基本分析讲义: 第三卷 (单复变量理论)

东南大学数学学院基础课系列

作者：李逸

时间：二零二二年月五月十九日

版本：1.1; © 李逸 2022

单位：东南大学丘成桐中心、东南大学数学学院

Rather less, but better. — Johann Carl Friedrich Gauss

致谢

本讲义采用了ElegantLATEX 模板 (https://elegantlatex.org/)，本人非常喜欢 ElegantLATEX 的风格，在此向开发者表示诚挚的谢意。

作者感谢：

汪研

李逸

二零二二年五月十九日

目录

第一章 序

Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse — Riemann, Inauguraldissertation, Göttingen, 1851

1.1 前言

李逸
西元二零一九年六月
提笔于南京鸡笼山成贤街东南大学逸夫建筑馆内

1.2 复数和复变函数的历史

1.3 主要的参考文献

第二章 复数与复变函数

书制有六: 一曰象形, 二曰假借, 三曰指事, 四曰会意, 五曰转注, 六曰谐声, 使天下义理必归文字, 天下文字必归六书.——《资治通鉴》三皇纪太昊伏羲氏

2.1 复数

1797 年, 挪威测量员Casper Wessel (1745 年 6 月 8 日 - 1818 年 3 月 25 日) 写了一篇题为《Om Directionens analytiske Betegning, et Forsog, anvendt fornemmelig til plane og sphæriske Polygoners Oplosning》(关于方向的解析表示, 特别是在确定平面和球面多边形方面的努力) 的文章, 这篇论文[1]于 1799 年发表在丹麦皇家科学院. 在这篇论文中, Wessel 探讨了复数的几何意义, 引入了一条以 $\mathbf{i} = \sqrt{-1}$ 为单位的虚轴, 然后他用几何术语来定义复数的运算. Wessel 的论文直到 1897 年才翻译成法文重新发表[2], 此时它的巨大价值逐步显露出来.

同样的结果也分别被Jean-Robert Argand (1768 年 7 月 18 日 - 1822 年 8 月 13 日) 在 1806 年[3]和Johann Carl Friedrich Gauss(1777 年 4 月 30 日 - 1855 年 2 月 23 日) 在 1831 年独立地重新发现.

实际上, Gauss 在复数的几何表示方面做得更加清楚也更加深入. Gauss在代数学基本定理的前三个证明 (1799 年, 1815 年和 1816 年) 中, 他预设直角坐标平面上的点和复数是一一对应的. 而在 1811 年他写给Friedrich Wilhelm Bessel(1784 年 7 月 22 日 - 1846 年 3 月 17 日) 的一封信中, 他说 $a + \mathbf{i}b$ 用点 (a, b) 来表示, 并说在复平面上可以沿着许多路径从一点到另一点. Gauss在 1831 年就已经公开描述复数的几何表示了, 特别是在 1832 年的论文《Theoria residuorum biquadraticorum, Commentatio secunda》(双二次剩余理论)[4]里. 在这篇论文里, 他不仅把 $a + \mathbf{i}b$ 表示为复平面上的一点, 而且阐述了复数的几何加法和乘法.

有趣的是在 1847 年, Baron Augustin-Louis Cauchy(1789 年 8 月 21 日 - 1857 年 5 月 23 日) 还是对 $\mathbf{i}$ 的引入表示怀疑. 他说: "在代替了虚数论的代数等价论中, 字母 $\mathbf{i}$ 不再表示符号 $\sqrt{-1}$, 我们完全拒绝了这个符号, 并且我们能够毫无遗憾地放弃它, 因为人们既不知道这个想象地符号表示什么, 也不知道它意味着什么."

---

[1]Wessel, Caspar. *Om Directionens analytiske Betegning, et Forsog, anvendt fornemmelig til plane og sphæriske Polygoners Oplosning*, Nye Samling af det Kongelige Danske Videnskabernes Selskabs Skrifter, **5**(1799), 469-518.

[2]Wessel, Caspar. *Essai sur la représentation analytique de la direction*, translated by Zeuthen, H. G., 1897.

[3]Argand, Jean-Robert. *Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques*, 1806

[4]Gauss, Johann Carl Friedrich. *Theoria residuorum biquadraticorum, Commentatio secunda*, Göttingen: Commentationes Societatis Regiae Scientiarum Göttingensis, **7**(183e2).

2.1.1 复数的代数运算

在实数域中求解方程

$$x^2 = -1$$

是不可能的, 但是形式上我们可以引入一个新数 $\mathbf{i}$, 称为**虚数单位**[5], 使其形式上满足

$$\mathbf{i}^2 = -1. \tag{2.1.1}$$

上述方程有两个解 $\mathbf{i}$ 和 $-\mathbf{i}$; 一般地, 我们取 $\mathbf{i} = \sqrt{-1}$, 这样 $-\sqrt{-1}$ 是另一个解.

对任意实数 $x, y \in \mathbf{R}$, 称

$$z = x + \mathbf{i}y \quad 或 \quad z = x + \sqrt{-1}y \quad 或 \quad z = x + y\mathbf{i} \tag{2.1.2}$$

为**复数 (complex number)**, 而把 x, y 分别称为 z 的**实部 (real part)** 和**虚部 (imaginary part)**, 并记作

$$x = \mathbf{Re}(z), \quad y = \mathbf{Im}(z). \tag{2.1.3}$$

当 $x = 0$ 但 $y \neq 0$ 时, $z = \mathbf{i}y$ 称为**纯虚数 (purely imaginary number)**. 另一方面, 当 $y = 0$ 时, $z = x + \mathbf{i}0$ 就是实数 x; 这样我们可以把实数看成是特殊的复数.

