久期和凸性

你借给同学 100 元，
同学一年后还你 50 元，
两年后再还你 50 元，
请问你多久收回了你的 100 元？

麦考林久期 （Macaulay duration）

以折现现金流为权重的现金回流的平均时间

麦考林久期（Macaulay duration）

3 年期债券，10% 票息，YTM = 8%

	A	B	C	D
1	yield	8%		
2				
3		CF	PV	w
4	1	10	9.26	0.0881
5	2	10	8.57	0.0815
6	3	110	87.32	0.8304
7		Total	105.15	1.0000
8				
9			MacD =	2.74

债券利率风险

A 买了一个 10 年到期的零息债券
B 买了一个 10 年到期的票面 10% 的债券

如果市场利率上涨，谁受的影响较大？

债券利率风险

$$P=\sum_{i=1}^{N}\frac{F\times CR}{(1+y)^{i}}+\frac{F}{(1+y)^{N}}$$

$$\frac{dP}{dy}=-\left[\sum_{i=1}^{N}\frac{i}{1+y}\frac{F\times CR}{(1+y)^{i}}+\frac{N}{1+y}\frac{F}{(1+y)^{N}}\right]$$

$$\frac{dP/P}{dy}=-\left[\sum_{i=1}^{N}\frac{i}{1+y}\left(\frac{F\times CR}{(1+y)^{i}}\Big/P\right)+\frac{N}{1+y}\left(\frac{F}{(1+y)^{N}}\Big/P\right)\right]$$

$$\frac{dP/P}{dy}=-\left[\sum_{i=1}^{N}\frac{i}{1+y}(w_i)+\frac{N}{1+y}(w)\right]$$

