 + 2x_2}{(1+x_1^2)^2} \end{cases}$

- 解：原点是唯一平衡点，由第一方法判定它是渐近稳定的。下面考虑第二方法，取

$$V(\boldsymbol{x}) = \frac{x_1^2}{1+x_1^2} + x_2^2 > 0$$

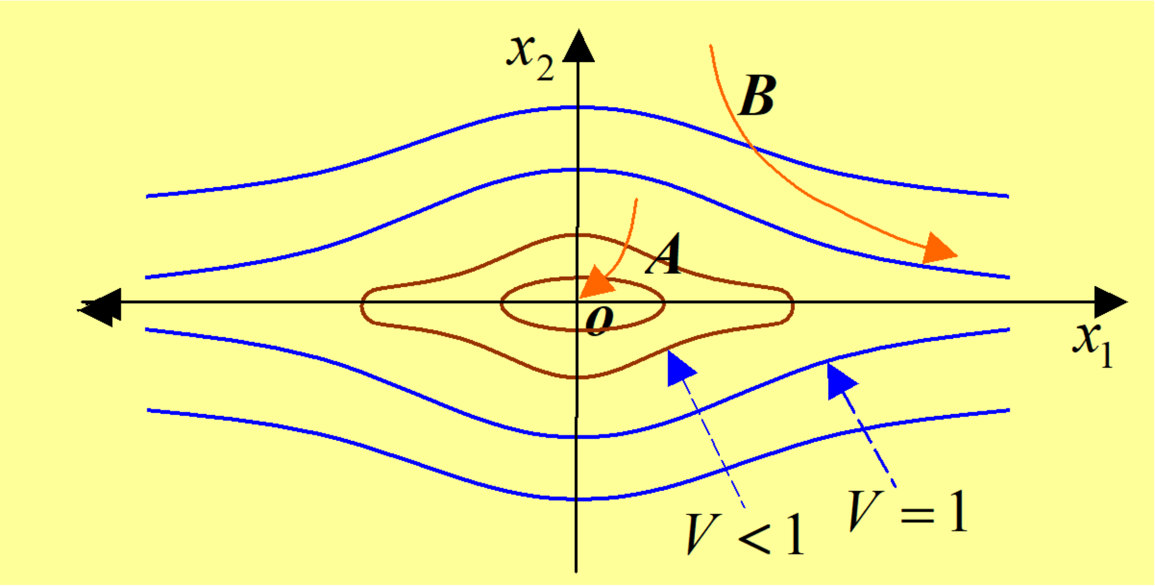
得

$$\dot{V}(\boldsymbol{x}) = -\frac{4x_1^4}{(1+x_1^2)^4} - \frac{4x_2^4}{(1+x_1^2)^2} < 0$$

所以原点是渐近稳定的。然而，当 $x_1 \to \infty, x_2 \to 0$ 时，$V(\boldsymbol{x}) \to 1$，即 $\|\boldsymbol{x}\| \to \infty$ 时，$V(\boldsymbol{x}) \to \infty$ 不成立，不能保证全局渐近稳定。

TD6-2-1 李雅普诺夫方法

下图是该例中$V(\boldsymbol{x})=C$的图形，当$C<1$时，它是一族包围原点的、闭的、随$C\to 0$向原点退缩的曲线。但当$C\geq 1$时，曲线不再是闭的。从$\boldsymbol{A}(C<1)$出发的轨线趋向原点；而从$\boldsymbol{B}$出发$(C>1)$的轨线沿着x_1轴趋向无穷远，尽管始终有$V>0$, $\dot{V}<0$。



TD6-2-1 李雅普诺夫方法

- 例：判断如下系统在原点的稳定性：$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}$

（1） 取 $V(\boldsymbol{x})=2x_1^2+x_2^2>0$

得 $\dot{V}(\boldsymbol{x})=2x_1x_2-2x_2^2$ $\quad\therefore$ 不定，不能判定

（2） 取 $V(\boldsymbol{x})=x_1^2+x_2^2>0$

得 $\dot{V}(\boldsymbol{x})=-2x_2^2$ $\quad\therefore$ 半负定，因此原点稳定

若 $\dot{V}(\boldsymbol{x})=0$，则 $x_2=\dot{x}_2\equiv 0$，代入原方程得 $x_1\equiv 0$，因而 $\dot{V}(\boldsymbol{x})=0$ 仅发生在原点处。而当 $\|\boldsymbol{x}\|\to\infty$ 时，$V(\boldsymbol{x})\to\infty$，所以原点全局渐近稳定。

TD6-2-1 李雅普诺夫方法

- 例：判断如下系统在原点的稳定性：

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}$$

（3） 取 $V(\boldsymbol{x}) = 1.5x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2 > 0$

得 $\dot{V}(\boldsymbol{x}) = -x_1^2 - x_2^2 < 0$

且当 $\|\boldsymbol{x}\| \to \infty$ 时，$V(\boldsymbol{x}) \to \infty$，所以原点全局渐近稳定。

- 选择不同的 V 函数，可能得到不同的结果，但这些结果之间并不矛盾。

TD6−2−1 李雅普诺夫方法

- 例：判断如下系统在原点的稳定性： $\begin{cases}\dot{x}_1 = -x_1^3 + x_2^4 \\ \dot{x}_2 = -x_2^3 + x_1^4\end{cases}$
- 解：原点是平衡点但是不唯一。容易验证，线性化方法失效。

取 $V(\boldsymbol{x}) = 0.5(x_1^2 + x_2^2) > 0$ $\Rightarrow$ $\dot{V}(\boldsymbol{x}) = -x_1^4(1 - x_2) - x_2^4(1 - x_1)$