所有复数的集合记为 $\mathbf{C}$, 并称两个复数 $z_1 = x_1 + \mathbf{i}y_1$ 和 $z_2 = x_2 + \mathbf{i}y_2$ **相等**, 如果它们的实部和虚部分别相等, 即 $x_1 = x_2$ 和 $y_1 = y_2$. 因此

$$z = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{Re}(z) = \mathbf{Re}(z) = 0.$$

注 2.1

一般来说任意两个复数不能比较大小, 这是因为虚数单位 $\mathbf{i}$ 不能和 0 比较大小关系. 如果 $\mathbf{i} > 0$, 两边同乘以 $\mathbf{i}$ 得到 $-1 = \mathbf{i}^2 > 0$, 这是不可能的; 同样如果 $\mathbf{i} < 0$, 两边同乘以 $\mathbf{i}$ 得到 $-1 = \mathbf{i}^2 > 0$, 也不可能. ♣

给定两个复数 $z_1 = x_1 + \mathbf{i}y_1$ 和 $z_2 = x_2 + \mathbf{i}y_2$, 我们定义它们的代数运算如下.

(1) 加法:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + \mathbf{i}y_1) + (x_2 + \mathbf{i}y_2) := (x_1 + x_2) + \mathbf{i}(y_1 + y_2).$$

从而得到

$$z_1 + z_2 = [\mathbf{Re}(z_1) + \mathbf{Re}(z_2)] + \mathbf{i}[\mathbf{Im}(z_1) + \mathbf{Im}(z_2)]. \tag{2.1.4}$$

(2) 减法:

$$z_1 - z_2 = (x_1 + \mathbf{i}y_1) - (x_2 + \mathbf{i}y_2) := (x_1 - x_2) + \mathbf{i}(y_1 - y_2).$$

从而得到

$$z_1 - z_2 = [\mathbf{Re}(z_1) - \mathbf{Re}(z_2)] + \mathbf{i}[\mathbf{Im}(z_1) - \mathbf{Im}(z_2)]. \tag{2.1.5}$$

[5]要想了解这个新数是如何引入, 可参阅《第一卷》第一章.

(3) 乘法:

$$z_1z_2=(x_1+\mathbf{i}y_1)(x_2+\mathbf{i}y_2):=(x_1x_2-y_1y_2)+\mathbf{i}(x_2y_1+x_1y_2).$$

如果按照“实数乘法”来形式展开的话, 我们就得到了上述定义.

(4) 除法: 假设 $z_2\neq 0$. 复数 $z=x+\mathbf{i}y$ 称为 z_1 除以 z_2 的**商**, 记作 $z=z_1/z_2$, 如果 $z_2z=z_1$. 根据定义得到

$$x_1+\mathbf{i}y_1=(x_2+\mathbf{i}y_2)(x+\mathbf{i}y)=(x_2x-y_2y)+\mathbf{i}(x_2y+xy_2)$$

从而得到, 比较实部与虚部,

$$\begin{cases} x_2x-y_2y=x_1, \\ y_2x+x_2y=y_1, \end{cases}, \quad \begin{bmatrix} x_2 & -y_2 \\ y_2 & x_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$$

解上面线性方程组得出

$$z=\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+\mathbf{i}\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}. \tag{2.1.6}$$

定义 (2.1.6) 较难记住, 现在为了简化计算我们引入复数 $z=x+\mathbf{i}y$ 的**共轭复数 (conjugate)** 为

$$\overline{z}:=x-\mathbf{i}y. \tag{2.1.7}$$

之后, 我们会发现共轭复数的其它好处.

命题 2.1

假设 z_1,z_2,z_3z 都是复数. 则有如下基本性质

(1) $z_1+z_2=z_2+z_1$, $z_1z_2=z_2z_1$.

(2) $z_1+(z_2+z_3)=(z_1+z_2)+z_3$, $z_1(z_2z_3)=(z_1z_2)z_3$.

(3) $z_1(z_2+z_3)=z_1z_2+z_1z_3$.

(4) $\overline{z_1\pm z_2}=\overline{z_1}\pm\overline{z_2}$, $\overline{z_1z_2}=\overline{z_1}\,\overline{z_2}$, $\overline{(z_1/z_2)}=\overline{z_1}/\overline{z_2}$, $\overline{\overline{z}}=z$.

(5) $z\overline{z}=[\mathbf{Re}(z)]^2+[\mathbf{Im}(z)]^2$.

(6) $z+\overline{z}=2\mathbf{Re}(z)$, $z-\overline{z}=2\mathbf{i}\mathbf{Im}(z)$.

♡

练习 2.1

根据定义证明**命题 2.1**.

♠

根据**命题 2.1**, 为了计算 z_1/z_2, 我们分子与分母同乘以 $\overline{z_2}$ (当然 $z_2\neq 0$), 得到

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{z_1\overline{z_2}}{z_2\overline{z_2}}=\frac{z_1\overline{z_2}}{[\mathbf{Re}(z_2)]^2+[\mathbf{Im}(z_2)]^2}. \tag{2.1.8}$$

例 2.1

(1) 假设

$$z=-\frac{1}{\mathbf{i}}-\frac{3\mathbf{i}}{1-\mathbf{i}},$$

求 $\mathbf{Re}(z)$, $\mathbf{Im}(z)$ 和 $z\overline{z}$.

