# 运筹学

## （线性规划）

王焕钢

清华大学自动化系

1. 一般模型和标准模型
2. 低维问题图解法及其向高维的推广
3. 单纯形算法
4. 对偶性与对偶算法
5. 灵敏度分析
6. 单纯形算法的复杂性

# 要点：线性规划模型

例：生产I、II两种产品，要占用A、B设备及调试时间，每件产品机时利润如表所示

| | 产品I | 产品II | 每天可用时间 |
|---|---|---|---|
| 占用A机时 | 0 | 5 | 15 |
| 占用B机时 | 6 | 2 | 24 |
| 调试时间 | 1 | 1 | 5 |
| 利润 | 2 | 1 | |

如何生产使每天利润最大?

**确定变量：** 生产两种产品的数量 $x_1, x_2$

**明确目标：** $2x_1 + x_2$

**约束条件：**

| | |
|---|---|
| $5x_2 \le 15$ | A机时约束 |
| $6x_1 + 2x_2 \le 24$ | B机时约束 |
| $x_1 + x_2 \le 5$ | 调试时间约束 |
| $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$ | 非负约束 |

## 数学规划模型

$$
\begin{aligned}
\max\ & 2x_1 + x_2 \\
\text{s.t.}\ & 5x_2 \le 15 \\
& 6x_1 + 2x_2 \le 24 \\
& x_1 + x_2 \le 5 \\
& x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

例：某种物品有 $m$ 个产地，记为 $A_1, A_2, \cdots, A_m$，各产地产量分别是 $a_1, a_2, \cdots, a_m$；有 $n$ 个销地 $B_1, B_2, \cdots, B_n$，各销地销量分别是 $b_1, b_2, \cdots, b_n$；假定从产地 $A_i$ 向销地 $B_j$ 运输单位物品运价是 $c_{ij}$；问怎样调运这些物品能使总费用最小?

| 产地 \ 销地 | $B_1$ | $B_2$ | $\cdots$ | $B_n$ | 产量 |
|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | $c_{11}$ $x_{11}$ | $c_{12}$ $x_{12}$ | | $c_{1n}$ $x_{1n}$ | $a_1$ |
| $A_2$ | $c_{21}$ $x_{21}$ | $c_{22}$ $x_{22}$ | | $c_{2n}$ $x_{2n}$ | $a_2$ |
| $\vdots$ | | | | | $\vdots$ |
| $A_m$ | $c_{m1}$ $x_{m1}$ | $c_{m2}$ $x_{m2}$ | | $c_{mn}$ $x_{mn}$ | $a_m$ |
| 销量 | $b_1$ | $b_2$ | $\cdots$ | $b_n$ | |

## 数学规划模型

$$\min \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \ \forall 1 \le i \le m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \ \forall 1 \le j \le n$$

$$x_{ij} \ge 0, \ \forall 1 \le i \le m, 1 \le j \le n$$

## 线性规划模型的一般形式（min）

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad \forall 1 \le i \le p \\
& \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i, \quad \forall p+1 \le i \le m \\
& x_j \ge 0, \ \forall 1 \le j \le q \\
& -\infty < x_j < +\infty, \ \forall q+1 \le j \le n
\end{aligned}
$$

# 要点：线性规划的标准模型

# 线性规划不等式约束转化为等式约束

$$\begin{aligned} \max\ & 2x_1 + x_2 \\ \text{s.t.}\ & 5x_2 \le 15 \\ & 6x_1 + 2x_2 \le 24 \\ & x_1 + x_2 \le 5 \\ & x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} \max\ & 2x_1 + x_2 \\ \text{s.t.}\ & 5x_2 + x_3 = 15 \\ & 6x_1 + 2x_2 + x_4 = 24 \\ & x_1 + x_2 + x_5 = 5 \\ & x_i \ge 0,\ i = 1, 2, \cdots, 5 \end{aligned}$$

$x_3 = 15 - 5x_2$ A机时剩余量

$x_4 = 24 - 6x_1 - 2x_2$ B机时剩余量

$x_5 = 5 - x_1 - x_2$ 调试时间剩余量

# 线性规划标准模型

$$\max \quad c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

目标函数

$$\text{s.t.} \quad \left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}\right\}$$

等式约束

$$\left.\begin{aligned} x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \\ &\vdots \\ x_n &\geq 0 \end{aligned}\right\}$$

决策变量具有非负约束

# 线性规划标准模型

$$\min\ (\text{ or }\ \max)\ \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\text{s.t.}\quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i,\quad \forall 1 \le i \le m \quad \Rightarrow$$

$$x_j \ge 0,\ \ \forall 1 \le j \le n$$

$$\min\ (\text{ or }\ \max)\ C^T X$$

$$\text{s.t.}\qquad AX = \vec{b}$$

$$X \ge 0$$

$$C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \max\ & 2x_1 + x_2 \\ \text{s.t.}\ & 5x_2 + x_3 = 15 \\ & 6x_1 + 2x_2 + x_4 = 24 \\ & x_1 + x_2 + x_5 = 5 \\ & x_i \geq 0,\ i = 1,2,\cdots,5 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} \max\ & C^T X \\ \text{s.t.}\ & AX = \vec{b} \\ & X \geq 0 \end{aligned}$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ \vec{b} = \begin{pmatrix} 15 \\ 24 \\ 5 \end{pmatrix}$$

## 对线性规划标准型的基本假定

1. 系数矩阵A的行向量 $\vec{a}_1^T, \vec{a}_2^T, \cdots, \vec{a}_m^T$ 线性无关

如果该假定不满足，某个行向量，比如 $\vec{a}_m^T$ ，可以表示为 $\vec{a}_1^T, \vec{a}_2^T, \cdots, \vec{a}_{m-1}^T$ 的线性组合，即

$$\vec{a}_m^T = \lambda_1 \vec{a}_1^T + \lambda_2 \vec{a}_2^T + \cdots + \lambda_{m-1} \vec{a}_{m-1}^T$$

则对任何满足前 $m-1$ 个约束的 $X$ 都成立

$$\vec{a}_m^T X = \lambda_1 \vec{a}_1^T X + \cdots + \lambda_{m-1} \vec{a}_{m-1}^T X = \lambda_1 b_1 + \cdots + \lambda_{m-1} b_{m-1}$$

当 $b_m = \lambda_1 b_1 + \cdots + \lambda_{m-1} b_{m-1}$ 时，第 $m$ 个约束不起作用，故可以删除，若上述等式不满足原问题无可行解

在基本假定的基础上可进一步假定

2. 系数矩阵A的列数大于其行数，即 $n > m$

如果 $n < m$ ，由于 $\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_m$ 是 $m$ 个 $n$ 维的向量，不可能线性无关，如果 $n = m$ ，$A$ 是行向量线性无关的方阵，因此有逆，满足 $AX = \vec{b}$ 的只有一个向量 $\hat{X} = A^{-1}\vec{b}$ ，不需要优化！

我们所考虑的线性规划标准型为：

$$\begin{aligned} \max\ & C^T X \\ \text{s.t.}\ & AX = \vec{b} \\ & X \geq 0 \end{aligned}$$

其中 $C \in R^n, X \in R^n, A \in R^{m\times n}, \vec{b} \in R^m$ ，并假定

1. $n > m$
2. $A$ 的行向量线性无关

# 线性规划一般模型与标准模型的转换

$$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \quad \Rightarrow \quad -\left( \min \sum_{j=1}^{n} -c_j x_j \right)$$

$$a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n \ge b_i \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n - x_{n+1} = b_i \\ x_{n+1} \ge 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n \ge b_i \\ -\infty < x_1 < +\infty \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} a_{i1}\left(x_1^+ - x_1^-\right) + \cdots + a_{in}x_n \ge b_i \\ x_1^+ \ge 0,\ x_1^- \ge 0 \end{array}$$

# 要点：低维问题的图解法

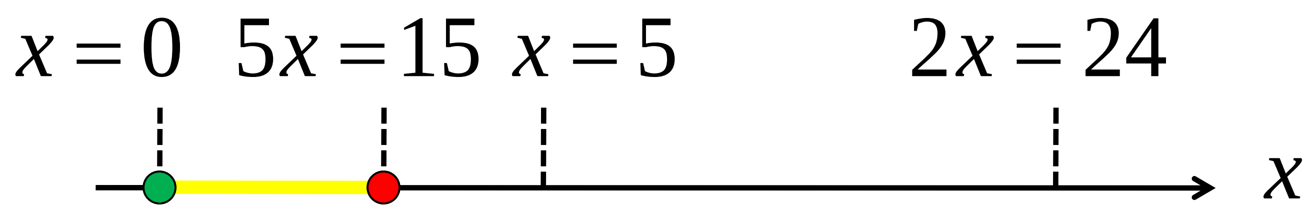
生产一种家电产品，要占用A、B设备及调试时间，每件产品机时利润如表所示

| | 产品 | 每天可用时间 |
|---|---|---|
| 占用A机时 | 5 | 15 |
| 占用B机时 | 2 | 24 |
| 调试时间 | 1 | 5 |
| 利润 | 1 | |

如何生产使每天利润最大?

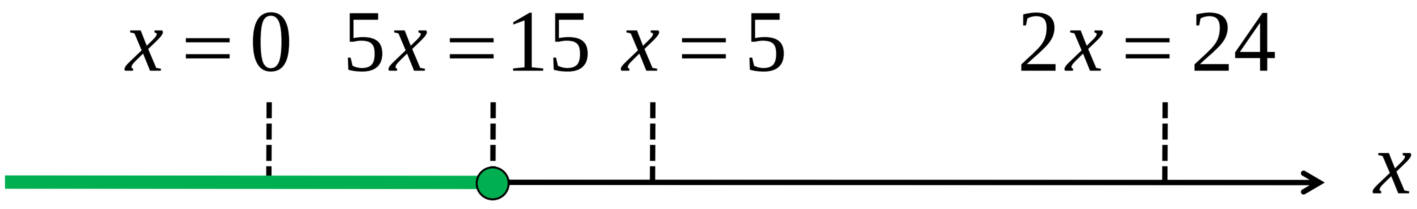
数学规划模型： $\max\ x$

$$
\begin{aligned}
\text{s.t.}\quad & 5x \le 15 \\
& 2x \le 24 \\
& x \le 5 \\
& x \ge 0
\end{aligned}
$$

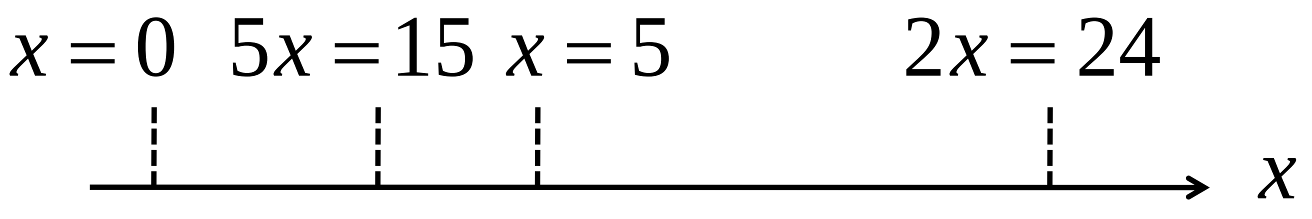



黄实线是可行集，红点是最优解

$$
\begin{array}{ll}
\max & x \\
\text{s.t.} & 5x \le 15 \\
& 2x \le 24 \\
& x \le 5 \\
& x \ge 0
\end{array}
\quad \Rightarrow \quad
\begin{array}{ll}
\color{red}{\min} & \color{red}{x} \\
\text{s.t.} & 5x \le 15 \\
& 2x \le 24 \\
& x \le 5
\end{array}
$$



$$\begin{aligned} \max\ & x \\ \text{s.t.}\ & 5x \le 15 \\ & 2x \le 24 \\ & x \le 5 \\ & x \ge 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \min\ & x \\ \text{s.t.}\ & 5x \le 15 \\ & 2x \le 24 \\ & x \le 5 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \max\ & x \\ \text{s.t.}\ & 5x \le 15 \\ & 2x \ge 24 \\ & x \le 5 \end{aligned}$$




求解一维线性规划问题时，解的情况有：

唯一最优解；无界解；无可行解

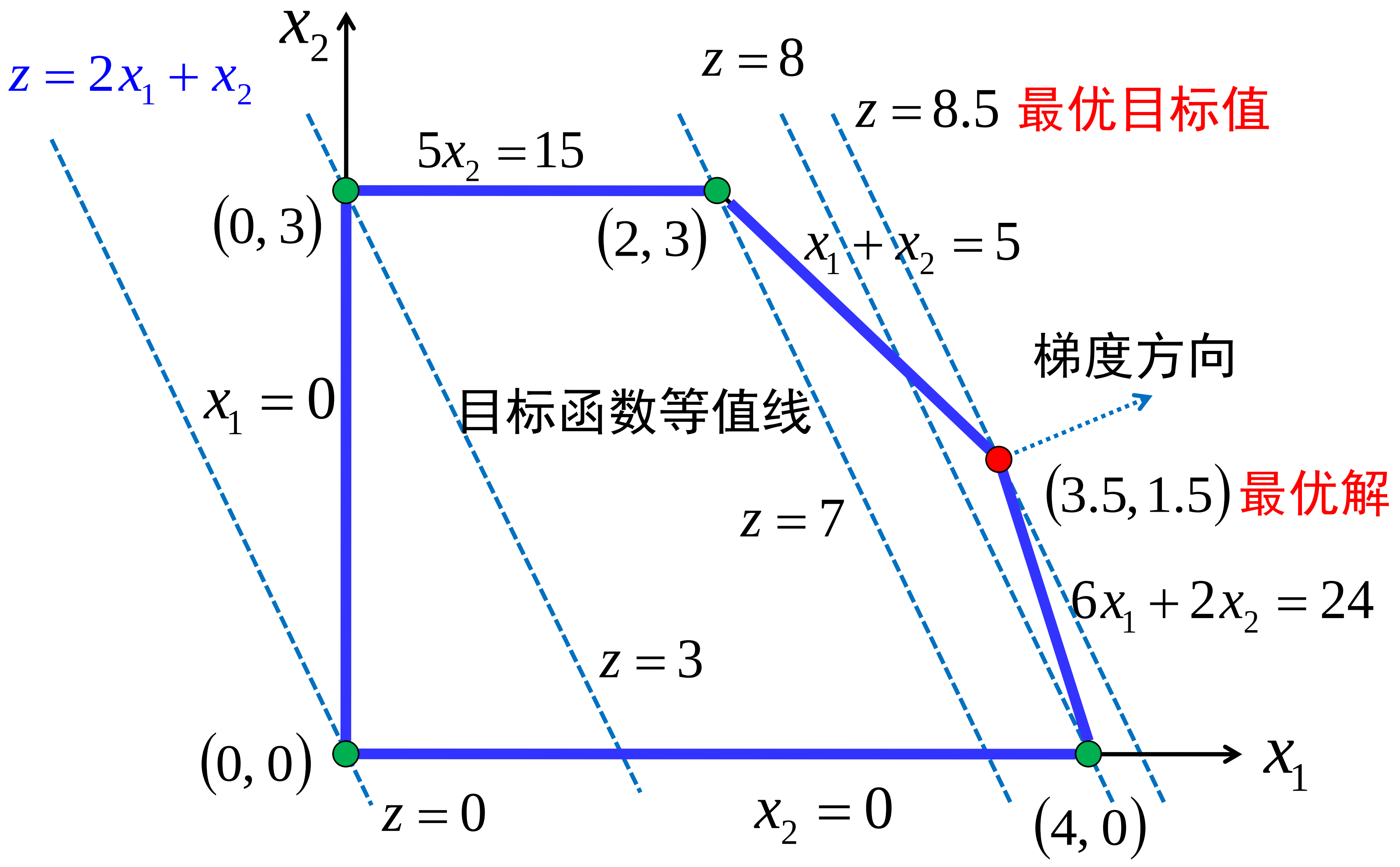
生产I、II两种产品，要占用A、B设备及调试时间，每件产品机时利润如表所示

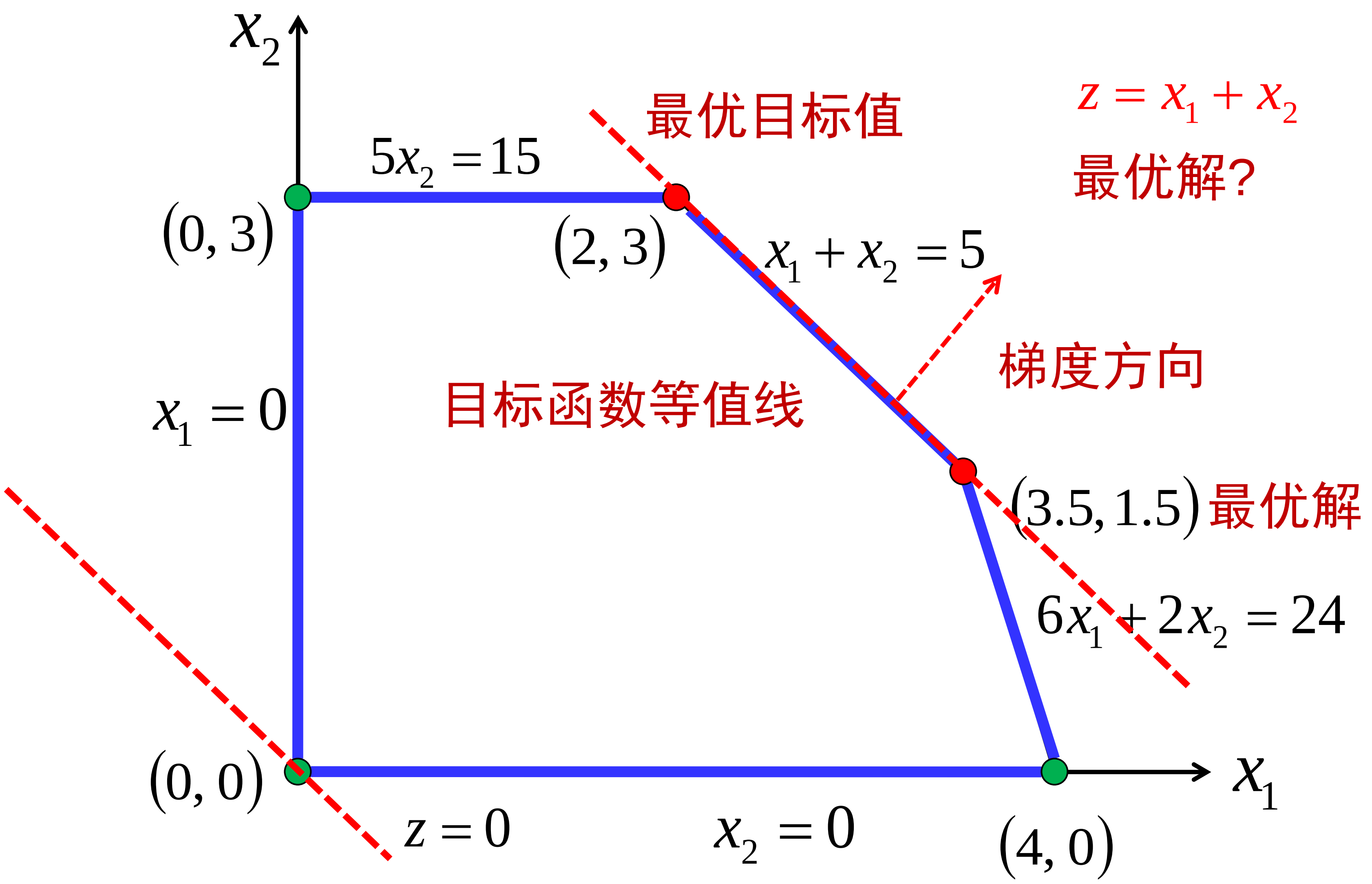
| | 产品I | 产品II | 每天可用时间 |
| --- | --- | --- | --- |
| 占用A机时 | 0 | 5 | 15 |
| 占用B机时 | 6 | 2 | 24 |
| 调试时间 | 1 | 1 | 5 |
| 利润 | 2 | 1 | |

如何生产使每天利润最大?