在区域 $\{(x_1, x_2) \mid x_2 < 1, x_1 < 1\}$ 内（原点是该区域内点），有 $\dot{V}(\boldsymbol{x}) < 0$

所以原点是渐近稳定的。

注意：这个例子中，当 $\|\boldsymbol{x}\| \to \infty$ 时，$V(\boldsymbol{x}) \to \infty$，但不能得到全局渐近稳定的结论，因为 $\dot{V}(\boldsymbol{x}) < 0$ 仅在局部区域内成立。

TD6-2-1 李雅普诺夫方法

- 例：判断如下系统在原点的稳定性：
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\dfrac{1}{2}x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = (x_1^2 + x_2^2)x_1 - \dfrac{1}{2}x_2 \end{cases}$$

- 解：原点是平衡点但是不唯一，因此线性化方法失效。

取 $V(\boldsymbol{x}) = (x_1^2 + x_2^2) + 2x_2^2 > 0$ ⇨ $\dot{V}(\boldsymbol{x}) = 2(x_1 + x_2)(\dot{x}_1 + \dot{x}_2) + 4x_2\dot{x}_2$

$$= (x_1^2 + x_2^2)\left[2x_1(x_1 + 3x_2) - 1\right]$$

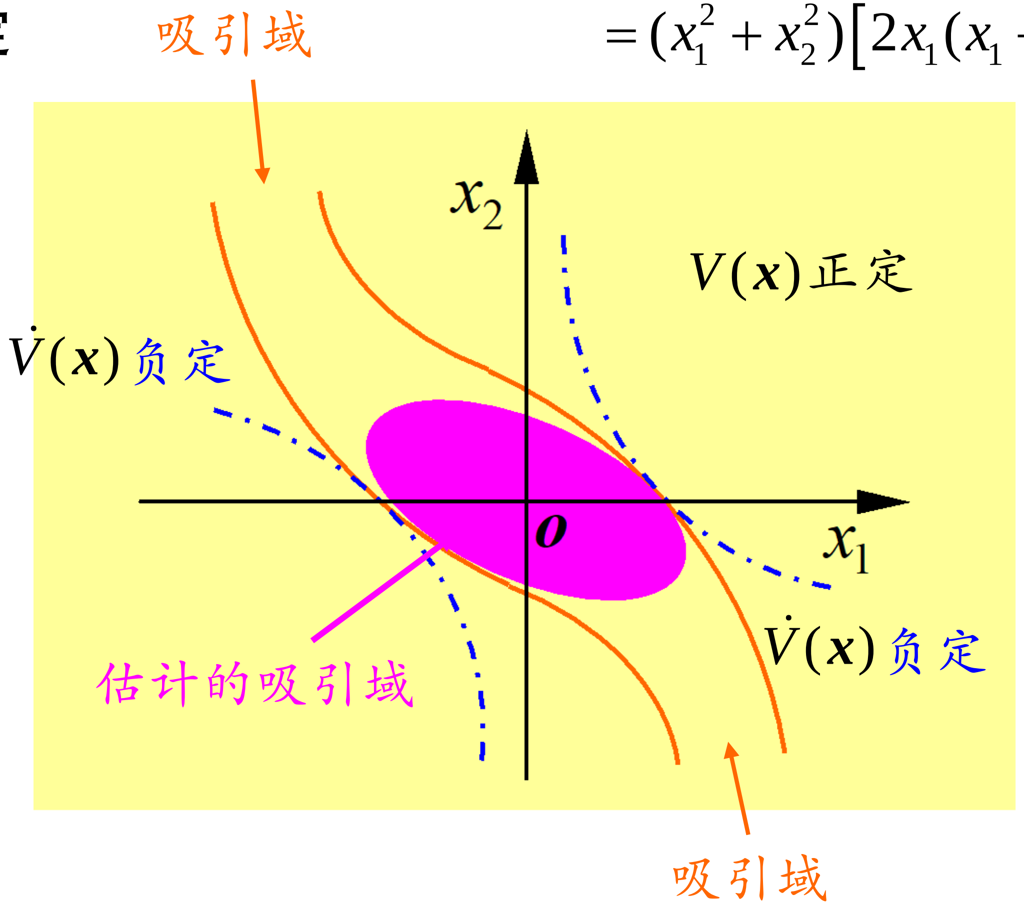
显然，$\dot{V}(\boldsymbol{x})$ 在 $2x_1(x_1 + 3x_2) < 1$的区域内（原点是该区域内点）负定，因此原点渐近稳定的。

TD6-2-1 李雅普诺夫方法

$$V(\boldsymbol{x})=(x_1^2+x_2^2)+2x_2^2>0 \qquad \dot V(\boldsymbol{x})=2(x_1+x_2)(\dot x_1+\dot x_2)+4x_2\dot x_2$$

$$=(x_1^2+x_2^2)\left[2x_1(x_1+3x_2)-1\right]$$

全空间正定



TD6-2-1 李雅普诺夫方法

- 我们可以在 $\dot{V}(\boldsymbol{x})=0$ 的边界上求 V 的最小值 $V_{\min}$，则

$$\left\{\boldsymbol{x} \mid V(\boldsymbol{x})<V_{\min}\right\}$$

  就是一个保守的、比实际更小的吸引域。

- 由 $\dot{V}(\boldsymbol{x})=0$ ，即 $2x_1(x_1+3x_2)=1$，得: $x_2=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2x_1}-x_1\right)$

