

自动控制理论（1）作业八答案

作业内容：在教材第四章内容和电子讲义的基础上，试解答以下题目。

学习目的：线性控制系统的频率响应分析

提交时间：11月7日上课交，或交电子版致网络学堂截至11月7日24时

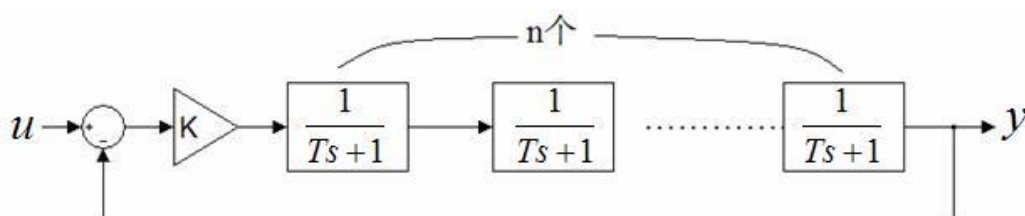
书上 4.23, 4.24

1、书上4.23

4.23 已知一系统如图所示，其中 $K > 0$ ， $T > 0$ 。

(1) 写出其开环传递函数 $G(s)$ 。求证系统稳定的充分必要条件是 $K < \frac{1}{\cos^n \frac{\pi}{n}}$

(2) 若比例单元 K 改为 K/s ，系统稳定的充分必要条件又是什么？



解：(1) 开环传递函数为 $G(s) = \frac{K}{(Ts+1)^n}$

开环传递函数在右半平面的极点数 $P = 0$ ，则系统稳定的充要条件是：Nyquist 曲线不包围 $(-1, j0)$ 点，即 Nyquist 曲线在负实轴上的取值大于 -1。

$$G(j\omega) = \frac{K}{(jT\omega + 1)^n} = \frac{K(1 - jT\omega)^n}{(1 + T^2\omega^2)^n}$$

$$|G(j\omega)| = \frac{K}{(1 + T^2\omega^2)^{n/2}}$$

$$\varphi[G(j\omega)] = n \cdot \arctan(-T\omega)$$

$G(j\omega)$ 在负实轴的点满足： $n \cdot \arctan(-T\omega) = -\pi$

记 $\theta = \arctan(T\omega)$ ，则 $\theta = \frac{\pi}{n}$ ，此时 $\cos\theta = (1 + T^2\omega^2)^{-\frac{1}{2}}$

系统稳定 \Leftrightarrow Nyquist 曲线在负实轴上的取值大于 -1

$$\Leftrightarrow \frac{K}{(1 + T^2\omega^2)^{\frac{n}{2}}} < 1$$

$$\Leftrightarrow K < (1 + T^2\omega^2)^{\frac{n}{2}}$$

$$\Leftrightarrow K < \frac{1}{\cos^n \theta}$$

$$\Leftrightarrow K < \frac{1}{\cos^n \frac{\pi}{n}}$$

(2) 若比例单元 K 改为 K/s , 则开环传递函数为 $G(s) = \frac{K}{s(Ts+1)^n}$

开环传递函数在右半平面的极点数为 $P=0$, 则系统稳定的充要条件是: Nyquist 曲线不包围 $(-1, j0)$ 点, 即Nyquist曲线在负实轴上的取值大于-1。

$$G(j\omega) = \frac{K}{j\omega(jT\omega + 1)^n} = \frac{K(1 - jT\omega)^n(-j)}{\omega(1 + T^2\omega^2)^n}$$

$$|G(j\omega)| = \frac{K}{\omega(1 + T^2\omega^2)^{n/2}}$$

$$\varphi[G(j\omega)] = n \cdot \arctan(-T\omega) - \frac{\pi}{2}$$

$G(j\omega)$ 在负实轴的点满足: $n \cdot \arctan(-T\omega) - \frac{\pi}{2} = -\pi$

记 $\theta = \arctan(T\omega)$, 则 $\theta = \frac{\pi}{2n}$, 此时 $\cos\theta = (1 + T^2\omega^2)^{-\frac{1}{2}}$, $\omega = \frac{\tan\frac{\pi}{2n}}{T}$

系统稳定 \Leftrightarrow Nyquist曲线在负实轴上的取值大于-1

$$\Leftrightarrow \frac{K}{\omega(1 + T^2\omega^2)^{\frac{n}{2}}} < 1$$

$$\Leftrightarrow K < \omega(1 + T^2\omega^2)^{\frac{n}{2}}$$

$$\Leftrightarrow K < \omega \frac{1}{\cos^n\theta}$$

$$\Leftrightarrow K < \frac{\tan\frac{\pi}{2n}}{T \cos^n\frac{\pi}{2n}}$$

考点: Nyquist稳定判据。

2、书上4.24

4.24 已知三个系统的开环传递函数分别为

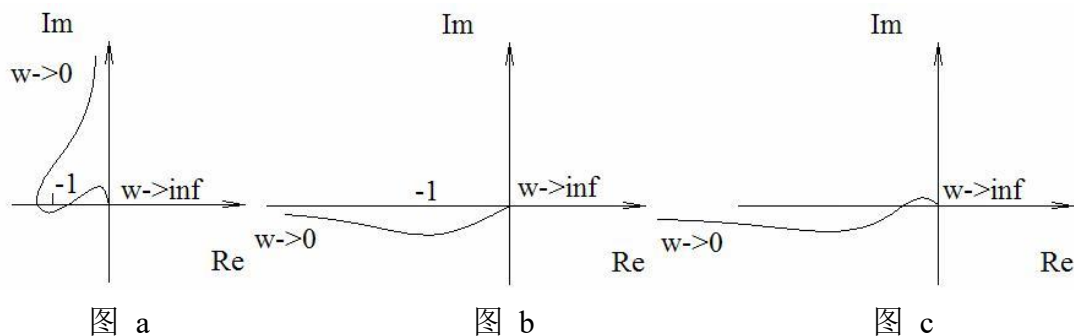
$$G_1(s) = \frac{K(T_2s + 1)}{s^2(T_1s + 1)}$$

$$G_2(s) = \frac{K(T_2s + 1)}{s^2(T_1s + 1)(T_3s + 1)}$$

$$G_3(s) = \frac{K(T_3s + 1)(T_4s + 1)}{s^3(T_1s + 1)(T_2s + 1)}$$

$(T_1 > 0, T_2 > 0, T_3 > 0, T_4 > 0)$

又知它们的奈奎斯特图如图 (a), (b), (c) 所示. 找出各个传递函数分别对应的奈奎斯特图, 并判断单位反馈下各闭环系统的稳定性.



解：通过 $\omega \rightarrow 0$ 和 $\omega \rightarrow +\infty$ 时 $G(j\omega)$ 的相角可以判断各开环传递函数与Nyquist图的对应关系。

记图c中Nyquist曲线与负实轴交点为 $(k_0, 0)$

开环传递函数	Nyquist曲线	开环传函在右半平面的极点数	Nyquist曲线逆时针包围 $(-1, j0)$ 的圈数	单位反馈下各闭环系统的稳定性
$G_1(s)$	图b	0	0	稳定
$G_2(s)$	图c	0	$\begin{cases} -2, k_0 < -1 \\ 0, k_0 > -1 \end{cases}$	$\begin{cases} \text{不稳定}, k_0 < -1 \\ \text{稳定}, k_0 > -1 \end{cases}$
$G_3(s)$	图a	0	0 (顺时针1圈, 逆时针包围1圈)	稳定

