自动控制理论

（二）现代控制理论

自动化系 尚超
中央主楼418A 010-62782459
c-shang@tsinghua.edu.cn

模块5　状态观测器

TD5-1-1 状态观测器的基本概念（课本10.4节）

TD5-2-1 全维观测器（课本10.4节）

TD5-3-1 降维观测器（课本10.4节，自学）

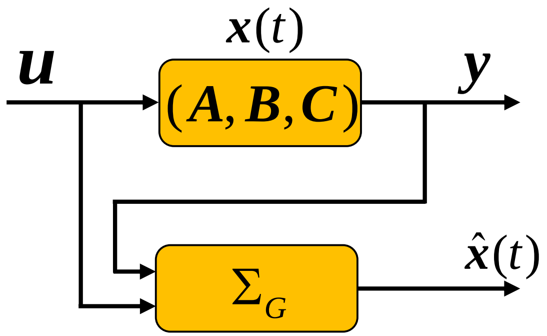
TD5-4-1 带有观测器的反馈控制系统（课本10.5节）

TD5-1-1 状态观测器的基本概念

- 状态反馈是现代控制理论中分析设计线性系统的一个重要方法。用这个方法时要求系统的状态变量可以直接测量得到。
- 当系统内部的状态变量不能被直接测量，状态反馈在物理实现上存在一定困难。
- 经典控制理论并不存在这个问题，因为利用了可以直接测量的输出来实现反馈。
- 能否利用系统可测的量来构造状态变量？ ⇨ 重构 $x(t)$
- 本章讨论这个问题，原系统的输入输出可以直接量测。以原系统的输入输出作为输入，再构造一个动态系统，将状态重新构造出来，这样的动态系统称为状态观测器。

TD5-1-1 状态观测器的基本概念

问题的提出：$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} \end{cases}$



利用原系统可以直接量测的输入输出作为输入信号，将状态重新构造出来，输出信号 $\hat{\boldsymbol{x}}(t)$ 在一定的指标下和原系统 $\Sigma(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C})$ 的状态变量等价，这样构造的系统 Σ_G 就称为状态观测器。

$\hat{\boldsymbol{x}}(t)$ 称为重构状态或估计状态。

$\boldsymbol{x}(t)$ 和 $\hat{\boldsymbol{x}}(t)$ 之间的等价性指标通常采用渐近等价指标：

$$\lim_{t\to\infty} \tilde{\boldsymbol{x}}(t) = \lim_{t\to\infty}(\boldsymbol{x}(t) - \hat{\boldsymbol{x}}(t)) = \boldsymbol{0}$$

工程实际中以要求的速度衰减到零

其中 $\tilde{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x} - \hat{\boldsymbol{x}}$ 称为状态观测误差。

TD5-1-1 状态观测器的基本概念

给定系统的状态空间表达式如下：

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u} & (5.1a) \\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} & (5.1b) \end{cases}$$

设此系统状态是完全能观的，输入 $\boldsymbol{u}$ 和输出 $\boldsymbol{y}$ 可以直接量测。将（5.1b）式两边对时间 t 求 n-1 次导数，并整理可得

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y} &= \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} \\ \dot{\boldsymbol{y}} &= \boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{C}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y} &= \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} \\ \dot{\boldsymbol{y}} - \boldsymbol{C}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u} &= \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \\ \ddot{\boldsymbol{y}} - \boldsymbol{C}\boldsymbol{B}\dot{\boldsymbol{u}} - \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u} &= \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x} \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{y}^{(n-1)} - \boldsymbol{C}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}^{(n-2)} - \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}^{(n-3)} - \cdots - \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{n-2}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{x}$$

TD5-1-1 状态观测器的基本概念

将以上各式写成矩阵形式:

$$\begin{bmatrix} y \\ \dot{y}-CBu \\ \ddot{y}-CB\dot{u}-CABu \\ \vdots \\ y^{(n-1)}-CBu^{(n-2)}-CABu^{(n-3)}-\cdots CA^{(n-2)}Bu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{(n-1)} \end{bmatrix} x = Q_g x$$

由于系统完全能观，所以 Q_g 的秩为 n，因而上述方程中 x 有解。这说明状态向量 x 可用输入 u 和输出 y 以及它们的导数估计出来。

在理论上，在系统完全能观的条件下，可以利用输入和输出来估计状态。

在工程实际中，由于引入大量高阶微分器，会给系统带来一系列高频干扰，从而影响输出，所以这种方案没有实际价值。

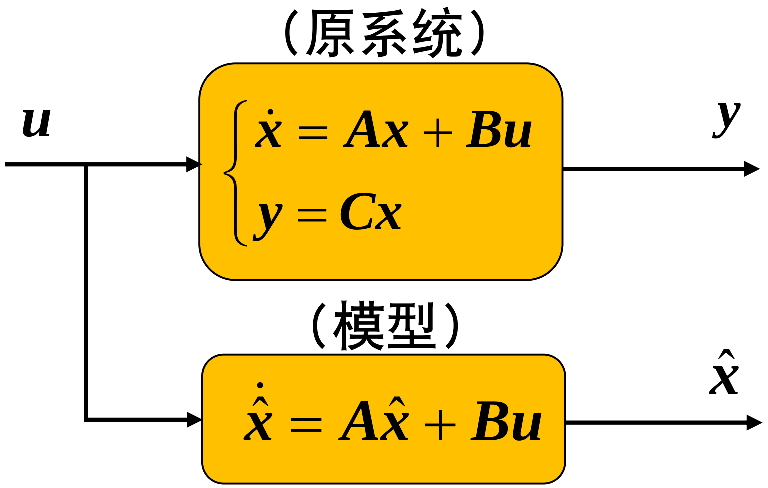
TD5–1–1 状态观测器的基本概念

- 开环状态观测器：在希望的观测器中，不要含有微分器，而应采用积分器。按照（5.1）式的结构，设计出一个相同的结构模型如（5.2）式：

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u} & (5.1a) \\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} & (5.1b) \end{cases}$$

$$\dot{\hat{\boldsymbol{x}}} = \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u} \qquad (5.2)$$

其中 $\hat{\boldsymbol{x}}$ 为状态的估计值。



假定条件：

- 模型结构参数已知
- 输入输出精确测量

TD5-1-1 状态观测器的基本概念

状态观测误差 $\tilde{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x} - \hat{\boldsymbol{x}}$:

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} \end{cases} \qquad \frac{d}{dt}(\boldsymbol{x} - \hat{\boldsymbol{x}}) = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x} - \hat{\boldsymbol{x}}) \Rightarrow \dot{\tilde{\boldsymbol{x}}} = \boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{x}}$$

$$\dot{\hat{\boldsymbol{x}}} = \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}$$

设两个系统的初始状态分别为 $\boldsymbol{x}_0, \hat{\boldsymbol{x}}_0$，则 $\tilde{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{x}(t) - \hat{\boldsymbol{x}}(t) = e^{\boldsymbol{A}t}(\boldsymbol{x}_0 - \hat{\boldsymbol{x}}_0)$

当 $\boldsymbol{x}_0 = \hat{\boldsymbol{x}}_0$，就有 $\boldsymbol{x}(t) = \hat{\boldsymbol{x}}(t)$，即 $\hat{\boldsymbol{x}}$ 完全复现 $\boldsymbol{x}$。（往往不可能！）

当 $\boldsymbol{x}_0 \neq \hat{\boldsymbol{x}}_0$，

如果 $\sum(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C})$ 是稳定的，即 $\boldsymbol{A}$ 的特征值都具有负实部，

则有 $\lim\limits_{t\to\infty}(\boldsymbol{x}(t) - \hat{\boldsymbol{x}}(t)) = 0$，表明 $\hat{\boldsymbol{x}}$ 不断逼近 $\boldsymbol{x}$。