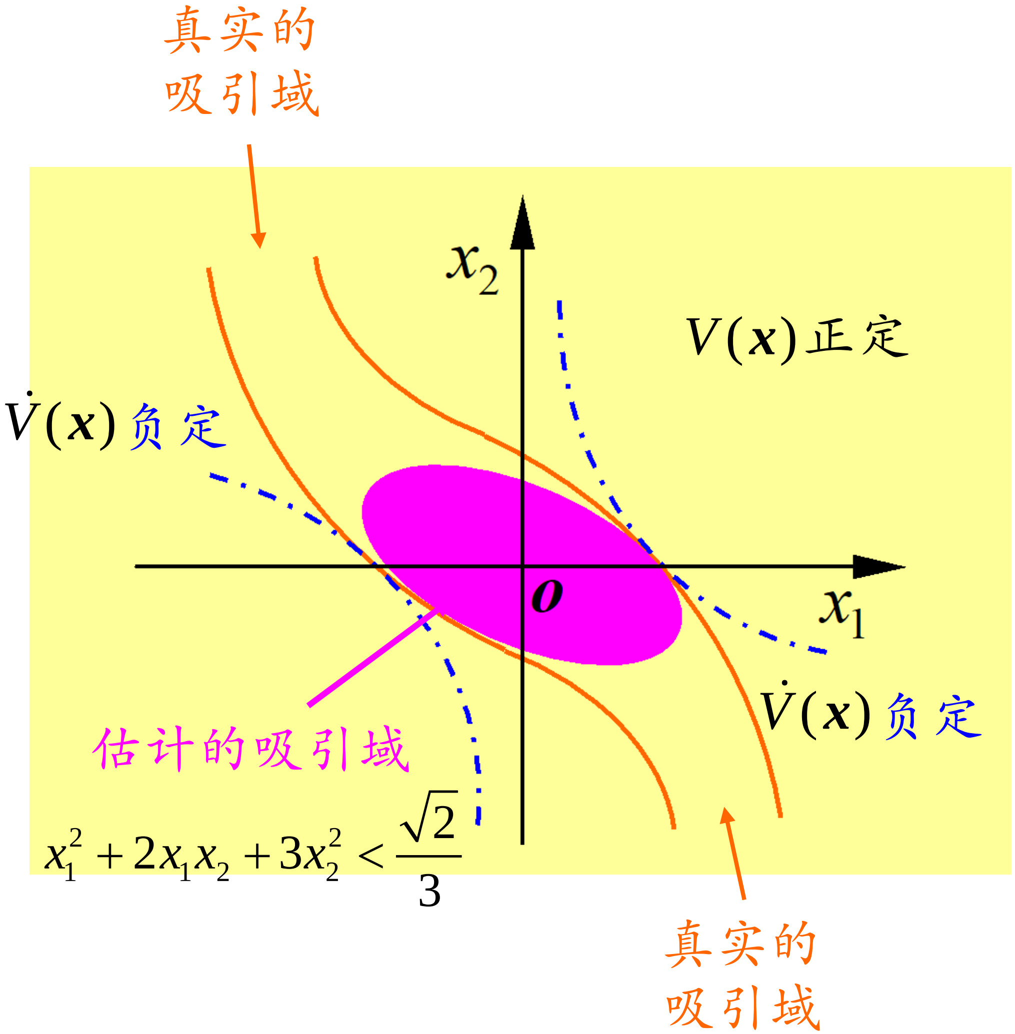
$$V(\boldsymbol{x})\big|_{\dot{V}(\boldsymbol{x})=0}=x_1^2+2x_1x_2+3x_2^2$$

$$=\frac{2}{3}\left(x_1-\frac{1}{2\sqrt{2}x_1}\right)^2+\frac{\sqrt{2}}{3} \Rightarrow V_{\min}=\frac{\sqrt{2}}{3}$$

TD6-2-1 李雅普诺夫方法

估计的吸引域

$$x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2 \le \frac{\sqrt{2}}{3}$$



模块6　李雅普诺夫稳定性分析

TD6-1-1 基本概念（课本11.1）

TD6-2-1 李雅普诺夫方法（课本11.1.3、11.2）

<u>TD6-3-1 李雅普诺夫函数的构造方法（课本11.5）</u>

TD6-4-1 线性定常系统的稳定性（课本11.4）

TD6-5-1 离散系统的稳定性（课本11.2、11.4，自学）

TD6-3-1 李雅普诺夫函数的构造方法

- 对于非线性系统，不存在一种通用的、完全有效的 V 函数构造方法。人们通常凭借经验和技巧来选取 V 函数，其中最常见的是二次型函数。
- 三种典型的试探方法：
  - 克拉索夫斯基（Krasovskii）方法
  - 变量梯度法
  - 偶函数法

TD6-3-1 克拉索夫斯基（Krasovskii）方法

- 考虑非线性系统 $\dot{x}=f(x)$，其中 $f(x)$ 存在连续偏导数。定义雅可比（Jacobi）矩阵为:

$$F(x)\triangleq\frac{\partial f(x)}{\partial x^{\mathrm{T}}}=\begin{bmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}\end{bmatrix}$$

- [定理3.1] 设 $f(0)=0$，且在原点的一个邻域上，$F(x)+F^{\mathrm{T}}(x)$ 负定（正定），则在此邻域内除原点外，$f(x)\neq 0$ 。
- [定理3.2] 设原点是 $\dot{x}=f(x)$ 的平衡状态，若 $F(x)+F^{\mathrm{T}}(x)$ 负定，则原点是渐近稳定的。进一步，当 $\|x\|\to\infty$ 时，有 $\|f(x)\|\to\infty$，则原点是全局渐近稳定的。

TD6-3-1 克拉索夫斯基（Krasovskii）方法

- [定理3.2] 设原点是 $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 的平衡状态，若 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})$ 负定，则原点是渐近稳定的。进一步，当 $\|\boldsymbol{x}\| \to \infty$ 时，有 $V(\boldsymbol{x}) \to \infty$，则原点是全局渐近稳定的。

- 证明：取李雅普诺夫函数为：$V(\boldsymbol{x}) = \|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\|^2 = \boldsymbol{f}^T(\boldsymbol{x})\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$

