$termvar,\ name,\ x,\ y,\ z,\ xs$
$indecies,\ i,\ j,\ k$

$exp,\ e$	::=		Expressions
	|	x	
	|	$\mathsf{num}[n]$	
	|	$\mathsf{str}[s]$	
	|	$\mathsf{plus}\,(e_1; e_2)$	
	|	$\mathsf{mult}\,(e_1; e_2)$	
	|	$\mathsf{cat}\,(e_1; e_2)$	
	|	$\mathsf{len}\,(e)$	
	|	$\mathsf{let}\,(e_1; x.e_2)$	

$type,\ T$	::=		Types
	|	Str	
	|	Num	
	|	(T)	S

Γ	::=		Typing Contexts
	|	$\emptyset$	
	|	$x : T$	
	|	Γ_1, Γ_2	

$\mathcal{E}$	::=		Evaluation Contexts
	|	$\square$	
	|	$\mathsf{plus}\,(\mathcal{E}; e_2)$	
	|	$\mathsf{plus}\,(e_1; \mathcal{E})$	
	|	$\mathsf{mult}\,(\mathcal{E}; e_2)$	
	|	$\mathsf{mult}\,(e_1; \mathcal{E})$	
	|	$\mathsf{cat}\,(\mathcal{E}; e_2)$	
	|	$\mathsf{cat}\,(e_1; \mathcal{E})$	
	|	$\mathsf{len}\,(\mathcal{E})$	
	|	$\mathsf{let}\,(\mathcal{E}; x.e_2)$	
	|	$\mathsf{let}\,(e_1; x.\mathcal{E})$	
	|	$\mathcal{E}[e]$	S

$nat,\ n$	::=		Nats

$char,\ c$	::=		Character

$strings,\ s$	::=		

$\boxed{\Gamma \vdash e : T}$ Typing

$$\frac{}{\Gamma, x : T \vdash x : T}\ \text{Var}$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash \mathsf{str}[s] : \mathsf{Str}}\ \text{Str}$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash \mathsf{num}[n] : \mathsf{Num}}\ \text{Num}$$

$$\frac{\Gamma \vdash e_1 : \mathsf{Num} \quad \Gamma \vdash e_2 : \mathsf{Num}}{\Gamma \vdash \mathsf{plus}\,(e_1; e_2) : \mathsf{Num}}\ \text{Plus}$$

$$\frac{\Gamma \vdash e_1 : \mathsf{Num} \quad \Gamma \vdash e_2 : \mathsf{Num}}{\Gamma \vdash \mathsf{mult}\,(e_1; e_2) : \mathsf{Num}} \quad \text{MULT}$$

$$\frac{\Gamma \vdash e : \mathsf{Str}}{\Gamma \vdash \mathsf{len}\,(e) : \mathsf{Num}} \quad \text{LENGTH}$$

$$\frac{\Gamma \vdash e_1 : \mathsf{Str} \quad \Gamma \vdash e_2 : \mathsf{Str}}{\Gamma \vdash \mathsf{cat}\,(e_1; e_2) : \mathsf{Str}} \quad \text{CAT}$$

$$\frac{\Gamma \vdash e_1 : T_1 \quad \Gamma, x : T_1 \vdash e_2 : T_2}{\Gamma \vdash \mathsf{let}\,(e_1; x.e_2) : T_2} \quad \text{LET}$$

$\boxed{e\,\mathsf{val}}$ Values

$$\frac{}{\mathsf{num}[n]\,\mathsf{val}} \quad \text{V\_NUM}$$

$$\frac{}{\mathsf{str}[s]\,\mathsf{val}} \quad \text{V\_STR}$$

$\boxed{e_1 \mapsto e_2}$ Evaluation

$$\frac{n_1 + n_2 = n\,\mathsf{nat}}{\mathsf{plus}\,(\mathsf{num}[n_1]; \mathsf{num}[n_2]) \mapsto \mathsf{num}[n]} \quad \text{PLUSVAL}$$

$$\frac{e_4 \mapsto e_4''}{\mathsf{plus}\,(e_4; e_5) \mapsto \mathsf{plus}\,(e_4''; e_5)} \quad \text{PLUS1}$$

$$\frac{e_1\,\mathsf{val} \quad e_2 \mapsto e_2'}{\mathsf{plus}\,(e_1; e_2) \mapsto \mathsf{plus}\,(e_1; e_2')} \quad \text{PLUS2}$$

$$\frac{e_1 \mapsto e_1'}{\mathsf{mult}\,(e_1; e_2) \mapsto \mathsf{mult}\,(e_1'; e_2)} \quad \text{MULT1}$$

$$\frac{e_1\,\mathsf{val} \quad e_2 \mapsto e_2'}{\mathsf{mult}\,(e_1; e_2) \mapsto \mathsf{mult}\,(e_1; e_2')} \quad \text{MULT2}$$

