排列组合题的十种解题策略

于真灵　唐汉锦

排列组合问题是高考的必考内容之一，题目取材多来源于生活实际，条件变化多端，处理方法多种多样。考试中到底该如何应对排列组合题呢？本文总结出了解答排列组合题的十种常见思想方法，老师们在教学时可以向学生渗透。

1.相邻问题捆绑法。这一方法是把问题中规定相邻的几个元素并为一组（当做一个元素）参与排列。

例 1　A,B,C,D,E 5 人并排站成一排，如果 A,B 必须相邻且 B 在 A 的右边，则不同的排法有（　　）。

A.60　　B.48　　C.36　　D.24

解析　把 A,B 视为 1 人，且 B 固定在 A 的右边，则本题相当于 4 人作全排列，即 $A_4^4=24$。

（“环”或“扣”）经适当的上下、左右旋转多个自由度的变化，结合几何体截面面积的变化规律，还是可能解锁的。

二、数学解释

1.关于 M 型“扣”解锁的原理

仔细观察可知，钢柱中有一小段在端点位置、由圆柱被锻造成正四棱柱。

设圆钢柱的半径为 r，边缘距离为 d（如图 3），圆心之间的距离为 $2r+d$。

图 3

⑴ 若两圆柱边缘 $d<2r$，另一圆钢柱不可能从两圆柱间通过。

⑵ 若改为方柱（如图 4），设两方柱几何中心之间的距离仍保持为 $2r+d$，圆柱被锻造成方柱之后边缘距离 $d'=2r+d-\sqrt{2\pi}\,r=(2-\sqrt{2\pi})\,r+d$。由于 $2<\sqrt{2\pi}$，使得 $d'<d$，比原来的缝隙更小，故不可能让圆钢柱穿过。

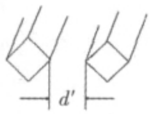

图 4

如果另一对的形状完全与图 4 形状一致，若旋转 90°，即使 $d'=0$，从实践中可得知这一对钢柱与另一对钢柱在锻方位置能顺利通过（如图 5）。

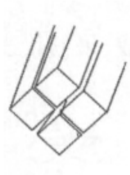

图 5

2.关于“环”的解锁原理

“环”的形状多样，经过仔细观察，不难发现各对“环”总是螺线管或螺线管的一部分。

有两个螺线管刚体，设它们的形状完全一致，圆钢柱的半径为 r，环之距 $l=2r$（如图 6，下图为截面图），由于两个相同的螺线管半径相同，平移是不能互穿的，但如果对接之后旋转情况将发生根本性的改变，完全是能互穿的。即使这两个螺线管大小有些变化，只要选择恰当的 r,l 也可以做到，正如螺杆与螺帽，虽然它们的 r,l 不同，但还是可以互穿的道理一样。

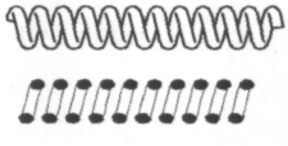

图 6

（作者单位 湖南交通职业技术学院）

2.相离问题插空法。元素相离(即不相邻)问题，可先把无位置要求的几个元素作全排列，再把规定相离的几个元素插入上述几个元素间的空位和两端。

例2 5名男生和3名女生排成一排。

(1)3名女生站在一起的排法有多少种？

(2)女生不得相邻的排法有多少种？

(3)甲、乙2人中间间隔2人的排法有多少种？

解析：(1)(捆绑法)把站在一起的3名女生看成一个整体与5名男生作全排列，有A_6^6种排法，女生本身有A_3^3种排法，故共有$A_6^6\cdot A_3^3=4320$种排法。

(2)(插空法)女生不得相邻，就是要在5个男生间的4个间隔和一头一尾这6个位置上排女生，有A_6^3种排法，男生本身有A_5^5种排法，共有$A_6^3\cdot A_5^5=14400$种排法。