解: 化简得到

$$z=\frac{\mathbf{i}}{\mathbf{i}(-\mathbf{i})}-\frac{3\mathbf{i}(1+\mathbf{i})}{(1-\mathbf{i})(1+\mathbf{i})}=\mathbf{i}-\frac{-3+3\mathbf{i}}{2}=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\mathbf{i}.$$

故

$$\mathbf{Re}(z)=\frac{3}{2},\quad \mathbf{Im}(z)=-\frac{1}{2},\quad z\overline{z}=\frac{5}{2}.\quad\square$$

(2) 化简

$$z=\frac{(\sqrt{3}+\mathbf{i})(2-2\mathbf{i})}{(\sqrt{3}-\mathbf{i})(2+2\mathbf{i})}.$$

解: 分子与分母同乘以 $(\sqrt{3}+\mathbf{i})(2-2\mathbf{i})$ 得到

$$z=\frac{(\sqrt{3}+\mathbf{i})^2(2+2\mathbf{i})^2}{4\times 8}=\frac{(2+2\sqrt{3}\mathbf{i})(-8\mathbf{i})}{32}=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\mathbf{i}.$$

2.1.2 复数的几何表示

给定复数 $z=x+\mathbf{i}y$, 我们可以在平面 $\mathbf{R}^2$ 的直角坐标系中确定点 $P=(x,y)$, 反之亦然. 因此复数全体 $\mathbf{C}$ 可以和平面 $\mathbf{R}^2$ 上的点一一对应. 此时我们称平面的 x-轴为**实轴**, 平面的 y-轴为**虚轴**, 而把平面称为**复平面**或 ***z*-平面**. 因为点 P 和向量 $\overrightarrow{OP}$ 是一一对应的, 这里 $O=(0,0)$ 为平面的原点. 因此, 我们也可以用向量 $\overrightarrow{OP}$ 来表示复数 z.

(1) z 的**模 (modulus)** 或**绝对值 (absolute value)** 记作

$$|z|=r=\sqrt{x^2+y^2}.\tag{2.1.9}$$

根据定义立即得到

$$|x|,|y|\le|z|\le|x|+|y|,\quad z\overline{z}=|z|^2=|z^2|.\tag{2.1.10}$$

(2) 假设 $z\neq 0$. 以正实轴为始边, 以向量 $\overrightarrow{OP}$ 为终边的角的弧度数 θ 称为 z 的**辐角 (argument)**, 记为

$$\mathbf{Arg}(z)=\theta.\tag{2.1.11}$$

注意到

$$\tan(\mathbf{Arg}(z))=\frac{y}{x}.\tag{2.1.12}$$

(3) 和一个函数的原函数不是唯一的一样, 任意非零复数 z 有无穷多个辐角. 如果 θ_1 是其中一个辐角, 那么

$$\mathbf{Arg}(z)=\theta_1+2k\pi,\quad k\in\mathbf{Z}\tag{2.1.13}$$

给出了 z 的全体辐角. 因此, 为了方便期间, 我们把满足 $\theta_0\in(-\pi,\pi]$ 的辐角 θ_0 称为 $\mathbf{Arg}(z)$ 的**主值 (principal argument)**, 并记作 $\theta_0=:\mathbf{arg}(z)$. Hence

$$\mathbf{Arg}(z)=\mathbf{arg}(z)+2\pi\mathbf{Z}.\tag{2.1.14}$$

(4) 当 $z=0$ 时, 辐角不确定故没法定义.

(5) 辐角的主值 $\mathbf{arg}(z)$, $z \neq 0$, 可以由 $\mathrm{Arctan}(y/x)$ 的主值 $\arctan(y/x)$ 来表示:

$$\mathbf{arg}(z) = \begin{cases} \arctan\frac{y}{x}, & x > 0 \text{ 和 } y \gtreqless 0, \\ \pm\frac{\pi}{2}, & x = 0 \text{ 和 } y \gtrless 0, \\ \arctan\frac{y}{x} \pm \pi, & x < 0 \text{ 和 } y \gtrless 0, \\ \pi, & x < 0 \text{ 和 } y = 0. \end{cases} \tag{2.1.15}$$

这里 $\arctan(y/x) \in (-\pi/2, \pi/2)$.

(6) **(三角不等式)** 对任何复数 z_1, z_2, 得到

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|, \quad |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|. \tag{2.1.16}$$

(7) 对复数 z 的共轭复数 $\overline{z}$, 易证

$$|z| = |\overline{z}|, \quad \mathbf{arg}(z) = -\mathbf{arg}(\overline{z}). \tag{2.1.17}$$

回顾下极坐标 (r, θ) 和直角坐标 (x, y) 间的关系:

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta.$$

因此复数 $z = x + \mathbf{i}y$ 也可写成如下形式

$$z = r\cos\theta + \mathbf{i}r\sin\theta = r(\cos\theta + \mathbf{i}\sin\theta). \tag{2.1.18}$$

Euler 利用复级数证明了如下的 **Euler 公式**

$$e^{\sqrt{-1}\theta} = \cos\theta + \mathbf{i}\sin\theta. \tag{2.1.19}$$

如果承认这个公式是对的, 从 (2.1.18) 和 (2.1.19) 立即得到

$$z = re^{\mathbf{i}\theta}. \tag{2.1.20}$$

注 2.2

在这里我们解释下公式 (2.1.19) 中 $e^{\sqrt{-1}\theta}$ 的定义和证明的扼要. 首先回顾下

$$e^x = \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in \mathbf{R}.$$

如果把 $x \in \mathbf{R}$ 换成复数 $z \in \mathbf{C}$, 我们定义复指数函数

$$e^z := \sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots, \quad z \in \mathbf{C}.$$

和指数函数的收敛区域是 $\mathbf{R}$ 一样的证明, e^z 也是有定义的.