如果 $\sum(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C})$ 是不稳定的，就不能实现 $\hat{\boldsymbol{x}}$ 逼近 $\boldsymbol{x}$ 。

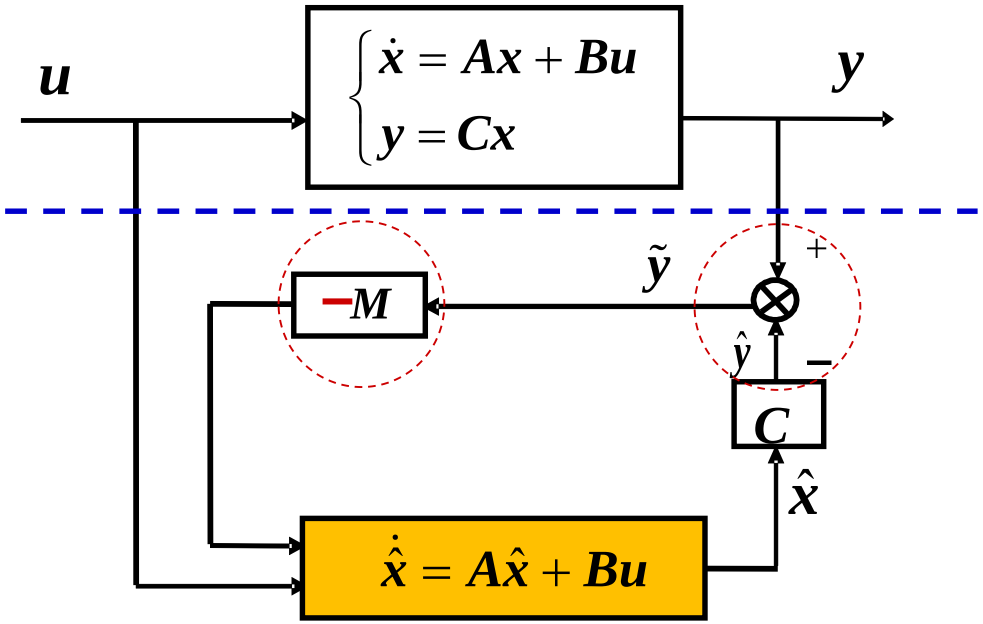
TD5–1–1 状态观测器的基本概念

- 全维观测器：实际上由于模型参数不准确，噪声和干扰也难以抑制，上述开环观测器存在严重问题，解决的办法是采用如下图所示的方案。
- 把可量测的 y 及 $\hat{y}$ 的差值乘以适当的加权矩阵 M（$n \times m$ 维）进行反馈，观测器方程为：

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu - M\tilde{y} \qquad (5.3)$$

结构特点：

- 复制原系统
- 维数相同
- 加上反馈阵 M



输出观测误差的校正项

$$\tilde{y} = y - \hat{y} = C(x - \hat{x}) = C\tilde{x}$$

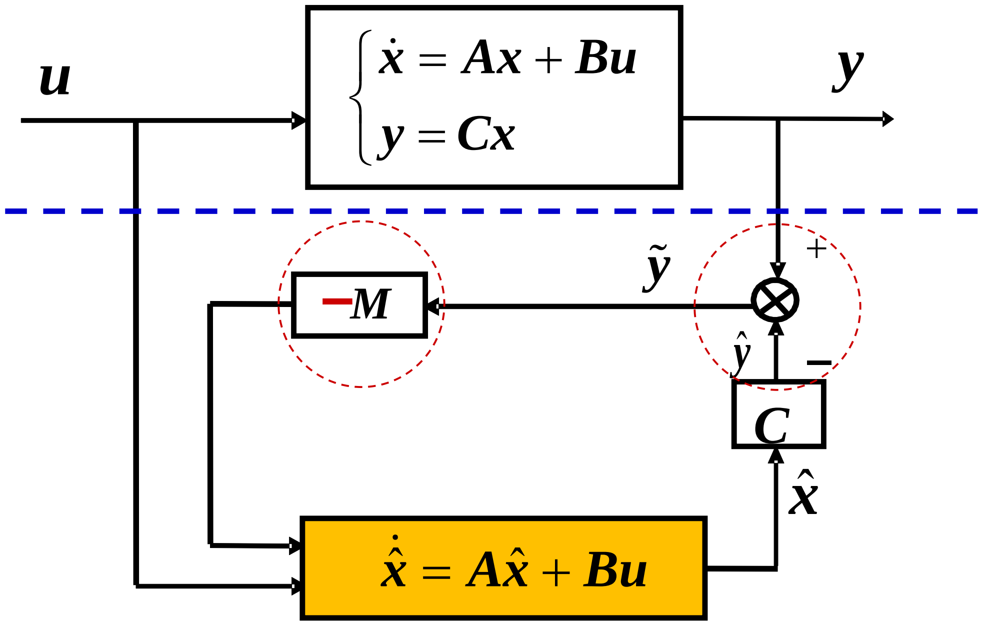
TD5-1-1 状态观测器的基本概念

- 观测器方程形式一： $\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu - M\tilde{y}$ (5.3)

  由于 $\tilde{y} = y - \hat{y} = y - C\hat{x}$ ，上式可写成：

- 观测器方程形式二： $\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu - M(y - C\hat{x})$ (5.4)

  $= (A + MC)\hat{x} + Bu - My$ (5.5)



输出观测误差的校正项

$$\tilde{y} = y - \hat{y} = C(x - \hat{x}) = C\tilde{x}$$

TD5－1－1 状态观测器的基本概念

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u} & (5.1a) \\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} & (5.1b) \end{cases}$$

全维观测器 $\dot{\hat{\boldsymbol{x}}} = \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u} - \boldsymbol{M}\tilde{\boldsymbol{y}} \qquad (5.3)$

对于状态观测误差量，将（5.1a）式减去（5.3）式，则得:

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{x}}} = \dot{\boldsymbol{x}} - \dot{\hat{\boldsymbol{x}}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{M}\tilde{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x} - \hat{\boldsymbol{x}}) + \boldsymbol{M}\boldsymbol{C}(\boldsymbol{x} - \hat{\boldsymbol{x}})$$

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{x}}} = (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{M}\boldsymbol{C})\tilde{\boldsymbol{x}} \qquad (5.6)$$

只要适当地选择 $\boldsymbol{M}$，使 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{M}\boldsymbol{C}$ 的特征值具有负实部，则有

$$\lim_{t\to\infty}(\boldsymbol{x}(t) - \hat{\boldsymbol{x}}(t)) = \boldsymbol{0}$$

这说明只要原系统完全能观，总可以按要求配置观测器的极点，使状态观测误差 $\tilde{\boldsymbol{x}}$ 按要求的速度衰减到零。

TD5−1−1 状态观测器的基本概念

- 系统完全能观，可以构造全维观测器。
- 如果不完全能观？
- 若 $\sum(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C})$ 不完全能观，那么总可按能观性分解，得

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22}\end{bmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}_1\\ \boldsymbol{B}_2\end{bmatrix},\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{C}_1 & \boldsymbol{0}\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_1\\ \boldsymbol{x}_2\end{bmatrix} \tag{5.7}$$

其中：$\boldsymbol{x}_1$ 为能观测状态部分，其维数为 r；

$\boldsymbol{x}_2$ 为不能观测状态部分，其维数为 n-r，

- $\sum(\boldsymbol{A}_{11},\boldsymbol{B}_1,\boldsymbol{C}_1)$ 为能观子系统，$\sum(\boldsymbol{A}_{22},\boldsymbol{B}_2,\boldsymbol{0})$ 为不能观子系统。

