第一次作业

（科目：　　）清华大学数学作业纸

编号：　　班级：　　姓名：　　第　　页

a)

状态：马在棋盘上的位置。

可以用一个10×9的二维数组来表示棋盘，左上角点为(1,1)，右下角为(10,9)

则马所在位置可用[a,b]表示 ($1 \le a \le 10$, $1 \le b \le 9$)

初始状态为(2,8)；目标状态为(1,6)

行动：马从一个位置向另一个位置的转移，用a、b的加或减表示

由象棋规则，马有八种行动可能，且应保证没有棋子挡马脚，以及马不走出棋盘范围

如何产生后继状态：

(a,b) →
- 若(a,b-1)为空 → (a-1, b-2)；(a+1, b-2)
- 若(a,b+1)为空 → (a-1, b+2)；(a+1, b+2)
- 若(a-1, b)为空 → (a-2, b-1)；(a-2, b+1)
- 若(a+1, b)为空 → (a+2, b-1)；(a+2, b+1)

若未出界，则为合法状态，产生。

代价：行动的开销(表示步数)，认为每走一步代价为1。

b) 状态：每个容器中的水量，可以用一个三元数组(a,b,c)表示，其中$0 \le a \le 12$, $0 \le b \le 8$, $0 \le c \le 5$。

初始状态为(0,0,0)，即三容器均空，目标状态为某容器中有1L得水，即(1,b,c)；(a,1,c)；(1,b,c)中的一种。

行动：任一容器装满水；或清空；或将水从一个容器转动到另一个容器(要求所转动的水量只能等于这2个容器之一的容积)

对应于三元数组某个元素的增加至阈值/减少至0/某元素减少且另一元素增加相同值（减少至0或增加至满）

△

如何产生后继状态：

对于 (a_0, b_0, c_0) 中，选择某元素对（设为a）

若 $x = x_0, < x_{max}$

- 装满水：$(a_0, b_0, c_0) \longrightarrow (a_{max}, b_0, c_0)$
- 倒入其它未满容器：（以 b_0 为例）$(a_0 - \Delta, b_0 + \Delta, c)$，$\Delta = \min(a_0, b_{max} - b_0)$
- 从其它未空容器倒入水：$(a_0 + \Delta, b_0 - \Delta, c)$，$\Delta = \min(a_{max} - a_0, b_0)$

若 $x = x_{max}$ 已满

- 倒空水：$\longrightarrow (0, b_0, c_0)$
- 倒入其它未满容器：$(a_0 - \Delta, b_0 + \Delta, c_0)$（同上）

代价：操作/倒水的次数，每次代价为1；

或移动的水量之和，每次代价 = 移动水量

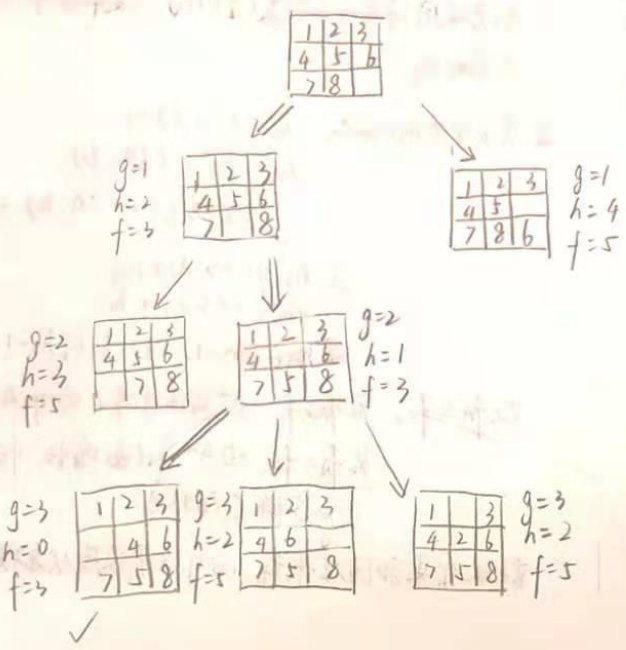
2.

(1) 设计A* 算法，定义 g 函数和 h 函数.

g 函数为使用算符的次数，即状态转移的次数，每转移一次 g+1.

h 函数为：所有数码到其最终位置的曼哈顿距离之和.

(2) 搜索树



路径在搜索树中用"⇒"标明.

编号： 班级： 姓名： 第 页

3、(1)

在A*算法所采用的h(n)函数是可采纳的时，A*算法具有最优性，但深度优先搜索不能保证得到最优解，这时不能认为是特殊A*搜索

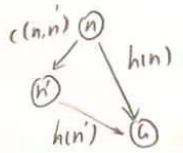
若对f(n)函数(g(n))不进行单调性的束的时候，A*不一定具有最优性，若

若定义g(n)≡0，h(n)为：h(S)=C*(S为起点，C*为一个很大正数)，若p为S子节点则h(p)=C*-1。每次选取有最小f(n)值节点扩展，则类似于深度优先搜索。

因此深度优先搜索可看作特殊A*搜索

(2)

先证：若h(n)满足一致性条件，则可证明沿着任何路径的f(n)值都是非递减的：



因为 h(n)≤c(n,n')+h(n')，(n'为n后继)

$$\begin{aligned} f(n') &= g(n') + h(n') \\ &= g(n) + c(n,n') + h(n') \\ &\geq g(n) + h(n) \\ &= f(n) \end{aligned}$$

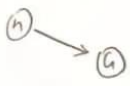
因此当A*扩展节点n时，到达节点n的路径上每个节点的代价评估值小于f(n)，即它们已经全部被扩展，到该节点的最优路径已经被发现。

(假若有另一条路径到达n，代价g'(n)<g(n)，则f'(n)<f(n)，一定会被先发现。)

因此A*具有最优性

(3)

① 若该节点一步可到目标，



$$h(n) \leq c(n,G) + h(G) = h^*(n)$$

② 若不能一步到目标，(用数学归纳法) 设k步到目标的节点可采纳，即 $h(n_k) \leq h^*(n_k)$

则k+1步到目标的节点：

$$\begin{aligned} h(n_{k+1}) &\leq c(n_{k+1}, n_k) + h(n_k) \\ &\leq c(n_{k+1}, n_k) + h^*(n_k) \\ &= h^*(n_{k+1}) \end{aligned}$$

亦可采纳

因此，若h(n)满足一致性条件，则一定可采纳