类似地, 我们把 $\sin x$ 和 $\cos x$, $x \in \mathbf{R}$, 中的实数 x 换成复数 $x \in \mathbf{C}$, 就得到了

$$\sin z = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \cos z = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad z \in \mathbf{C}.$$

在 e^z 中把 z 替换成 $\mathbf{i}z$ 就得到

$$e^{\mathbf{i}z} = \sum_{n\geq 0} \frac{(\mathbf{i}z)^n}{n!} = \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k\geq 0} (-1)^k \mathbf{i} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = \cos z + \mathbf{i}\sin z.$$

特别的就得到 $e^{\mathbf{i}\theta} = \cos\theta + \mathbf{i}\sin\theta$. ♣

2.1.3 复数的乘幂和方根

根据复数的代数运算, 对复数

$$z_i = x_i + \mathbf{i}y_i = r_i(\cos\theta_i + \mathbf{i}\sin\theta_i) = r_i e^{\mathbf{i}\theta_i}, \quad i \in \{1,2\}$$

得到

$$\begin{aligned} z_1z_2 &= r_1r_2(\cos\theta_1 + \mathbf{i}\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + \mathbf{i}\sin\theta_2) \\ &= r_1r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + \mathbf{i}(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2)] \\ &= r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2) + \mathbf{i}\sin(\theta_1+\theta_2)] \quad = \quad r_1r_2e^{\mathbf{i}(\theta_1+\theta_2)}. \end{aligned}$$

从而得到

$$|z_1z_2| = |z_1||z_2|, \quad r_1e^{\mathbf{i}\theta_1}\cdot r_2e^{\mathbf{i}\theta_2} = r_1r_2e^{\mathbf{i}(\theta_1+\theta_2)}, \quad \mathbf{Arg}(z_1z_2) = \mathbf{Arg}(z_1) + \mathbf{Arg}(z_2). \tag{2.1.21}$$

注意到, (2.1.21) 中的第三个等式是表示集合间的等式, 这是由于辐角的多值性. 一般地, 对 n 个复数 $z_i = r_k(\cos\theta_k + \mathbf{i}\sin\theta_k) = r_ke^{\mathbf{i}\theta_k}$, $1 \le k \le n$, 得到

$$\prod_{1\le i\le n} z_i = \prod_{1\le i\le n} r_i\left[\cos\left(\sum_{1\le i\le n}\theta_i\right) + \mathbf{i}\sin\left(\sum_{1\le i\le n}\theta_i\right)\right] = \prod_{1\le i\le n} r_ie^{\mathbf{i}\sum_{1\le i\le n}\theta_i}. \tag{2.1.22}$$

如果复数 $z_1 \ne 0$, 根据

$$z_2 = \frac{z_2}{z_1}z_1$$

以及 (ref2.1.21) 得到

$$|z_2| = \left|\frac{z_2}{z_1}\right||z_1|, \quad \mathbf{Arg}(z_2) = \mathbf{Arg}\left(\frac{z_2}{z_1}\right) + \mathbf{Arg}(z_1),$$

即

$$\left|\frac{z_2}{z_1}\right| = \frac{|z_2|}{|z_1|}, \quad \frac{z_2}{z_1} = \frac{r_2}{r_1}e^{\mathbf{i}(\theta_2-\theta_1)}, \quad \mathbf{Arg}\left(\frac{z_2}{z_1}\right) = \mathbf{Arg}(z_2) - \mathbf{Arg}(z_1). \tag{2.1.23}$$

在 (2.1.22) 中取 $z_1 = \cdots = z_n := z$, 得到了 z **的** n **次幂 (n power of z)**

$$z^n := \underbrace{z\cdot z\cdot\cdots\cdot z}. \tag{2.1.24}$$

如果 $z = r(\cos\theta + \mathbf{i}\sin\theta) = re^{\mathbf{i}\theta}$, 那么得到

$$z^n = r^n[\cos(n\theta) + \mathbf{i}\sin(n\theta)] = r^ne^{\mathbf{i}(n\theta)}. \tag{2.1.25}$$

注 2.3

如果定义记号

$$z^{-n} := \frac{1}{z^n}, \quad n \in \mathbf{N}_*, \tag{2.1.26}$$

那么我们可以证明 (2.1.25) 同样也成立, 若其中的 n 都换成 $-n$, 即 (2.1.25) 对任何整数 $n \in \mathbf{Z}$ 都成立 ($z^0 := 1$). 事实上, 从

$$z^{-n} = \frac{1}{r^n[\cos(n\theta) + \mathbf{i}\sin(n\theta)]} = \frac{\cos(n\theta) - \mathbf{i}\sin(n\theta)}{r^n} = r^{-n}\cos(-n\theta) + \mathbf{i}\sin(-n\theta).$$

♣

特别地, 在 (2.1.25) 中取 $n=1$, 我们得到著名的 **De Moivre 公式**

$$(\cos\theta+\mathbf{i}\sin\theta)^n=\cos(n\theta)+\mathbf{i}\sin(n\theta). \tag{2.1.27}$$

定理 2.1. (代数学基本定理)

定义在复平面上的 n 阶实系数多项式有且仅有 n 个复根. ♡

反过来, 给定复数 $z=r(\cos\theta+\mathbf{i}\sin\theta)$, 我们来求解如下方程

$$w^n=z$$

的解 w. 代数学基本定理告诉我们上述方程有且仅有 n 个根. 下面我们来显示地求解出来. 令

$$w:=\rho(\cos\varphi+\mathbf{i}\sin\varphi).$$

根据 (2.1.27) 得到

$$\rho^n[\cos(n\varphi)+\mathbf{i}\sin(n\varphi)]=r(\cos\theta+\mathbf{i}\sin\theta)$$

从而得到

$$\rho^n\cos(n\varphi)=r\cos\theta,\quad \rho^n\sin(n\varphi)=r\sin\theta.$$

化简推出

$$\rho^n=r,\quad \sin(n\varphi)=\sin\theta,$$

即

$$\rho=r^{1/n},\quad n\varphi=\theta+2k\pi\ (k\in\mathbf{Z}).$$

这样我们就得到了方程 $w^n=z$ 的 n 个根:

$$w_k=r^{1/n}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+\mathbf{i}\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right),\quad k\in\{0,\cdots,n-1\}. \tag{2.1.28}$$

从几何上来看的话, 方程 $w^n=z$ 的 n 个根是以原点为中心, $r^{1/n}$ 为半径的圆的内接正 n 边形的 n 个顶点.