TD5-1-1 状态观测器的基本概念

- 按 (5.5) 式构造状态观测器 $\dot{\hat{\boldsymbol{x}}}=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{MC})\hat{\boldsymbol{x}}+\boldsymbol{Bu}-\boldsymbol{My}$

  其中 $\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{M}_1\\ \boldsymbol{M}_2\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{M}$ 为 $n\times m$ 维，$\boldsymbol{M}_1$ 为 $r\times m$ 维，$\boldsymbol{M}_2$ 为 $(n-r)\times m$ 维。

- 由（5.6）式 $\dot{\tilde{\boldsymbol{x}}}=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{MC})\tilde{\boldsymbol{x}}$ 可知：

$$\begin{bmatrix}\dot{\boldsymbol{x}}_1-\dot{\hat{\boldsymbol{x}}}_1\\ \dot{\boldsymbol{x}}_2-\dot{\hat{\boldsymbol{x}}}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{11}+\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{C}_1 & 0\\ \boldsymbol{A}_{21}+\boldsymbol{M}_2\boldsymbol{C}_1 & \boldsymbol{A}_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_1-\hat{\boldsymbol{x}}_1\\ \boldsymbol{x}_2-\hat{\boldsymbol{x}}_2\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{C}_1 & 0\end{bmatrix}\tag{5.8}$$

- 显然，只要适当选择 $\boldsymbol{M}_1$，总可以使 $\boldsymbol{A}_{11}+\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{C}_1$ 的特征值具有负实部，从而使

$$\lim_{t\to\infty}(\boldsymbol{x}_1(t)-\hat{\boldsymbol{x}}_1(t))=\boldsymbol{0}$$

- 但无论如何选择 $\boldsymbol{M}$ 也改变不了 $\boldsymbol{A}_{22}$ 的极点。若 $\boldsymbol{A}_{22}$ 的特征值也具有负实部，那么

$$\lim_{t\to\infty}(\boldsymbol{x}_2(t)-\hat{\boldsymbol{x}}_2(t))=\boldsymbol{0}$$

TD5-1-1 状态观测器的基本概念

- 可得如下结论:

  线性定常系统$\sum$ 的观测器 $\sum_g$ 可以任意配置极点，即状态误差向量按任意希望的速度衰减到零的充分必要条件是:

  原系统 $\sum(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C})$ 完全能观;

  对不完全能观的系统 $\sum(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C})$ 其观测器存在的充分必要条件是$\sum$ 的不能观测部分是渐近稳定的，这时观测器的极点不能任意配置。(能检测性, detectability)

- 对偶原理: $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{C})$ 能观， 则 $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}})$ 能控

模块5　状态观测器

TD5-1-1 状态观测器的基本概念（课本10.4节）

TD5-2-1 全维观测器（课本10.4节）

TD5-3-1 降维观测器（课本10.4节，自学）

TD5-4-1 带有观测器的反馈控制系统（课本10.5节）

TD5−2−1 全维观测器的设计

- 观测误差的演化规律

$$\dot{\tilde{x}} = (A + MC)\tilde{x} \qquad (5.6)$$

全维观测器的设计，实际上在于合理选择 M 阵，使 $(A+MC)$ 的特征值具有负实部，而且负实部的绝对值足够大，使逼近的速度足够快。

在选择合理的观测器极点后，就可以计算M。

TD5-2-1 全维观测器的设计

- 方法一

以单变量系统为例设计步骤如下：

(1) 判别系统的能观性；

(2) 若系统能观，化为能观标准型；

能观标准型为 $\tilde{\Sigma}(\tilde{\boldsymbol{A}},\tilde{\boldsymbol{c}}^T)$，其中

$$\tilde{\boldsymbol{A}}=\left[\begin{array}{c|c} 0 & -P_n \\ \hline \boldsymbol{I}_{n-1} & \begin{matrix}-P_{n-1}\\ \vdots \\ -P_1\end{matrix}\end{array}\right] \qquad \tilde{\boldsymbol{c}}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}0 & \cdots & 0 & 1\end{bmatrix}$$

状态反馈极点配置的对偶形式

$\tilde{\boldsymbol{A}}$ 的特征多项式：

$$f(s)=s^n+P_1s^{n-1}+\cdots+P_n$$

(3) 计算 $\tilde{\Sigma}(\tilde{\boldsymbol{A}},\tilde{\boldsymbol{c}}^{\mathrm{T}})$ 能观标准型的观测阵 $\tilde{\boldsymbol{M}}=[\tilde{m}_1,\tilde{m}_2,\ldots,\tilde{m}_n]^{\mathrm{T}}$，则观测器系数矩阵为：

TD5-2-1 全维观测器的设计

$$\tilde{\boldsymbol{A}}+\tilde{\boldsymbol{M}}\tilde{\boldsymbol{c}}^T=\left[\begin{array}{c:c}\boldsymbol{0} & -P_n \\ \hdashline & -P_{n-1} \\ \boldsymbol{I}_{n-1} & \vdots \\ & -P_1\end{array}\right]+\begin{bmatrix}0 & \cdots & 0 & \tilde{m}_1 \\ 0 & \cdots & 0 & \tilde{m}_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \tilde{m}_n\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{c:c}\boldsymbol{0} & -(P_n-\tilde{m}_1) \\ \hdashline & -(P_{n-1}-\tilde{m}_2) \\ \boldsymbol{I}_{n-1} & \vdots \\ & -(P_1-\tilde{m}_n)\end{array}\right]$$

于是特征多项式为: $f(s)=s^n+(P_1-\tilde{m}_n)s^{n-1}+\cdots+(P_{n-1}-\tilde{m}_2)s+(P_n-\tilde{m}_1)\quad(5.9)$

根据希望的观测器极点，得到希望的特征多项式

$$f^*(s)=s^n+\alpha_1^*s^{n-1}+\cdots+\alpha_{n-1}^*s+\alpha_n^*\qquad(5.10)$$

比较(5.9) , (5.10)两式得：$\tilde{m}_{n+1-i}=P_i-\alpha_i^*\quad(i=1,2,\cdots,n)$

(4) 求原系统 $\sum(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}^T)$ 的观测阵$\boldsymbol{M}$：$\boldsymbol{M}=\boldsymbol{T}\tilde{\boldsymbol{M}}$

(5) 画出观测器的结构图。

TD5-2-1 全维观测器的设计

- 例1：设有系统 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&1\\0&0&2\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}1&1&0\end{bmatrix}$

  求它的状态观测器，并使观测器的极点为-3、-4、-5。

- 解：判此系统的能观性

$$\boldsymbol{Q}_g=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&2&1\\1&4&4\end{bmatrix}\quad \mathrm{rank}\,\boldsymbol{Q}_g=3\quad \text{所以系统能观}$$

- (2) 化原系统为能观标准型

$$\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix}1&1&1\\-1&-1&0\\1&2&4\end{bmatrix},\ \boldsymbol{T}^{-1}=\begin{bmatrix}4&2&-1\\-4&-3&1\\1&1&0\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{p}=\boldsymbol{Q}_g^{-1}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{T}=\left[\boldsymbol{p},\boldsymbol{A}\boldsymbol{p},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{p}\right]$$

TD5-2-1 全维观测器的设计

$$\tilde{A}=\left[\begin{array}{cc:c}0 & 0 & 4\\ \hdashline 1 & 0 & -8\\ 0 & 1 & 5\end{array}\right] \quad \tilde{b}=\begin{bmatrix}3\\-3\\1\end{bmatrix} \quad \tilde{c}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

(3) 求观测阵 M，由观测器的希望极点，得特征方程：

$$f^*(s)=(s+3)(s+4)(s+5)=s^3+12s^2+47s+60$$

于是可算出观测阵 $\tilde{M}=\left[\tilde{m}_1,\tilde{m}_2,\tilde{m}_3\right]^T$，其中

$$\begin{cases}\tilde{m}_1=P_3-\alpha_3^*=-4-60=-64\\ \tilde{m}_2=P_2-\alpha_2^*=8-47=-39\\ \tilde{m}_3=P_1-\alpha_1^*=-5-12=-17\end{cases}$$

