**TEORIA GRAFÓW**

**Graf** – para , gdzie jest zbiorem wierzchołków, rodziną krawędzi (czyli jedno- lub dwuelementowych podzbiorów ).

**Graf prosty** – graf bez powtarzających się krawędzi.

**Stopień wierzchołka** – liczba krawędzi incydentnych z tym wierzchołkiem.

**Graf skierowany** (digraf) – graf, gdzie E jest zbiorem krawędzi skierowanych, czyli

**Graf szkieletowy** digrafu D to graf otrzymany z D poprzez zaniedbanie (usunięcie) kierunku krawędzi, ale nie samych krawędzi.

**Graf pusty** to graf bez krawędzi.

**Graf pełny** to graf, w którym każde dwa wierzchołki połączone są krawędzią.

**Graf dwudzielny** to graf , w którym zbiór  da się podzielić na dwa rozłączne podzbiory  oraz  tak, by żadne dwa wierzchołki w obrębie tego samego podzbioru nie były sąsiadami.

**Marszruta** w grafie G z wierzchołka w do wierzchołka u to skończony ciąg krawędzi w postaci wv1, v1v2, …, vk-1u, oznaczana przez:

**Długość marszruty** – liczba jej krawędzi

**Marszruta zamknięta** to marszruta kończąca się w punkcie wyjścia

**Droga** to marszruta bez powtarzających się wierzchołków

**Cykl** to marszruta zamknięta, w której jedynym powtarzającym się wierzchołkiem jest jej początek

**Graf spójny** to graf, w którym między dwoma dowolnymi wierzchołkami istnieje droga.

**Wierzchołek izolowany** to wierzchołek nie posiadający sąsiadów.

**Las** to graf nie zawierający cykli jako podgrafy.

**Drzewo** to graf spójny nie zawierający cykli, czyli spójny las.

**Liść** drzewa to wierzchołek o stopniu 1.

**Gwiazda** to drzewo, w którym co najwyżej jeden wierzchołek nie jest liściem.

**Drzewo rozpinające** grafu G to podgraf grafu G zawierający wszystkie jego wierzchołki i będący drzewem.

**Obwód Eulera** to marszruta przechodząca przez każdą krawędź grafu dokładnie raz.

**Cykl Eulera** to zamknięta marszruta przechodząca przez każdą krawędź grafu dokładnie raz.

Twierdzenie Eulera: graf spójny, mający wszystkie wierzchołki stopnia parzystego, ma cykl Eulera.

Graf spójny, mający dokładnie dwa wierzchołki stopnia nieparzystego ma drogę Eulera.

**Graf eulerowski** to graf posiadający cykl Eulera.

**Graf półeulerowski** to graf posiadający obwód Eulera.

**Cykl Hamiltona** to cykl przechodzący przez wszystkie wierzchołki grafu (czyli marszruta zamknięta odwiedzająca każdy wierzchołek dokładnie raz).

**Graf hamiltonowski** to graf posiadający cykl Hamiltona.

**Ścieżka Hamiltona** to ścieżka przechodząca przez wszystkie wierzchołki, każdy odwiedzając jedynie jeden raz.

W odróżnieniu od grafów eulerowskich, grafy hamiltonowskie nie posiadają prostej i szybkiej w użyciu charakteryzacji. Nie znana jest żadna metoda, pozwalająca szybko (tzn. w czasie wielomianowym) stwierdzić czy dany graf jest hamiltonowski.

Jeśli w grafie prostym o co najmniej 3 wierzchołkach dowolne dwa niesąsiednie wierzchołki i w spełniają , to graf G jest hamiltonowski.

**Klasyczne kolorowanie grafu –** przyporządkowywanie wierzchołkom grafu liczb naturalnych w taki sposób, aby żadne dwa sąsiednie wierzchołki nie miały tego samego koloru (liczby). Innymi słowy, pewne pokolorowanie wierzchołkowe jest poprawne (legalne, dozwolone) wtedy, gdy końcom żadnej krawędzi nie przypisano tego samego koloru

**Liczba chromatyczna** grafu G to liczba kolorów niezbędna do optymalnego klasycznego pokolorowania grafu, czyli najmniejsza możliwa liczba k taka, że możliwe jest legalne pokolorowanie wierzchołków grafu k kolorami.

Problem wyznaczenia liczby chromatycznej jest NP-trudny - nie są znane niezawodne wielomianowe algorytmy wyznaczające liczbę chromatyczną każdego grafu.

**Optymalne kolorowanie** grafu G to kolorowanie używające dokładnie kolorów.

**Sieć** to trójka , w której:

* jest pełnym digrafem (czyli )
* funkcja , zwana przepustowością sieci, każdej krawędzi przypisuje nieujemną liczbę rzeczywistą
* ponadto wyróżnia się dwa wierzchołki , które są odpowiednio źródłem oraz ujściem sieci

**Przepustowość** krawędzi może być interpretowana jako wartość potencjalnie maksymalnego przepływu z wierzchołka do . Jeśli przepustowość jakiejś krawędzi wynosi 0, to krawędź jest pomijana w graficznym przedstawieniu sieci.

Przepływ w sieci to funkcja spełniająca warunki:

* dla każdej krawędzi – wartość przepływu daną krawędzią nie może przekroczyć przepustowości tej krawędzi
* dla każdego wierzchołka poza źródłem i ujściem – sumaryczna wartość tego, co wpływa do wierzchołka jest równa sumarycznej wartości tego, co zeń wypływa
* – sumaryczna wartość tego, co wypływa ze źródła musi być równa sumarycznej wartości tego, co wpływa do ujścia. Wartość ta będzie określana wartością przepływu

**Przekrój sieci** to para podzbiorów zbioru wierzchołków , taka że:

* tworzą podział , tzn. są rozłączne i w sumie dają cały zbiór ,
* źródło należy do , a ujście należy do zbioru .

Wartością danego przekroju nazywamy łączną przepustowość krawędzi prowadzących z do .

**Przepustowość przekroju** to suma:

**Twierdzenie o maksymalnym przepływie i minimalnym przekroju**

W dowolnej sieci wartość maksymalnego przepływu jest równa przepustowości minimalnego przekroju.

Problem znajdowania minimalnego przekroju możemy również interpretować równoważnie jako znajdowanie podzbioru krawędzi o minimalnej sumie przepustowości, takiego że po usunięciu tych krawędzi, nie istnieje ścieżka z do .

Do znajdowania przepływu maksymalnego w grafie służy **algorytm Forda-Fulkersona**:

w każdej iteracji metody Forda-Fulkersona odnajdujemy dowolną ścieżkę powiększającą i zwiększamy przepływ na każdej krawędzi o przepustowość rezydualną .

Jeśli dana jest sieć przepływowa i przepływ , wówczas **ścieżka powiększająca** jest ścieżką prostą z do w rezydualnej sieci .

Dla danej sieci przepływowej i przepływu , sieć rezydualna składa się z krawędzi, którymi można przesłać większy przepływ.

Najwyższą wartość, o jaką można zwiększyć przepływ przy użyciu ścieżki , nazywamy przepustowością rezydualną - .