例 2.2

(1) 求解 $w^n=1$.

解: 利用 (2.1.28) 直接得到 (取 $r=1$ 和 $\theta=0$)

$$w_k=\cos\frac{2k\pi}{n}+\mathbf{i}\sin\frac{2k\pi}{n},\quad k\in\{0,\cdots,n-1\}. \tag{2.1.29}$$

通常我们用 ξ_k 来表示 (2.1.30), 即

$$\xi_k=\cos\frac{2k\pi}{n}+\mathbf{i}\sin\frac{2k\pi}{n},\quad k\in\{0,\cdots,n-1\}.\ \square$$

(2) 求解 $w^4=1+\mathbf{i}$.

解: 因为 $1+\mathbf{i}=\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+\mathbf{i}\sin\frac{\pi}{4})$, 所以

$$w_k=2^{1/8}\left(\cos\frac{(1+8k)\pi}{16}+\mathbf{i}\sin\frac{(1+8k)\pi}{16}\right),\quad k\in\{0,1,2,3\}.\ \square$$

♠

2.1.4 复球面和扩充复平面

考虑 $\mathbf{R}^3$ 中的球面

$$\mathbf{S}^2=\{(x^1,x^2,x^3)\in\mathbf{R}^3:(x^1)^2+(y^1)^2+(z^1)^2=1\}.$$

它上面有两个特殊的点

$$N:=(0,0,1),\quad S:=(0,0,-1)$$

分别称为**北极 (north pole)** 和**南极 (south pole)**.

任取球面上的点 $P=(x^1,x^2,x^3)$, 直线 $\overline{NP}$ 交复平面 $\mathbf{C}$ 于点 $z=(x,y)$; 反之任取复平面上的点 $z=(x,y)$, 直线 $\overline{Nz}$ 交球面 $\mathbf{S}^2$ 于点 $P=(x^1,x^2,x^3)$. 根据相似三角形的性质, 立即得到如下关系

$$x=\frac{x^1}{1-x^3},\quad y=\frac{x^2}{1-x^3}. \tag{2.1.30}$$

上面描述的就是**球极投影 (stereographic projection).**

通过 (2.1.30), 我们可以把整个复平面 $\mathbf{C}$ 一对一地投影到 $\mathbf{S}^2\setminus\{N\}$. 一个很自然的问题是

什么样的点是一对一地和 N 对应？直观上应该是“无穷原点”.

复平面和无穷原点 ∞ 合起来称为**扩充复平面 (extended complex plane)**, 并记为 $\overline{\mathbf{C}}$ 这样 ∞ 就和 N 一对一对应.

注 2.4

扩充复平面中涉及到 ∞ 的代数运算作如下规定:

- 加法:

$$z+\infty=\infty+z=\infty,\quad z\neq\infty.$$

- 减法:

$$z-\infty=\infty-z=\infty,\quad z\neq\infty.$$

- 乘法:

$$z\cdot\infty=\infty\cdot z=\infty,\quad z\neq 0.$$

- 除法:

$$\frac{z}{\infty}=0,\quad \frac{\infty}{z}=\infty\ (z\neq\infty),\quad \frac{z}{0}=\infty\ (z\neq 0\ \text{但可以为}\ \infty).$$

♣

2.1.5 复数的应用

第一个直接的应用是用复数来表示单位圆

$$\mathbf{S}^1=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2:x^2+y^2=1\}=\{z\in\mathbf{C}:|z|=1\}, \tag{2.1.31}$$

这是因为对任何复数 $z=x+\mathbf{i}y$, 有 $|z|^2=x^2+y^2$. 若把复数 z 表示成 $z=re^{\mathbf{i}\theta}$, 则

$$z\in\mathbf{S}^1\iff z=e^{\mathbf{i}\theta},\quad \theta\in\mathbf{R}.$$

我们知道,复数 $e^{\mathbf{i}\theta}$ 和 $z = e^{\mathbf{i}(\theta+2k\pi)}, k \in \mathbf{Z}$, 在复平面表示同一个点, 因此 (2.1.31) 可写成

$$\mathbf{S}^1 = \left\{ e^{\mathbf{i}\theta} : \theta \in [0, 2\pi] \right\} = \left\{ e^{2\pi\mathbf{i}\theta} : \theta \in [0, 1] \right\}. \tag{2.1.32}$$

例 2.3

考虑两个复数

$$z_1 = x_1 + \mathbf{i}y_1, \quad z_2 = x_2 + \mathbf{i}y_2$$

并把它们在复平面上的点分别表示为

$$P_1 = (x_1, y_1), \quad P_2 = (x_2, y_2).$$

通过上述两点 P_1 和 P_2 的直线的参数方程为

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_1} + t\overrightarrow{P_1P_2}, \quad t \in \mathbf{R}.$$

因此该直线方程的复数形式为

$$z = z_1 + t(z_2 - z_1), \quad t \in \mathbf{R}.$$

作为推论得到, 复平面上三点 z_1, z_2, z_3 共线的充要条件为

$$\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} = t$$

这里 t 为非零实数.