  则 $\dot{V}(\boldsymbol{x}) = \dot{\boldsymbol{f}}^T(\boldsymbol{x})\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{f}^T(\boldsymbol{x})\dot{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{x})$

  $$= \boldsymbol{f}^T(\boldsymbol{x})[\boldsymbol{F}^T(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})]\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$$

  若 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})$ 负定，则由定理3.1可得：

  $$V(\boldsymbol{x}) > 0,\ \dot{V}(\boldsymbol{x}) < 0.$$

TD6-3-1 克拉索夫斯基（Krasovskii）方法

- 例：用 Krasovskii 方法判定下述系统原点的稳定性。

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_1 x_2 \\ \dot{x}_2 = 0.5x_1^2 - x_2 \end{cases}$$

- 解：原点是平衡点但不唯一，由第一方法可判定其渐近稳定性。

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} x_2 - 1 & x_1 \\ x_1 & -1 \end{bmatrix}$$ 是对称阵

- 其顺序主子式为：$\Delta_1 = x_2 - 1$， $\Delta_2 = 1 - x_2 - x_1^2$

  在 $x_2 < 1 - x_1^2$ 的区域内（原点是其中的内点），$\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 > 0$

  因此 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})$ 在这个区域上负定，即原点是渐近稳定的。

TD6-3-1 克拉索夫斯基（Krasovskii）方法

- 例：用 Krasovskii 方法判定下述系统原点的稳定性。

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -5x_1 + x_2^2 \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2 - x_2^3 \end{cases}$$

- 解：原点是唯一平衡点，由第一方法可判定它是渐近稳定的。

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} -5 & 2x_2 \\ 1 & -1-3x_2^2 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} -10 & 2x_2+1 \\ 2x_2+1 & -2-6x_2^2 \end{bmatrix}$$

- 其顺序主子式为：$\Delta_1 = -10 < 0, \quad \Delta_2 = 20(1+3x_2^2) - (2x_2+1)^2 = 56x_2^2 - 4x_2 + 19 > 0$

因此 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})$ 负定，且当 $\|\boldsymbol{x}\| \to \infty$ 时，

$$\|\boldsymbol{f}\|^2 = (-5x_1 + x_2^2)^2 + (x_1 - x_2 - x_2^3)^2 \to \infty$$

所以原点是全局渐近稳定的。

TD6−3−2 变量梯度法

- 思路：先找 $\dot{V}(\boldsymbol{x})$，再找 $V(\boldsymbol{x})$。
- Step 1: 设定 $V(\boldsymbol{x})$ 的梯度 grad V: $[\mathrm{grad}V]^T=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial V}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial V}{\partial x_n}\end{bmatrix}\triangleq[\nabla_1 \quad \cdots \quad \nabla_n]$
- Step 2: 由 grad V 确定 $\dot{V}(\boldsymbol{x})$

$$\dot{V}(\boldsymbol{x})=[\mathrm{grad}V]^T\dot{\boldsymbol{x}}=\nabla_1 f_1(\boldsymbol{x})+\cdots+\nabla_n f_n(\boldsymbol{x})$$

- Step 3: 由 $\dot{V}(\boldsymbol{x})$ 求 $V(\boldsymbol{x})$ ：

$$V(\boldsymbol{x})=\int_{V(0)}^{V(\boldsymbol{x})}\mathrm{d}V(\boldsymbol{x})=\int_0^{\boldsymbol{x}}[\mathrm{grad}\ V]^{\mathrm{T}}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}=\int_0^{\boldsymbol{x}}\sum_{i=1}^{n}\nabla_i\mathrm{d}x_i$$

这是一个沿解曲线的曲线积分，当被积函数确是某个标量场的梯度时，结果与积分路径无关。

TD6-3-2 变量梯度法

- 思路：先找 $\dot{V}(\boldsymbol{x})$，再找 $V(\boldsymbol{x})$ 。

- Step 4: 构成梯度，使其满足条件 $\dfrac{\partial\nabla_i}{\partial x_j}=\dfrac{\partial\nabla_j}{\partial x_i},\quad i\neq j$

- Step 5: 选择一条简单的积分路径

  上述条件满足时，选择按坐标的逐次积分是最方便的：

$$V(\boldsymbol{x})=\int_0^{x_1}\nabla_1\,\mathrm{d}\,x_1+\int_0^{x_2}\nabla_2\,\mathrm{d}\,x_2+\cdots+\int_0^{x_n}\nabla_n\,\mathrm{d}\,x_n$$

注意：$\int_0^{x_1}\nabla_1\,\mathrm{d}\,x_1$ 时，$x_2=\cdots=x_n=0$

$\int_0^{x_2}\nabla_2\,\mathrm{d}\,x_2$ 时，$x_1=x_1$，$x_3=\cdots=x_n=0$，其余类推。

TD6−3−2 变量梯度法

- 例：用变量梯度法判定下述系统平衡状态的稳定性

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + 2x_1^2 x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_2 \end{cases}$$

- 解：原点是唯一平衡点，由第一方法可知它是渐近稳定的。

  （1）设梯度向量为：

$$\mathrm{grad}V(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} \nabla_1 \\ \nabla_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{bmatrix}$$

  （2）计算导函数：

$$\dot{V}(\boldsymbol{x}) = [\mathrm{grad}V]^T \dot{\boldsymbol{x}}$$

$$\dot{V}(\boldsymbol{x}) = (a_{11}x_1 + a_{12}x_2)(-x_1 + 2x_1^2 x_2) + (a_{21}x_1 + a_{22}x_2)(-x_2)$$

$$= = -a_{11}x_1^2(1 - 2x_1x_2) - a_{22}x_2^2 - (a_{12} + a_{21})x_1x_2 + 2a_{12}x_1^2x_2^2$$