## 数学规划模型

$$\max \quad z = 2x_1 + x_2$$
$$\text{s.t.} \quad 5x_2 \le 15$$
$$6x_1 + 2x_2 \le 24$$
$$x_1 + x_2 \le 5$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$$


$z = 2x_1 + x_2$
$x_2$
$z = 8$
$z = 8.5$ 最优目标值
$5x_2 = 15$
$(0, 3)$
$(2, 3)$
$x_1 + x_2 = 5$
梯度方向
$x_1 = 0$
目标函数等值线
$(3.5, 1.5)$ 最优解
$z = 7$
$6x_1 + 2x_2 = 24$
$z = 3$
$(0, 0)$
$x_1$
$z = 0$
$x_2 = 0$
$(4, 0)$




解的情况有：唯一最优解；无界解；无可行解；

无穷多最优解

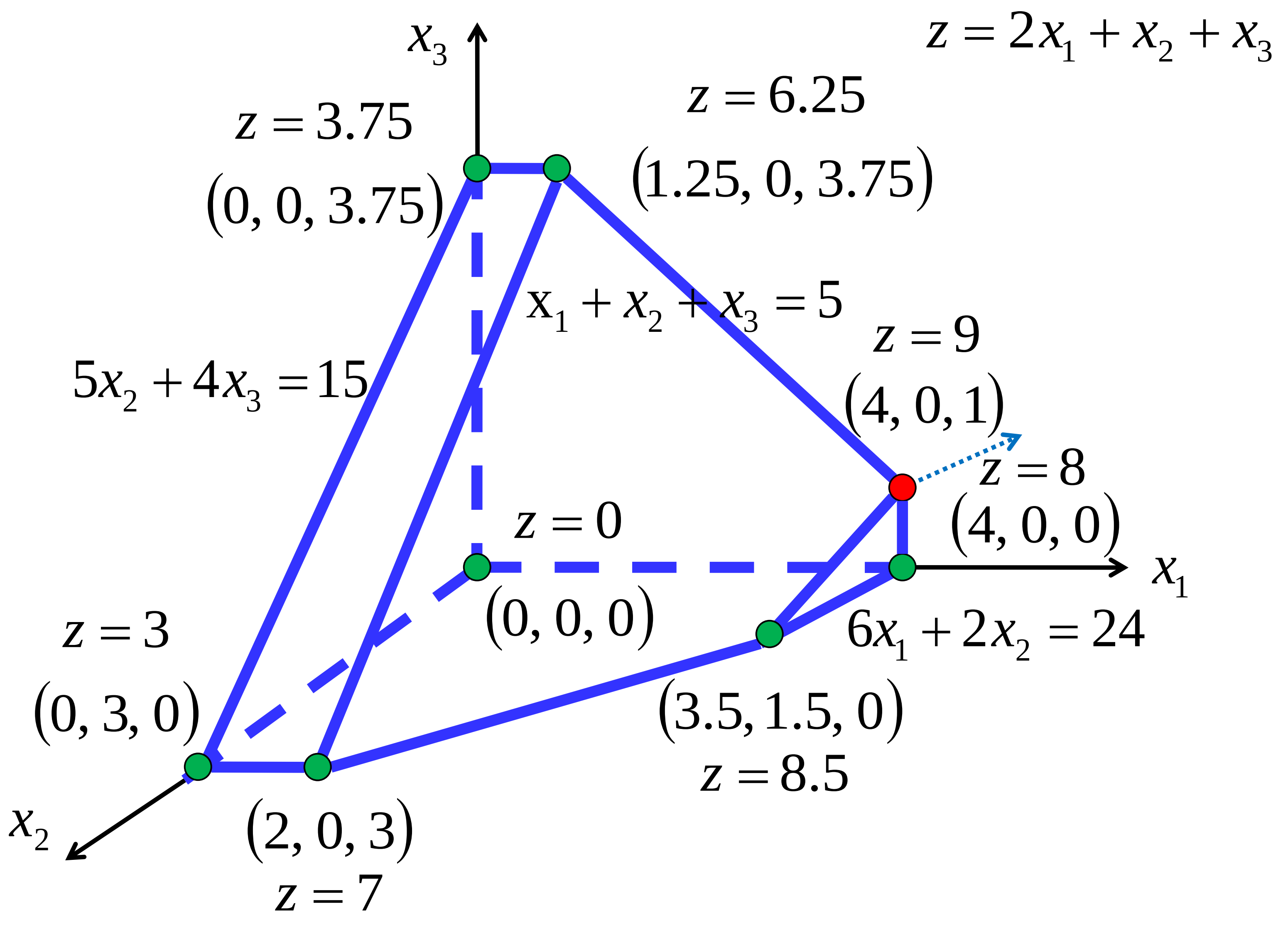
生产I、II、III三种产品，要占用A、B设备及调试时间，每件产品机时利润如表所示

| 产品 | I | II | III | 每天可用时间 |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 占A机时 | 0 | 5 | 4 | 15 |
| 占B机时 | 6 | 2 | 0 | 24 |
| 调试时间 | 1 | 1 | 1 | 5 |
| 利润 | 2 | 1 | 1 | |

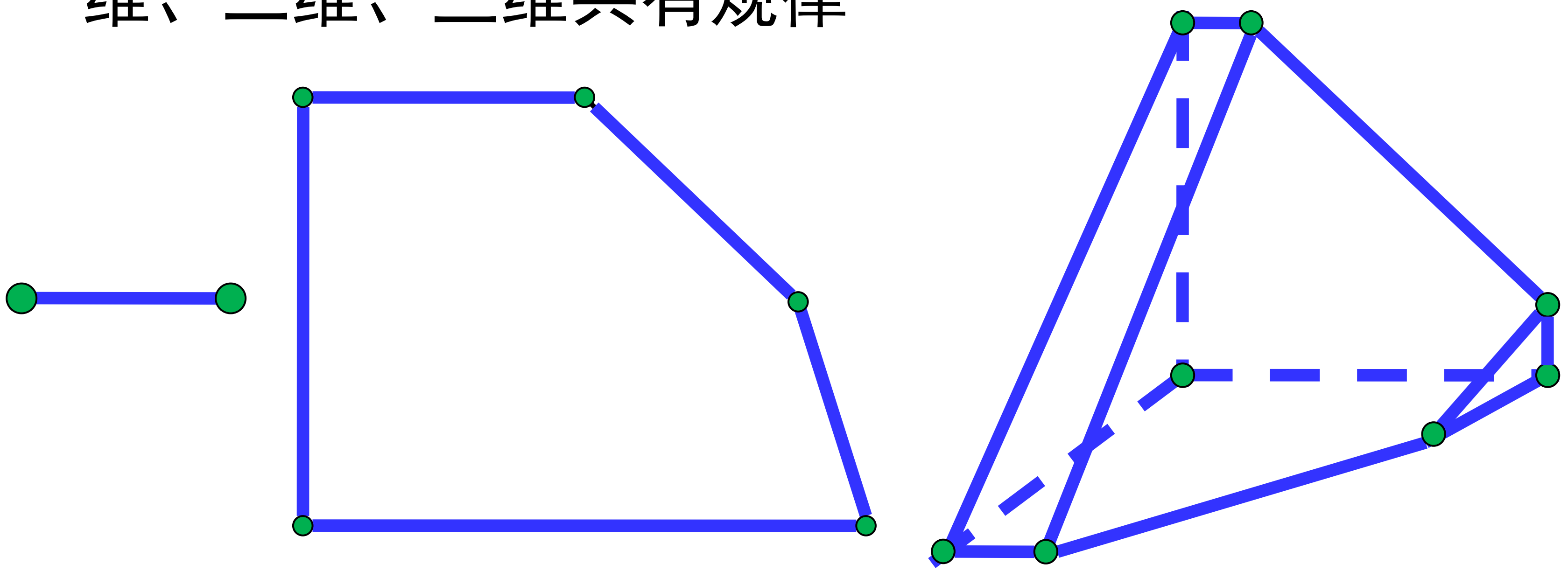
如何生产使每天利润最大?

## 数学规划模型

$$
\begin{aligned}
\max \quad & z = 2x_1 + x_2 + x_3 \\
\text{s.t.} \quad & 5x_2 + 4x_3 \le 15 \\
& 6x_1 + 2x_2 \le 24 \\
& x_1 + x_2 + x_3 \le 5 \\
& x_i \ge 0, i = 1, 2, 3
\end{aligned}
$$


$z = 2x_1 + x_2 + x_3$
$x_3$
$z = 3.75$
$(0, 0, 3.75)$
$z = 6.25$
$(1.25, 0, 3.75)$
$x_1 + x_2 + x_3 = 5$
$z = 9$
$(4, 0, 1)$
$5x_2 + 4x_3 = 15$
$z = 8$
$(4, 0, 0)$
$z = 0$
$(0, 0, 0)$
$x_1$
$z = 3$
$(0, 3, 0)$
$6x_1 + 2x_2 = 24$
$(3.5, 1.5, 0)$
$z = 8.5$
$x_2$
$(2, 0, 3)$
$z = 7$

一维、二维、三维共有规律



1. 可行集是不等式约束成为等式约束围成的集合
（等式：一维是点、二维是直线、三维是平面）
2. “绿点”中有最优解（有限目标函数值）
3. “绿点”个数有限

启示：在绿点中找最优解
挑战：高维绿点如何计算

要点：“绿点”如何解析表示？

# 一、二、三维问题“绿点”的共有规律

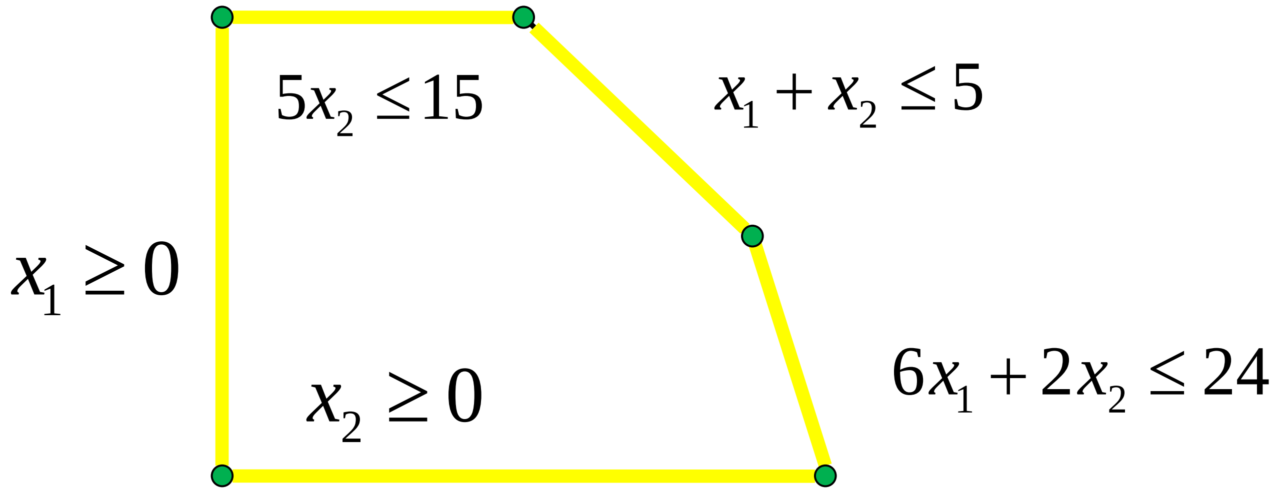
$x \geq 0$

$5x \leq 15$

绿点1 $\quad x = 0$

绿点2 $\quad 5x = 15 \quad \Rightarrow \quad x^* = 3$

## 一、二、三维问题“绿点”的共有规律



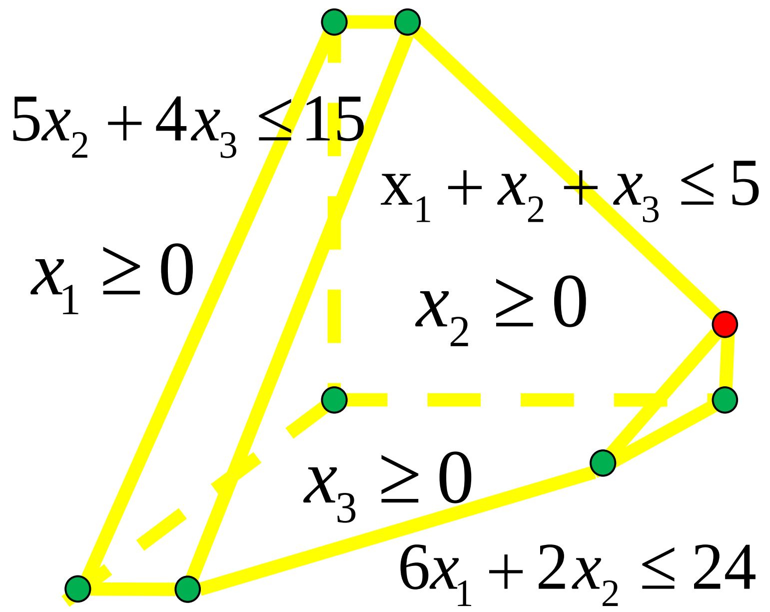

$$x_1 = 0,\ x_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad X = (0, 0)^T$$

$$x_1 = 0,\ 5x_2 = 15 \quad \Rightarrow \quad X = (0, 3)^T$$

$$\vdots$$

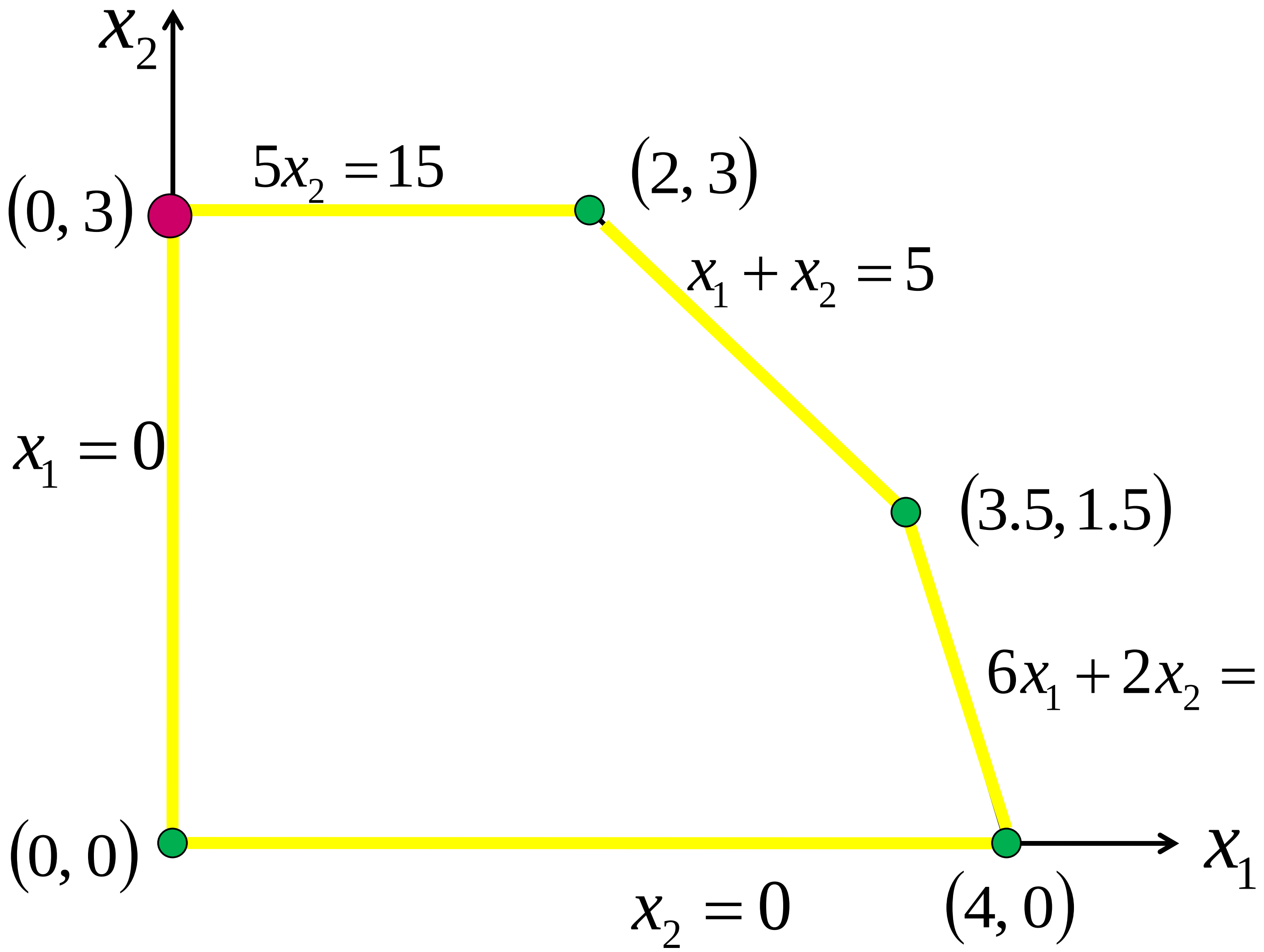
$$x_1 + x_2 = 5,\ 6x_1 + 2x_2 = 24 \quad \Rightarrow \quad X^* = (3.5, 1.5)^T$$