要注意正负号

因而 $M=T\tilde{M}=\left[-120,103,-210\right]^T$

TD5-2-1 全维观测器的设计

$$\dot{\hat{x}} = (A + MC)\hat{x} + Bu - My \tag{5.5}$$

- 由式（5.5）得观测器方程形式二为：

$$\dot{\hat{x}} = \begin{bmatrix} -119 & -120 & 0 \\ 103 & 105 & 1 \\ -210 & -210 & 2 \end{bmatrix}\hat{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}u - \begin{bmatrix} -120 \\ 103 \\ -210 \end{bmatrix}y$$

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu - M\tilde{y} \tag{5.3}$$

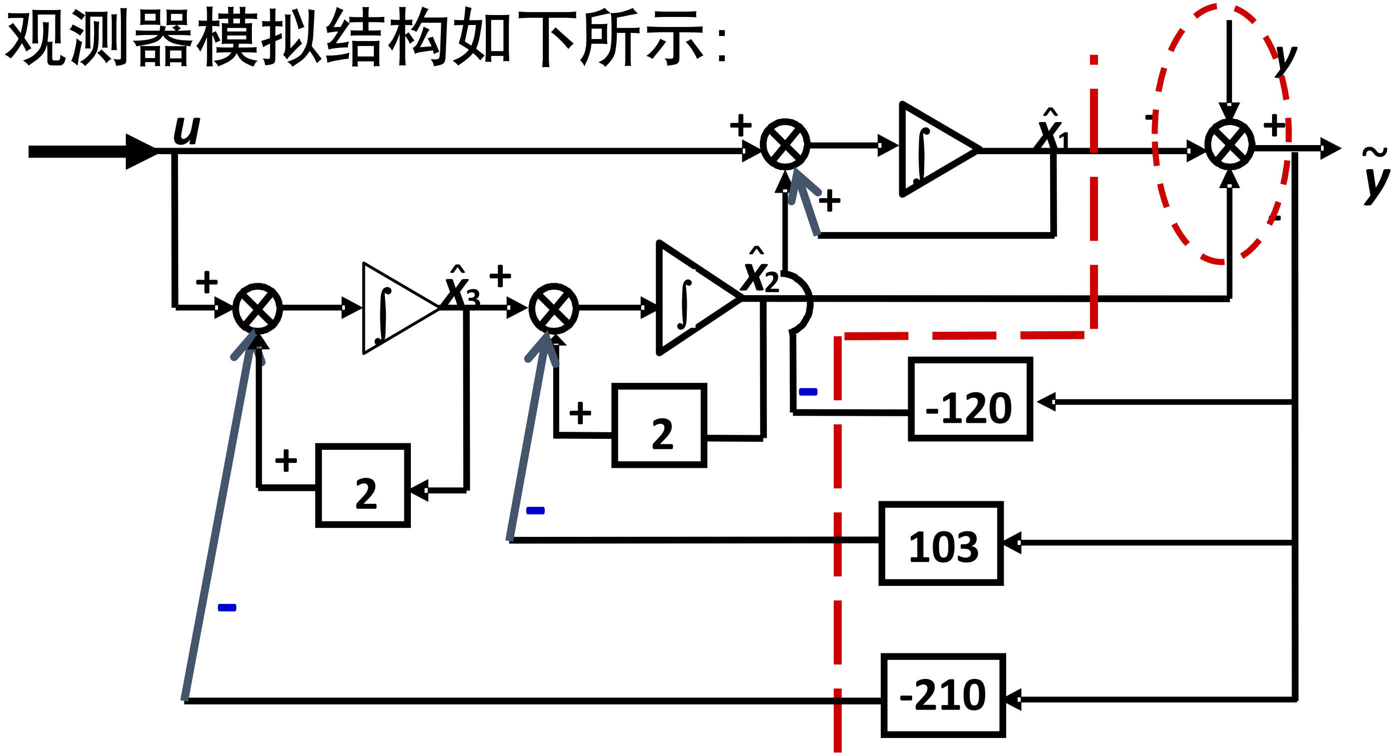
- 由式（5.3）得观测器方程形式一为：

$$\dot{\hat{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\hat{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}u - \begin{bmatrix} -120 \\ 103 \\ -210 \end{bmatrix}\tilde{y}$$

TD5-2-1 全维观测器的设计

$$\dot{\hat{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \hat{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u - \begin{bmatrix} -120 \\ 103 \\ -210 \end{bmatrix} \tilde{y} \qquad c^{T} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

由上式画出观测器模拟结构如下所示:



TD5-2-1 全维观测器的设计

方法二（直接计算）（待定系数法）

(1) 判别系统的能观性；

(2) $f_M(s) = \left| s\boldsymbol{I} - (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{M}\boldsymbol{c}^T) \right|$

(3) $f^*(s) = \prod_{i=1}^{n} (s - \lambda_i)$

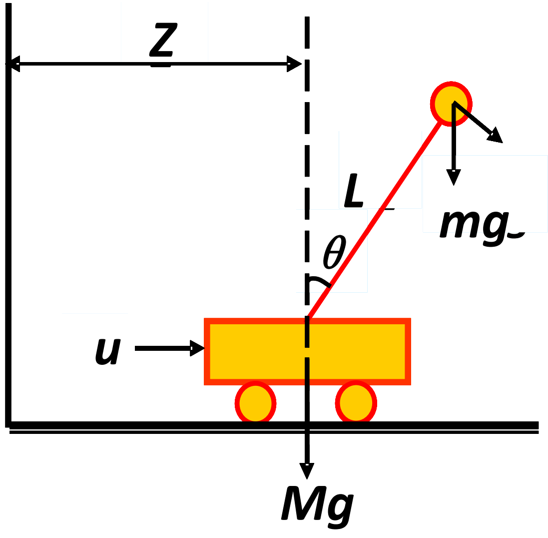
(4) 令二者系数相等，联立方程求解得到。

TD5–2–1 全维观测器的设计

- 例2 倒立摆系统，状态向量为 $\boldsymbol{x}=\left[z, \dot{z}, \theta, \dot{\theta}\right]^{\mathrm{T}}$

- 其系数矩阵为：$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 11 & 0 \end{bmatrix}$, $\quad \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\quad \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

- 并假定唯一可测得的输出量 $z(t)$，即小车的位置，试设计全维观测器，使观测器极点为-2，-3，-2 $\pm j$。



TD5-2-1 全维观测器的设计

- 例2 倒立摆系统，状态向量为 $\boldsymbol{x}=\left[z,\dot{z},\theta,\dot{\theta}\right]^{\mathrm{T}}$
- 其系数矩阵为：$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&1\\0&0&11&0\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}0\\1\\0\\-1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\end{bmatrix}$
- 并假定唯一可测得的输出量 $z(t)$，即小车的位置，试设计全维观测器，使观测器极点为-2，-3，$-2\pm j$。
- 解：判别系统的能观性 $\boldsymbol{Q}_g=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{bmatrix}$，$\operatorname{rank}\boldsymbol{Q}_g=4$，此系统能观。
- (2) 系数矩阵较简单，直接计算 $\boldsymbol{M}$。

TD5-2-1 全维观测器的设计

设 $\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ m_4 \end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{M}\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 11 & 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 \\ m_2 & 0 & 0 & 0 \\ m_3 & 0 & 0 & 0 \\ m_4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} m_1 & 1 & 0 & 0 \\ m_2 & 0 & -1 & 0 \\ m_3 & 0 & 0 & 1 \\ m_4 & 0 & 11 & 0 \end{bmatrix}$