TD6−3−2 变量梯度法

- 例：用变量梯度法判定系统 $\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + 2x_1^2 x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_2 \end{cases}$ 平衡状态稳定性
- 解：（3）由 $\dfrac{\partial \nabla_1}{\partial x_2} = \dfrac{\partial \nabla_2}{\partial x_1}$，并假定 a_{ij} 均为常数，可得：$a_{12} = a_{21}$

为使 $\dot{V}(\boldsymbol{x}) < 0$，取 $a_{12} = a_{21} = 0,\ a_{11} = a_{22} = 1$，得到：

$$\dot{V}(\boldsymbol{x}) = -x_1^2(1 - 2x_1x_2) - x_2^2 < 0,\ \text{若}\quad 1 - 2x_1x_2 > 0$$

（注意，原点是范围 $1 - 2x_1x_2 > 0$ 的内点）。

（4）按照坐标积分求

$$V(\boldsymbol{x}) = \int_0^{x_1} x_1 \,\mathrm{d}\, x_1 + \int_0^{x_2} x_2 \,\mathrm{d}\, x_2 = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) > 0$$

（5）综上，$V(\boldsymbol{x}) > 0$，且在原点的一个邻域内有 $\dot{V}(\boldsymbol{x}) < 0$；所以原点是渐近稳定的

TD6−3−3 偶函数法

- 考虑具有如下特殊形式的函数 $V(\boldsymbol{x})$ ： $V(\boldsymbol{x})=\sum_{i=1}^{n}a_i(x_i)$
- 其中， $a_i(x_i)$ 是关于 $\boldsymbol{x}_i$ 的偶正定函数，则：

$$\dot{V}(\boldsymbol{x})=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial a_i(x_i)}{\partial x_i}f_i(\boldsymbol{x})$$

- 思路：选取 $a_i(x_i)$ 使得 $\dot{V}(\boldsymbol{x})<0$ 。
- 注意偶正定函数的特性：
  - （1） $\dfrac{\partial a_i(x_i)}{\partial x_i}$ 是奇函数
  - （2） $\dfrac{\partial a_i(x_i)}{\partial x_i}x_j(i\neq j)$ 是不定号的
  - （3）若 $b_i(x_i)$ 是 x_i 的奇函数，则 $\dfrac{\partial a_i(x_i)}{\partial x_i}b_i(x_i)$ 可能是定号的。

TD6−3−3 偶函数法

- 例：考虑如下二阶系统稳定性：$\begin{cases} \dot{x}_1 = -5x_1 - x_2 - x_2^5 \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2 - x_2^3 \end{cases}$

- 解：可知原点是该系统的唯一平衡点。令：$V(\boldsymbol{x}) = a(x_1) + b(x_2)$
  其中 $a(x_1)$ 和 $b(x_2)$ 分别是关于 x_1 和 x_2 的偶正定函数

则：

$$\begin{aligned}\dot{V}(\boldsymbol{x}) &= \frac{\partial a(x_1)}{\partial x_1}\dot{x}_1 + \frac{\partial b(x_2)}{\partial x_2}\dot{x}_2 \\ &= \frac{\partial a(x_1)}{\partial x_1}\left(-5x_1 - x_2 - x_2^5\right) + \frac{\partial b(x_2)}{\partial x_2}\left(x_1 - x_2 - x_2^3\right) \\ &= \underbrace{\boxed{-5x_1\frac{\partial a(x_1)}{\partial x_1} - \left(x_2 + x_2^3\right)\frac{\partial b(x_2)}{\partial x_2}}}_{\text{可能定号}} - \underbrace{\boxed{\left(x_2 + x_2^5\right)\frac{\partial a(x_1)}{\partial x_1} + x_1\frac{\partial b(x_2)}{\partial x_2}}}_{\text{不定号}}\end{aligned}$$

TD6−3−3 偶函数法

- 例：考虑如下系统稳定性：$\begin{cases} \dot{x}_1 = -5x_1 - x_2 - x_2^5 \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2 - x_2^3 \end{cases}$

- 解：(Cont’d) 令 $\dfrac{\partial a(x_1)}{\partial x_1} = x_1,\ \dfrac{\partial b(x_2)}{\partial x_2} = x_2 + x_2^5,$

  可得：$a(x_1) = \dfrac{1}{2}x_1^2,\ b(x_2) = \dfrac{1}{2}x_2^2 + \dfrac{1}{6}x_2^6$

$$V(\mathbf{x}) = a(x_1) + b(x_2) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 + \frac{1}{6}x_2^6$$

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = -5x_1^2 - \left(1 + x_2^2\right)\left(1 + x_2^4\right)x_2^2$$

因此，该系统全局渐近稳定。

TD6−3−3 偶函数法

- 例：判断如下系统稳定性：
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\dfrac{2x_1}{(1+x_1^2)^2} + 2x_2 \\ \dot{x}_2 = -\dfrac{2(x_1+x_2)}{(1+x_1^2)^2} \end{cases}$$

- 解：原点是唯一平衡点，由第一方法可判定它是渐近稳定的。

令：$V(\boldsymbol{x}) = \dfrac{x_1^2}{1+x_1^2} + x_2^2 > 0$，得 $\dot{V}(\boldsymbol{x}) = -\dfrac{4x_1^2}{(1+x_1^2)^4} - \dfrac{4x_2^2}{(1+x_1^2)^2} < 0$