$$\frac{dP/P}{dy}=-\frac{MacD}{1+y}=-MD$$

$$\frac{d}{dy}\frac{1}{(1+y)^{a}}=-\frac{a}{1+y}\frac{1}{(1+y)^{a}}$$

修正久期（Modified Duration）

$MD = MacD / (1+y/m)$

3 年期债券，10% 票息，YTM = 8%

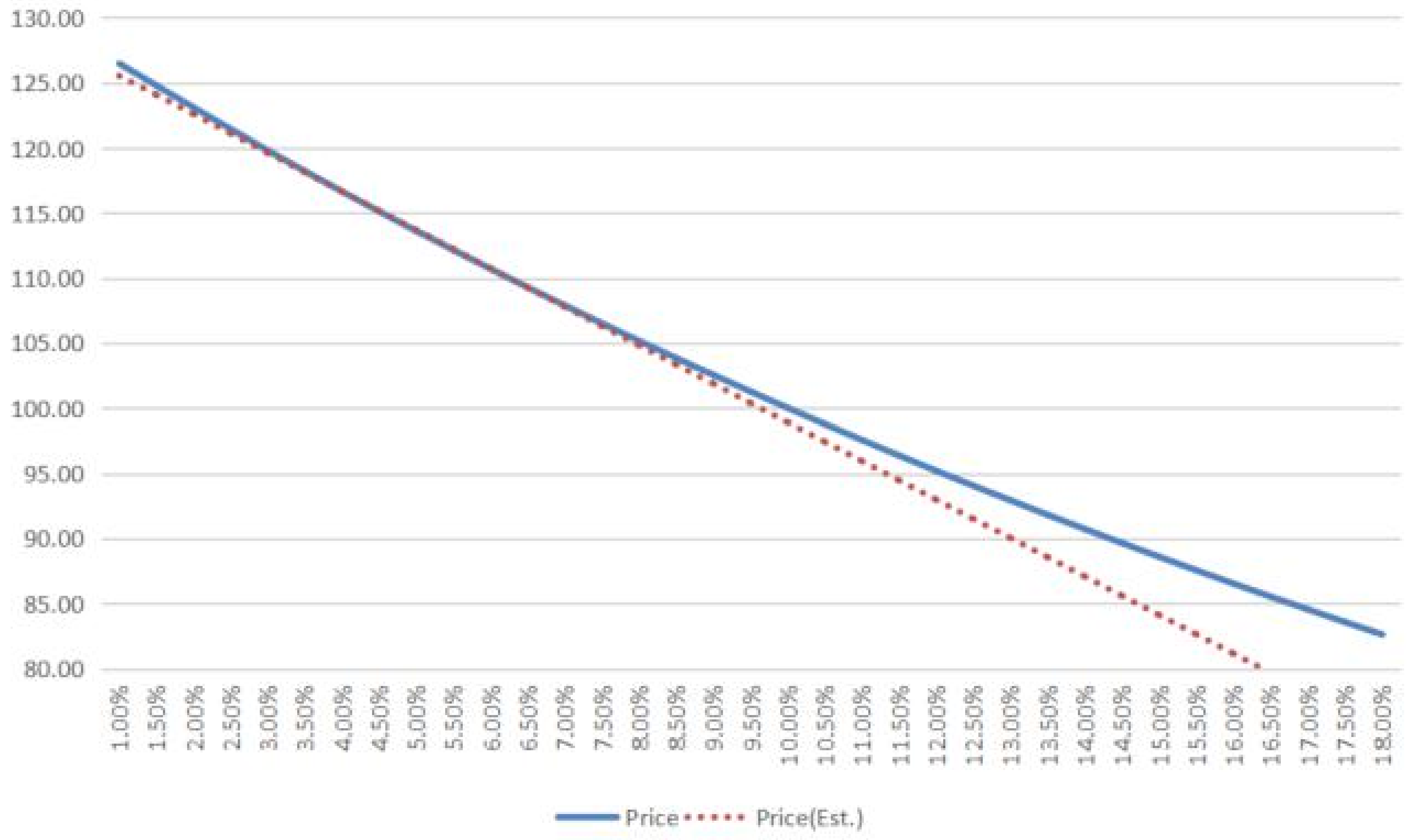
$MacD = 2.74$

$MD = 2.74 /(1+8\%) = 2.54$

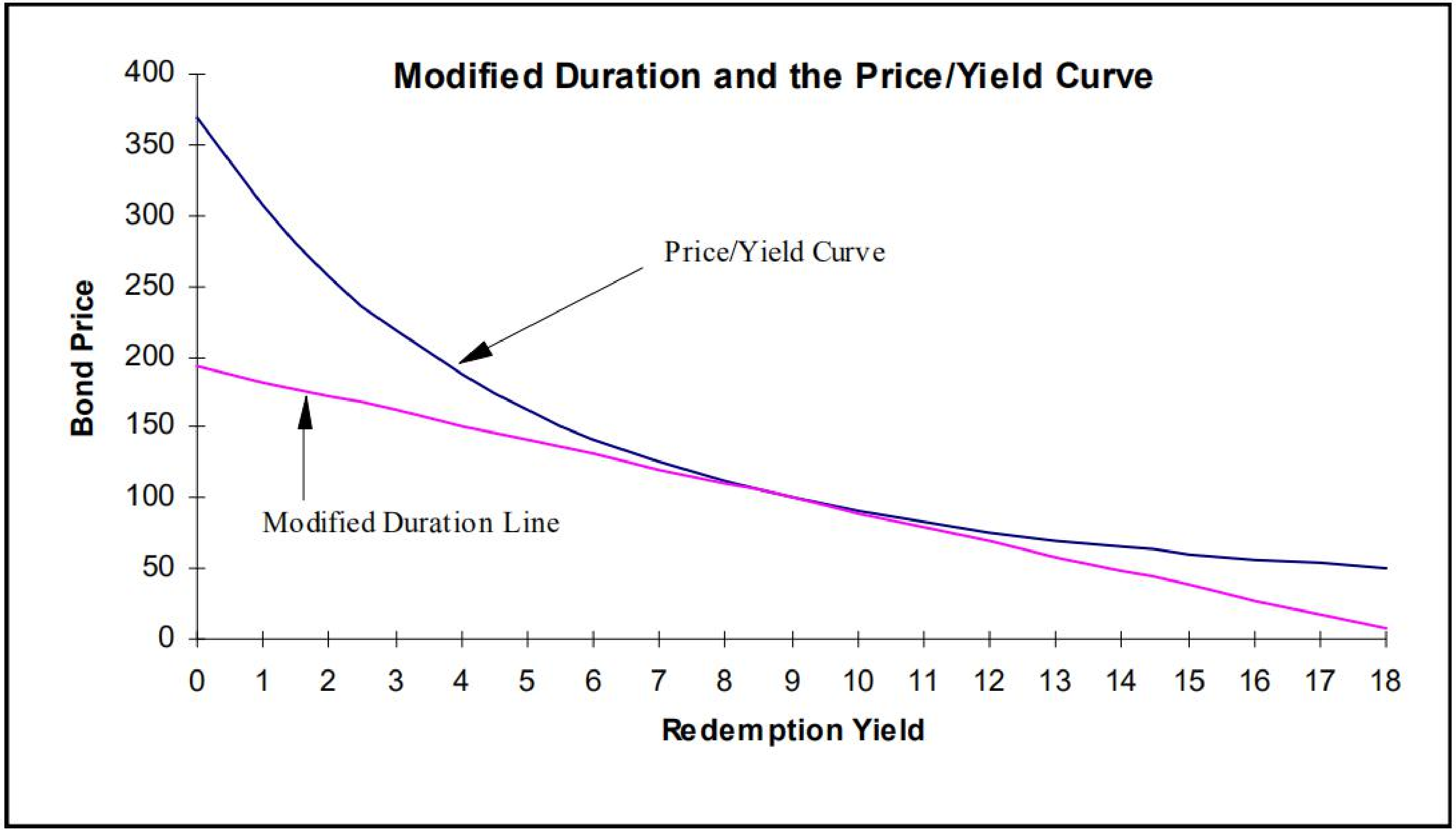