练习 2.2

(1) 证明复平面上的直线方程可写成

$$\alpha\overline{z} + \overline{\alpha}z = c$$

其中 $\alpha \neq 0$ 为复常数, c 为实常数

(2) 证明复平面上的圆周的方程可写成

$$z\overline{z}\alpha + \alpha\overline{z} + \overline{\alpha}z + c = 0$$

其中 α 为复常数, c 为实常数.

例 2.4

求下列方程所表示的曲线:

(1) $|z + \mathbf{i}| = 2$.

(2) $|z - 2\mathbf{i}| = |z + 2|$.

(3) $|z| > 1$ 且 $\mathbf{Im}(z) > 0$.

(4) $\mathbf{Im}(\mathbf{i} + \overline{z}) = 4$.

解: (1) 该方程表示复平面上与 $-\mathbf{i}$ 距离为 2 的点的轨迹, 即中心为 $-\mathbf{i}$ 半径为 2 的圆. 若用直角坐标表示, 我们得到

$$x^2 + (y+1)^2 = 4 \quad 或 \quad x^2 + y^2 + 2y = 3.$$

(2) 该方程表示复平面上到 $2\mathbf{i}$ 和 -2 距离相等的点的轨迹, 即连接这两点的线段的

垂直平分线. 若用直角坐标表示, 我们得到

$$y = -x.$$

(3) 该方程表示在单位元之外且包含在上半复平面的部分. 若用直角坐标表示, 我们得到

$$x^2 + y^2 > 1 \quad \text{且} \quad y > 0.$$

(4) 如果令 $z = x + \mathbf{i}y$, 我们得到

$$\mathbf{i} + \overline{z} = x + \mathbf{i}(1 - y).$$

因此该方程表示 $1 - y = 4$, 即 $y = -3$. □

根据复数乘法, 我们知道 $e^{\mathbf{i}\theta}z$ 表示在复平面上, 把 z 逆时针旋转 θ 角后得到的复数.

例 2.5

假设正三角形的两个顶点为 $z_1 = 1$ 和 $z_2 = 2 + \mathbf{i}$, 求第三个顶点.

解: 第三个顶点 z_3 是把复数 $z_2 - z_1$ 逆时针旋转 $\pi/3$ 角度, 或顺时针旋转 $-\pi/3$ 角度. 因此

$$z_3 - z_1 = e^{\pm\pi\mathbf{i}/3}(z_2 - z_1) = \frac{3 \mp \sqrt{3}}{2} + \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}\mathbf{i}. \quad \square$$

2.2 复平面的拓扑

假设 z_0 是复平面 $\mathbf{C}$ 中的一个点.

(1) z_2 的**邻域 (neighborhood)** 是形如

$$U(z_0, \delta) := \{z \in \mathbf{C} : |z - z_0| < \delta\} \tag{2.2.1}$$

这里 $\delta > 0$.

(2) z_2 的**去心领域**是形如

$$\mathring{U}(x_0, \delta) := U(z_0, \delta) \setminus \{z_0\} = \{z \in \mathbf{C} : 0 < |z - z_0| < \delta\} \tag{2.2.2}$$

这里 $\delta > 0$.

如果 z_0 是扩充复平面 $\mathbf{C}^*$ 中的无穷远点 ∞, 根据复球面 $\mathbf{S}^2$ 上北极点的邻域, 我们定义 ∞ 的邻域为

$$U(\infty, M) := \{z \in \overline{\mathbf{C}} : |z| > M\}, \tag{2.2.3}$$

而 ∞ 的去心邻域为

$$\mathring{U}(\infty, M) := \{z \in \mathbf{C} : |z| > M\} = U(\infty, M) \setminus \{\infty\}. \tag{2.2.4}$$

这里 $M > 0$.

假设 G 是复平面 $\mathbf{C}$ 里的点集, 而 $z_0 \in G$. 称 z_0 为 G 的**内点 (interior point)** 如果存在正数 $\delta > 0$ 满足 $U(z_0, \delta) \subseteq G$. G 的所有内点构成的集合记为 $\mathring{G}$.

(1) G 称为**开集 (open set)** 如果 G 中的每个点都是内点, 即 $G = \mathring{G}$.

(2) G 称为**连通的 (connected)** 如果 G 内任何两点都能用完全包含在 G 内的一条连续曲线连接起来.

(3) G 称为**区域 (domain)** 如果 G 是连通的开集.

假设 D 是一区域. 如果 $z_0 \in \mathbf{C}$ 的任意邻域内既含有 D 中的点又还有 $\mathbf{C} \setminus D$ 中的点, 则称 z_0 为 D 的**边界点 (boundary point)**. D 的所有边界点构成的集合记为 ∂D, 称为 D 的**边界 (boundary)**.

(1) 区域 D 不包含 ∂D.

(2) 令 $\overline{D} := D \cup \partial D$, 称为 D 的**闭区域 (closed domain)**.

(3) 一个区域的边界可能由几条曲线和一些离散点构成, 比如 $D = \{z \in \mathbf{C} : 0 < |z| < 1\}$.

(4) 区域 D 称为**有界区域 (bounded domain)** 如果存在正数 $M > 0$ 使得 $|z| \leq M$ 对任意 $z \in D$ 都成立. 否则的话, 我们称 D 为**无界区域 (unbounded domain)**.

(5) **圆环域**是形如

$$D = \{z \in \mathbf{C} : r_1 < |z - z_0| < r_2\}$$

这里 $z_0 \in \mathbf{C}$ 和 $r_1, r_2 > 0$.

平面上一条**连续曲线 (continuous curve)** C 可用参数方程

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad t \in [a, b] \tag{2.2.5}$$

来表示, 其中 $x(t), y(t) \in C([a, b])$, 或者 $z = z(t)$, 这里 $z(t) := x(t) + \mathbf{i}y(t)$. 称 $z(a)$ 和 $z(b)$ 分别为这条曲线 C 的**起点 (starting point)** 和**终点 (ending point)**.