所以，原点是渐近稳定的。令 $V(\boldsymbol{x}) = a(x_1) + b(x_2)$，则

$$\dot{V}(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial a(x_1)}{\partial x_1}\dot{x}_1 + \frac{\partial b(x_2)}{\partial x_2}\dot{x}_2$$

$$= -\frac{2x_1}{(1+x_1^2)^2}\frac{\partial a(x_1)}{\partial x_1} - \frac{2x_2}{(1+x_1^2)^2}\frac{\partial b(x_2)}{\partial x_2} + 2x_2\frac{\partial a(x_1)}{\partial x_1} - \frac{2x_1}{(1+x_1^2)^2}\frac{\partial b(x_2)}{\partial x_2}$$

TD6−3−3 偶函数法

- 例：考虑如下系统稳定性：
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\dfrac{2x_1}{(1+x_1^2)^2} + 2x_2 \\ \dot{x}_2 = -\dfrac{2(x_1+x_2)}{(1+x_1^2)^2} \end{cases}$$

- 解：(Cont'd) 令 $\dfrac{\partial a(x_1)}{\partial x_1} = \dfrac{2x_1}{(1+x_1^2)^2}$，$\dfrac{\partial b(x_2)}{\partial x_2} = 2x_2$ ，

可得：$a(x_1) = \int_0^{x_1} \dfrac{2\tau}{(1+\tau^2)^2} d\tau = -\dfrac{1}{1+\tau^2}\Big|_0^{x_1} = 1 - \dfrac{1}{1+x_1^2} = \dfrac{x_1^2}{1+x_1^2}$

$b(x_2) = \int_0^{x_2} 2\tau d\tau = x_2^2$

$\Rightarrow$ $V(\boldsymbol{x}) = \dfrac{x_1^2}{1+x_1^2} + x_2^2$，$\dot{V}(\boldsymbol{x}) = -\dfrac{4x_1^2}{(1+x_1^2)^2} - \dfrac{4x_2^2}{(1+x_1^2)^2}$

因此，该系统渐近稳定。

模块6　李雅普诺夫稳定性分析

TD6-1-1 基本概念（课本11.1）

TD6-2-1 李雅普诺夫方法（课本11.1.3、11.2）

TD6-3-1 李雅普诺夫函数的构造方法（课本11.5）

TD6-4-1 线性定常系统的稳定性（课本11.4）

TD6-5-1 离散系统的稳定性（课本11.2、11.4，自学）

TD6-4-1 线性定常系统的稳定性

- 考虑线性定常系统

$$\dot{x} = \mathbf{A}x$$

- 其为渐近稳定的充要条件是：$\mathbf{A}$ 的所有特征值的实部都为负。
- 线性定常系统为渐近稳定时，原点是唯一的平衡点，并且必然是全局渐近稳定的。
- 线性定常系统为渐近稳定时，$e^{\mathbf{A}t} \to 0,\ \ t \to \infty$ 。
- 其为稳定的充要条件是：$\mathbf{A}$ 的所有特征值在左半闭平面内，且虚轴上特征值对应的约当块均为1阶。
- 如果 $\mathbf{A}$ 有实部为正的特征值，线性定常系统不稳定。

TD6-4-1 线性定常系统的稳定性

- [定理4-1] 系统 $\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{A}\mathbf{x}$ 为渐近稳定的充要条件是：对于任意给定的正定阵 $\mathbf{Q}$，存在正定阵 $\mathbf{P}$ 满足李雅普诺夫方程：

$$\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}+\mathbf{P}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}=-\mathbf{Q}$$

- 证明：充分性（存在正定阵 $\mathbf{P}\rightarrow$ 渐近稳定）

选取 $V(\mathbf{x})=\mathbf{x}^{T}\mathbf{P}\mathbf{x},\quad \mathbf{P}>0$

则 $\dot{V}(\mathbf{x})=\dot{\mathbf{x}}^{T}\mathbf{P}\mathbf{x}+\mathbf{x}^{T}\mathbf{P}\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{x}^{T}(\mathbf{A}^{T}\mathbf{P}+\mathbf{P}\mathbf{A})\mathbf{x}=-\mathbf{x}^{T}\mathbf{Q}\mathbf{x}$

$\therefore\ \mathbf{Q}>\mathbf{0}$，根据李雅普诺夫稳定性定理，系统渐近稳定。

TD6−4−1 线性定常系统的稳定性

- [定理4-1] 系统 $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}x$ 为渐近稳定的充要条件是：对于任意给定的正定阵 $\mathbf{Q}$，存在正定阵 $\mathbf{P}$ 满足李雅普诺夫方程：

$$\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{P} + \mathbf{P}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} = -\mathbf{Q}$$

- 证明：必要性（渐近稳定 → 存在正定阵 $\mathbf{P}$）

  考察矩阵微分方程：$\dot{\mathbf{E}}(t) = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{E}(t) + \mathbf{E}(t)\mathbf{A}$

  容易验证，其解矩阵为：$\mathbf{E}(t) = e^{\mathbf{A}^{T}t}\mathbf{Q}e^{\mathbf{A}t}$，且有：

$$\mathbf{E}(0) = \mathbf{Q} \qquad\qquad \mathbf{E}(\infty) = \mathbf{0}$$

  将上述方程两边对时间 t 积分，得：$\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\int_0^{\infty}\mathbf{E}(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^{\infty}\mathbf{E}(t)\,\mathrm{d}t\,\mathbf{A} = \mathbf{E}(\infty) - \mathbf{E}(0) = -\mathbf{Q}$

  令 $\mathbf{P} = \int_0^{\infty}\mathbf{E}(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\infty}e^{\mathbf{A}^{\mathrm{T}}t}\mathbf{Q}\,e^{\mathbf{A}t}\,\mathrm{d}t$，则上式即为李雅普诺夫方程。

TD6−4−1 线性定常系统的稳定性

- [定理4-1] 系统 $\dot{x}=\mathbf{A}x$ 为渐近稳定的充要条件是：对于任意给定的正定阵 $\mathbf{Q}$，存在正定阵 $\mathbf{P}$ 满足李雅普诺夫方程：

$$\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}+\mathbf{P}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}=-\mathbf{Q}$$