则其特征多项式为:

$$f(s)=\left|s\boldsymbol{I}-(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{M}\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}})\right|=s^4-m_1s^3-(11+m_2)s^2+(11m_1+m_3)s+(11m_2+m_4)$$

观测器希望的特征多项式为:

$$f^*(s)=(s+2)(s+3)(s+2+j)(s+2-j)=s^4+9s^3+31s^2+49s+30$$

由上两式得: $\boldsymbol{M}=[-9,\ -42,\ 148,\ 492]^T$

TD5-2-1 全维观测器的设计

全维观测器方程形式一:

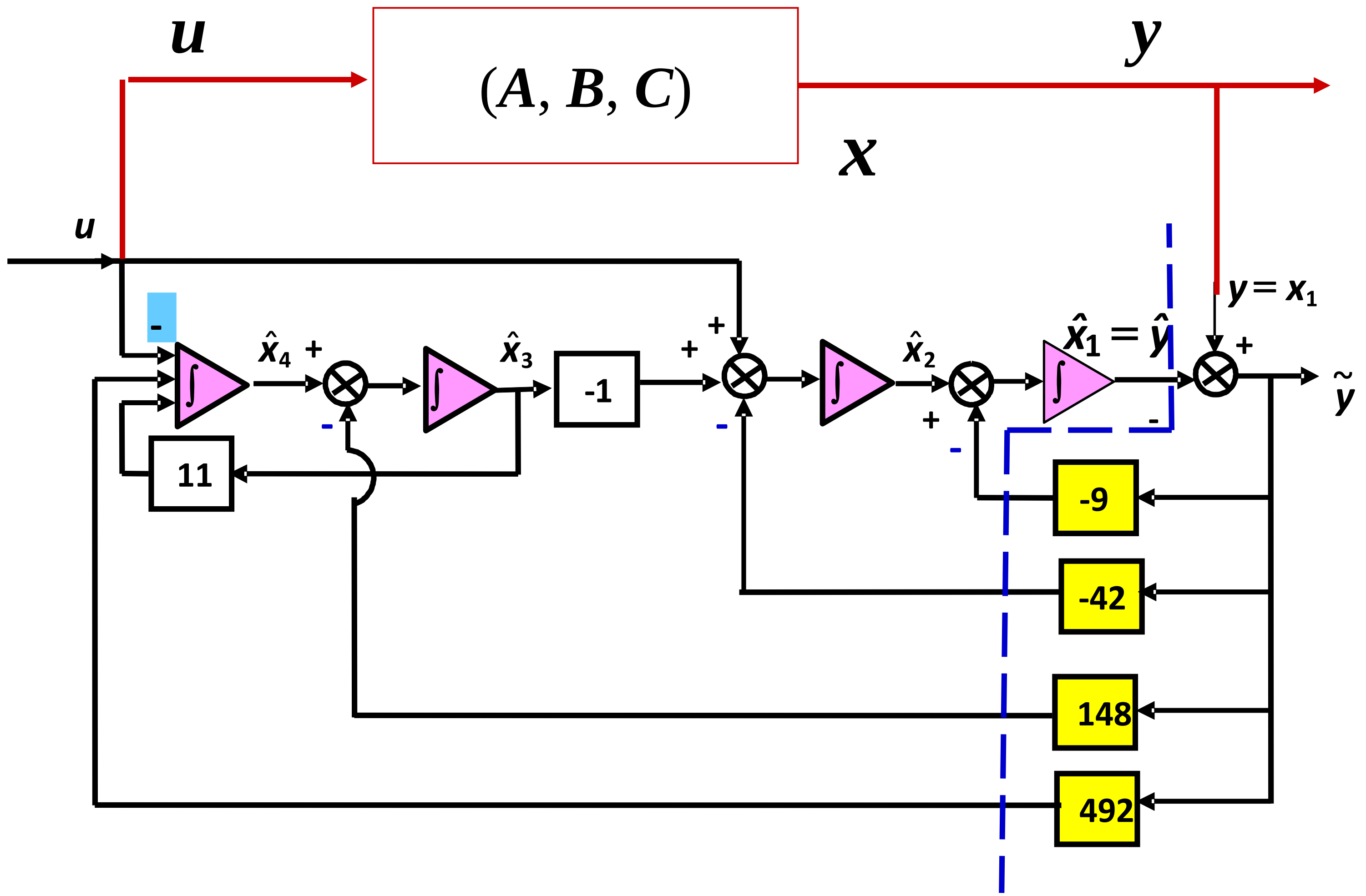
$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu - M\tilde{y} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 11 & 0 \end{bmatrix}\hat{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}u - \begin{bmatrix} -9 \\ -42 \\ 148 \\ 492 \end{bmatrix}\tilde{y}$$

观测器方程形式二:

$$\dot{\hat{x}} = (A + MC)\hat{x} + Bu - My = \begin{bmatrix} -9 & 1 & 0 & 0 \\ -42 & 0 & -1 & 0 \\ 148 & 0 & 0 & 1 \\ 492 & 0 & 11 & 0 \end{bmatrix}\hat{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}u - \begin{bmatrix} -9 \\ -42 \\ 148 \\ 492 \end{bmatrix}y$$

TD5－2－1 全维观测器的设计

(3) 画出观测器模拟结构图 $M=\left[-9,\ -42,\ 148,\ 492\right]^{\mathrm{T}}$



模块5　状态观测器

TD5-1-1 状态观测器的基本概念（课本10.4节）

TD5-2-1 全维观测器（课本10.4节）

TD5-3-1 降维观测器（课本10.4节，自学）

TD5-4-1 带有观测器的反馈控制系统（课本10.5节）

TD5-3-1 降维观测器

一、问题的提出

- 全维观测器是对全部状态变量 $\boldsymbol{x}$ 进行重构。

  输出方程 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}$ 其中 $\boldsymbol{y}$ 为 $m\times 1$，$\boldsymbol{x}$ 为 $n\times 1$。

  状态的某种线性组合（由$\boldsymbol{C}$ 阵决定）可以直接作为输出而测出，并不需要进行估计。状态观测器的维数可以降低

  若 $\boldsymbol{C}$ 阵秩为 m，则只需要重构剩下的 $n\text{-}m$ 个状态分量。

  如例 2 中，小车的位置 z 可以直接量测 ($y=z$)，所以只需要观测 $\dot{z},\theta,\dot{\theta}$ 三个状态变量即可。$y=[1\ 0\ 0\ 0]\boldsymbol{x}$

- 工程意义：只需较少个数积分器构成。在20世纪70年代，受当时条件限制（采用模拟集成电路来构成积分器），减少积分器个数为观测器的工程实现提供了简便性。

TD5−3−1 降维观测器

二、降维观测器的设计

考虑如下形式的能观系统，输出量由后面 m 个状态组成。

$$\begin{cases}\dot{x}=Ax+Bu & C=[C_1 \quad C_2](C_2\text{秩为 m})\\ y=Cx\end{cases} \qquad T^{-1}=\begin{bmatrix} I_{n-m} & 0\\ C_1 & C_2\end{bmatrix} \quad T=\begin{bmatrix} I_{n-m} & 0\\ -C_2^{-1}C_1 & C_2^{-1}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}B_1\\ B_2\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}0 & I_m\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=x_2 \tag{5.15}$$

这种形式是可以通过线性变换得到，所以并不失去它的一般性。整理（5.15）式得:

$$\begin{cases}\dot{x}_1=A_{11}x_1+A_{12}x_2+B_1u & (5.16a)\\ \dot{x}_2=A_{21}x_1+A_{22}x_2+B_2u & (5.16b)\end{cases}$$