# 一、二、三维问题“绿点”的共有规律




$$x_1 + x_2 + x_3 = 5,\ 6x_1 + 2x_2 = 24,\ x_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad X^* = (4, 0, 1)^T$$

每个“绿点”都是该点所有**起作用约束**（不等式成为等式的约束）**构成的线性方程组的唯一解**


$x_2$
$5x_2 = 15$
$(2, 3)$
$(0, 3)$
$x_1 + x_2 = 5$
$x_1 = 0$
$(3.5, 1.5)$
$6x_1 + 2x_2 = 24$
$(0, 0)$
$x_1$
$x_2 = 0$
$(4, 0)$

"绿点"所有起作用约束（不等式成为等式的约束）构成的线性方程组的唯一解

$$\begin{aligned} 5x_2 &\le 15 \\ 6x_1 + 2x_2 &\le 24 \\ x_1 + x_2 &\le 5 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

$$x_1 = 0 \qquad x_2 = 3$$

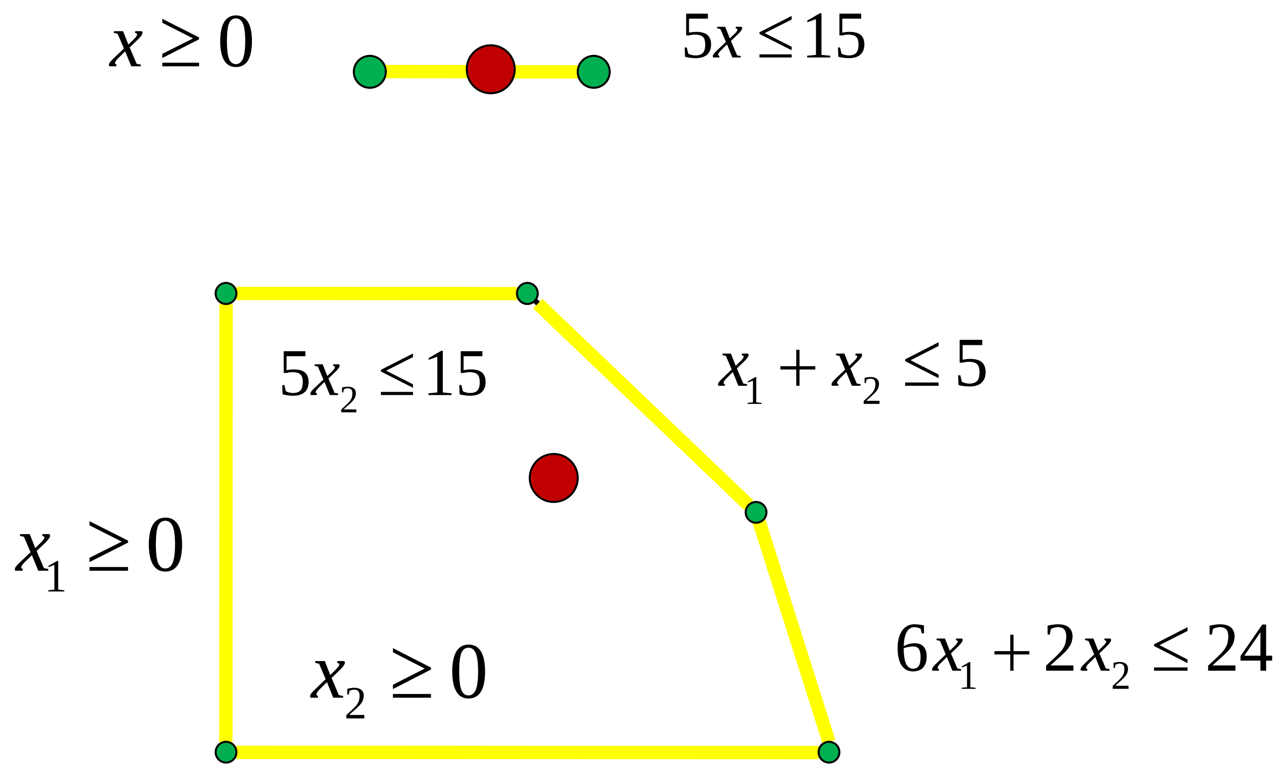
$$\begin{aligned} 5x_2 &= 15 \\ 6x_1 + 2x_2 &< 24 \\ x_1 + x_2 &< 5 \\ x_1 &= 0 \\ x_2 &> 0 \end{aligned}$$

起作用约束 $5x_2 = 15$, $x_1 = 0$

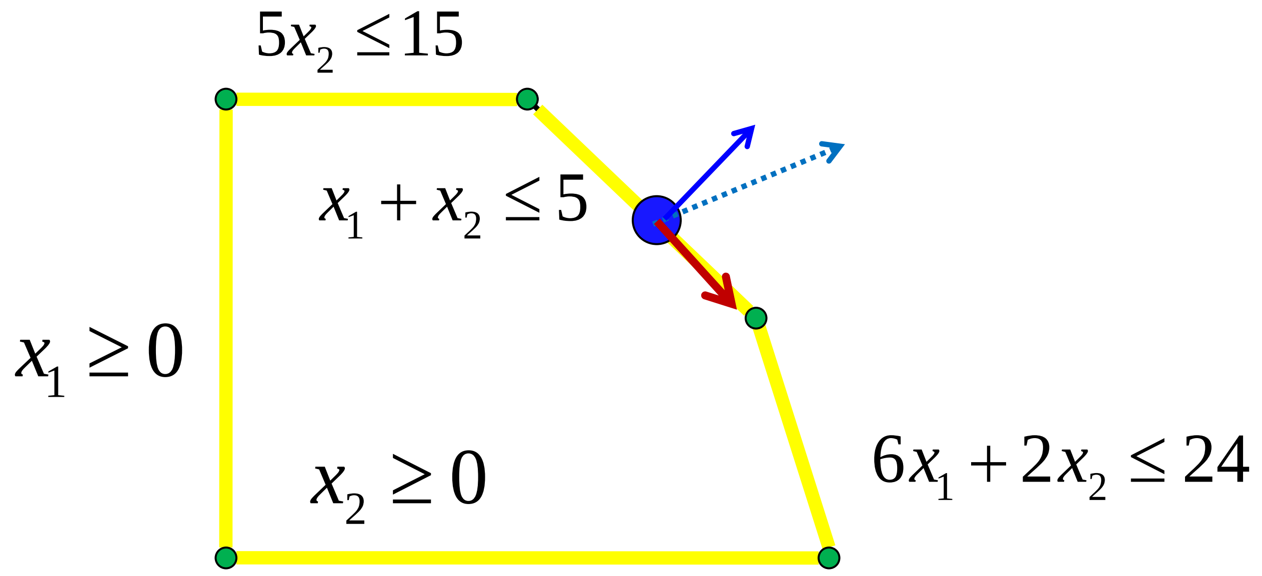
该线性方程组的解唯一就是"绿点"

## 要点：为什么“绿点”中有最优解？

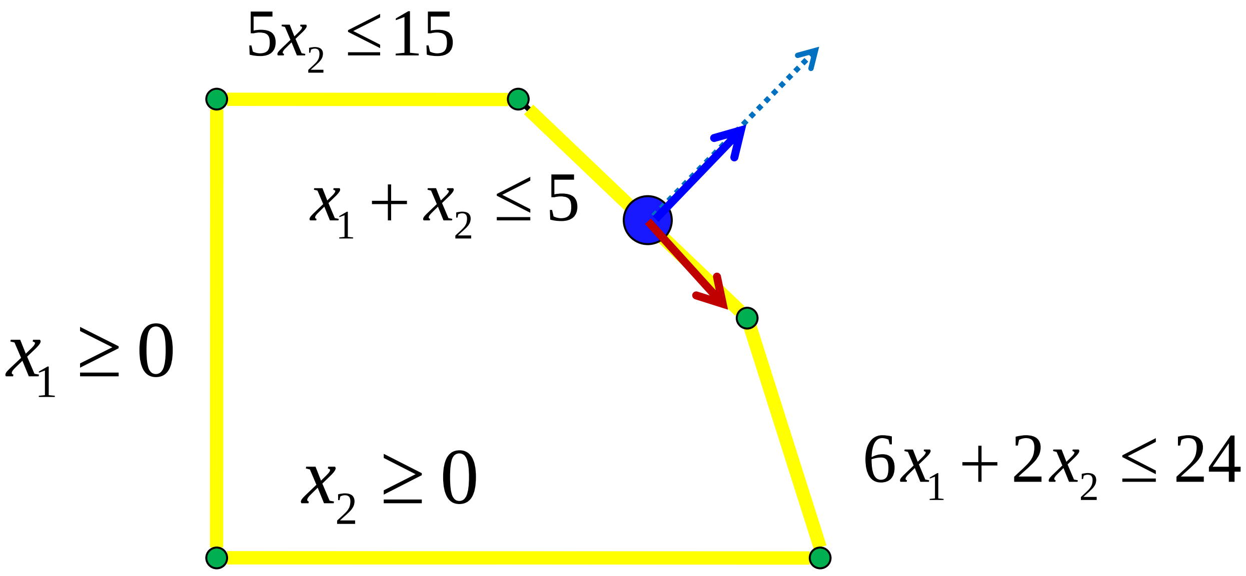
如果可行解没有起作用约束（内点），沿梯度方向必可改进目标函数，不可能是最优解，如红点所示



如果可行解不是起作用约束的唯一解，必有非零向量和起作用约束的所有法线垂直（如下图蓝点和蓝色向量），此时将梯度方向投影到蓝色向量的垂直空间得到一个向量（下图的红色向量），沿此方向前进可改进目标函数，所以也不可能是最优解



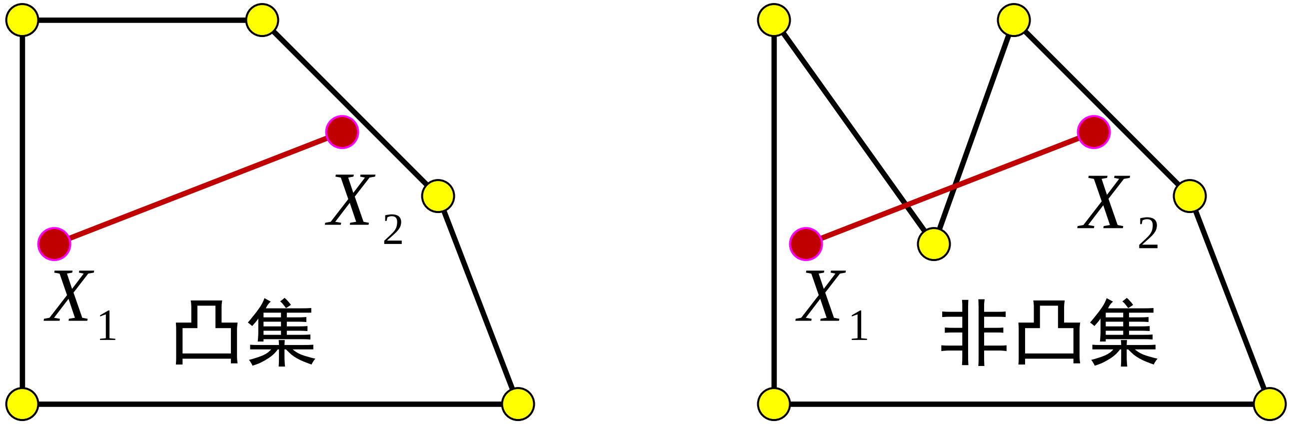
如果可行解不是起作用约束的唯一解，但梯度如下图所示，和所有起作用约束的法线垂直，此时蓝点是最优解，但沿着红色方向前进可以得到至少增加一个起作用约束的最优解，因此也可得到是最优解的绿点（有无穷多最优解）



# 要点：凸集、凸集的顶点

## 凸集

如果某个集合中任意两点连起来的直线都属于该集合，则称其为凸集，否则为非凸集，如下图所示




数学定义：$\Omega$ 是凸集当且仅当对任意实数 $0<\alpha<1$

和任意的 $X_1, X_2 \in \Omega$ 均成立

$$\alpha X_1 + (1-\alpha) X_2 \in \Omega$$

# 线性规划的多面体模型

$$\min \quad \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i, \quad \forall 1 \leq i \leq m$$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} &\min \ C^T X \\ &\text{s.t.} \ AX \geq \vec{b} \end{aligned}$$

$$C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

# 线性规划多面体模型的可行集是凸集

多面体模型的可行集 $\Omega = \left\{ X, X \in R^n \middle| AX \geq \vec{b} \right\}$

$$\forall\ X_1, X_2 \in \Omega \quad \Rightarrow \quad AX_1 \geq \vec{b},\ AX_2 \geq \vec{b}$$

对任意的 $0 < \alpha < 1$ 可以推得

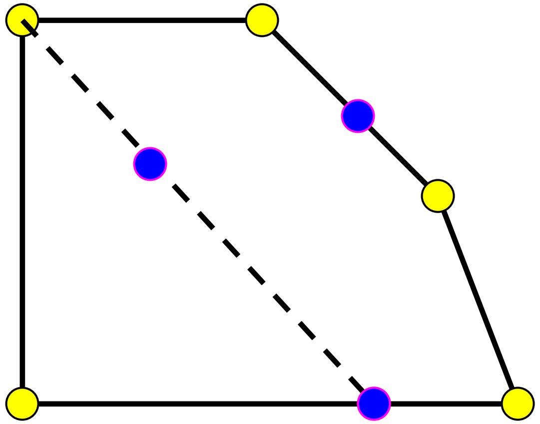
$$A\left(\alpha X_1 + (1-\alpha) X_2\right) = \alpha AX_1 + (1-\alpha) AX_2 \geq \alpha\vec{b} + (1-\alpha)\vec{b} = \vec{b}$$

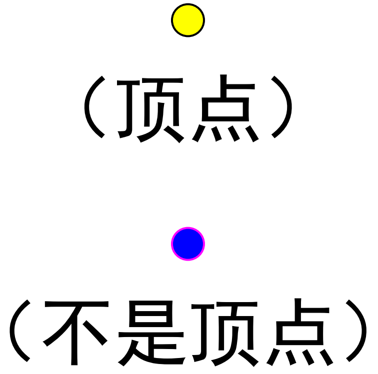
$\Rightarrow \quad \left(\alpha X_1 + (1-\alpha) X_2\right) \in \Omega$ 　满足凸集定义

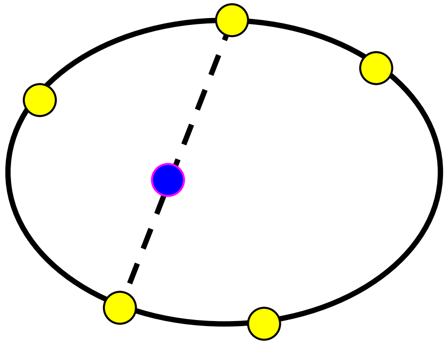
线性规划标准模型的可行集是凸集（证法相同）

## 凸集的顶点

如果凸集内的一点不在凸集内任何不同的两点连起来的直线上，则称该点为该凸集的顶点，如下所示





无数顶点

数学定义：$X \in \Omega$ 是凸集 $\Omega$ 的顶点当且仅当不存在实数 $0<\alpha<1$ 和 $X_1, X_2 \in \Omega$, $X_1 \neq X_2$ 满足

$$X = \alpha X_1 + (1-\alpha) X_2$$

## 多面体模型的“绿点”是该凸集的顶点

已知可行集中某点 $X \in \Omega = \left\{ X \in R^n \middle| AX \geq \vec{b} \right\}$

其中 $A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} \vec{b}_1 \\ \vec{b}_2 \end{pmatrix}$ $A_1 X = \vec{b}_1, A_2 X > \vec{b}_2$

如果 $X$ 不是顶点，则有 $X_1, X_2 \in \Omega$，$X_1 \neq X_2$，存在

$0 < \alpha < 1$ 使得 $X = \alpha X_1 + (1-\alpha) X_2$

$\Rightarrow 0 = A_1 X - \vec{b}_1 = \alpha \left( A_1 X_1 - \vec{b}_1 \right) + (1-\alpha)\left( A_1 X_2 - \vec{b}_1 \right)$