- 证明：必要性（渐近稳定 → 存在正定阵 $\mathbf{P}$）

  假设：$\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0\neq\mathbf{0}$，则 $\boldsymbol{x}(t)=e^{\mathbf{A}t}x_0$。考察如下二次型函数：

$$\boldsymbol{x}_0^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\boldsymbol{x}_0=\int_0^{\infty}\mathbf{x}_0^{\mathrm{T}}e^{A^{\mathrm{T}}t}\mathbf{Q}e^{At}\mathbf{x}_0\,\mathrm{d}t=\int_0^{\infty}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{Q}\boldsymbol{x}(t)\,\mathrm{d}t$$

当 $\boldsymbol{x}_0\neq 0$，则 $\boldsymbol{x}$ 不恒为零，而 $\mathbf{Q}>\mathbf{0}$，因而上式右端被积函数连续、非负、不恒为零，因此，上式右端的积分为正，所以 $\mathbf{P}$ 是正定的。证毕。

TD6-4-1 线性定常系统的稳定性

- 先任取正定阵 Q，由李雅普诺夫方程 $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}+\mathbf{P}\mathbf{A}=-\mathbf{Q}$ 求取 P；若 P 正定（负定），系统渐近稳定（不稳定），否则，不渐近稳定。
- 先任取正定阵 P，由李雅普诺夫方程 $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}+\mathbf{P}\mathbf{A}=-\mathbf{Q}$ 求取 Q；若 Q 正定（负定），系统渐近稳定（不稳定）；否则，不能下任何结论。

- [定理4-2] 给定任意正定阵 Q，李雅普诺夫方程 $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}+\mathbf{P}\mathbf{A}=-\mathbf{Q}$ 有唯一解的充要条件是：矩阵 A 没有互为相反数的特征值。

TD6-4-1 线性定常系统的稳定性

- 例：判别如下线性定常系统的渐近稳定性：$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}$
- 解：取 $\mathbf{Q} = \mathbf{I}$，令 $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} a & c \\ c & b \end{bmatrix}$，代入李雅普诺夫方程，可得：

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & c \\ c & b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & c \\ c & b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

- 比较矩阵元素可得：$\begin{cases} -2c = 1 \\ a - b - c = 0 \\ -2b + 2c = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1.5 \\ b = 1 \\ c = 0.5 \end{cases} \Rightarrow \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1.5 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix} > 0$

$\therefore$ 该系统渐近稳定。

TD6-4-1 线性定常系统的稳定性

- [定理4-3] 矩阵 $\mathbf{A}$ 所有特征值的实部均小于 $-\sigma$ 的充要条件是：对任意给定的正定矩阵 $\mathbf{Q}$，存在正定矩阵 $\mathbf{P}$ 满足：

$$\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}+\mathbf{P}\mathbf{A}+2\sigma\mathbf{P}=-\mathbf{Q}$$

证明：改写上式为：$\left(\sigma\mathbf{I}+\mathbf{A}\right)^{\mathrm{T}}\mathbf{P}+\mathbf{P}\left(\sigma\mathbf{I}+\mathbf{A}\right)=-\mathbf{Q}$

对于任意给定的某个正定矩阵 $\mathbf{Q}$，存在正定矩阵 $\mathbf{P}$ 满足上式的充要条件为矩阵 $\sigma\mathbf{I}+\mathbf{A}$ 的特征值的实部均小于 0，即等价于矩阵 $\mathbf{A}$ 的特征值的实部均小于 $-\sigma$。

TD6−4−1 线性定常系统的稳定性

- 例：设系统状态方程如下，求控制律 $\boldsymbol{u} = -\mathbf{F}\boldsymbol{x}$ 使闭环系统极点的实部均小于 -3。

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{u}$$

- 解：设：$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$，则：$\mathbf{A} - \mathbf{BF} = \begin{bmatrix} -a-c & 1-b-d \\ 2+2a-c & 2+2b-d \end{bmatrix}$

- 代入方程 $(\mathbf{A}-\mathbf{BF})^{\mathrm{T}} + (\mathbf{A}-\mathbf{BF}) + 2\sigma\mathbf{I} = -\mathbf{I}$，得：$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 4.5 & -0.5 \end{bmatrix}$

得闭环系统为：$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} -3.5 & 4.5 \\ -4.5 & -3.5 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}$

其特征值为共轭复数，实部为-3.5 < -3，因此满足设计要求。

模块6　李雅普诺夫稳定性分析

TD6-1-1 基本概念（课本11.1）

TD6-2-1 李雅普诺夫方法（课本11.1.3、11.2）

TD6-3-1 李雅普诺夫函数的构造方法（课本11.5）

TD6-4-1 线性定常系统的稳定性（课本11.4）

TD6-5-1 离散系统的稳定性（课本11.2、11.4，自学）

TD6-5-1 离散系统的稳定性

- 考虑非线性定常离散系统

$$\boldsymbol{x}(k+1)=\boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{x}(k)\right)$$

- 平衡状态 $\boldsymbol{x}_e$:

$$\boldsymbol{x}_e=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_e)$$

- 和连续系统情形类似，设 V 为标量函数，它沿着状态轨线的增量为:

$$\Delta V(\boldsymbol{x}(k))=V(\boldsymbol{x}(k+1))-V(\boldsymbol{x}(k))$$

TD6-5-1 离散系统的稳定性

- [定理5-1] 假设原点是系统 $\boldsymbol{x}(k+1)=\boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{x}(k)\right)$ 的平衡点，
  若 $V(\boldsymbol{x}(k))>0$ ，$\Delta V(\boldsymbol{x}(k))<0$， 则原点是渐近稳定的；
- 此外，若 $\|\boldsymbol{x}(k)\|\to\infty$ 时，$V(\boldsymbol{x}(k))\to\infty$ 则原点是全局渐近稳定的。