TD5-3-1 降维观测器

$$x_2 = y$$

$$v = A_{12}x_2 + B_1 u$$ 均为可测或计算得到

$$z = \dot{x}_2 - A_{22}x_2 - B_2 u$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = A_{11}x_1 + v \quad v = A_{12}x_2 + B_1 u \\ \dot{x}_2 - A_{22}x_2 - B_2 u = z = A_{21}x_1 \end{cases}$$

将（5.17）代入（5.16a），并和（5.18）联立得系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = A_{11}x_1 + v \\ z = A_{21}x_1 \end{cases} \tag{5.19}$$

（5.19）式可以看作为（5.15）式的一个子系统。可以证明若原系统（5.15）是能观的，则子系统（5.19）式也是能观的。

TD5-3-1 降维观测器

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}_1 = \boldsymbol{A}_{11}\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{v} \\ \boldsymbol{z} = \boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{x}_1 \end{cases} \tag{5.19}$$

式（5.19）能观，可以用全维观测器的设计方法来设计子系统（5.19）式的观测器，得

$$\dot{\hat{\boldsymbol{x}}}_1 = (\boldsymbol{A}_{11} + \boldsymbol{M}_1\boldsymbol{A}_{21})\hat{\boldsymbol{x}}_1 + \boldsymbol{v} - \boldsymbol{M}_1\boldsymbol{z} \tag{5.20}$$

其中 $(n-m)\times m$ 维矩阵 M_1 可以选得使式（5.20）的极点置于期望的任意位置，代入得

$$\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{y}$$

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{B}_1\boldsymbol{u}$$

$$\boldsymbol{z} = \dot{\boldsymbol{x}}_2 - \boldsymbol{A}_{22}\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{B}_2\boldsymbol{u}$$

$$\dot{\hat{\boldsymbol{x}}}_1 = (\boldsymbol{A}_{11} + \boldsymbol{M}_1\boldsymbol{A}_{21})\hat{\boldsymbol{x}}_1 + \boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{B}_1\boldsymbol{u} - \boldsymbol{M}_1\dot{\boldsymbol{y}} + \boldsymbol{M}_1\boldsymbol{A}_{22}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{M}_1\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{u} \tag{5.21}$$

此系统即为系统（5.15）式的一个n - m 维观测器。

TD5−3−1 降维观测器

$$\dot{\hat{\boldsymbol{x}}}_1 = (\boldsymbol{A}_{11} + \boldsymbol{M}_1\boldsymbol{A}_{21})\hat{\boldsymbol{x}}_1 + \boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{B}_1\boldsymbol{u} - \boldsymbol{M}_1\dot{\boldsymbol{y}} + \boldsymbol{M}_1\boldsymbol{A}_{22}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{M}_1\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{u} \quad (5.21)$$

实现（5.21）式的一个明显的困难是需要输出量 $\boldsymbol{y}$ 的微分，可以重新定义观测器的状态避开这个困难。

令 $\boldsymbol{w} \overset{\Delta}{=} \hat{\boldsymbol{x}}_1 + \boldsymbol{M}_1\boldsymbol{y}$

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{w}} = \dot{\hat{\boldsymbol{x}}}_1 + \boldsymbol{M}_1\dot{\boldsymbol{y}} &= (\boldsymbol{A}_{11} + \boldsymbol{M}_1\boldsymbol{A}_{21})\boldsymbol{w} + (\boldsymbol{B}_1 + \boldsymbol{M}_1\boldsymbol{B}_2)\boldsymbol{u} \\ &+ \left[\boldsymbol{A}_{12} + \boldsymbol{M}_1\boldsymbol{A}_{22} - (\boldsymbol{A}_{11} + \boldsymbol{M}_1\boldsymbol{A}_{21})\boldsymbol{M}_1\right]\boldsymbol{y} \quad (5.22)\end{aligned}$$

即得：$\dot{\boldsymbol{w}} = (\boldsymbol{A}_{11} + \boldsymbol{M}_1\boldsymbol{A}_{21})\boldsymbol{w} + \boldsymbol{B}_0\boldsymbol{u} + \boldsymbol{E}\boldsymbol{y}$

其中 $\boldsymbol{B}_0 \overset{\Delta}{=} \boldsymbol{B}_1 + \boldsymbol{M}_1\boldsymbol{B}_2,\ \boldsymbol{E} \overset{\Delta}{=} \boldsymbol{A}_{12} + \boldsymbol{M}_1\boldsymbol{A}_{22} - (\boldsymbol{A}_{11} + \boldsymbol{M}_1\boldsymbol{A}_{21})\boldsymbol{M}_1$

上述观测器也称为Luenberger观测器。

TD5-3-1 降维观测器

观测器方程:

$$\dot{w} = (A_{11} + M_1 A_{21})w + B_0 u + Ey$$

$$B_0 \overset{\Delta}{=} B_1 + M_1 B_2$$

$$E \overset{\Delta}{=} A_{12} + M_1 A_{22} - (A_{11} + M_1 A_{21})M_1$$

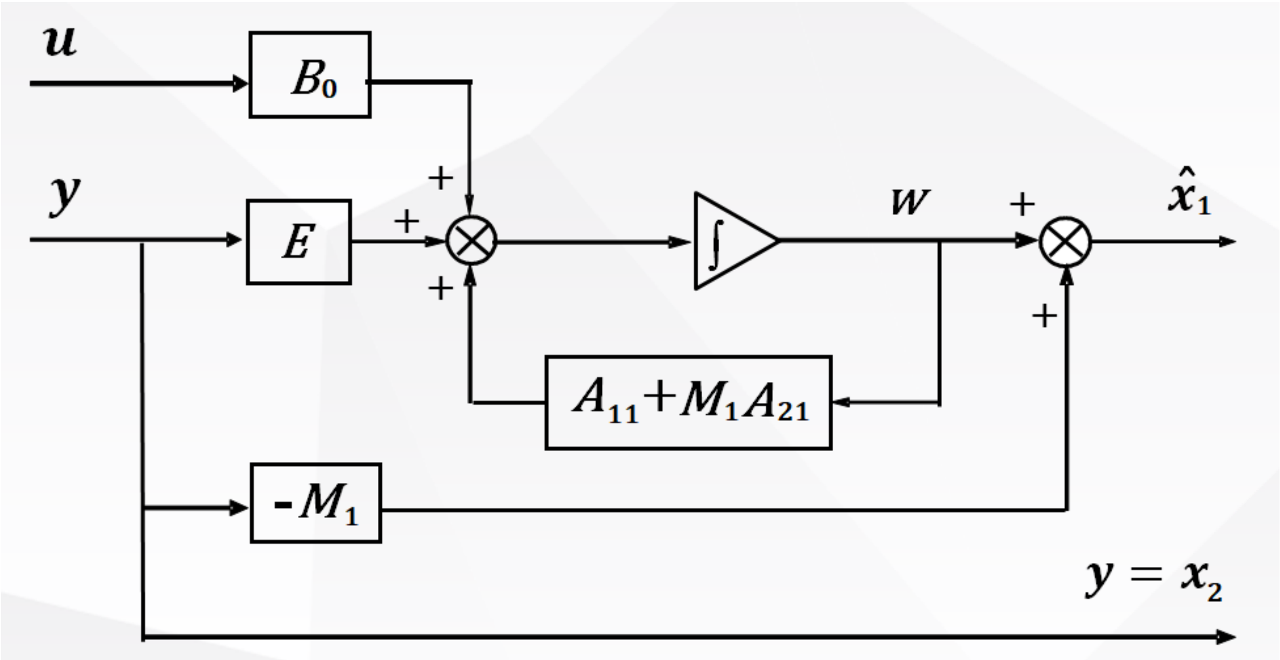
$$w \overset{\Delta}{=} \hat{x}_1 + M_1 y$$