如果 YTM 下降 0.5%，则债券价格的上升幅度约为

$0.5\% * 2.54 = 1.27\%$

修正久期（Modified Duration）



修正久期（Modified Duration）



久期的影响因素

票息越高，久期越小（零息债券久期与票息无关）
期限越长，久期越大
YTM 越低，久期越大

如果你预期利率下降，你买会以下哪个债券?

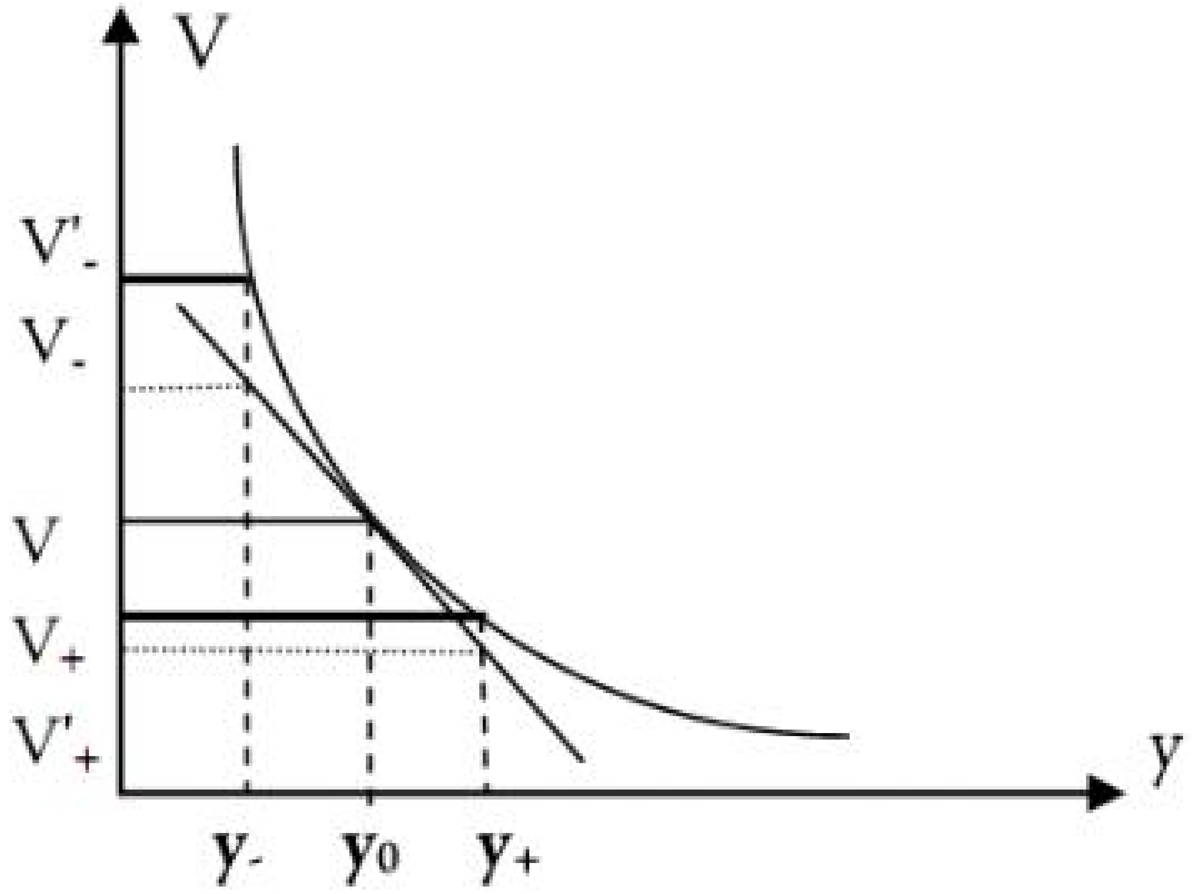
A. 5 年期票面 10% 的债券
B. 10 年期票面 10% 的债券
C. 10 年期票面 5% 的债券

