自动控制理论（1）作业九答案

作业内容：在教材第四章内容和电子讲义的基础上，试解答以下题目。
学习目的：线性控制系统的频率响应分析
提交时间：11月14日上课交，或交电子版致网络学堂截至11月14日24时

书上 **4.25, 4.26, 4.32**（也可以用**Nyquist**图判断）**, 4.33**
提示：注意当参数K没有明确说明大于零时，需要同时考虑正负两种可能性

1、书上4.25

**4.25** 某系统的开环传递函数为

$$Q(s)=\frac{K(T_2 s+1)}{s^2(T_1 s+1)}$$

要求画出以下 4 种情况下的奈奎斯特图，并判断闭环系统的稳定性：

(a) $T_2=0$；(b) $0<T_2<T_1$； (c) $0<T_2=T_1$； (d) $0<T_1<T_2$.

解：

a. 当$T_2=0$时，$Q(s)=\dfrac{K}{s^2(T_1s+1)}$，

其开环幅相曲线如题 5-5 解图 a 所示，$P=0$，N=2

则 Z=P+N=2，故在 $s$ 平面右半平面有 2 个闭环极点，闭环系统不稳定；

b. 当$0<T_2<T_1$时，$Q(j\omega)=\dfrac{K(jT_2\omega+1)}{-\omega^2(1+jT_1\omega)}=\dfrac{K(1+T_1T_2\omega^2)+K\omega(T_2-T_1)}{-\omega^2(1+T_1^2\omega^2)}$

若$\omega=0_+$，则$|Q(j0_+)|=\infty,\varphi(0_+)=-180^\circ$

若$\omega=+\infty$，则$|Q(j0_+)|=0,\varphi(0_+)=-180^\circ$

其开环幅相曲线如题 5-5 解图 b 所示，$P=0$，N=2

则则 Z=P+N=2，故系统不稳定；

c. 当$0<T_2=T_1$时，$Q(s)=\dfrac{K}{s^2}$

若$\omega=0_+$，则$|Q(j0_+)|=\infty,\varphi(0_+)=-180^\circ$

若$\omega=+\infty$，则$|Q(j0_+)|=0,\varphi(0_+)=-180^\circ$

其开环幅相曲线如题 5-5 解图 c 所示，$P=0$，N=1

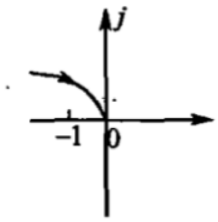
则则 Z=P+N=1，故系统不稳定；

d. 当$0<T_1<T_2$时，$Q(j\omega)=\dfrac{K(jT_2\omega+1)}{-\omega^2(1+jT_1\omega)}=\dfrac{K(1+T_1T_2\omega^2)+K\omega(T_2-T_1)}{-\omega^2(1+T_1^2\omega^2)}$

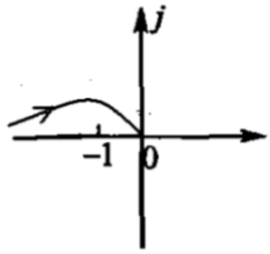
由$0<T_1<T_2$可得$\mathrm{Re}[Q(j\omega)]<0,\mathrm{Im}[Q(j\omega)]<0$

故可得其开环幅相曲线如图 5-14d 所示，$P=0$，$N=0$

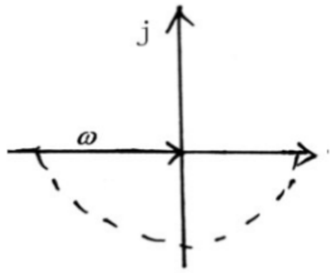
则则 Z=P+N=0，故系统稳定。



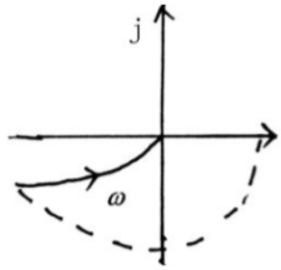

题 5-5 解图 a 开环幅相曲线




题 5-5 解图 b 开环幅相曲线




题 5-5 解图 c 开环幅相曲线




题 5-5 解图 d 开环幅相曲线

**2、书上4.26**

**4.26** 某系统的开环传递函数为

$$Q(s)=\frac{K(0.5s+1)(s+1)}{(10s+1)(s-1)} ,$$

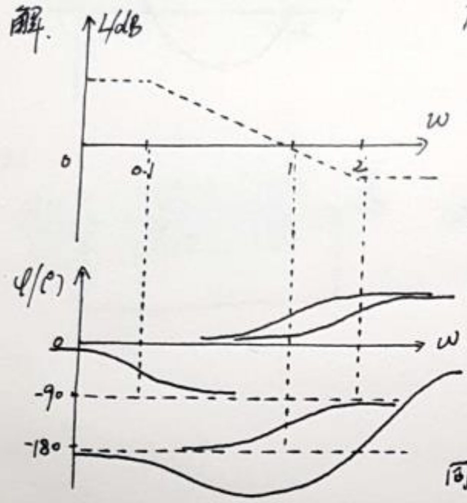
要求绘制其奈奎斯特图，并确定使系统稳定的 K 值范围.