原系统的状态重构为:

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w - M_1 y \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} w + \begin{bmatrix} -M_1 \\ I \end{bmatrix} y$$

TD5-3-1 降维观测器

降维观测器的结构:



降维观测器的一个明显缺点是量测值 y 通过 $\boldsymbol{M}_1$ 直接反映到状态 $\hat{\boldsymbol{x}}_1$ 上，如上图所示，这样就必然将量测噪声带入。

$\boldsymbol{M}_1$ 的误差直接影响到 $\hat{\boldsymbol{x}}_1$ 稳态值，全维观测器中不存在这种误差。

TD5−3−1 降维观测器

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}_1 = \boldsymbol{A}_{11}\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{v} \\ \boldsymbol{z} = \boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{x}_1 \end{cases} \tag{5.19}$$

$$\dot{\hat{\boldsymbol{x}}}_1 = (\boldsymbol{A}_{11} + \boldsymbol{M}_1\boldsymbol{A}_{21})\hat{\boldsymbol{x}}_1 + \boldsymbol{v} - \boldsymbol{M}_1\boldsymbol{z} \tag{5.20}$$

由（5.19）式减去（5.20）式得：$\dot{\tilde{\boldsymbol{x}}}_1 = (\boldsymbol{A}_{11} + \boldsymbol{M}_1\boldsymbol{A}_{21})\tilde{\boldsymbol{x}}_1$

显然这种观测器误差为：$\tilde{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x}_1 - \hat{\boldsymbol{x}}_1 = e^{(\boldsymbol{A}_{11} + \boldsymbol{M}_1\boldsymbol{A}_{21})t}\tilde{\boldsymbol{x}}_1(0)$

设计者根据需要总可以选择适当的 $\boldsymbol{M}_1$，使其误差按规定的速度衰减到零。

TD5−3−1 降维观测器

例3. 例2中设计了倒置摆的全维观测器，由于小车位移直接可以量测，所以可设计降维观测器，并使降维观测器极点为 $-3, -2 \pm j$ 。

解：倒置摆状态空间表达式为

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} z \\ \dot{z} \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 11 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z \\ \dot{z} \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z \\ \dot{z} \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}$$

(1) 判断能观性

已经证明此系统完全能观。

(2) 将此系统进行线性变换，得到（5.15）式形式

本系统输出矩阵很简单，只要重新安排状态变量次序即得（5.15）式形式。

TD5−3−1 降维观测器

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\begin{bmatrix} \dot{z} \\ \theta \\ \dot{\theta} \\ z \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc:c} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 11 & 0 & 0 \\ \hdashline 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]\begin{bmatrix} \dot{z} \\ \theta \\ \dot{\theta} \\ z \end{bmatrix} + \left[\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ -1 \\ \hdashline 0 \end{array}\right] u \\ y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{z} \\ \theta \\ \dot{\theta} \\ z \end{bmatrix} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{w}} = \dot{\hat{\boldsymbol{x}}}_1 + \boldsymbol{M}_1\dot{\boldsymbol{y}} &= (\boldsymbol{A}_{11} + \boldsymbol{M}_1\boldsymbol{A}_{21})\boldsymbol{w} + (\boldsymbol{B}_1 + \boldsymbol{M}_1\boldsymbol{B}_2)\boldsymbol{u} \\ &+ \left[\boldsymbol{A}_{12} + \boldsymbol{M}_1\boldsymbol{A}_{22} - (\boldsymbol{A}_{11} + \boldsymbol{M}_1\boldsymbol{A}_{21})\boldsymbol{M}_1\right]\boldsymbol{y} \qquad (5.22) \end{aligned}$$

式中虚线将 $\boldsymbol{A}_{11},\boldsymbol{A}_{12}$ 等分开，因为 $\boldsymbol{A}_{12},\boldsymbol{A}_{22}$ 和 $\boldsymbol{B}_2$ 均为零，由（5.22）式得

$$\dot{\boldsymbol{w}} = (\boldsymbol{A}_{11} + \boldsymbol{M}_1\boldsymbol{A}_{21})\boldsymbol{w} + \boldsymbol{B}_1\boldsymbol{u} - (\boldsymbol{A}_{11} + \boldsymbol{M}_1\boldsymbol{A}_{21})\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{y}$$

TD5-3-1 降维观测器

（3）求 $\boldsymbol{M}_1$：

设 $\boldsymbol{M}_1=\begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}_{11}+\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{A}_{21}=\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 11 & 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ m_2 & 0 & 0 \\ m_3 & 0 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} m_1 & -1 & 0 \\ m_2 & 0 & 1 \\ m_3 & 11 & 0 \end{bmatrix}$

此矩阵的特征多项式为：$f_1(s)=\left|s\boldsymbol{I}-(\boldsymbol{A}_{11}+\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{A}_{21})\right|=\left|\begin{bmatrix} s-m_1 & 1 & 0 \\ -m_2 & s & -1 \\ -m_3 & -11 & s \end{bmatrix}\right|$

$$=s^3-m_1s^2+(m_2-11)s+(11m_1+m_3)$$

由希望的极点分布：$\lambda_1=-3,\quad \lambda_{2,3}=-2\pm j$ 得特征多项式：

$$f_1^*(s)=(s+3)(s+2-j)(s+2+j)=s^3+7s^2+17s+15$$

所以 $\boldsymbol{M}_1=\begin{bmatrix} -7 & 28 & 92 \end{bmatrix}$

TD5−3−1 降维观测器

（4）写出观测器方程

分别计算出:

$$\boldsymbol{A}_{11}+\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{A}_{21}=\begin{bmatrix}-7 & -1 & 0\\ 28 & 0 & 1\\ 92 & 11 & 0\end{bmatrix},\boldsymbol{E}=-(\boldsymbol{A}_{11}+\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{A}_{21})\boldsymbol{M}_1=\begin{bmatrix}-21\\ 104\\ 336\end{bmatrix},\boldsymbol{B}_1=\begin{bmatrix}1\\ 0\\ -1\end{bmatrix},$$

得观测器方程为:

$$\dot{\boldsymbol{w}}=(\boldsymbol{A}_{11}+\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{A}_{21})\boldsymbol{w}+\boldsymbol{B}_1u+\boldsymbol{E}y=\begin{bmatrix}-7 & -1 & 0\\ 28 & 0 & 1\\ 92 & 11 & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{w}+\begin{bmatrix}1\\ 0\\ -1\end{bmatrix}u+\begin{bmatrix}-21\\ 104\\ 336\end{bmatrix}y$$

$$\hat{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}\\ 0\end{bmatrix}\boldsymbol{w}+\begin{bmatrix}-\boldsymbol{M}_1\\ 1\end{bmatrix}y=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{w}+\begin{bmatrix}7\\ -28\\ -92\\ 1\end{bmatrix}y$$