久期的缺陷

久期假设整条利率曲线发生平行移动

久期仅仅是一阶近似

凸性



凸性

$$\frac{dP}{dy}=-\left[\sum_{i=1}^{N}\frac{i}{1+y}\frac{F\times CR}{(1+y)^{i}}+\frac{N}{1+y}\frac{F}{(1+y)^{N}}\right]$$

$$\frac{d^2P}{dy^2}=\sum_{i=1}^{N}\frac{i\times(i+1)}{(1+y)^2}\frac{F\times CR}{(1+y)^{i}}+\frac{N\times(N+1)}{(1+y)^2}\frac{F}{(1+y)^{N}}$$

$$\frac{d^2P}{dy^2}\Big/P=\sum_{i=1}^{N}\frac{i\times(i+1)}{(1+y)^2}(w_i)+\frac{N\times(N+1)}{(1+y)^2}(w)=Convexity$$

$$dP=\frac{dP}{dy}dy+\frac{1}{2}\frac{d^2P}{dy^2}(dy)^2$$

$$\frac{dP}{P}=\frac{dP/P}{dy}dy+\frac{1}{2}\left(\frac{d^2P}{dy^2}\Big/P\right)(dy)^2=-MD\times dy+(1/2)\frac{1}{2}(Convexity)(dy)^2$$

凸性

一个债券，久期为 4.5，凸性为 13，则当利率下降 1% 时，债券价格的上升幅度为_________

凸性

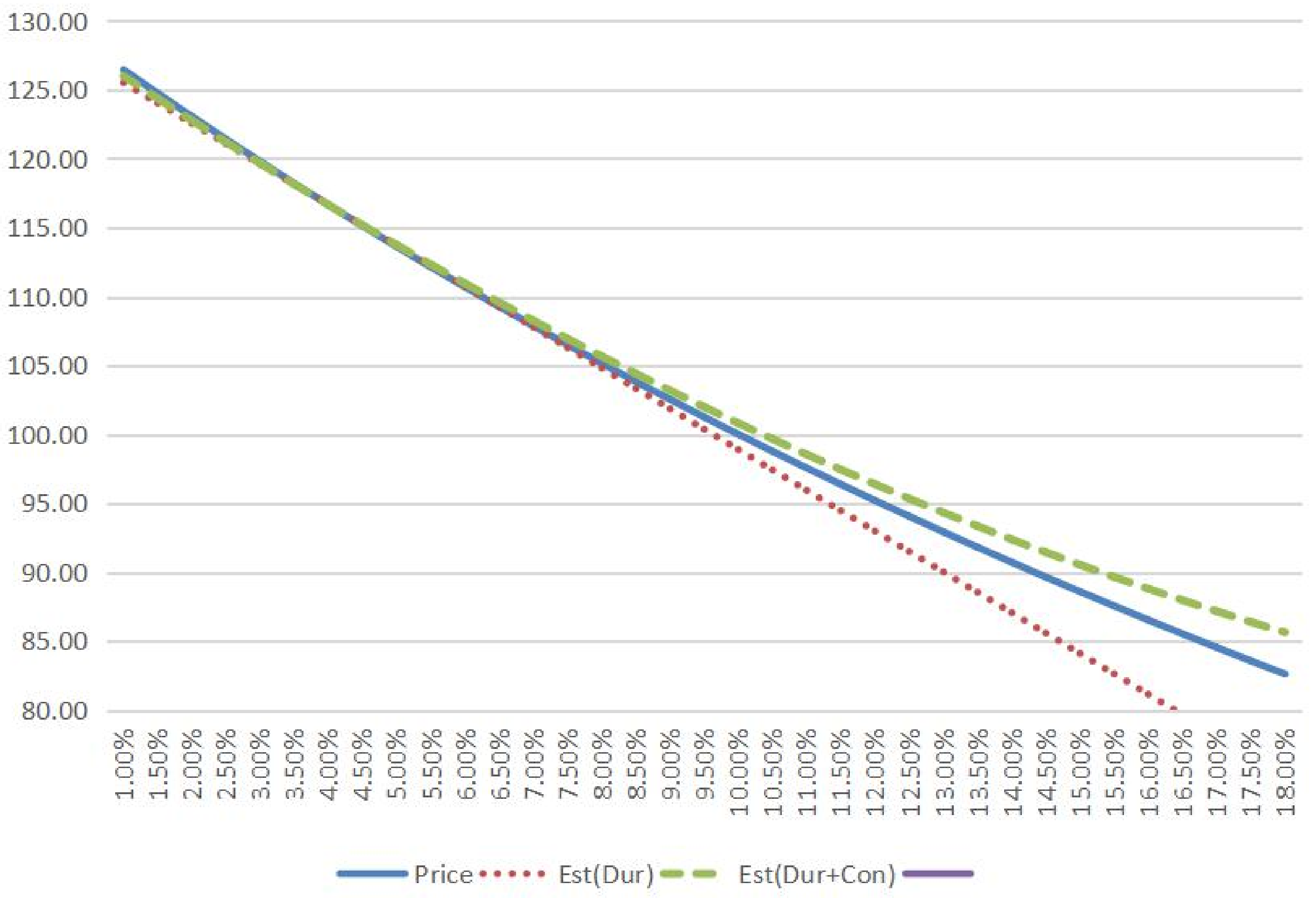
一个债券，久期为 4.5，凸性为 13，则当利率下降 1% 时，债券价格的上升幅度为_________