(1) 如果 $x(t), y(t) \in C^1([a, b])$ 且对任何 $t \in [a, b]$ 都有

$$[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 \neq 0$$

成立, 则称曲线 C 为**光滑曲线 (smooth curve)**. 由若干条光滑曲线连接而成的曲线称为**分段光滑曲线 (piecewise smooth curve)**.

(2) 如果曲线 C 不在内部自相交 (即不存在 $t_1 \in (a, b)$, $t_2 \in [a, b]$, $t_1 \neq t_2$, 满足 $z(t_1) = z(t_2)$), 那么称 C 为**简单曲线 (simple curve)**.

(3) 起点和终点重合的简单曲线称为**简单闭曲线 (simple closed curve)**.

(4) 著名的 **Jordan 定理**告诉我们, 任意的简单闭曲线 C 把整个复平面 $\mathbf{C}$ 唯一地分成三个互不相交的点集, 其中一个是有界区域 (称为 C 的内部), 一个是无界区域 (称为 C 的外部), 以及它们的公共边界 C.

假设 D 是复平面上的一个区域.

(1) D 称为**单连通区域 (simply-connected domain)** 如果任意一条 D 内的简单闭曲线 C, 它的内部总属于 D. 否则的话, 称 D 为**多连通区域 (multi-connected domain)**

(2) 区域 D 是单连通区域当且仅当 D 内的任意简单闭曲线都可以在 D 内连续收缩到

D 内的一点.

(3) $|z-z_0|=R$、$\mathbf{Im}(z)>0$、$0<\mathbf{arg}(z)<\varphi$ 和 $a<\mathbf{Im}(z)<b$ 等都是单连通区域, 而 $|z-z_0|>R$ 和 $r<|z-z_0|<R$ 都是多连通区域.

为了更加深刻地理解单连通区域和多连通区域, 我们引入拓扑空间的概念.

2.2.1 拓扑空间

2.2.2 紧性

2.2.3 Jordan 曲线

2.2.4 连通性和道路连通性

2.2.5 同伦和连通区域

2.3 复变函数

复变函数的定义和《数学分析》里的一元函数定义相类似.

定义 2.1

假设 $G\subseteq\mathbf{C}$ 是点集. 如果存在一个法则 f, 使得对每个 $z\in G$, 都存在唯一的复数 w 与之对应, 那么称 f 为定义在 G 上的一个 **(单值) 复变函数 (single-valued complex function)**, 记作

$$w=f(z),\quad z\in G,\tag{2.3.1}$$

其中 G 称为 f 的**定义域 (domain)** 记作 $G=\mathbf{Dom}(f)$, 而把 $\mathbf{Rang}(f)\equiv G^*:=\{w\in\mathbf{C}:w=f(z),\ z\in G\}$ 称为 f 的**值域 (range)**.

如果每个 $z\in G$ 对应多个或无穷多个 w 的值, 那么称 f 是一个**多值复变函数 (multi-valued complex function)**.

♣

我们不加说明, 复变函数总是指单值复变函数.

例 2.6

(1) $\mathbf{C}$ 上的单值复变函数的例子: $w=az+b$ (a,b 为复常数)、$w=z^2$、$w=\bar{z}$ 等.

(2) $\mathbf{C}\setminus\{0\}$ 上的多值复变函数的例子: $w=z^{-1/2}$、$w=z^{1/n}$ ($z\neq0$ 且 $n>1$ 为正整数)、$w=\mathbf{Arg}(z)$ ($z\neq0$) 等.

♠

2.3.1 复变函数的基本性质

假设 $w=f(z)$ 是定义在 G 上的一个复变函数. 令

$$z=x+\mathbf{i}y,\quad w=u+\mathbf{i}v,$$

那么得到 G 上的两个二元实变函数

$$u = u(x,y) = \mathbf{Re}(f(x+\mathbf{i}y)), \quad v = v(x,y) = \mathbf{Im}(f(x+\mathbf{i}y)). \tag{2.3.2}$$

反之给定两个二元实变函数 $u = u(x,y)$ 和 $v = v(x,y)$, 那么确定了 G 上的一个复变函数 $w = u(x,y) + \mathbf{i}v(x,y) = f(z)$, 这里 $z = x + \mathbf{i}y$. 因此复变函数对应于两个二元实变函数.

例 2.7

(1) 复变函数 $w = f(z) = \overline{z}$ 可以化简成, 如果 $z = x + \mathbf{i}y$,

$$w = x - \mathbf{i}y.$$

因此 $u = x$ 和 $v = -y$. 观察到

$$u_x = 1, \quad v_y = -1, \quad u_y = 0, \quad v_x = 0.$$

(2) 复变函数 $w = f(z) = z^2$ 可以化简成, 如果 $z = x + \mathbf{i}y$,

$$w = (x + \mathbf{i}y)^2 = (x^2 - y^2) + \mathbf{i}(2xy).$$

因此 $u = x^2 - y^2$ 和 $v = 2xy$. 观察到

$$u_x = 2x = v_y, \quad u_y = -2y = -v_x.$$

即 $f(z)$ 的实部和虚部满足所谓的 **Cauchy-Riemann 方程 (Cauchy-Riemann equation)**. 详细的内容之后会讲到. ♠

复变函数 $w = f(z)$ 可看成 z 平面上的点集 G 到 w 平面上的点集 G^* 的一个映射, 这里我们称 $w \in G^*$ 是 $z \in G$ 在映射 f 下的**像 (image)** 而把 z 称为 w 的**原像 (preimage)**. 此时我们记作 $f : G \to G^*$.