$$\frac{n_1 * n_2 = n\,\mathsf{nat}}{\mathsf{mult}\,(\mathsf{num}[n_1]; \mathsf{num}[n_2]) \mapsto \mathsf{num}[n]} \quad \text{MULTVAL}$$

$$\frac{s_1 s_2 = s\,\mathsf{str}}{\mathsf{cat}\,(\mathsf{str}[s_1]; \mathsf{str}[s_2]) \mapsto \mathsf{str}[s]} \quad \text{CATVAL}$$

$$\frac{e_1 \mapsto e_1'}{\mathsf{cat}\,(e_1; e_2) \mapsto \mathsf{cat}\,(e_1'; e_2)} \quad \text{CAT1}$$

$$\frac{e_1\,\mathsf{val} \quad e_2 \mapsto e_2'}{\mathsf{cat}\,(e_1; e_2) \mapsto \mathsf{cat}\,(e_1; e_2')} \quad \text{CAT2}$$

$$\frac{|s| = n\,\mathsf{num}}{\mathsf{len}\,(\mathsf{str}[s]) \mapsto \mathsf{num}[n]} \quad \text{LENGTHVAL}$$

$$\frac{e \mapsto e'}{\mathsf{len}\,(e) \mapsto \mathsf{len}\,(e')} \quad \text{LENGTH1}$$

$$\frac{e_1\,\mathsf{val}}{\mathsf{let}\,(e_1; x.e_2) \mapsto [e_1/x]e_2} \quad \text{LETVAL}$$

$$\frac{e_1 \mapsto e_1'}{\mathsf{let}\,(e_1; x.e_2) \mapsto \mathsf{let}\,(e_1'; x.e_2)} \quad \text{LET1}$$

$$\frac{}{\mathsf{let}\,(e_1; x.e_2) \mapsto [e_1/x]e_2} \quad \text{LetL}$$

$\boxed{e_1 \mapsto^* e_2}$ Multistep Evaluation

$$\frac{}{e \mapsto^* e} \quad \text{Refl}$$

$$\frac{e_1 \mapsto e_2 \quad e_2 \mapsto^* e_3}{e_1 \mapsto^* e_3} \quad \text{Step}$$

$\boxed{e = \mathcal{E}}$ Contextual Equality

$$\frac{}{e = \square[e]} \quad \text{C\_Hole}$$

$$\frac{e_1 = \mathcal{E}_1[e]}{\mathsf{plus}\,(e_1; e_2) = \mathsf{plus}\,(\mathcal{E}_1; e_2)[e]} \quad \text{C\_Plus1}$$

$$\frac{e_1\,\mathsf{val} \quad e_2 = \mathcal{E}_2[e]}{\mathsf{plus}\,(e_1; e_2) = \mathsf{plus}\,(e_1; \mathcal{E}_2)[e]} \quad \text{C\_Plus2}$$

$$\frac{e_1 = \mathcal{E}_1[e]}{\mathsf{mult}\,(e_1; e_2) = \mathsf{mult}\,(\mathcal{E}_1; e_2)[e]} \quad \text{C\_Mult1}$$

$$\frac{e_1\,\mathsf{val} \quad e_2 = \mathcal{E}_2[e]}{\mathsf{mult}\,(e_1; e_2) = \mathsf{mult}\,(e_1; \mathcal{E}_2)[e]} \quad \text{C\_Mult2}$$

$$\frac{e_1 = \mathcal{E}_1[e]}{\mathsf{cat}\,(e_1; e_2) = \mathsf{cat}\,(\mathcal{E}_1; e_2)[e]} \quad \text{C\_Cat1}$$

$$\frac{e_1\,\mathsf{val} \quad e_2 = \mathcal{E}_2[e]}{\mathsf{cat}\,(e_1; e_2) = \mathsf{cat}\,(e_1; \mathcal{E}_2)[e]} \quad \text{C\_Cat2}$$

$$\frac{e' = \mathcal{E}[e]}{\mathsf{len}\,(e') = \mathsf{len}\,(\mathcal{E})[e]} \quad \text{C\_Length}$$

$$\frac{e_1 = \mathcal{E}[e]}{\mathsf{let}\,(e_1; x.e_2) = \mathsf{let}\,(\mathcal{E}; x.e_2)[e]} \quad \text{C\_Let1}$$