-4.5 * 1% + (1/2) * 12 * (1%)^2

凸性

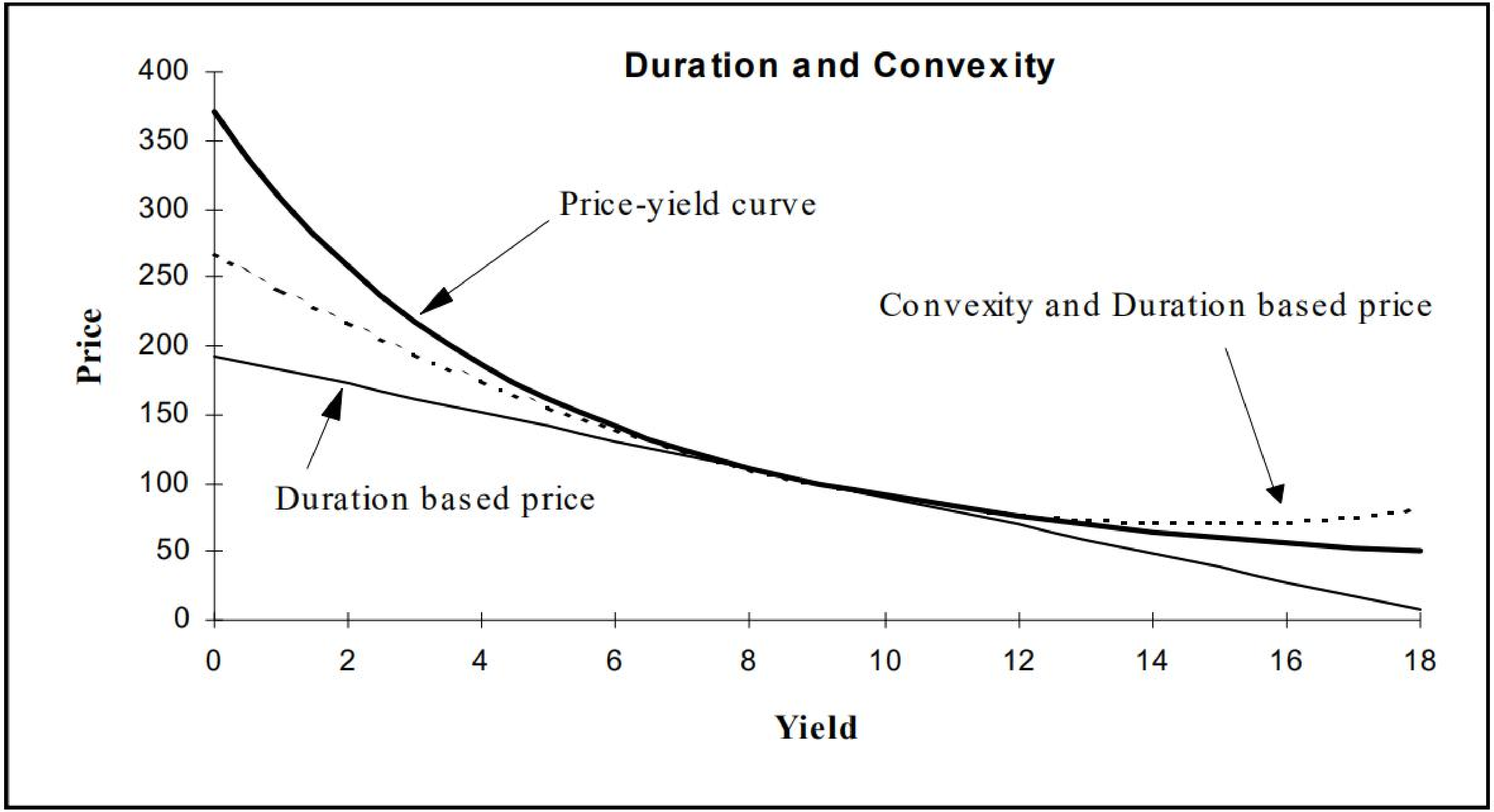
	A	B	C	D	E
1	yield	8%			
2					
3		CF	PV	w	i*(i+1)
4	1	10	9.26	0.0881	2
5	2	10	8.57	0.0815	6
6	3	110	87.32	0.8304	12
7		Total	105.15	1.0000	
8					
9			MacD =	2.74	
10			MD =	2.54	
11			Convexity=	9.11	
12					