模块5　状态观测器

TD5-1-1 状态观测器的基本概念（课本10.4节）

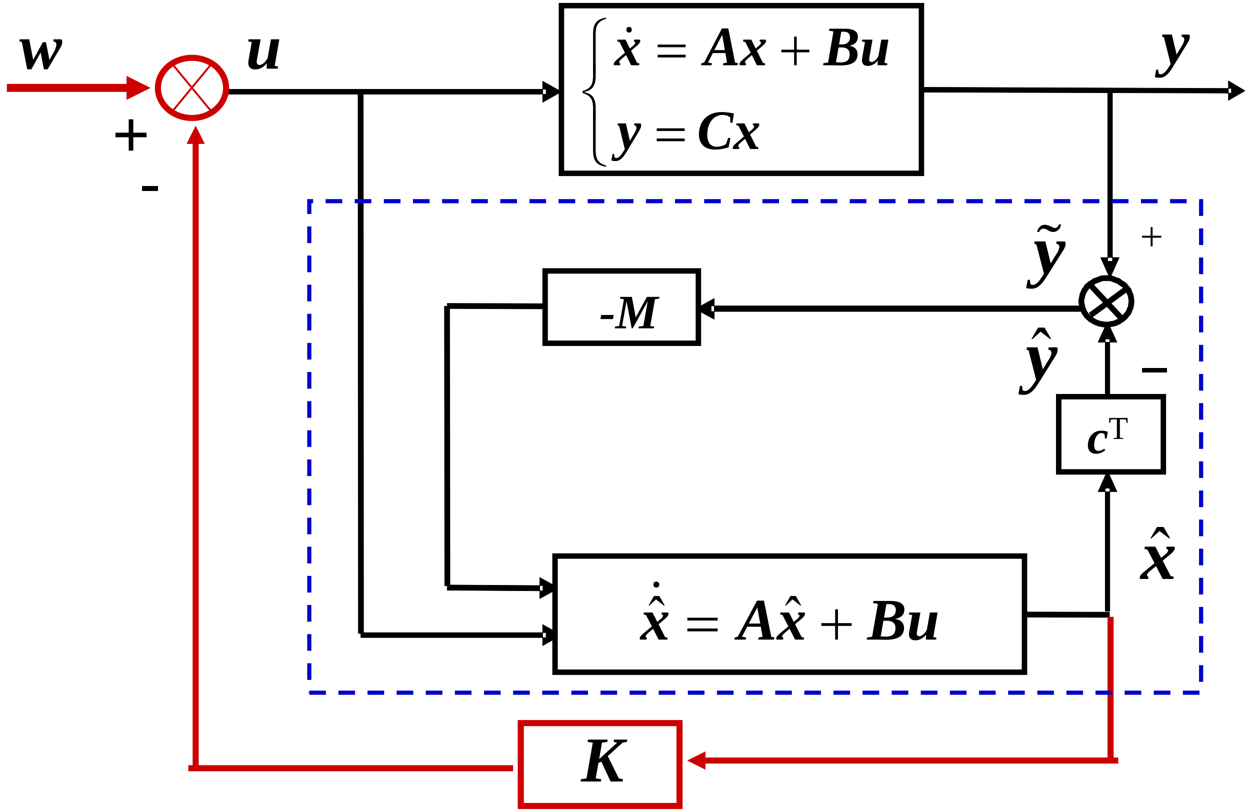
TD5-2-1 全维观测器（课本10.4节）

TD5-3-1 降维观测器（课本10.4节，自学）

TD5-4-1 带有观测器的反馈控制系统（课本10.5节）

TD5-4-1 重构状态反馈控制系统

完全能控的系统可以用状态反馈控制规律来配置闭环极点。如果反馈时得不到全部状态，则可用观测器对它进行重构并将估计值用到控制规律中去。这就是重构状态反馈控制系统。



性能提高

维数增加

TD5-4-1 重构状态反馈控制系统

设能控且能观的系统为：

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} \end{cases} \qquad (5.23)$$

状态观测器方程为：

$$\dot{\hat{\boldsymbol{x}}} = (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{M}\boldsymbol{C})\hat{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u} - \boldsymbol{M}\boldsymbol{C}\boldsymbol{x} \qquad (5.24)$$

组合成 $2n$ 维的合成系统：

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{x}} \\ \dot{\hat{\boldsymbol{x}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & 0 \\ -\boldsymbol{M}\boldsymbol{C} & \boldsymbol{A} + \boldsymbol{M}\boldsymbol{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \hat{\boldsymbol{x}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{B} \end{bmatrix} \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \hat{\boldsymbol{x}} \end{bmatrix} \end{cases} \qquad (5.25)$$

反馈控制律为： $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{w} - \boldsymbol{K}\hat{\boldsymbol{x}}$ $\qquad (5.26)$

闭环系统状态方程为：

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{x}} \\ \dot{\hat{\boldsymbol{x}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & -\boldsymbol{B}\boldsymbol{K} \\ -\boldsymbol{M}\boldsymbol{C} & \boldsymbol{A} + \boldsymbol{M}\boldsymbol{C} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{K} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \hat{\boldsymbol{x}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{B} \end{bmatrix} \boldsymbol{w} \\ \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \hat{\boldsymbol{x}} \end{bmatrix} \end{cases} \qquad (5.27)$$

TD5-4-1 重构状态反馈控制系统

表达式比较复杂，可以通过状态变换使其变得简单。

取状态观测误差 $\tilde{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x} - \hat{\boldsymbol{x}}$

令 $\begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \hat{\boldsymbol{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_n & \boldsymbol{0}_n \\ \boldsymbol{I}_n & -\boldsymbol{I}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \tilde{\boldsymbol{x}} \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{I} & -\boldsymbol{I} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{I} & -\boldsymbol{I} \end{bmatrix}$

它可以将（5.27）式变换成

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{x}} \\ \dot{\tilde{\boldsymbol{x}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} - \boldsymbol{BK} & \boldsymbol{BK} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A} + \boldsymbol{MC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \tilde{\boldsymbol{x}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \boldsymbol{w} \\ \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{C} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \tilde{\boldsymbol{x}} \end{bmatrix} \end{cases} \tag{5.28}$$

TD5-4-1 重构状态反馈控制系统

特征多项式为：

$$f(s)=\begin{vmatrix} s\boldsymbol{I}_n-(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{BK}) & -\boldsymbol{BK} \\ \boldsymbol{0}_n & s\boldsymbol{I}_n-(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{MC}) \end{vmatrix}$$

$$=\left|s\boldsymbol{I}_n-(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{BK})\right|\cdot\left|s\boldsymbol{I}_n-(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{MC})\right| \qquad (5.29)$$

重构状态反馈系统的特征值由两个不同的部分组成，

- 一部分是由反馈矩阵 $\boldsymbol{K}$ 决定的 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{BK})$ 的极点；
- 一部分是由状态观测器参数 $\boldsymbol{M}$ 决定的 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{MC})$ 的极点。

这两部分的极点是可分离的，这一性质称具有可分离性。

- 状态向量 $\boldsymbol{x}$ 的性能由 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{BK})$ 的极点所决定，
- 误差向量 $\tilde{\boldsymbol{x}}$ 的性能由 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{MC})$ 的极点所决定。

因此反馈控制规律的确定和观测器的结构实现可以当作单独问题来考虑。

TD5-4-1 重构状态反馈控制系统

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} \end{cases} \qquad (5.23)$$

$$f(s) = \left|s\boldsymbol{I}_n - (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{K})\right|\left|s\boldsymbol{I}_n - (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{M}\boldsymbol{C})\right| \quad (5.29)$$

可分离性定理（分离原理）：

如果系统 $\sum(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C})$（5.23）式的反馈控制规律可以用观测器来实现，则最后合成系统的极点由下列两部分组成：

a）$\boldsymbol{A}$ - $\boldsymbol{BK}$ 的极点——完全由反馈矩阵 $\boldsymbol{K}$ 所决定；

b）$\boldsymbol{A}$+$\boldsymbol{MC}$ 的极点——完全由观测器参数 $\boldsymbol{M}$ 所决定。

状态向量的性能由 a）中极点所决定，误差向量的性能由 b）中极点所决定。

TD5-4-1 重构状态反馈控制系统

极点选取原则（Guideline）：

一般情况下，观测器极点必须比状态反馈极点快 2~5 倍，以保证观测误差能迅速收敛到零，而且观测误差比状态变量的衰减要快 2~5 倍。

与期望的动态特性相比，观测误差较快的衰减，可以使得控制器的极点得以主导系统的响应。

在许多实际问题中，极点的选取往往归结为快速响应与对干扰和噪声灵敏性之间的一种折中。