TD6-5-1 离散系统的稳定性

- 例：设离散系统状态方程如下 $\begin{cases} x_1(k+1) = x_1(k) + x_2(k) \\ x_2(k+1) = -x_1^3(k) + \dfrac{1}{2}x_2(k) \end{cases}$
- 试分析该系统在原点处的稳定性。
- 解：考虑正定函数：$V(\boldsymbol{x}(k)) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(k)\begin{bmatrix} 0.5 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\boldsymbol{x}(k)$

则：$\Delta V(\boldsymbol{x}(k)) = V(\boldsymbol{x}(k+1)) - V(\boldsymbol{x}(k))$

$$= -2x_1^4(k)\left[1-5x_1^2(k)\right] - \frac{3}{2}\left[x_2(k) - 2x_1^3(k)\right]^2$$

在包含原点的区域 $\left\{\boldsymbol{x} \,\middle|\, |x_1| < 1/\sqrt{5},\ x_2 \in \mathbb{R}\right\}$ 内，$\Delta V(\boldsymbol{x}(k))$ 是负定的，因此，系统在原点处渐近稳定。

TD6−5−1 离散系统的稳定性

- 考虑线性定常离散系统

$$\boldsymbol{x}(k+1)=\mathbf{G}\boldsymbol{x}(k)$$

- [定理5-2] 线性定常离散系统 $\boldsymbol{x}(k+1)=\mathbf{G}\boldsymbol{x}(k)$ 渐近稳定的充要条件是 $\mathbf{G}$ 特征值的模均小于 1.
- 证明：假设存在非奇异阵 $\mathbf{T}$ 将 $\mathbf{G}$ 变为约当标准型

$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{G}\mathbf{T}=\mathbf{J}=\begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_r \end{bmatrix}$$

TD6-5-1 离散系统的稳定性

- 令 $x(k)=Tz(k)$，则：
$$\begin{aligned}\mathbf{z}(k)&=\mathbf{T}^{-1}\boldsymbol{x}(k)=\mathbf{T}^{-1}\mathbf{G}\boldsymbol{x}(k-1)\\&=\mathbf{T}^{-1}\mathbf{G}\mathbf{T}\mathbf{z}(k-1)=\mathbf{J}\mathbf{z}(k-1)\\&=\mathbf{J}^2\mathbf{z}(k-2)=\cdots\\&=\mathbf{J}^k\mathbf{z}(0)\end{aligned}$$
- 因此有：$\mathbf{T}\mathbf{z}(k)=\mathbf{T}\mathbf{J}^k T^{-1}\mathbf{T}\mathbf{z}(0)\Rightarrow \boldsymbol{x}(k)=\mathbf{T}\mathbf{J}^k\mathbf{T}^{-1}\boldsymbol{x}(0)$
- 而
$$\mathbf{J}^k=\begin{bmatrix}J_1^k & & & 0\\ & J_2^k & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J_r^k\end{bmatrix},\quad J_i^k=\begin{bmatrix}\lambda_i^k & C_k^1\lambda_i^{k-1} & \cdots & C_k^{m_i-1}\lambda_i^{k-m_i+1}\\ & \lambda_i^k & \ddots & \vdots\\ & & \ddots & C_k^1\lambda_i^{k-1}\\ 0 & & & \lambda_i^k\end{bmatrix}$$

当且仅当 $|\lambda_i|<1$ 时，J^k 所有元素都有常数界，且 $k\to\infty$，$\mathbf{J}^k\to 0$ 。因此，当且仅当 $|\lambda_i|<1$ 时，系统是渐近稳定的。

TD6-5-1 离散系统的稳定性

- [定理5-3] 考虑线性定常离散系统

$$\boldsymbol{x}(k+1)=\mathbf{G}\boldsymbol{x}(k)$$

其渐近稳定的充要条件为：给定任意的正定阵 **Q**，存在正定阵 **P** 满足离散李雅普诺夫方程：

$$\mathbf{G}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{G}-\mathbf{P}=-\mathbf{Q}$$

- [定理5-4] 矩阵 **G** 所有特征值均小于 $\sigma>0$ 的充要条件为：对于给定任意的正定阵 **Q**，存在正定阵 **P** 满足

$$\sigma^{-2}\mathbf{G}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{G}-\mathbf{P}=-\mathbf{Q}$$

TD6−5−1 离散系统的稳定性

- 例：设离散系统状态方程如下 $\mathbf{z}(k+1)=\begin{bmatrix}0.5 & -0.2\\ 1.2 & 0.8\end{bmatrix}\mathbf{z}(k)$

试分析其稳定性。

- 解：假设 **Q** = **I**，求解离散李雅普诺夫方程：

$$\begin{bmatrix}0.5 & -0.2\\ 1.2 & 0.8\end{bmatrix}\mathbf{P}\begin{bmatrix}0.5 & -0.2\\ 1.2 & 0.8\end{bmatrix}-\mathbf{P}=-\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

（线性方程组）

得：

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix}8.2566 & 1.6073\\ 1.6073 & 2.2665\end{bmatrix}>0$$

因此，系统渐近稳定。

TD6−5−1 离散系统的稳定性

- 令 $\sigma = 0.9$，求解：$\sigma^{-2}\mathbf{G}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{G} - \mathbf{P} = -\mathbf{Q}$，可得：

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 16.2744 & 2.6954 \\ 2.6954 & 3.5203 \end{bmatrix} > 0$$

由此可知，$\mathbf{G}$ 的特征值的模小于 0.9 。