$\Rightarrow A_1 X_1 = \vec{b}_1, A_1 X_2 = \vec{b}_1 \Rightarrow X$ 不是“绿点”

如果 $X$ 不是“绿点”

$\Rightarrow$ 存在 $\hat{X} \neq X$ 且满足 $A_1 X = \vec{b}_1,\ A_1 \hat{X} = \vec{b}_1$

$\Rightarrow$ $\vec{d} = \hat{X} - X$ 满足 $A_1 \vec{d} = 0$

$\Rightarrow$ 任取 $\delta > 0$，令 $X^+(\delta) = X + \delta\vec{d},\ X^-(\delta) = X - \delta\vec{d}$

显然 $A_1 X^+(\delta) = \vec{b}_1,\ A_1 X^-(\delta) = \vec{b}_1$，又因为 $A_2 X > \vec{b}_2$

当 $\delta$ 充分小时，成立 $A_2 X^+(\delta) > \vec{b}_2,\ A_2 X^-(\delta) > \vec{b}_2$

此时 $X^+(\delta) \in \Omega,\ X^-(\delta) \in \Omega$

$\Rightarrow$ $X = \frac{1}{2}\left(X^+(\delta) + X^-(\delta)\right)$，所以 $X$ 不是顶点

# 要点：任意维“绿点”的等价表述

## 标准模型顶点的数学描述

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \forall 1 \le i \le m \quad \Rightarrow \quad \sum_{j=1}^{n} \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} x_j = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{j=1}^{n} P_j x_j = \vec{b} \qquad P_j = \left(a_{1j}, \cdots, a_{mj}\right)^T, \forall 1 \le j \le n$$

由于由等式方程约束条件产生的只能是等式，所以对任意的 $X \in \Omega$ 可进行如下划分（注意 $n > m$ ）

$$x_j > 0,\ \ j = k(1), \cdots, k(\hat{m});\quad x_j = 0,\ \ j = k(\hat{m}+1), \cdots, k(n)$$

结论：当且仅当 $\sum_{t=1}^{\hat{m}} P_{j(t)} x_{j(t)} = \vec{b}$ 的解唯一时 $X$ 是顶点

## 标准模型顶点的等价描述之一

如果把 $X \in \Omega = \left\{ X \in R^n \left| \sum_{j=1}^{n} P_j x_j = \vec{b}, X \geq 0 \right. \right\}$ 的非零分量称为正分量，

那么任何可行解是顶点的充分必要条件是：

其正分量对应的系数向量 $P_j$ 线性无关

即，如果 $X \in \Omega$ 划分为

$$x_j > 0,\ \ j = k(1), \cdots, k(\hat{m});\ \ \ x_j = 0,\ \ j = k(\hat{m}+1), \cdots, k(n)$$

其为顶点的充要条件是 $P_j, j = k(1), \cdots, k(\hat{m})$ 线性无关

$$5x_2 + x_3 = 15$$
$$6x_1 + 2x_2 + x_4 = 24 \qquad x_i \geq 0,\ i = 1,2,\cdots,5$$
$$x_1 + x_2 + x_5 = 5$$

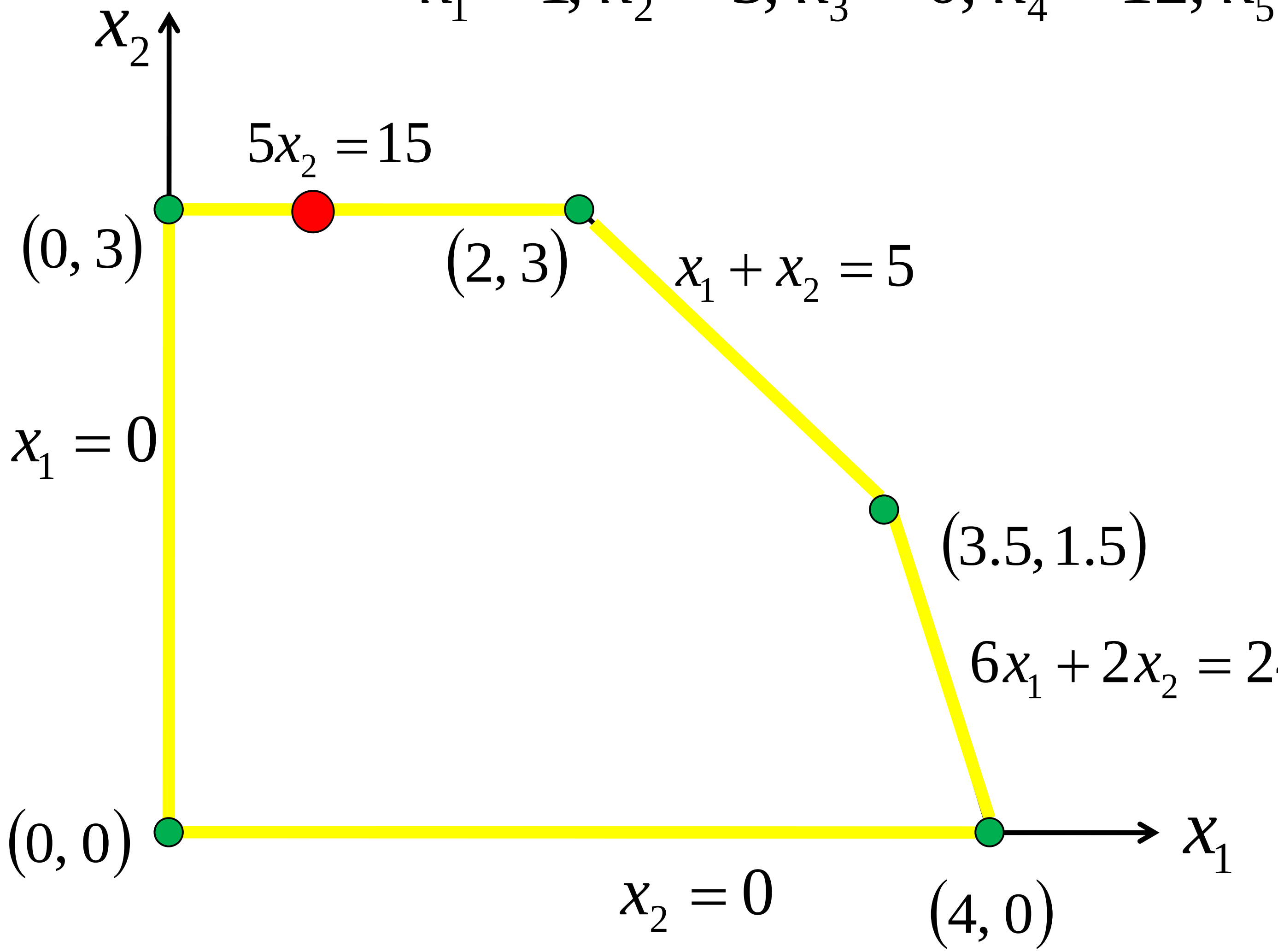
$$\Updownarrow$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}} x_1 + \boxed{\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}} x_2 + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} x_3 + \boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}} x_4 + \boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}} x_5 = \begin{pmatrix} 15 \\ 24 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$x_i \geq 0,\ i = 1,2,\cdots,5$$

$$x_1 = 1,\ x_2 = 3,\ x_3 = 0,\ x_4 = 12,\ x_5 = 1$$

$$x_1 = 1,\ x_2 = 3,\ x_3 = 0,\ x_4 = 12,\ x_5 = 1$$



# 标准模型顶点的等价描述之二

如果 $(P_1,\cdots,P_n)$ 是行满秩矩阵，那么 $X$ 是可行集

$$X \in \Omega = \left\{ X \in R^n \left| \sum_{j=1}^{n} P_j x_j = \vec{b}, X \geq 0 \right. \right\}$$

的顶点充要条件是：存在可逆方阵 $\left(P_{k(1)},\cdots,P_{k(m)}\right)$，可以把 $X$ 的分量划分为 $x_{k(j)}, j=1,\cdots,n$，使满足

$$\begin{pmatrix} x_{k(1)} \\ \vdots \\ x_{k(m)} \end{pmatrix} = \left(P_{k(1)},\cdots,P_{k(m)}\right)^{-1} \vec{b} \geq 0, \quad x_{k(j)} = 0, \forall m+1 \leq j \leq n$$

主要理由：$\sum_{j=1}^{m} P_{k(j)} x_{k(j)} = \vec{b} \quad \Rightarrow$ 正分量对应的系数向量线性无关

利用充要条件确定标准模型的全部顶点

例： $\max \quad z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$

$$\text{s.t.} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} x_3 + \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} x_4 = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$x_j \geq 0, \forall 1 \leq j \leq 4$$

该问题至多有下面 $C_4^2 = 6$ 个可能的方阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

对每个方阵 $B$，计算 $B^{-1}\vec{b}$，可得

$$\begin{pmatrix}1&2\\2&2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}7\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\5.5\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1&3\\2&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}7\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.4\\2.2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&4\\2&2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}7\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1/3\\11/6\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}2&3\\2&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}7\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.5\\2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2&4\\2&2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}7\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-0.5\\2\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}3&4\\1&2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}7\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

该线性规划只有3个顶点（满足 $B^{-1}\vec{b}\geq 0$）

# 要点：推广到高维的重要概念与性质

线性规划标准模型的基阵、基本解和基本可行解

称可逆矩阵 $\left(P_{k(1)},\cdots,P_{k(m)}\right)$ 为基阵

称其分量由下式决定的 $X$ 为基本解

$$\begin{pmatrix} x_{k(1)} \\ \vdots \\ x_{k(m)} \end{pmatrix} = \left(P_{k(1)},\cdots,P_{k(m)}\right)^{-1}\vec{b},\quad x_{k(j)} = 0, \forall m+1 \le j \le n$$

称可行的基本解为基本可行解

称基阵对应变量为基变量，其余变量为非基变量

线性规划标准模型的基本可行解就是可行集的顶点

线性规划标准模型的可行集的顶点个数总是有限的

## 线性规划标准模型的基本定理

一个标准模型的线性规划问题若有可行解，则至少存在一个基本可行解（顶点）

一个标准模型的线性规划问题若有有限的最优目标值，则一定存在一个基本可行解是最优解

利用上述概念与性质求解线性规划问题

例： $\max \quad z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$

$$\text{s.t.} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} x_3 + \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} x_4 = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$x_j \geq 0, \forall 1 \leq j \leq 4$$

该问题至多有下面 $C_4^2 = 6$ 个可能的基阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

由 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 2 & 1 & 2\end{pmatrix}$ 可确定对应的基本可行解

由 $z=x_1+x_2+x_3+x_4$ 可算出对应的目标函数值

$$\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}7\\ 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.4\\ 2.2\end{pmatrix} \Rightarrow X_1=(0.4,0,2.2,0)^T, \quad z_1=2.6$$

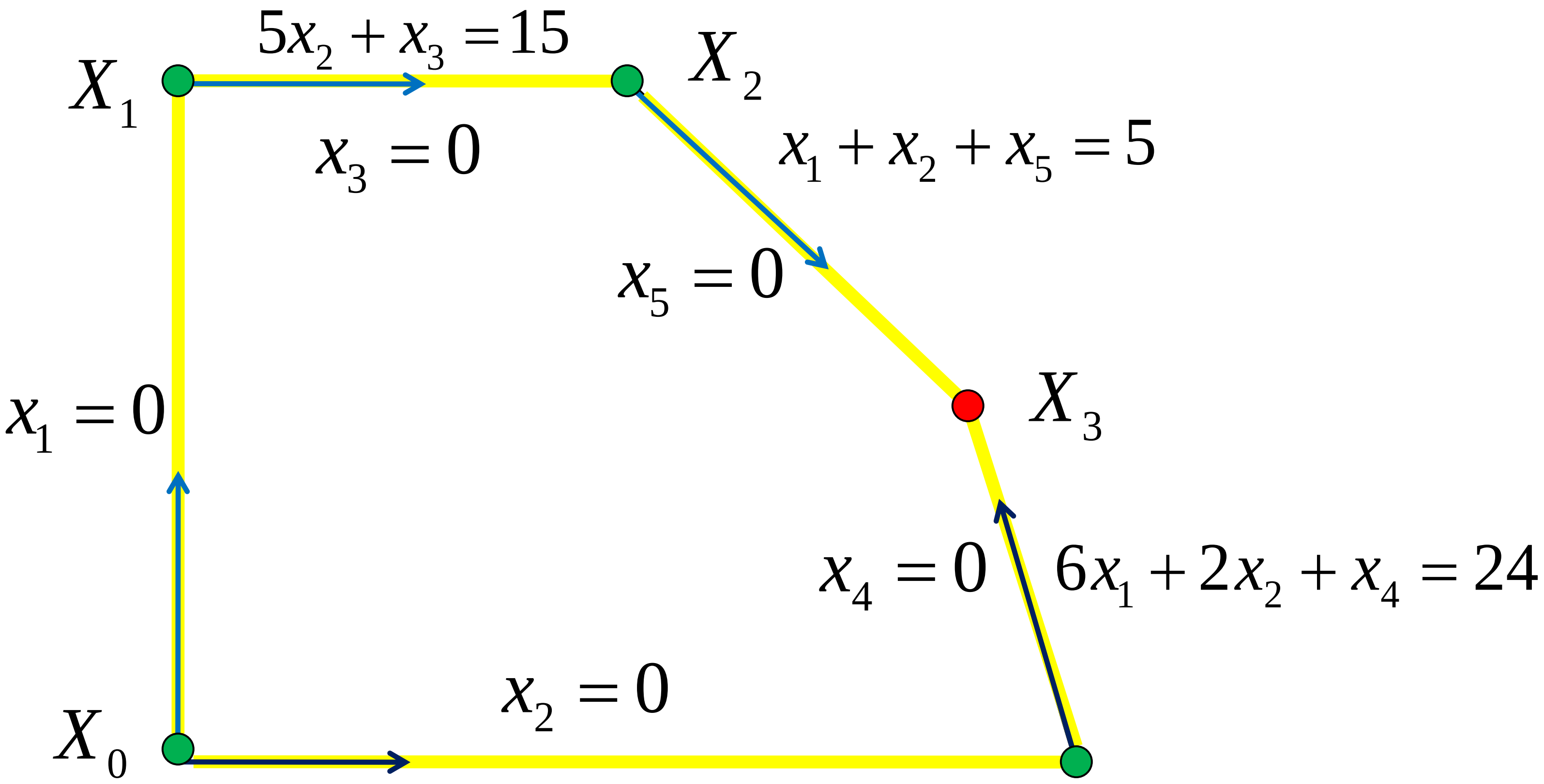
$$\begin{pmatrix}2 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}7\\ 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.5\\ 2\end{pmatrix} \Rightarrow X_2=(0,0.5,2,0)^T, \quad z_2=2.5$$

$$\begin{pmatrix}3 & 4\\ 1 & 2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}7\\ 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix} \Rightarrow X_3=(0,0,1,1)^T, \quad z_3=2$$