解：

4.26 (奈奎斯特图、稳定增益范围)

$$G(s)=\frac{K(0.5s+1)(s+1)}{(10s+1)(s-1)}$$

解.




(1) 画极坐标图.

对K>0时,有. $G(j\omega)=M(j\omega)e^{j\varphi}$

$$M(\omega)=\frac{K\sqrt{1+(0.5\omega)^2}\sqrt{1+\omega^2}}{\sqrt{1+(10\omega)^2}\sqrt{1+\omega^2}}=\frac{K\sqrt{1+0.25\omega^2}}{\sqrt{1+100\omega^2}}$$

$$\varphi(\omega)=\arctan(0.5\omega)+\arctan(\omega)-\arctan(10\omega)-\arctan\frac{\omega}{-1}$$

$+\arctan(\omega)$

$$=\arctan(0.5\omega)+\arctan(\omega)-\arctan(10\omega)-\pi$$

$$=\arctan(0.5\omega)+2\arctan(\omega)-\arctan(10\omega)-\pi$$

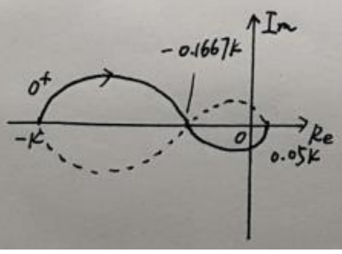
令 $\varphi=\arctan(0.5\omega)+2\arctan(\omega)-\arctan(10\omega)-\pi=-\pi$

$\therefore\ 2\arctan\omega=\arctan(10\omega)-\arctan(0.5\omega)$

同取正切. ∴ $\omega=0.620$. 幅值.

$$M(\omega)=\frac{K\sqrt{1+0.25\omega^2}}{\sqrt{1+100\omega^2}}=0.1667K$$

参考伯德图. K>0时. 极坐标图如下.



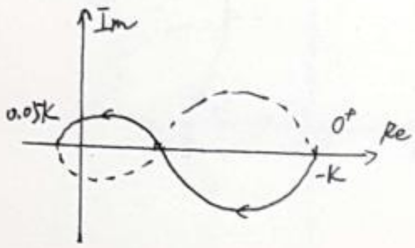

$\omega=0$时. $\varphi(0)=-\pi$, $M(0)=K$;

$\omega\to\infty$时 $\varphi(\infty)=0$, $M(0)=0.05K$ M(∞)

临界增益为 $K=\frac{1}{0.1667}=6$ & $P_0=1$

∴ K>6时. N=1. 闭环稳定.

K<0时极坐标图如下.




0.05K<-1时. 即K<-20时. N=1. 闭环稳定.

综上，使系统稳定的K值范围为K>6或K<-20

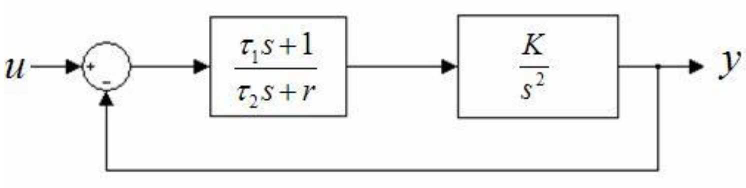
注：也可先写出闭环系统特征多项式，再用Routh判据求使系统稳定的K值范围。

3、书上4.32

**4.32** 某系统的框图如图中所示，其中 $K>0$，$\tau_1>0$，$\tau_2>0$．要求分别基于其幅相频率特性图和对数频率特性图回答下列问题：

(1) 若 $r=0$，系统能稳定吗？

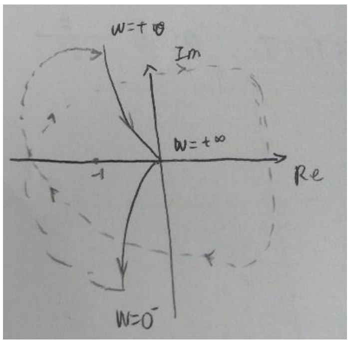
(2) 若 $r=1$，如何选 $\tau_1$ 及 $\tau_2$ 使系统稳定？