凸性



130.00
125.00
120.00
115.00
110.00
105.00
100.00
95.00
90.00
85.00
80.00
1.00%
1.50%
2.00%
2.50%
3.00%
3.50%
4.00%
4.50%
5.00%
5.50%
6.00%
6.50%
7.00%
7.50%
8.00%
8.50%
9.00%
9.50%
10.00%
10.50%
11.00%
11.50%
12.00%
12.50%
13.00%
13.50%
14.00%
14.50%
15.00%
15.50%
16.00%
16.50%
17.00%
17.50%
18.00%
Price
Est(Dur)
Est(Dur+Con)

凸性



Duration and Convexity
Price
Yield
400
350
300
250
200
150
100
50
0
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
Price-yield curve
Convexity and Duration based price
Duration based price

有效久期和有效凸性

$$ED = \frac{P^- - P^+}{2 \times P \times dy}$$

$$EC = \frac{P^- + P^+ - 2P}{P \times (dy)^2}$$

有效久期和有效凸性

yield	Price
7.50%	106.50
8.00%	105.15
8.50%	103.83

有效久期 = __________

有效凸性 = __________

有效久期和有效凸性

yield	Price
7.50%	106.50
8.00%	105.15
8.50%	103.83

P = 105.15, P- = 106.5, P+ = 103.83, dy = 0.5%

ED = 3.54, EC = 9.11

组合久期和组合凸性

$$D_p = \sum_{i=1}^{k} w_i D_i$$

$$C_p = \sum_{i=1}^{k} w_i C_i$$

债券免疫（immunisation）

	Coupon	Maturity	Yield	Price	Duration	Convexity
Bond A	8%	4yrs	10%	93.536	3.387	13.535
Bond B	10%	10yrs	10%	100	6.231	52.833
Bond C	4%	15yrs	10%	53.883	11.786	119.376

使用 A 、B 构建久期为 10 的组合，计算权重和组合凸性
使用 A 、C 构建久期为 10 的组合，计算权重和组合凸性

债券免疫（immunisation）

	Coupon	Maturity	Yield	Price	Duration	Convexity
Bond A	8%	4yrs	10%	93.536	3.387	13.535
Bond B	10%	10yrs	10%	100	6.231	52.833
Bond C	4%	15yrs	10%	53.883	11.786	119.376

使用 A 、B 构建久期为 10 的组合，计算权重和组合凸性
Wa = 43.3%, Wb = 56.7%, Convexity = 35.82

使用 A 、C 构建久期为 10 的组合，计算权重和组合凸性
Wa = 80.8%, Wb = 19.2%, Convexity = 33.91

Q：你更喜欢哪个组合?