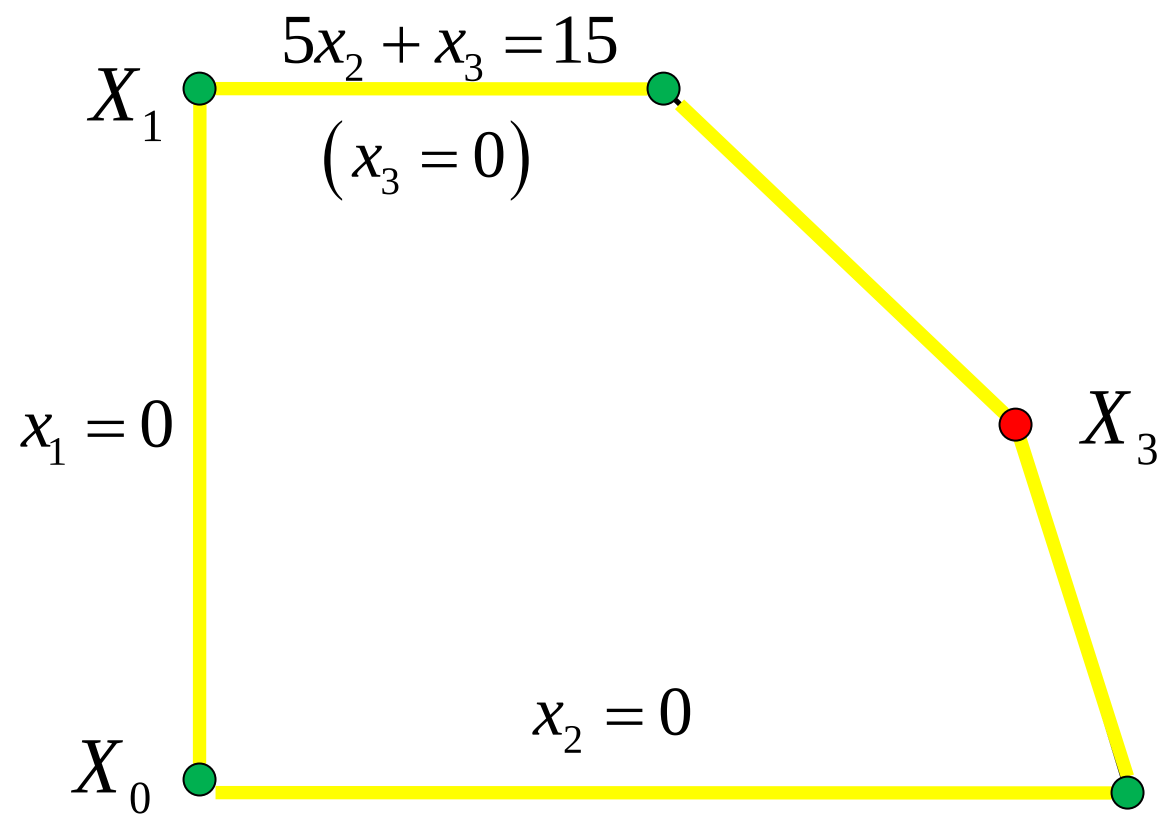
如果该问题存在有限的最优解，$X_1$ 就是最优解

# 要点：在顶点中搜索最优解的算法

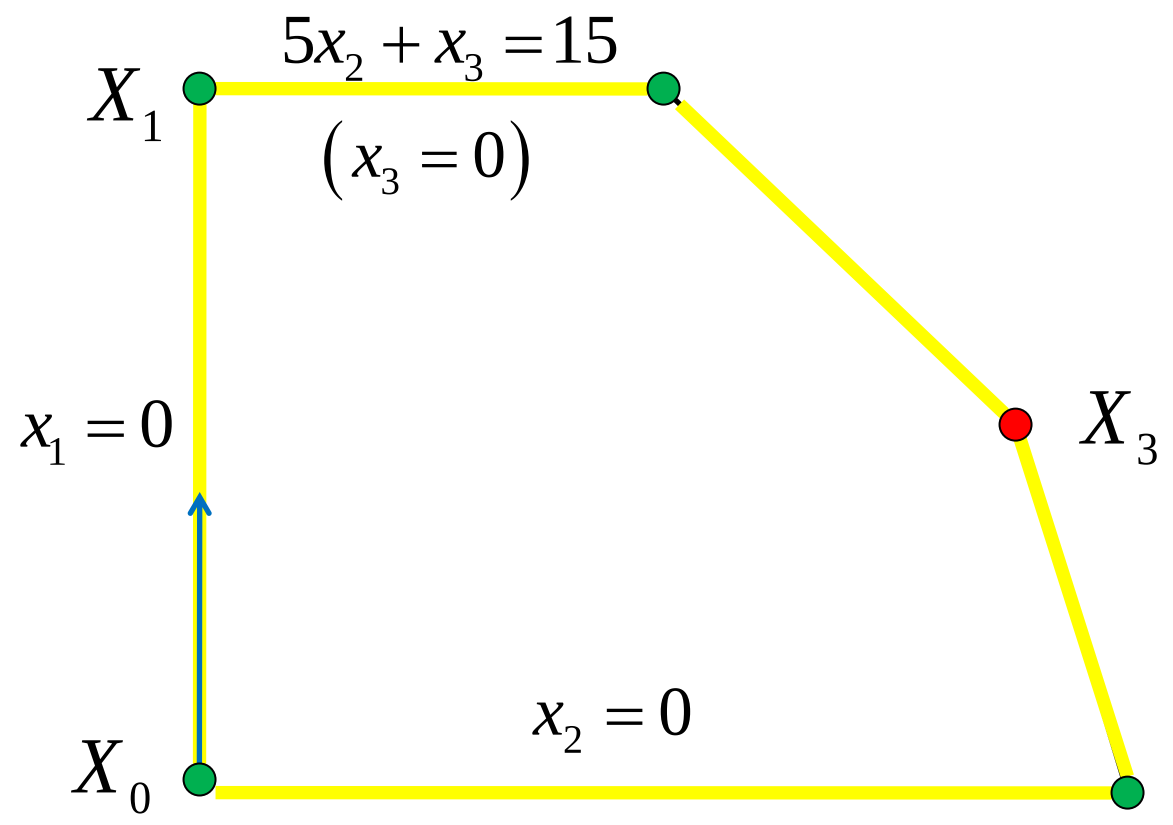
# 在顶点中搜索最优解



# 若顶点不是最优解，其“相邻”顶点中有更好顶点



# 若顶点不是最优解，其“相邻”顶点中有更好顶点




假设从顶点 $X_0$ 出发到达顶点 $X_1$，$x_2 = 0 \Rightarrow x_2 > 0$

非基变量 $\Rightarrow$ 基变量

$$X_0=(0,0,15,24,5)^{\mathrm{T}} \qquad X_1=(0,3,0,18,2)^{\mathrm{T}}$$

$\Downarrow$ 起作用约束 $\qquad\qquad$ $\Downarrow$ 起作用约束

$$\begin{array}{ll}
5x_2+x_3=15 & 5x_2+x_3=15 \\
6x_1+2x_2+x_4=24 & 6x_1+2x_2+x_4=24 \\
x_1+x_2+x_5=5 & x_1+x_2+x_5=5 \\
x_1=0 & x_1=0 \\
\boxed{x_2=0} & \boxed{x_3=0}
\end{array}$$

1. 相邻顶点间只有一个起作用约束不同（非基变量）
2. 相邻顶点搜索是变量的“进基”和“出基”互换

$$X_0 = (0, \boxed{0,\ 15,}\ 24,\ 5)^{\mathrm{T}}$$

$\Downarrow$ 起作用约束

$$5x_2 + x_3 = 15$$
$$6x_1 + 2x_2 + x_4 = 24$$
$$x_1 + x_2 + x_5 = 5$$
$$x_1 = 0$$
$$x_2 = 0$$

$$X_1 = (0, \boxed{3,\ 0,}\ 18,\ 2)^{\mathrm{T}}$$

$\Downarrow$ 起作用约束

$$5x_2 + x_3 = 15$$
$$6x_1 + 2x_2 + x_4 = 24$$
$$x_1 + x_2 + x_5 = 5$$
$$x_1 = 0$$
$$x_3 = 0$$

$x_2$ 非基变量，$x_3$ 基变量 $\Rightarrow$ $x_2$ 基变量，$x_3$ 非基变量

# 要点：单纯形算法

假定已知一个基本可行解　　　　问题4

$\Downarrow$

问题1　如何计算选定进基变量后的基本可行解

$\Downarrow$

问题2　　如何选择进基变量使目标函数改进

$\Downarrow$

问题3　　如何判断已经找到最优的基本可行解

# 要点：计算选定进基变量的基本可行解

例1 $\max\ 2x_1 + x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$

$$\text{s.t.}\quad \begin{pmatrix}0\\6\\1\end{pmatrix}x_1 + \begin{pmatrix}5\\2\\1\end{pmatrix}x_2 + \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}x_3 + \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}x_4 + \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}x_5 = \begin{pmatrix}15\\24\\5\end{pmatrix}$$

$$x_j \ge 0,\ j = 1,2,\cdots,5$$

其等式约束可写成 $\begin{pmatrix}x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\6\\1\end{pmatrix}x_1 + \begin{pmatrix}5\\2\\1\end{pmatrix}x_2 = \begin{pmatrix}15\\24\\5\end{pmatrix}$

由此可看出 $\hat{X} = (0,0,15,24,5)^T$ 是一个基本可行解

我们将基变量只出现在一个等式的等式约束称为对应的基本可行解的表示式（教材中称为典式），由表示式可看出基本可行解

假设我们想要让 $x_2$ 变成基变量，即选择 $x_2$ 为进基变量，根据基本可行解的表示式，必须让 $x_2$ 只出现在一个等式约束中

在 $$\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} x_2 = \begin{pmatrix} 15 \\ 24 \\ 5 \end{pmatrix}$$ 的各行除以 $x_2$ 的系数

可得 $$\begin{pmatrix} 0.2x_3 \\ 0.5x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} x_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \\ 5 \end{pmatrix}$$

在 $\begin{pmatrix} 0.2x_3 \\ 0.5x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} x_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \\ 5 \end{pmatrix}$ 中选定一行，用其它行减去该行，即可达到只有一行有 $x_2$ 的目的，例如：

$$\begin{pmatrix} 0.2x_3 - x_5 \\ 0.5x_4 - x_5 \\ x_5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} x_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}$$

整理后可得

$$\begin{pmatrix} 0.2x_3 \\ 0.5x_4 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} x_5 = \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}$$

问题：第一个方程的右边出现负数

为了避免前面的问题，在方程

$$\begin{pmatrix} 0.2x_3 \\ 0.5x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} x_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \\ 5 \end{pmatrix}$$

中，只能用其它行减去第一行，即右边常数最小的一行，由此可得

$$\begin{pmatrix} 0.2x_3 \\ 0.5x_4 - 0.2x_3 \\ x_5 - 0.2x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} x_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix}$$

整理后得到

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ 0.5x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 0.2 \\ -0.2 \\ -0.2 \end{pmatrix} x_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix}$$

再将第二行除以 0.5 得到基本可行解的表示式

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 0.2 \\ -0.4 \\ -0.2 \end{pmatrix} x_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 18 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} x_2 = \begin{pmatrix} 15 \\ 24 \\ 5 \end{pmatrix}$$

该基本可行解是 $\bar{X} = (0,3,0,18,2)^T$，$x_3$ 变成非基变量，
它是原来的基本可行解在保留 $x_2$ 的行的基变量

# 要点：保可行性的最小非负比值原理

由于 $\begin{pmatrix} 0.2x_3 \\ 0.5x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} x_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \\ 5 \end{pmatrix}$ 的 $\begin{pmatrix} 3 \\ 12 \\ 5 \end{pmatrix}$ 等于 $\begin{pmatrix} 15/5 \\ 24/2 \\ 5/1 \end{pmatrix}$

其中 $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} 15 \\ 24 \\ 5 \end{pmatrix}$ 分别是 $\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} x_2 = \begin{pmatrix} 15 \\ 24 \\ 5 \end{pmatrix}$

中进基变量 $x_2$ 的系数向量和右边常数向量，所以前面选择保留 $x_2$ 的行的方法可以总结为选择达到 $\min\left\{\frac{15}{5}, \frac{24}{2}, \frac{5}{1}\right\}$ 的行，选定这样的行，则在该行的基变量将变成非基变量，从而确定了出基变量

现在已知基本可行解 $\bar{X}=(0,3,0,18,2)^T$ 的表示式为

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 0.2 \\ -0.4 \\ -0.2 \end{pmatrix} x_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 18 \\ 2 \end{pmatrix}$$

如果我们又想让 $x_3$ 进基，由于

$$\min\left\{ \frac{3}{0.2}, \frac{18}{-0.4}, \frac{2}{-0.2} \right\} = \frac{18}{-0.4}$$

采用前面总结的规则应该保留第二行的 $x_3$，但是若将第二行的 $x_3$ 前的系数变成1，必须在第二行除以 $-0.4$，此时右边系数将变成负数，所以，只能选择进基变量系数非负的行保留进基变量

由于 $\begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 0.2 \\ -0.4 \\ -0.2 \end{pmatrix} x_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 18 \\ 2 \end{pmatrix}$，让 $x_3$ 进基只能

用第一行的 $x_3$ 消去其它行的 $x_3$，对于 $x_3$ 的系数不是正数的行，我们需要将第一行乘以一个合适的正数加到相应的行，这种操作不会使右边项的数变成为负数，因此在选择保留进基变量所在行的过程中不用考虑进基变量的系数不是正数的行

总结前面的讨论，可得到下面的一般规则：

假设某基本可行解的表示式是

$$X_B + \hat{P}_{j(m+1)} x_{j(m+1)} + \cdots + \hat{P}_{j(n)} x_{j(n)} = \hat{X}_B$$

其中

$$X_B = \begin{pmatrix} x_{j(1)} \\ \vdots \\ x_{j(m)} \end{pmatrix},\ \hat{P}_{j(t)} = \begin{pmatrix} \hat{p}_{1\,j(t)} \\ \vdots \\ \hat{p}_{m\,j(t)} \end{pmatrix} = B^{-1} P_{j(t)}\ ,\forall t,\quad \hat{X}_B = \begin{pmatrix} \hat{x}_{j(1)} \\ \vdots \\ \hat{x}_{j(m)} \end{pmatrix} = B^{-1}\vec{b}$$

如果要选 $x_{j(t)}$（$m+1 \le t \le n$）进基，则应该仅保留第 $l$ 行的 $x_{j(t)}$，即 $x_{j(l)}$ 出基，其中 $l$ 满足

$$\frac{\hat{x}_{j(l)}}{\hat{p}_{l\,j(t)}} = \min_{\hat{p}_{i\,j(t)}>0} \frac{\hat{x}_{j(i)}}{\hat{p}_{i\,j(t)}}$$

为获得$x_{j(t)}$进基、$x_{j(l)}$出基后的基本可行解表示式，需要对原来的表示式

$$X_B+\hat{P}_{j(m+1)}x_{j(m+1)}+\cdots+\hat{P}_{j(n)}x_{j(n)}=\hat{X}_B$$

进行行等价变换，使 $x_{j(t)}$ 前面的系数向量

$$\hat{P}_{j(t)}=\begin{pmatrix}\hat{p}_{1\,j(t)}\\ \vdots\\ \hat{p}_{l\,j(t)}\\ \vdots\\ \hat{p}_{m\,j(t)}\end{pmatrix}\quad \text{变成} \quad \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$$

具体做法：先在第 $l$ 行除以 $\hat{p}_{l\,j(t)}$ ，再将第$l$ 行分别乘以 $-\hat{p}_{i\,j(t)}$ 加到第 $i\,(i=1,2,\cdots,m,i\neq l)$ 行

# 要点：无非负比值的情况

总结前面的讨论，可得到下面的一般规则：

假设某基本可行解的表示式是

$$X_B + \hat{P}_{j(m+1)} x_{j(m+1)} + \cdots + \hat{P}_{j(n)} x_{j(n)} = \hat{X}_B$$

其中

$$X_B = \begin{pmatrix} x_{j(1)} \\ \vdots \\ x_{j(m)} \end{pmatrix}, \quad \hat{P}_{j(t)} = \begin{pmatrix} \hat{p}_{1j(t)} \\ \vdots \\ \hat{p}_{mj(t)} \end{pmatrix} = B^{-1} P_{j(t)}, \forall t, \quad \hat{X}_B = \begin{pmatrix} \hat{x}_{j(1)} \\ \vdots \\ \hat{x}_{j(m)} \end{pmatrix} = B^{-1}\vec{b}$$

如果要选$x_{j(t)}$（$m+1 \le t \le n$）进基，则应该仅保留第$l$行的 $x_{j(t)}$，即$x_{j(l)}$ 出基，其中 $l$ 满足

$$\frac{\hat{x}_{j(l)}}{\hat{p}_{lj(t)}} = \boxed{\min_{\hat{p}_{ij(t)}>0} \frac{\hat{x}_{j(i)}}{\hat{p}_{ij(t)}}}$$

$$\max \quad 2x_1 + x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} x_3 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_4 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} x_5 = \begin{pmatrix} 15 \\ 24 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$x_j \geq 0, \; j = 1, 2, \cdots, 5$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} x_3 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_4 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} x_5 = \begin{pmatrix} 15 \\ 24 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} x_2$$

$$x_j \geq 0, \; j = 1, 2, \cdots, 5$$

$$\max \quad 2x_1 + x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} x_3 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_4 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} x_5 = \begin{pmatrix} 15 \\ 24 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$x_j \geq 0, \; j = 1, 2, \cdots, 5$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} x_3 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_4 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} x_5 = \begin{pmatrix} 15 \\ 24 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} x_2$$

$$x_j \geq 0, \; j = 1, 2, \cdots, 5$$

特殊情况：$\hat{P}_{j(t)} \le 0 \Rightarrow$ 无法计算 $\frac{\hat{x}_{j(l)}}{\hat{p}_{l\,j(t)}} = \min\limits_{\hat{p}_{i\,j(t)}>0} \frac{\hat{x}_{j(i)}}{\hat{p}_{i\,j(t)}}$

任取正数$\delta$ ，定义$n$ 维向量 $X(\delta)$ 的分量如下：

$$X_B(\delta) = \hat{X}_B - \hat{P}_{j(t)}\delta, \quad x_{j(t)}(\delta) = \delta$$

$$x_{j(i)}(\delta) = 0, \quad \forall m+1 \le i \le n, \ i \ne t$$

由 $\hat{P}_{j(t)} \le 0$ 可知 $X(\delta) \ge 0$，满足不等式约束，此外

$$X_B(\delta) + \hat{P}_{j(m+1)} x_{j(m+1)}(\delta) + \cdots + \hat{P}_{j(n)} x_{j(n)}(\delta) = \hat{X}_B - \hat{P}_{j(t)}\delta + \hat{P}_{j(t)}\delta = \hat{X}_B$$

满足等式约束，因此$X(\delta)$是可行解，并且其分量

$x_{j(t)}(\delta)$ 在可行集里可以趋于无穷大

$\hat{P}_{j(t)} \le 0$ 时对应的变量在可行集可趋于无穷大

## 小结

假定已知基本可行解 $\hat{X}$ 的表示式为

$$X_B + \hat{P}_{j(m+1)} x_{j(m+1)} + \cdots + \hat{P}_{j(n)} x_{j(n)} = \hat{X}_B$$

任取 $m+1 \le t \le n$ ，则有以下结论：

1. 如果 $\hat{P}_{j(t)} \le 0$ ，变量 $x_{j(t)}$ 在可行集可趋于无穷大
2. 只要 $\hat{P}_{j(t)}$ 有一个分量大于 0，就可以通过行变换让 $x_{j(t)}$ 进基，形成一个新的基本可行解

# 要点：选择进基变量改进目标函数

对于例 $\max \quad 2x_1 + x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$

$$\text{s.t.} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} x_3 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_4 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} x_5 = \begin{pmatrix} 15 \\ 24 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$x_j \geq 0, \ j = 1, 2, \cdots, 5$$

可以利用**数据表**完成换基运算

$\hat{X} = (0, 0, 15, 24, 5)^T$ 的表示式

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} x_2 = \begin{pmatrix} 15 \\ 24 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$\hat{X}=(0,0,15,24,5)^T$ 的表示式

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}x_1+\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}x_2=\begin{pmatrix} 15 \\ 24 \\ 5 \end{pmatrix}$$