解：(1) 若r=0，则系统开环传递函数为

$$G(s)=\frac{K(\tau_1 s+1)}{\tau_2 s^3}$$

Nyquist曲线为：



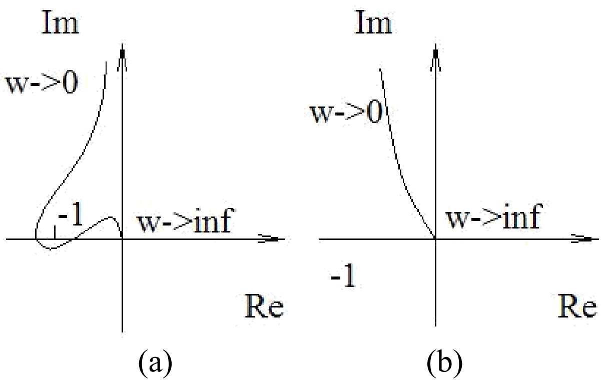

开环系统在S右半平面极点数为0，Nyquist曲线逆时针包围(-1,*j*0)的圈数为-2，则闭环系统在S右半平面极点数为2，闭环系统不稳定。
注：也可由闭环系统特征多项式缺二次项判断闭环系统不稳定。
(2) 若$r$=1，则开环传递函数和第4.25题的开环传递函数相同。
由第4.25题的分析讨论可知，当$0<\tau_2<\tau_1$时系统稳定。

4、书上4.33

**4.33** 图 (a)，(b) 分别表示一个反馈系统的开环奈奎斯特图．要求从以下 4 个传递函数中找出它们各自对应的开环传递函数，并判断闭环系统的稳定性。

(1) $Q(s)=\dfrac{K(s+1)}{s^2(0.5s+1)}$；　　(2) $Q(s)=\dfrac{K(s+1)(0.5s+1)}{s^3(0.1s+1)(0.05s+1)}$；

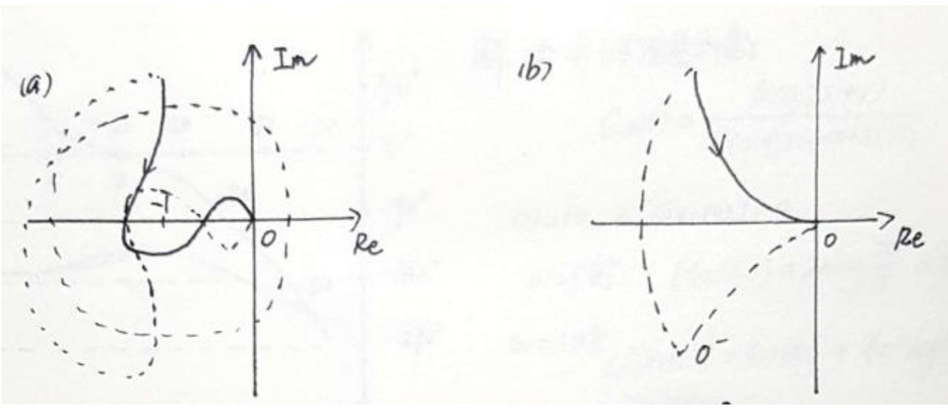
(3) $Q(s)=\dfrac{K}{s(Ts-1)}$；　　(4) $Q(s)=\dfrac{K}{s(-Ts+1)}$．




解：分析当$\omega\to 0$和$\omega\to\infty$ 时，(1)(2)(3)(4)和(a)(b)对应的开环传递函数的相角，并列表表示如下：

| | $\omega\to 0$ | $\omega\to\infty$ |
|---|---|---|
| (1) | -180° | -180° |
| (2) | -270° | -270° |
| (3) | -270° | -180° |
| (4) | -90° | 0° |
| (a) | -270° | -270° |
| (b) | -270° | -180° |

可见，图(a)对应(2)，图(b)对应(3)。这两个系统的 Nyquist 曲线如下图所示：




对于图(a)，开环系统在s右半平面极点数为0，Nyquist曲线逆时针包围(-1,j0)的圈数为0，则闭环系统在s右半平面的极点数为0，闭环系统稳定。

对于图(b)，开环系统在s右半平面极点数为1，Nyquist曲线逆时针包围(-1,j0)的圈数为-1，则闭环系统在s右半平面的极点数为2，闭环系统不稳定。