$\boxed{e_1 \mapsto_{\mathsf{S}} e_2}$ Single Step Evaluation

$$\frac{n_1 + n_2 = n\,\mathsf{nat}}{\mathsf{plus}\,(\mathsf{num}[n_1]; \mathsf{num}[n_2]) \mapsto_{\mathsf{S}} \mathsf{num}[n]} \quad \text{S\_PlusVal}$$

$$\frac{n_1 * n_2 = n\,\mathsf{nat}}{\mathsf{mult}\,(\mathsf{num}[n_1]; \mathsf{num}[n_2]) \mapsto_{\mathsf{S}} \mathsf{num}[n]} \quad \text{S\_MultVal}$$

$$\frac{s_1\,s_2 = s\,\mathsf{str}}{\mathsf{cat}\,(\mathsf{str}[s_1]; \mathsf{str}[s_2]) \mapsto_{\mathsf{S}} \mathsf{str}[s]} \quad \text{S\_CatVal}$$

$$\frac{|s| = n\,\mathsf{num}}{\mathsf{len}\,(\mathsf{str}[s]) \mapsto_{\mathsf{S}} \mathsf{num}[n]} \quad \text{S\_LengthVal}$$

$$\frac{e_1\,\mathsf{val}}{\mathsf{let}\,(e_1; x.e_2) \mapsto_{\mathsf{S}} [e_1/x]e_2} \quad \text{S\_LetVal}$$

$\boxed{e_1 \mapsto e_2}$ Evaluation Contexts

$$\frac{e = \mathcal{E}[e_1] \quad e_1 \mapsto_{\mathsf{S}} e_2 \quad e' = \mathcal{E}[e_2]}{e \mapsto e'} \quad \text{C\_Step}$$

$\boxed{\Gamma \vdash e_1 \equiv e_2 : T}$ Equality

$$\frac{}{\Gamma \vdash e \equiv e : T} \quad \text{E\_Refl}$$

$$\frac{\Gamma \vdash e_2 \equiv e_1 : T}{\Gamma \vdash e_1 \equiv e_2 : T} \quad \text{E\_Sym}$$

$$\frac{\Gamma \vdash e_1 \equiv e_2 : T \quad \Gamma \vdash e_2 \equiv e_3 : T}{\Gamma \vdash e_1 \equiv e_3 : T} \quad \text{E\_Trans}$$

$$\frac{n_1 + n_2 = n \ \mathsf{nat}}{\Gamma \vdash \mathsf{plus}\,(\mathsf{num}[n_1]; \mathsf{num}[n_2]) \equiv \mathsf{num}[n] : \mathsf{Num}} \quad \text{E\_PlusVal}$$

$$\frac{\Gamma \vdash e_1 \equiv e_1' : \mathsf{Num} \quad \Gamma \vdash e_2 \equiv e_2' : \mathsf{Num}}{\Gamma \vdash \mathsf{plus}\,(e_1; e_2) \equiv \mathsf{plus}\,(e_1'; e_2') : \mathsf{Num}} \quad \text{E\_Plus}$$

$$\frac{n_1 * n_2 = n \ \mathsf{nat}}{\Gamma \vdash \mathsf{mult}\,(\mathsf{num}[n_1]; \mathsf{num}[n_2]) \equiv \mathsf{num}[n] : \mathsf{Num}} \quad \text{E\_MultVal}$$

$$\frac{\Gamma \vdash e_1 \equiv e_1' : \mathsf{Num} \quad \Gamma \vdash e_2 \equiv e_2' : \mathsf{Num}}{\Gamma \vdash \mathsf{mult}\,(e_1; e_2) \equiv \mathsf{mult}\,(e_1'; e_2') : \mathsf{Num}} \quad \text{E\_Mult}$$

$$\frac{s_1 s_2 = s \ \mathsf{str}}{\Gamma \vdash \mathsf{cat}\,(\mathsf{str}[s_1]; \mathsf{str}[s_2]) \equiv \mathsf{str}[s] : \mathsf{Str}} \quad \text{E\_CatVal}$$

$$\frac{\Gamma \vdash e_1 \equiv e_1' : \mathsf{Str} \quad \Gamma \vdash e_2 \equiv e_2' : \mathsf{Str}}{\Gamma \vdash \mathsf{cat}\,(e_1; e_2) \equiv \mathsf{cat}\,(e_1'; e_2') : \mathsf{Str}} \quad \text{E\_Cat}$$

$$\frac{|s| = n \ \mathsf{num}}{\Gamma \vdash \mathsf{len}\,(\mathsf{str}[s]) \equiv \mathsf{num}[n] : \mathsf{Num}} \quad \text{E\_LengthVal}$$

$$\frac{\Gamma \vdash e \equiv e' : \mathsf{Str}}{\Gamma \vdash \mathsf{len}\,(e) \equiv \mathsf{len}\,(e') : \mathsf{Num}} \quad \text{E\_Length1}$$

$$\frac{\Gamma \vdash e_1 \equiv e_1' : T_1 \quad \Gamma, x : T_1 \vdash e_2 \equiv e_2' : T_2}{\Gamma \vdash \mathsf{let}\,(e_1; x.e_2) \equiv \mathsf{let}\,(e_1'; x.e_2) : T_2} \quad \text{E\_Let}$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash \mathsf{let}\,(e_1; x.e_2) \equiv [e_1/x]e_2 : T} \quad \text{E\_LetL}$$

```
Definition rules:        54 good    0 bad
Definition rule clauses: 98 good    0 bad
```