由下面的数据表完全确定

（基变量）（右边项）

| BV | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | RHS |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_3$ | 0 | 5 | 1 | 0 | 0 | 15 |
| $x_4$ | 6 | 2 | 0 | 1 | 0 | 24 |
| $x_5$ | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 5 |

让 $x_2$ 进基是对数据表进行如下运算：

$$\min\left\{\frac{15}{5},\frac{24}{2},\frac{5}{1}\right\} \Rightarrow$$

| BV | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | RHS | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_3$ | 0 | 5 | 1 | 0 | 0 | 15 | ① |
| $x_4$ | 6 | 2 | 0 | 1 | 0 | 24 | ② |
| $x_5$ | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 5 | ③ |

| | BV | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | RHS | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ① ÷ 5 ⇒ | $x_2$ | 0 | 1 | 0.2 | 0 | 0 | 3 | ④ |
| ④ × (-2) + ② ⇒ | $x_4$ | 6 | 0 | –0.4 | 1 | 0 | 18 | |
| ④ × (-1) + ③ ⇒ | $x_5$ | 1 | 0 | –0.2 | 0 | 1 | 2 | |

对于例 $\max \ 2x_1+x_2+0x_3+0x_4+0x_5$

$$\text{s.t.} \quad \begin{pmatrix}0\\6\\1\end{pmatrix}x_1+\begin{pmatrix}5\\2\\1\end{pmatrix}x_2+\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}x_3+\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}x_4+\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}x_5=\begin{pmatrix}15\\24\\5\end{pmatrix}$$

$$x_j \geq 0, \ j=1,2,\cdots,5$$

我们已经得到两个基本可行解，即

$$\hat{X}=(0,0,15,24,5)^T \qquad \bar{X}=(0,3,0,18,2)^T$$

记 $f(X)=2x_1+x_2+0x_3+0x_4+0x_5$

则 $f(\hat{X})=0, \ f(\bar{X})=3$

如何找到其目标函数值大于 $f(\bar{X})$ 的基本可行解？

已知 $\bar{X}=(0,3,0,18,2)^T$ 的表示式为

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}x_1+\begin{pmatrix} 0.2 \\ -0.4 \\ -0.2 \end{pmatrix}x_3=\begin{pmatrix} 3 \\ 18 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3-0.2x_3 \\ 18-6x_1+0.4x_3 \\ 2-x_1+0.2x_3 \end{pmatrix}$$

将上式确定的基变量对非基变量的函数关系代入目标函数 $f(X)=2x_1+x_2+0x_3+0x_4+0x_5$，可以得到

$$f(X)=3+2x_1-0.2x_3=f(\bar{X})+2x_1-0.2x_3$$

由于每个变量都不能小于0，由上式可知，当且仅当 $x_1$ 取正数（等价于让其进基）时，才能获得比 $f(\bar{X})$ 更大的目标函数值

如前所述，让 $x_1$ 进基是对数据表进行如下运算：

| BV | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | RHS | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_2$ | 0 | 1 | 0.2 | 0 | 0 | 3 | ① |
| $x_4$ | 6 | 0 | $-0.4$ | 1 | 0 | 18 | ② |
| $x_5$ | 1 | 0 | $-0.2$ | 0 | 1 | 2 | ③ |

$$\min\left\{\frac{3}{0},\frac{18}{6},\frac{2}{1}\right\} \Rightarrow$$

③ × (-6) + ② ⇒

| BV | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | RHS |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_2$ | 0 | 1 | 0.2 | 0 | 0 | 3 |
| $x_4$ | 0 | 0 | 0.8 | 1 | $-6$ | 6 |
| $x_1$ | 1 | 0 | $-0.2$ | 0 | 1 | 2 |

根据数据表

| BV | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | RHS |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_2$ | 0 | 1 | 0.2 | 0 | 0 | 3 |
| $x_4$ | 0 | 0 | 0.8 | 1 | $-6$ | 6 |
| $x_1$ | 1 | 0 | $-0.2$ | 0 | 1 | 2 |

马上可知新的基本可行解为 $\tilde{X}=(2,3,0,6,0)^T$

将上表确定的基变量对非基变量的函数关系代入目标函数 $f(X)=f(\bar{X})+2x_1-0.2x_3$ 又可得新目标函数式

$$f(X)=f(\bar{X})+4+0.2x_3-2x_5=f(\tilde{X})+0.2x_3-2x_5$$

其中 $f(\tilde{X})=f(\bar{X})+4=7$ 是 $\tilde{X}$ 对应的目标函数值

# 要点：单纯形表

用 $z$ 表示线性规划标准型的目标函数，它和 $X$ 之间的函数关系完全由以下线性方程组所确定

$$P_1x_1 + P_2x_2 + \cdots + P_nx_n = \vec{b}$$

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n = z$$

可将其写成下面的扩充的等式约束形式

$$\begin{pmatrix} P_1 \\ c_1 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} P_2 \\ c_2 \end{pmatrix} x_2 + \cdots + \begin{pmatrix} P_n \\ c_n \end{pmatrix} x_n = \begin{pmatrix} \vec{b} \\ z \end{pmatrix}$$

例如，对于例题，其扩充的等式约束为

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} x_3 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} x_4 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_5 = \begin{pmatrix} 15 \\ 24 \\ 5 \\ z \end{pmatrix}$$

对原来的等式约束进行行变换得到 $\bar{X}=(0,3,0,18,2)^T$ 的表示式

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}x_1+\begin{pmatrix} 0.2 \\ -0.4 \\ -0.2 \end{pmatrix}x_3=\begin{pmatrix} 3 \\ 18 \\ 2 \end{pmatrix}$$

相当于对扩充的等式约束的前三行进行变换获得

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}x_1+\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}x_2+\begin{pmatrix} 0.2 \\ -0.4 \\ -0.2 \\ 0 \end{pmatrix}x_3+\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}x_4+\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}x_5=\begin{pmatrix} 3 \\ 18 \\ 2 \\ z \end{pmatrix}$$

将 $\begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 0.2 \\ -0.4 \\ -0.2 \end{pmatrix} x_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 18 \\ 2 \end{pmatrix}$ 所确定的基变量对非基变量的函数关系代入 $z = 2x_1 + x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$ 以获得仅含非基变量的 $z = 3 + 2x_1 - 0.2x_3$ ，相当于利用下面前三行等式将第四行的基变量的系数变成 0

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} 0.2 \\ -0.4 \\ -0.2 \\ 0 \end{pmatrix} x_3 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} x_4 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_5 = \begin{pmatrix} 3 \\ 18 \\ 2 \\ z \end{pmatrix}$$

对于扩充约束

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} 0.2 \\ -0.4 \\ -0.2 \\ 0 \end{pmatrix} x_3 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} x_4 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_5 = \begin{pmatrix} 3 \\ 18 \\ 2 \\ z \end{pmatrix}$$

将第一行乘以-1加到第四行就可以得到

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} 0.2 \\ -0.4 \\ -0.2 \\ -0.2 \end{pmatrix} x_3 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} x_4 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_5 = \begin{pmatrix} 3 \\ 18 \\ 2 \\ z-3 \end{pmatrix}$$

我们将其称为基本可行解 $\bar{X}$ 的扩充表示式

从扩充表示式

$$\begin{pmatrix}0\\6\\1\\2\end{pmatrix}x_1+\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}x_2+\begin{pmatrix}0.2\\-0.4\\-0.2\\-0.2\end{pmatrix}x_3+\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}x_4+\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}x_5=\begin{pmatrix}3\\18\\2\\z-3\end{pmatrix}$$

可以获得下述信息：

1. $\bar{X}=(0,3,0,18,2)^T$ 是基本可行解
2. $\bar{X}$ 的目标函数值满足 $0=z-3$，即 $z=3$
3. 目标函数可以写成 $z=3+2x_1-0.2x_3$，因此让 $x_1$ 进基能够增加目标函数值

前面由 $\bar{X}=(0,3,0,18,2)^T$ 的表示式获得其扩充表示式的过程可利用下面扩充的数据表（单纯形表）完成

| BV | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | RHS |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_2$ | 0 | 1 | 0.2 | 0 | 0 | 3 |
| $x_4$ | 6 | 0 | −0.4 | 1 | 0 | 18 |
| $x_5$ | 1 | 0 | −0.2 | 0 | 1 | 2 |
| | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 | $z$ |

其中前面三行数据由 $\bar{X}$ 的表示式确定，最后一行是目标函数和变量间的（任意一种）约束式

对前面的单纯形表通过行变换将最后一行的**基变量前面的系数变成 0** 就得到下面的单纯形表

| BV | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | RHS |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_2$ | 0 | 1 | 0.2 | 0 | 0 | 3 |
| $x_4$ | 6 | 0 | $-0.4$ | 1 | 0 | 18 |
| $x_5$ | 1 | 0 | $-0.2$ | 0 | 1 | 2 |
| | 2 | 0 | $-0.2$ | 0 | 0 | $z-3$ |

该表能够完全确定基本可行解 $\bar{X}$ 的扩充表示式，我们将其称为 $\bar{X}$ 的单纯形表

利用 $\overline{X}$ 的单纯形表，很容易获得让 $x_1$ 进基后的基本可行解的单纯形表，即先由右边项和 $x_1$ 前面的系数的比值确定出基变量为 $x_5$

$$\min\left\{\frac{3}{0},\frac{18}{6},\frac{2}{1}\right\} \Rightarrow$$

| BV | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | RHS |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_2$ | 0 | 1 | 0.2 | 0 | 0 | 3 |
| $x_4$ | 6 | 0 | $-0.4$ | 1 | 0 | 18 |
| $x_5$ | 1 | 0 | $-0.2$ | 0 | 1 | 2 |
| | 2 | 0 | $-0.2$ | 0 | 0 | $z-3$ |

然后通过行变换将 $x_1$ 所在列除了第三行以外的系数变成 0 即可得到新的基本可行解对应的单纯形表

新的基本可行解对应的单纯形表为

| BV | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | RHS |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_2$ | 0 | 1 | 0.2 | 0 | 0 | 3 |
| $x_4$ | 0 | 0 | 0.8 | 1 | $-6$ | 6 |
| $x_1$ | 1 | 0 | $-0.2$ | 0 | 1 | 2 |
| | 0 | 0 | 0.2 | 0 | $-2$ | $z-7$ |

据此可知：

1. $\tilde{X}=(2,3,0,6,0)^T$ 是基本可行解
2. $\tilde{X}$ 的目标函数值满足 $0=z-7$，即 $z=7$
3. 让 $x_3$ 进基能够增加目标函数值

# 要点：最优性判据

由 $\tilde{X}$ 的单纯形表马上可确定出基变量

$$\min\left\{\frac{3}{0.2},\frac{6}{0.8}\right\} \Rightarrow$$

| BV | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | RHS |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_2$ | 0 | 1 | 0.2 | 0 | 0 | 3 |
| $x_4$ | 0 | 0 | 0.8 | 1 | $-6$ | 6 |
| $x_1$ | 1 | 0 | $-0.2$ | 0 | 1 | 2 |
| | 0 | 0 | 0.2 | 0 | $-2$ | $z-7$ |

再通过行变换将 $x_3$ 所在列除了第二行以外的系数变成 0 就可得到新的基本可行解对应的单纯形表

新的基本可行解对应的单纯形表为

| BV | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | RHS |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_2$ | 0 | 1 | 0 | $-0.25$ | 1.5 | 1.5 |
| $x_3$ | 0 | 0 | 1 | 1.25 | $-7.5$ | 7.5 |
| $x_1$ | 1 | 0 | 0 | 0.25 | $-0.5$ | 3.5 |
| | 0 | 0 | 0 | $-0.25$ | $-0.5$ | $z-8.5$ |

据此可知：

1. $\breve{X}=(3.5,1.5,7.5,0,0)^T$ 是基本可行解
2. $\breve{X}$ 的目标函数值满足 $0=z-8.5$ ，即 $z=8.5$
3. 任何非基变量进基都不能增加目标函数值

此时：

| BV | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | RHS |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_2$ | 0 | 1 | 0 | $-0.25$ | 1.5 | 1.5 |
| $x_3$ | 0 | 0 | 1 | 1.25 | $-7.5$ | 7.5 |
| $x_1$ | 1 | 0 | 0 | 0.25 | $-0.5$ | 3.5 |
| | 0 | 0 | 0 | $-0.25$ | $-0.5$ | $z-8.5$ |

$$\left.\begin{array}{l} z-8.5=-0.25x_4-0.5x_5 \\ x_4\geq 0,\quad x_5\geq 0 \end{array}\right. \Rightarrow\quad z-8.5\leq 0 \quad\Rightarrow\quad z\leq 8.5$$

$\breve{X}=(3.5,1.5,7.5,0,0)^T$ 是**最优解**，最优目标函数值8.5

$\breve{X} = (3.5, 1.5, 7.5, 0, 0)^T$ 对应的单纯形表为

| BV | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | RHS |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_2$ | 0 | 1 | 0 | $-0.25$ | 1.5 | 1.5 |
| $x_3$ | 0 | 0 | 1 | 1.25 | $-7.5$ | 7.5 |
| $x_1$ | 1 | 0 | 0 | 0.25 | $-0.5$ | 3.5 |
| | 0 | 0 | 0 | $-0.25$ | $-0.5$ | $z-8.5$ |

任何可行解的目标函数都要满足 $z = 8.5 - 0.25x_4 - 0.5x_5$

任何可行解的目标函数值都不会大于 $\breve{X}$ 的目标函数值 8.5，所以可断定 $\breve{X}$ 是该问题的最优解

假定已知一个基本可行解

$\Downarrow$

如何计算选定进基变量后的基本可行解

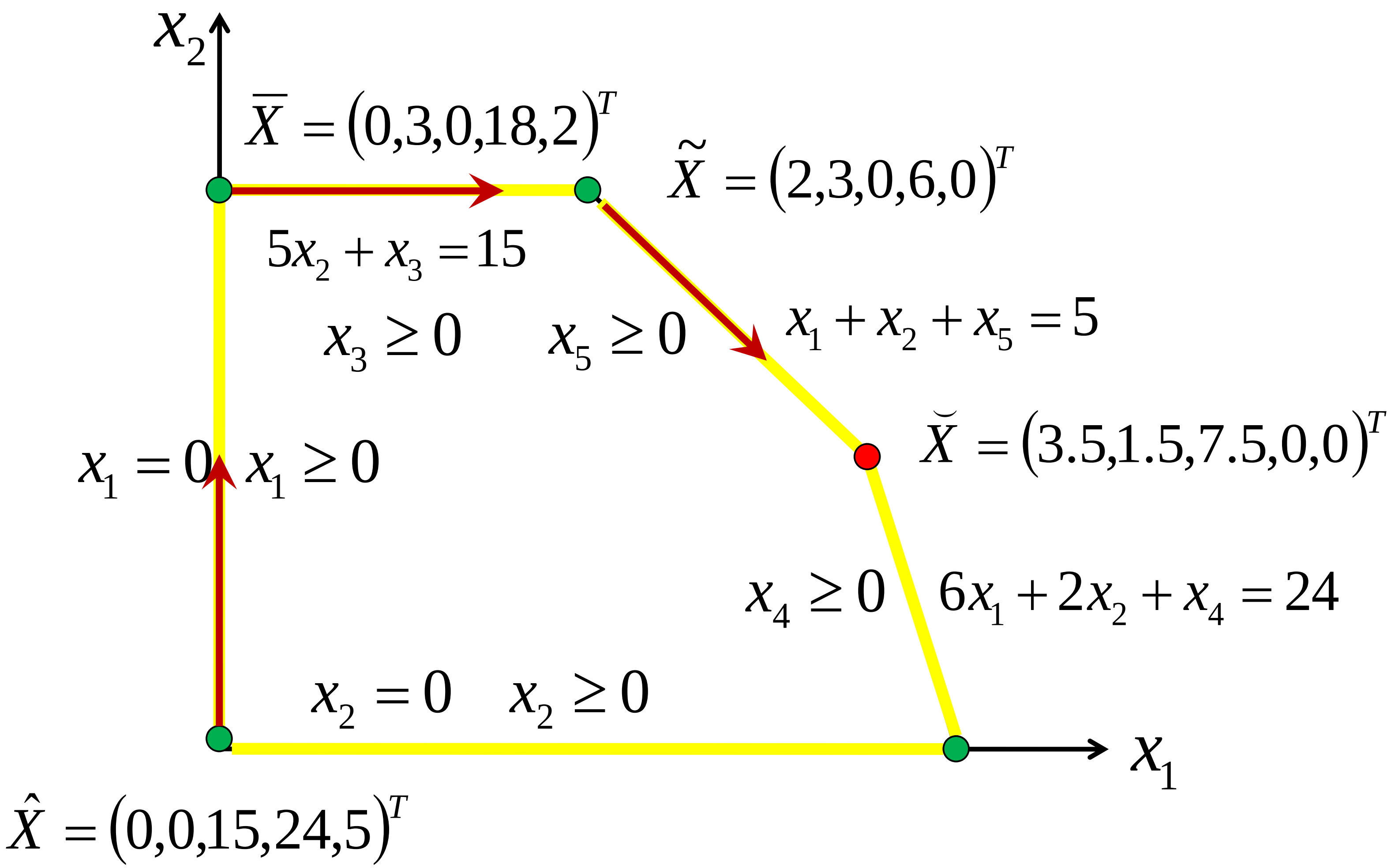
$\Downarrow$

如何选择进基变量使目标函数改进

$\Downarrow$

如何判断已经找到最优的基本可行解

# 顶点搜索轨迹



$x_2$
$\bar{X} = (0,3,0,18,2)^T$
$\tilde{X} = (2,3,0,6,0)^T$
$5x_2 + x_3 = 15$
$x_3 \ge 0$
$x_5 \ge 0$
$x_1 + x_2 + x_5 = 5$
$\breve{X} = (3.5,1.5,7.5,0,0)^T$
$x_1 = 0$
$x_1 \ge 0$
$x_4 \ge 0$
$6x_1 + 2x_2 + x_4 = 24$
$x_2 = 0$
$x_2 \ge 0$
$x_1$
$\hat{X} = (0,0,15,24,5)^T$