(3)(位置分析法)第一步，先排甲、乙两人，有$5A_2^2$种排法 第二步，余下的6人作全排列，有A_6^6种排法，共有$5A_2^2\cdot A_6^6=7200$种排法。

3.相同元素分配隔板法

例3 将10名保送生预选指标分配给某重点中学高三年级6个班，每班至少1名，共有多少种分配方案？

解析 将10名学生并成一排，学生之间有9个空，用5块隔板插入9个空，就可将10个学生分成6部分，每一种插法就对应一种分配法，故有C_9^5种方案。

(注意 隔板法与插空法是不同的，隔板法只适用于相同元素的分配问题)

4.定序问题对称法。在排列问题中，限制某几个元素必须保持一定的顺序，可用对称思想解题，先排后除，即$\frac{A_n^n}{A_m^m}$。

例4 A,B,C,D,E 5人并排站成一排，B必须站在A的右边，则不同的排法有(　　)。

A.24种　B.60种　C.90种　D.120种

解析 5个人作全排列，B站在A的右边与B站在A的左边排法数相同，即共有$\frac{A_5^5}{A_2^2}=60$种排法。

5.定位问题优先法。某个(或几个)元素要排在指定位置，可先排这个(或几个)元素，再排其他元素。

例5 1个老师和4名学生排成一排，老师不在两端，则共有多少种排法？

解析 老师在中间3个位置上选一个位置，有A_3^1种 4名学生在其余4个位置，有A_4^4种，共有$A_3^1\cdot A_4^4=72$种排法。

6.多排问题单排法。把元素排成几排的问题，可归纳为作一排考虑，再分段处理。

例6 8人站前后2排，每排4人，其中某2人站在前排，某1人站在后排，则共有多少种排法？

解析 看成一排，某2人在前半段4个位置中选排2个，有A_4^2种 某1人在后半段4个位置中选一个，有A_4^1种 其余5人在余下5个位置上，有A_5^5种，共有$A_4^2\cdot A_4^1\cdot A_5^5=5760$种排法。

7.乱座问题分步法。把元素排列到指定号码位置上，可先把某个元素按规定排入，再排另一个元素，依此类推，即可完成。

例7 将数字1,2,3,4填入到标号为1,2,3,4的4个方格中，每格填一个数，则每个方格的标号与所填数字不同的填法有多少种？

解析 第一步，把1填入方格，符合条件有3种；第二步，把填入方格的对应数字填入其他3个方格，又有3种 第三步，填余下的2个数字，只有1种填法，故共有3×3×1=9种填法。

8.多元问题分类法。元素多，取出的情况也多，可按结果要求分成不相容的几类情况，分别计算，最后总计。

例8 由0,1,2,3,4,5组成没有重复数字的六位数，其中个位数字小于十位数字的共有多少种？

解析：个位数字只能是0,1,2,3,4共5种情况，分别有A_5^5，$A_4^1A_3^1A_3^3$，$A_3^1A_3^1A_3^3$，$A_2^1A_3^1A_3^3$，$A_3^1A_3^3$个，总计300个。

9.“至少”“至多”型问题间接法。某些排列组合问题的正面情况较复杂而其反面情况较简单时，可考虑无限制条件的排列，再减去其反面情况的总数。

例9 从4台甲型和5台乙型电视中任取3台，其中要求甲、乙型各1台，则不同的取法共有多少种？

解析：至少各1台的反面就是分别只取一种型号，不取另一种型号，故共有$C_9^3-C_4^3-C_5^3=70$种。

10.条件问题排除法。在被选总数中，只有一部分符合条件，可从总数中减去不符合条件的。

例10 正六边形的中心和顶点共7个点，以其中3个点为顶点的三角形共有多少个？

解析 在7点中取3点，有C_7^3，但有3组3点共线，不构成三角形，故共有$C_7^3-3=32$个。

(作者单位 绥宁县第一中学)