数值分析与算法 课程例题

第五章　常微分方程初值问题的数值解法

Q：（10 分）采用欧拉法求取满足常微分方程$\begin{cases} y'(x) = y(x) \\ y(0) = 1 \end{cases}$的$y(1)$。不考虑每步的存储误差（即舍入误差），试分析求取结果与步长 h 的关系。

A：

递推的总体累积误差可表示为：

$$|y_{n+1} - y(x_{n+1})| \le |\overline{y_{n+1}} - y(x_{n+1})| + |y_{n+1} - \overline{y_{n+1}}| = |\overline{y_{n+1}} - y(x_{n+1})|$$

其中$\overline{y_{n+1}}$表示不考虑存储误差的结果，由于本题**不考虑存储误差**，仅考虑右式第一项方法累积误差，记为Δ_{n+1}。

方法误差：

对于欧拉法，$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$，第$n$步的局部截断误差为$\frac{h^2}{2}y^{(2)}(x_n)$

第$n+1$步的方法累积误差为：

$$\Delta_{n+1} = \left[1 + h\frac{\partial f}{\partial y}(x_n, y_n)\right]\Delta_n + \frac{h^2}{2}y^{(2)}(x_n)$$

记$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x_n, y_n)\right| \le M$，$\left|y^{(2)}(x_n)\right| \le L$

则有

$$\Delta_{n+1} \le (1 + hM)\Delta_n + \frac{h^2}{2}L$$

……（公式 2 分）

两边同时加上$\frac{1}{hM}\frac{h^2}{2}L$，可得

$$\Delta_{n+1} + \frac{1}{hM}\frac{h^2}{2}L \le (1+hM)(\Delta_n + \frac{1}{hM}\frac{h^2}{2}L)$$

利用等比递推可得，

$$\Delta_{n+1} + \frac{1}{hM}\frac{h^2}{2}L \le (1+hM)^{n+1}(\Delta_0 + \frac{1}{hM}\frac{h^2}{2}L) \le (1+hM)^{n+1}\frac{1}{hM}\frac{h^2}{2}L$$

……（公式 2 分）

即

$$\Delta_{n+1} \le ((1+hM)^{n+1} - 1)\frac{1}{hM}\frac{h^2}{2}L$$

……（公式 2 分）

因此，迭代n次后，最终结果的误差与步长h的关系如下：

$$\Delta_n \le ((1+hM)^n - 1)\frac{1}{hM}\frac{h^2}{2}L$$

……（结果 2 分）

其中，

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x_n, y_n)\right| = 1 \le M，M = 1$$

$$\left|y^{(2)}(x_n)\right| = |y'(x)| = |y(x_n)| \le L，L = \max\{|y(1)|, 1\}$$

……（计算 2 分）

注：若需要考虑存储误差，

记每步的存储误差为$\frac{1}{2}\times 10^{-m}$，则第$n+1$步的存储累积误差为

$$\delta_{n+1}=\left[1+h\frac{\partial f}{\partial y}(x_n,y_n)\right]\delta_n+\frac{1}{2}\times 10^{-m}$$

同理可得

$$\delta_{n+1}\le((1+hM)^{n+1}-1)\frac{1}{hM}\frac{1}{2}\times 10^{-m}$$