在第一次运算时，选择 $x_2$进基

$$\hat{X}=(0,0,15,24,5)^T \quad \Rightarrow \quad \bar{X}=(0,3,0,18,2)^T$$

根据初始表格，也可以选择 $x_1$ 进基

| BV | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | RHS |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_3$ | 0 | 5 | 1 | 0 | 0 | 15 |
| $x_4$ | 6 | 2 | 0 | 1 | 0 | 24 |
| $x_5$ | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 5 |
| | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 | $z$ |

$$2x_1+x_2+0x_3+0x_4+0x_5=z$$

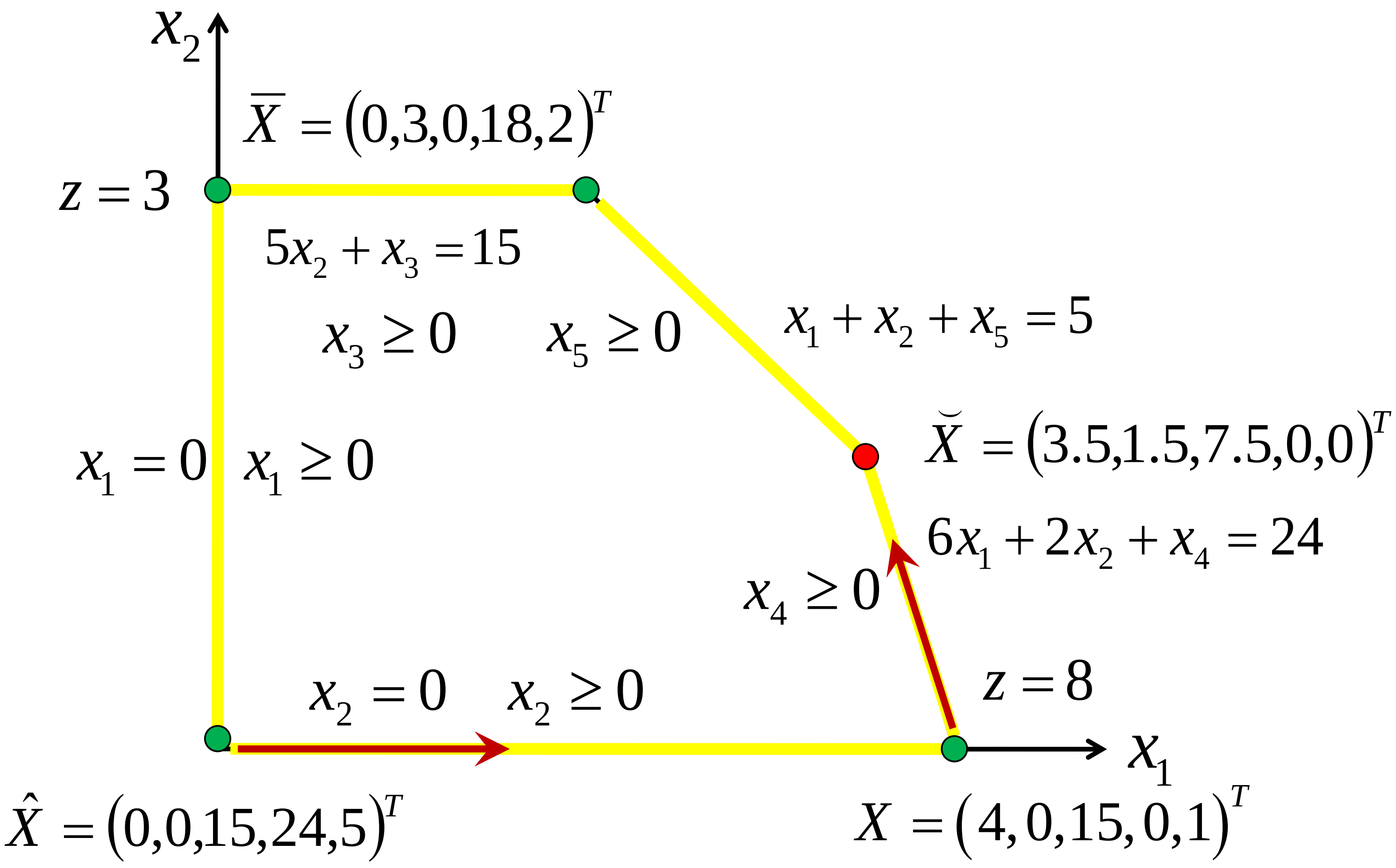
$$\min\left\{\frac{15}{0},\frac{24}{6},\frac{5}{1}\right\} \Rightarrow$$

| BV | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | RHS |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_3$ | 0 | 5 | 1 | 0 | 0 | 15 |
| $x_4$ | 6 | 2 | 0 | 1 | 0 | 24 |
| $x_5$ | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 5 |
| | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 | $z$ |

$$X=(4,0,15,0,1)^T$$

| BV | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | RHS |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_3$ | 0 | 5 | 1 | 0 | 0 | 15 |
| $x_1$ | 1 | $1/3$ | 0 | $1/6$ | 0 | 4 |
| $x_5$ | 0 | $2/3$ | 0 | $-1/6$ | 1 | 1 |
| | 0 | $1/3$ | 0 | $-1/3$ | 0 | $z-8$ |

# 顶点搜索轨迹


$x_2$
$\bar{X}=(0,3,0,18,2)^T$
$z=3$
$5x_2+x_3=15$
$x_3\ge 0$
$x_5\ge 0$
$x_1+x_2+x_5=5$
$\breve{X}=(3.5,1.5,7.5,0,0)^T$
$x_1=0$
$x_1\ge 0$
$6x_1+2x_2+x_4=24$
$x_4\ge 0$
$z=8$
$x_2=0$
$x_2\ge 0$
$x_1$
$\hat{X}=(0,0,15,24,5)^T$
$X=(4,0,15,0,1)^T$

# 要点：单纯形算法基本步骤

一般性线性规划标准型为对象总结其基本步骤

$$
\begin{aligned}
\max\quad & z \\
\text{s.t.}\quad & P_1x_1+P_2x_2+\cdots+P_nx_n=\vec{b} \\
& c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n=z \\
& x_j\ge 0,\ \ \forall 1\le j\le n
\end{aligned}
$$

已知一个可逆方阵 $B=\left(P_{j(1)},P_{j(2)},\cdots,P_{j(m)}\right)$ 满足

$$B^{-1}\vec{b}\ge 0$$

其中 $1\le j(i)\le n,\forall 1\le i\le m$ ，即 $B$ 是线性规划标准型的可行基阵

$$P_1 x_1 + \cdots + P_n x_n = \vec{b}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(P_{j(1)}, \cdots, P_{j(m)}\right)\begin{pmatrix} x_{j(1)} \\ \vdots \\ x_{j(m)} \end{pmatrix} + P_{j(m+1)} x_{j(m+1)} + \cdots + P_{j(n)} x_{j(n)} = \vec{b}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x_{j(1)} \\ \vdots \\ x_{j(m)} \end{pmatrix} + \left(B^{-1} P_{j(m+1)}\right) x_{j(m+1)} + \cdots + \left(B^{-1} P_{j(n)}\right) x_{j(n)} = B^{-1}\vec{b}$$

由此得到一个基本可行解的表示式

$$X_B=\begin{pmatrix} x_{j(1)} \\ \vdots \\ x_{j(m)} \end{pmatrix},\quad \hat{P}_j=B^{-1}P_j=\begin{pmatrix} \hat{p}_{1j} \\ \vdots \\ \hat{p}_{mj} \end{pmatrix},\ \forall 1\le j\le n+1,\quad \hat{P}_{n+1}=B^{-1}\vec{b}$$

对应表示式为 $X_B+\hat{P}_{j(m+1)}x_{j(m+1)}+\cdots+\hat{P}_{j(n)}x_{j(n)}=\hat{P}_{n+1}$

记 $C_B=\left(c_{j(1)},\cdots,c_{j(m)}\right)^T$，由上式可得

$$C_B^T X_B+C_B^T\hat{P}_{j(m+1)}x_{j(m+1)}+\cdots+C_B^T\hat{P}_{j(n)}x_{j(n)}=C_B^T\hat{P}_{n+1}$$

和目标函数 $C_B^T X_B+c_{j(m+1)}x_{j(m+1)}+\cdots+c_{j(n)}x_{j(n)}=z$ 相减得

$$z-C_B^T\hat{P}_{n+1}=\left(c_{j(m+1)}-C_B^T\hat{P}_{j(m+1)}\right)x_{j(m+1)}+\cdots+\left(c_{j(n)}-C_B^T\hat{P}_{j(n)}\right)x_{j(n)}$$

$$z-\hat{z}=\sigma_{j(m+1)}x_{j(m+1)}+\cdots+\sigma_{j(n)}x_{j(n)}$$

将前面获得的数据填入下述表格

| BV | $x_1$ | $\cdots$ | $x_k$ | $\cdots$ | $x_n$ | RHS |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_{j(1)}$ | $\hat{p}_{11}$ | $\cdots$ | $\hat{p}_{1k}$ | $\cdots$ | $\hat{p}_{1n}$ | $\hat{p}_{1n+1}$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\cdots$ | $\vdots$ | $\cdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |
| $x_{j(m)}$ | $\hat{p}_{m1}$ | $\cdots$ | $\hat{p}_{mk}$ | $\cdots$ | $\hat{p}_{mn}$ | $\hat{p}_{mn+1}$ |
| | $\sigma_1$ | $\cdots$ | $\sigma_k$ | $\cdots$ | $\sigma_n$ | $z-\hat{z}$ |

其中 $\left(\hat{P}_{j(1)},\cdots,\hat{P}_{j(m)}\right)=I_m$， $\hat{z}=C_B^T\hat{P}_{n+1}=C_B^TB^{-1}\vec{b}$

$$\sigma_j=c_j-C_B^T\hat{P}_j=c_j-C_B^TB^{-1}P_j,\quad \forall 1\le j\le n$$

称 $\sigma_1,\cdots,\sigma_n$ 为检验数，可看出基变量检验数等于0

由于目标函数可以表示为

$$z = \hat{z} + \sigma_{j(m+1)} x_{j(m+1)} + \sigma_{j(m+2)} x_{j(m+2)} + \cdots + \sigma_{j(n)} x_{j(n)}$$

令 $\sigma_{j(t)} = \max\left\{ \sigma_{j(m+1)}, \sigma_{j(m+2)}, \cdots, \sigma_{j(n)} \right\}$

如果 $\sigma_{j(t)} \leq 0$

由最上面的表达式可知 $\hat{z}$ 已经是最优目标函数值

如果 $\sigma_{j(t)} > 0$

由最上面表达式可知让 $x_{j(t)}$ 进基能增加目标函数值

对于单纯形表

| BV | $x_1$ | $\cdots$ | $x_k$ | $\cdots$ | $x_n$ | RHS |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| $x_{j(1)}$ | $\hat{p}_{11}$ | $\cdots$ | $\hat{p}_{1k}$ | $\cdots$ | $\hat{p}_{1n}$ | $\hat{p}_{1n+1}$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\cdots$ | $\vdots$ | $\cdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |
| $x_{j(m)}$ | $\hat{p}_{m1}$ | $\cdots$ | $\hat{p}_{mk}$ | $\cdots$ | $\hat{p}_{mn}$ | $\hat{p}_{mn+1}$ |
| | $\sigma_1$ | $\cdots$ | $\sigma_k$ | $\cdots$ | $\sigma_n$ | $z-\hat{z}$ |

如果 $\hat{p}_{ij(t)} \le 0,\ \forall 1 \le i \le m$ ，是前面讨论进基方法时提到的特殊情况，此时在可行集可让 $x_{j(t)}$ 趋于无穷大

由 $z = \hat{z} + \sigma_{j(m+1)}x_{j(m+1)} + \sigma_{j(m+2)}x_{j(m+2)} + \cdots + \sigma_{j(n)}x_{j(n)}$，如果 $\sigma_{j(t)} > 0$ 可断定该问题没有有限的最优目标值

排除掉前面的情况，可得 $1 \le l \le m$ 满足

$$\frac{\hat{p}_{l\,n+1}}{\hat{p}_{lj(t)}} = \min_{\hat{p}_{ij(t)}>0} \frac{\hat{p}_{i\,n+1}}{\hat{p}_{ij(t)}}$$

由此可知出基变量为 $x_{j(l)}$，因此要通过行变换将单纯型表中 $x_{j(t)}$ 列的数据完全变成 $x_{j(l)}$ 列的数据，如右边所示

$$\begin{array}{ccc}
x_{j(t)} & \cdots & x_{j(l)} \\
\hat{p}_{1j(t)} & \cdots & 0 \\
\vdots & \cdots & \vdots \\
\hat{p}_{l-1\,j(t)} & \cdots & 0 \\
\hat{p}_{lj(t)} & \cdots & 1 \\
\hat{p}_{l+1\,j(t)} & \cdots & 0 \\
\vdots & \cdots & \vdots \\
\hat{p}_{mj(t)} & \vdots & 0 \\
\sigma_{j(t)} & \cdots & 0
\end{array}$$

将出基变量 $x_{j(l)}$ 换成进基变量 $x_{j(t)}$，即重新令

$$j(l) = j(t)$$

可以得到下面的新数据表

| BV | $x_1$ | $\cdots$ | $x_k$ | $\cdots$ | $x_n$ | RHS |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_{j(1)}$ | $\hat{p}'_{11}$ | $\cdots$ | $\hat{p}'_{1k}$ | $\cdots$ | $\hat{p}'_{1n}$ | $\hat{p}'_{1n+1}$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\cdots$ | $\vdots$ | $\cdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |
| $x_{j(m)}$ | $\hat{p}'_{m1}$ | $\cdots$ | $\hat{p}'_{mk}$ | $\cdots$ | $\hat{p}'_{mn}$ | $\hat{p}'_{mn+1}$ |
| | $\sigma'_1$ | $\cdots$ | $\sigma'_k$ | $\cdots$ | $\sigma'_n$ | $z - \hat{z}'$ |

| BV | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | RHS |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_3$ | 0 | 5 | 1 | 0 | 0 | 15 |
| $x_4$ | 6 | 2 | 0 | 1 | 0 | 24 |
| $x_5$ | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 5 |
| | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 | $z$ |

说明它们的数据没有变化，因此还是基变量，因此可以以此为起点重复前面的过程

| BV | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | RHS |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_3$ | 0 | 5 | 1 | 0 | 0 | 15 |
| $x_1$ | 1 | $1/3$ | 0 | $1/6$ | 0 | 4 |
| $x_5$ | 0 | $2/3$ | 0 | $-1/6$ | 1 | 1 |
| | 0 | $1/3$ | 0 | $-1/3$ | 0 | $z-8$ |

# 要点：单纯形算法的收敛性

保证单纯形算法收敛的充分条件

如果在迭代过程中始终有 $\hat{P}_{n+1} = B^{-1}\vec{b} > 0$ ，即迭代过程中产生的每个基本可行解的基变量数值都严格大于 0（称其为非退化条件），此时一定有

$$\hat{p}'_{l\,n+1} = \hat{p}_{l\,n+1} / \hat{p}_{lj(t)} > 0,\ \ \hat{z}' = \hat{z} + \hat{p}'_{l\,n+1}\sigma_{j(t)} > \hat{z}$$

即每步迭代都能保证目标函数严格增加，由于基本可行解的数目是有限的，上述过程不会无限进行，因此一定在有限次迭代后出现所有检验数都不大于 0 的情况，从而得到最优的基本可行解

# 要点：退化情况

## 退化情况

$$\max \ 2x_1 + x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$$

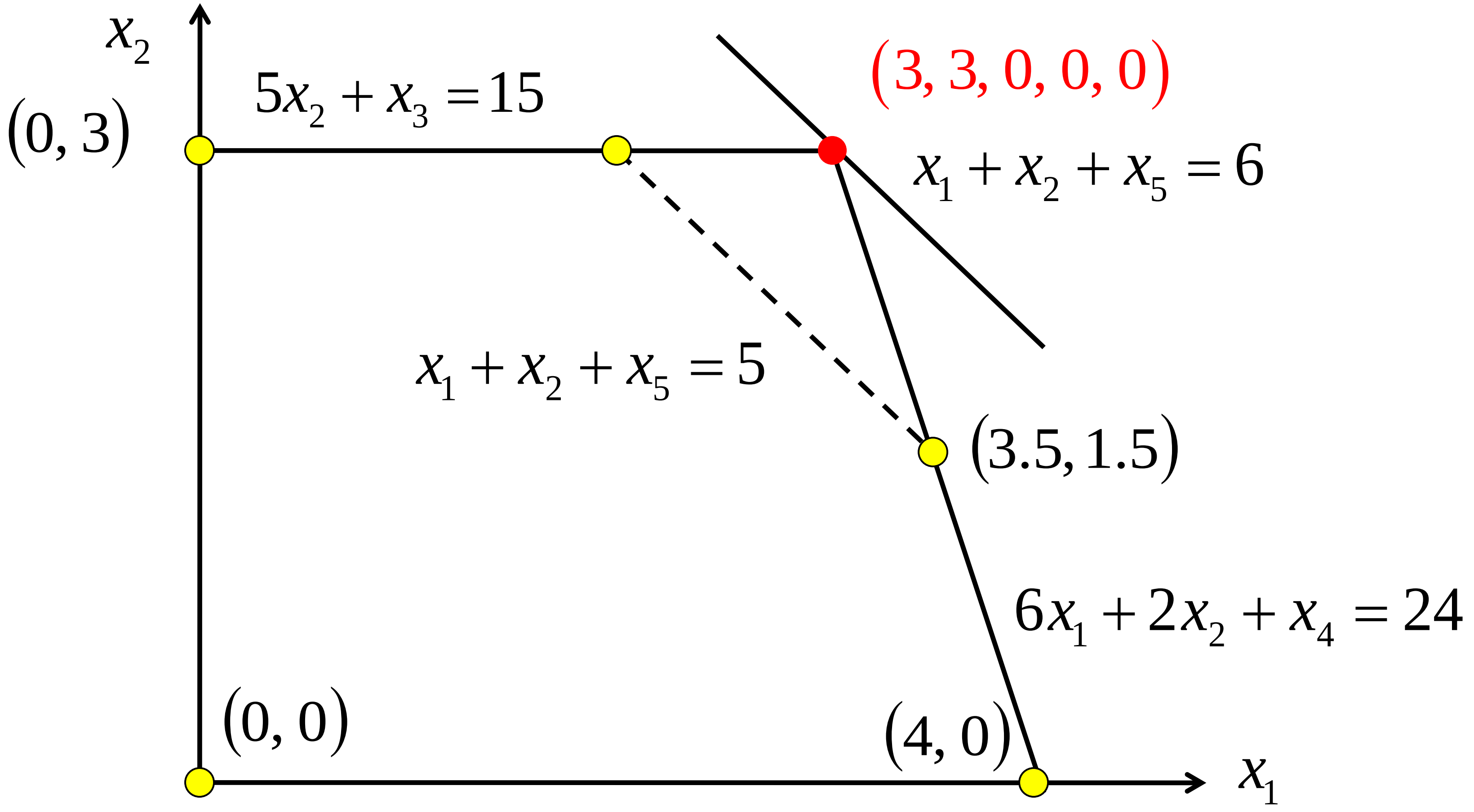
$$\text{s.t.} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} x_3 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_4 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} x_5 = \begin{pmatrix} 15 \\ 24 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$x_j \geq 0,\ j = 1, 2, \cdots, 5$$

则 $X = (3, 3, 0, 0, 0)^T$ 是该问题的可行解

则可令 $x_3, x_4$ 为非基变量，也可令 $x_3, x_5$ 以及 $x_4, x_5$ 为非基变量：

$$(P_1, P_2, P_3)^{-1}\vec{b} = (P_1, P_2, P_4)^{-1}\vec{b} = (P_1, P_2, P_5)^{-1}\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$


$x_2$
$(0, 3)$
$5x_2 + x_3 = 15$
$(3, 3, 0, 0, 0)$
$x_1 + x_2 + x_5 = 6$
$x_1 + x_2 + x_5 = 5$
$(3.5, 1.5)$
$6x_1 + 2x_2 + x_4 = 24$
$(0, 0)$
$(4, 0)$
$x_1$

可见，对于线性规划的标准模型，顶点和基矩阵的关系如下：

1、标准模型$\left(P_1,\cdots,P_n\right)$是行满秩矩阵不失一般性，给定一个可行基矩阵可以唯一确定一个顶点，反之则不一定；

2、若给定顶点有 $m$个非零分量（非退化顶点），只有一个可行基矩阵可确定该顶点，否则（称退化顶点），可能有多个可行的基矩阵确定同一个顶点

## 退化情况产生的问题

退化情况的本质是多个可行基阵对应于一个基本可行解。此时经过一次进出基迭代后得到的是同一个基本可行解，因此有可能出现迭代算法在一个基本可行解的几个基阵之间循环不止的情况

## 退化导致（最大检验数规则）不收敛的例子

Beale, E.M.L , 1955

$$
\begin{aligned}
\max\ & \frac{3}{4}x_4 - 20x_5 + \frac{1}{2}x_6 - 6x_7 \\
\text{s.t.}\ & x_1 + \frac{1}{4}x_4 - 8x_5 - x_6 + 9x_7 = 0 \\
& x_2 + \frac{1}{2}x_4 - 12x_5 - \frac{1}{2}x_6 + 3x_7 = 0 \\
& x_3 + x_6 = 1 \\
& x_i \ge 0,\ i = 1, 2, \cdots, 7
\end{aligned}
$$

初始基变量 $\{x_1, x_2, x_3\}$

| BV | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $x_7$ | RHS |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | 1 | 0 | 0 | 1/4 | –8 | –1 | 9 | 0 |
| $x_2$ | 0 | 1 | 0 | 1/2 | –12 | –1/2 | 3 | 0 |
| $x_3$ | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| | 0 | 0 | 0 | 3/4 | –20 | 1/2 | –6 | |

一次迭代后的基变量 $\{x_4, x_2, x_3\}$

| BV | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $x_7$ | RHS |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_4$ | 4 | 0 | 0 | 1 | –32 | –4 | 36 | 0 |
| $x_2$ | –2 | 1 | 0 | 0 | 4 | 3/2 | –15 | 0 |
| $x_3$ | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| | –3 | 0 | 0 | 0 | 4 | 7/2 | –33 | |

二次迭代后的基变量 $\{x_4, x_5, x_3\}$

| BV | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $x_7$ | RHS |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_4$ | –12 | 8 | 0 | 1 | 0 | 8 | 9 | 0 |
| $x_5$ | –1/2 | 1/4 | 0 | 0 | 1 | 3/8 | –84 | 0 |
| $x_3$ | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | –15/4 | 1 |
| | –1 | –1 | 0 | 0 | 0 | 2 | –18 | |

三次迭代后的基变量 $\{x_6, x_5, x_3\}$

| BV | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $x_7$ | RHS |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_6$ | –2/3 | 1 | 0 | 1/8 | 0 | 1 | –21/2 | 0 |
| $x_5$ | 1/16 | –1/8 | 0 | –3/64 | 1 | 0 | 3/16 | 0 |
| $x_3$ | 3/2 | –1 | 1 | –1/8 | 0 | 0 | –15/4 | 1 |
| | 2 | –3 | 0 | –1/4 | 0 | 0 | 21/2 | |

四次迭代后的基变量 $\{x_6, x_7, x_3\}$

| BV | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $x_7$ | RHS |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_6$ | 2 | –6 | 0 | –5/2 | 56 | 1 | 0 | 0 |
| $x_7$ | 1/3 | –2/3 | 0 | –1/4 | 16/3 | 0 | 1 | 0 |
| $x_3$ | –2 | 6 | 1 | 5/2 | –56 | 0 | 0 | 1 |
| | 1 | –1 | 0 | 1/2 | –16 | 0 | 0 | |

五次迭代后的基变量 $\{x_1, x_7, x_3\}$

| BV | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $x_7$ | RHS |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | 1 | –3 | 0 | –5/4 | 28 | 1/2 | 0 | 0 |
| $x_7$ | 0 | 1/3 | 0 | 1/6 | –4 | –1/6 | 1 | 0 |
| $x_3$ | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| | 0 | 2 | 0 | 7/4 | –44 | –1/2 | 0 | |

六次迭代后的基变量 $\{x_6, x_7, x_3\}$

| BV | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $x_7$ | RHS |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | 1 | 0 | 0 | 1/4 | –8 | –1 | 9 | 0 |
| $x_2$ | 0 | 1 | 0 | 1/2 | –12 | –1/2 | 3 | 0 |
| $x_3$ | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| | 0 | 0 | 0 | 3/4 | –20 | 1/2 | –6 | |

整个迭代过程中，虽然可行基矩阵不断改变，但对应的基本可行解始终是 $X=(0,0,1,0,0,0,0)^T$，没有变化，目标函数值也一直没有变化，出现循环

## 退化情况产生的问题

退化情况的本质是多个可行基阵对应于一个基本可行解。此时经过一次进出基迭代后得到的是同一个基本可行解，因此有可能出现迭代算法在一个基本可行解的几个基阵之间循环不止的情况

只要设法避免回到已经搜索过的基阵，就可以保证算法有限步内停止

Bland规则：始终选择下标最小的可进（出）基

Robert G. Bland, Mathematics of Operations Research Vol.2, No.2, May 1977.

结论：

从任意基本可行解出发，采用 Bland 规则进行单纯形法迭代，在有限次迭代后停止于以下两种情况之一：

1、得到一个最优的基本可行解；

2、确定目标函数没有有限的最优值

# 要点：初始基本可行解的确定方法

如何确定初始基本可行解

基本方法是添加人工变量，通过在迭代过程中把这些变量换出可行基获得原问题可行基

原问题的约束 $$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i,\ i=1,2,\cdots,m$$

$$x_j \geq 0,\ j=1,2,\cdots,n$$

添加人工变量 $$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + x_{n+i} = b_i,\ i=1,2,\cdots,m$$

$$x_j \geq 0,\ j=1,2,\cdots,n+m$$

具体算法：大M法、两阶段法

## 把人工变量换出可行基的办法

1、大M法

把目标函数变为 $\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \sum_{i=1}^{m} (-M) x_{n+i}$

其中M是个很大的正数

2、两阶段法

先把目标函数设为 $\max \sum_{i=1}^{m} (-1) x_{n+i}$

迭代到该目标函数等于0时，再用原目标函数

假定已知一个基本可行解 √ 问题4

$\Downarrow$

√ 问题1 如何计算选定进基变量后的基本可行解

$\Downarrow$

√ 问题2 如何选择进基变量使目标函数改进

$\Downarrow$

√ 问题3 如何判断已经找到最优的基本可行解

# 要点：基于逆矩阵迭代的单纯形法

| BV | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | RHS |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_3$ | 0 | 5 | 1 | 0 | 0 | 15 |
| $x_4$ | 6 | 2 | 0 | 1 | 0 | 24 |
| $x_5$ | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 5 |
| | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 | $z$ |

初始基阵：

$$B=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

是否需要计算和存储表中所有数据?

由初始表，首先需要计算非基变量的检验数：

$$\sigma_k = c_k - C_B^T \hat{P}_k = c_k - C_B^T B^{-1} P_k,\ k=1,2$$

然后找最大的$\sigma_k$进基，在计算最小非负比值时需要：

$$\hat{P}_1 = B^{-1} P_1 \qquad \hat{P}_6 = B^{-1}\vec{b}$$

单纯形法每步迭代的实质

前提：已知可行基矩阵 $B=\left(P_{j(1)},P_{j(2)},\cdots,P_{j(m)}\right)$

1、求出非基变量检验数

$$\sigma_{j(k)}=c_{j(k)}-C_B^T B^{-1}P_{j(k)},\quad m+1\le k\le n$$

2、确定进基变量 $\sigma_{j(t)}=\max\left\{\sigma_{j(m+1)},\sigma_{j(m+2)},\cdots,\sigma_{j(n)}\right\}$

3、确定出基变量

$$\hat{P}_{j(t)}=B^{-1}P_{j(t)},\quad \hat{P}_{n+1}=B^{-1}\vec{b}\quad\Rightarrow\quad \frac{\hat{p}_{l\,n+1}}{\hat{p}_{lj(t)}}=\min_{\hat{p}_{ij(t)}>0}\frac{\hat{p}_{i\,n+1}}{\hat{p}_{ij(t)}}$$

结果：得到新的可行基矩阵

$$\tilde{B}=\left(P_{j(1)},\cdots,P_{j(l-1)},P_{j(t)},P_{j(l+1)},\cdots,P_{j(m)}\right)$$

采用单纯形表迭代的优缺点

优点：不用计算 $B^{-1}$

缺点：每次迭代需要计算

$\sigma_{j(k)},\ m+1\le k\le n,\ \hat{P}_{j(t)}=B^{-1}P_{j(t)},\ \hat{P}_{n+1}=B^{-1}\vec{b}$

计算所有的 $\hat{p}_j,\ 1\le j\le n$ 只是为下次迭代做准备，某些数据可能始终用不上

特别不利的情况：$n$ 远远大于 $m$ 的优化问题

## 基于逆矩阵迭代实现单纯形算法

前提：已知 $B^{-1}=\left(P_{j(1)},P_{j(2)},\cdots,P_{j(m)}\right)^{-1}$

1、计算 $\hat{Y}_B^T=C_B^T B^{-1}$（对偶变量）

2、计算检验数

$$\sigma_{j(k)}=c_{j(k)}-C_B^T B^{-1}P_{j(k)}=c_{j(k)}-\hat{Y}_B^T P_{j(k)},\ \forall k$$

3、确定进基变量

$$\sigma_{j(t)}=\max\left\{\sigma_{j(m+1)},\sigma_{j(m+2)},\cdots,\sigma_{j(n)}\right\}$$

4、确定出基变量

$$\hat{P}_{j(t)}=B^{-1}P_{j(t)},\ \ \hat{P}_{n+1}=B^{-1}\vec{b}\quad\Rightarrow\quad\frac{\hat{p}_{l\,n+1}}{\hat{p}_{lj(t)}}=\min_{\hat{p}_{ij(t)}>0}\frac{\hat{p}_{i\,n+1}}{\hat{p}_{ij(t)}}$$

5、计算 $\tilde{B}^{-1}=\left(P_{j(1)},\cdots,P_{j(l-1)},P_{j(t)},P_{j(l+1)},\cdots,P_{j(m)}\right)^{-1}$

将当前的可行基矩阵

$$B=\left(P_{j(1)},\cdots,P_{j(l-1)},P_{j(l)},P_{j(l+1)},\cdots,P_{j(m)}\right)$$

中的 $P_{j(l)}$ 换成 $P_{j(t)}$ 即可得到新的可行基矩阵

$$\tilde{B}=\left(P_{j(1)},\cdots,P_{j(l-1)},P_{j(t)},P_{j(l+1)},\cdots,P_{j(m)}\right)$$

一旦求出 $\tilde{B}^{-1}$，马上可以进行新一轮迭代

要解决的核心问题：

如何利用 $B^{-1}$ 用很少的计算量确定 $\tilde{B}^{-1}$ ？

利用 $B^{-1}$ 计算 $\widetilde{B}^{-1}$ 的方法

记 $\vec{e}_i = (0,\cdots,0,1,0,\cdots,0)^T$ 其中 1 在第 $i$ 个位置

因为 $B^{-1}\left(P_{j(1)}, P_{j(2)}, \cdots, P_{j(m)}\right) = \left(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_m\right)$

$$B^{-1}P_{j(t)} = \hat{P}_{j(t)}$$

所以 $B^{-1}\tilde{B} = B^{-1}\left(P_{j(1)}, \cdots, P_{j(l-1)}, P_{j(t)}, P_{j(l+1)}, \cdots, P_{j(m)}\right)$

$$= \left(\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_{l-1}, \hat{P}_{j(t)}, \vec{e}_{l+1}, \cdots, \vec{e}_m\right)$$

若能确定 $\Gamma = \left(\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_{l-1}, \hat{P}_{j(t)}, \vec{e}_{l+1}, \cdots, \vec{e}_m\right)^{-1}$

就能得到 $\widetilde{B}^{-1} = \Gamma B^{-1}$

因为 $\Gamma\left(\vec{e}_1,\cdots,\vec{e}_{l-1},\hat{P}_{j(t)},\vec{e}_{l+1},\cdots,\vec{e}_m\right)=\left(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\cdots,\vec{e}_m\right)$

所以 $\Gamma\vec{e}_i=\vec{e}_i,\ \forall 1\le i\le m, i\ne l,\quad \Gamma\hat{P}_{j(t)}=\vec{e}_l$

记 $\Gamma=\left(\vec{\gamma}_1,\vec{\gamma}_2,\cdots,\vec{\gamma}_m\right)$

可得 $\vec{\gamma}_i=\vec{e}_i,\ \forall 1\le i\le m, i\ne l$

$$\sum_{\substack{i=1\\ i\ne l}}^{m}\hat{p}_{it}\vec{e}_i+\hat{p}_{lt}\vec{\gamma}_l=\vec{e}_l$$

于是 $\vec{\gamma}_l=-\dfrac{1}{\hat{p}_{lj(t)}}\left(\sum_{\substack{i=1\\ i\ne k}}^{m}\hat{p}_{ij(t)}\vec{e}_i-\vec{e}_l\right)=-\dfrac{1}{\hat{p}_{lj(t)}}\boxed{\begin{pmatrix}\hat{p}_{1j(t)}\\ \vdots\\ \hat{p}_{l-1j(t)}\\ -1\\ \hat{p}_{l+1j(t)}\\ \vdots\\ \hat{p}_{mj(t)}\end{pmatrix}}$

从而

$$\widetilde{B}^{-1}=\left(\vec{e}_1,\cdots,\vec{e}_{l-1},\vec{\gamma}_l,\vec{e}_{l+1},\cdots,\vec{e}_m\right)B^{-1}$$

# 基于逆矩阵迭代实现单纯形算法的计算过程

$$B^{-1}$$

$$\Downarrow$$

$$\hat{Y}_B^T = C_B^T B^{-1},\ \sigma_k = c_k - \hat{Y}_B^T P_k, \forall k$$

$$\Downarrow$$

$$\sigma_{j(t)} = \max\left\{\sigma_{j(m+1)}, \sigma_{j(m+2)}, \cdots, \sigma_{j(n)}\right\}$$

$$\Downarrow$$

$$\hat{P}_{n+1} = B^{-1}\vec{b},\ \hat{P}_{j(t)} = B^{-1}P_{j(t)},\quad \frac{\hat{p}_{l\,n+1}}{\hat{p}_{lj(t)}} = \min_{\hat{p}_{ij(t)}>0} \frac{\hat{p}_{i\,n+1}}{\hat{p}_{ij(t)}},\ \vec{\gamma}_l = -\frac{1}{\hat{p}_{lj(t)}}\begin{pmatrix} \hat{p}_{1j(t)} \\ \vdots \\ \hat{p}_{l-1\,j(t)} \\ -1 \\ \hat{p}_{l+1\,j(t)} \\ \vdots \\ \hat{p}_{mj(t)} \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\widetilde{B}^{-1} = \left(\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_{l-1}, \vec{\gamma}_l, \vec{e}_{l+1}, \cdots, \vec{e}_m\right)B^{-1}$$