例 2.8

(1) 复变函数 $w = \overline{z}, z \in G$, 是把 z 平面里的点集 G 映成 w 平面里的点集 G^*. 如果把 z 平面和 w 平面等同起来, 那么 G 和 G^* 就是关于实轴对称的.

(2) 复变函数 $w = z^2$ 的实部和虚部分别为

$$u = x^2 - y^2, \quad v = 2xy.$$

因此它把两族等轴双曲线 $x^2 - y^2 = c_1$ 和 $2xy = c_2$ 分别映成 w 平面上的两族平行直线 $u = c_1$ 和 $v = c_2$.

同样, z 平面上的两族直线 $x = \lambda$ 和 $y = \mu$ 分别映成 w 平面上的两族抛物线

$$v^2 = 4\lambda^2(\lambda^2 - u), \quad v^2 = 4\mu^2(\mu^2 + u).$$ ♠

假设复变函数 $w = f(z)$ 的定义域为 z 平面上的点集 G, 值域为 w 平面上的点集 G^*. 对 G^* 中的每点 w 必对应 G 中的一个 (或几个) 点, 从而确定了 G^* 上的一个单值 (或多值) 复变函数 $z = f^{-1}(w) = g(w)$, 称为复变函数 $w = f(z)$ 的**反函数 (inverse function)** 或映射 $w = f(z)$ 的**逆映射 (inverse map)**.

(1) 根据定义得到 $w = f(z) = f(f^{-1}(w)), w \in G^*$.

(2) 当反函数为单值时, 有 $z = f^{-1}(f(z)), z \in G$.

(3) 如果复变函数 $w = f(z)$, $z \in G$(或映射 $f : G \to G^*$) 和它的反函数 $z = f^1(w)$, $w \in G^*$(或逆映射 $f^{-1} : G^* \to G$) 都是单值的, 那么称该函数 $w = f(z)$(或映射 $f : G \to G^*$) 是**一一的 (one-to-one)**.

(4) 复变函数 $w = f(z)$, $z \in G$, 称为**单叶的 (injective)**, 如果对 G 中的任意两个不同点 $z_1 \neq z_2$ 都有 $f(z_1) \neq f(z_2)$. 因此, $w = f(z)$ 是单叶函数当且仅当映射 $f : G \to G^*$ 是一一的.

2.3.2 复变函数的极限

复变函数极限的定义和一元函数极限的定义类似, 但是其很多性质却和二元函数类似.

定义 2.2

假设复变函数 $w = f(z)$ 定义在 $z_0 \in \mathbf{C}$ 的某个去心邻域 $\mathring{U}(z_0, \rho)$ 内. 如果存在一个复常数 A 使得对任意给定的 $\epsilon > 0$, 都有一个正常数 $\delta \in (0, \rho]$ 满足

$$|f(z) - A| < \epsilon, \quad \text{对任意} \quad z \in \mathring{U}(z_0, \delta),$$

我们称当 $z \to z_0$ 时函数 $w = f(z)$ 的**极限 (limit)** 存在且为 A, 并记作

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = A \quad \text{或} \quad f(z) \to A \quad \text{当 } z \to z_0 \text{ 时}. \tag{2.3.3}$$

♣

假设 $z_0 = x_0 + \mathbf{i}y_0$, $A = u_0 + \mathbf{i}v_0$ 和 $w = f(z) = u(x, y) + \mathbf{i}v(x, y)$, 那么

$$|f(z) - A| = \sqrt{(u(x, y) - u_0)^2 + (v(x, y) - v_0)^2}, \quad |z - z_0| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}.$$

定理 2.2

假设 $f(z) = u(x, y) + \mathbf{i}v(x, y)$ 定义在 $z_0 = x_0 + \mathbf{i}y_0$ 的某个去心邻域 $\mathring{U}(z_0, \rho)$ 内, $A = u_0 + \mathbf{i}v_0$, 则 $\lim_{z \to z_0} f(z) = A$ 的充要条件是

$$\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} u(x, y) = u_0, \quad \lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} v(x, y) = v_0. \tag{2.3.4}$$

♡

上述定理结合二元函数极限的性质, 我们立即得到

命题 2.2

(1) **(极限的唯一性)** 如果 $\lim_{z \to z_0} f(z) = A$ 和 $\lim_{z \to z_0} f(z) = B$, 那么 $A = B$.

(2) **(局部有界性)** 如果 $w = f(z)$ 在 $z \to z_0$ 时的极限存在, 则 $f(z)$ 必在 z_0 的某个去心邻域内有界.

(3) **(四则运算法则)** 假设 $\lim_{z \to z_0} f(z) = A$ 和 $\lim_{z \to z_0} g(z) = B$. 则

$$\lim_{z \to z_0} [f(z) \pm g(z)] = A \pm B, \quad \lim_{z \to z_0} f(z)g(z) = AB. \tag{2.3.5}$$

如果 $B \neq 0$, 那么有

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{A}{B}. \tag{2.3.6}$$

♡

例 2.9

(1) 证明当 $z \to 0$ 时, 函数 $f(z) = \mathbf{Re}(z)/|z|$ 的极限不存在.

2.3.3 复变函数的连续性

复变函数的连续概念和一元函数的连续概念类似, 但是其很多性质却和二元函数类似.

定义 2.3

假设复变函数 $w = f(z)$ 定义在 z_0 的某个邻域 $U(z_0, \rho)$ 内, 若

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0),$$

则称 $f(z)$ **在 z_0 处连续 (continuous at z_0)**. 如果 $f(z)$ 在区域 D 内处处连续, 则称 $f(z)$ **在 D 内连续 (continuous in D)**, 并记作 $f \in C(D)$.

定理 2.3

复变函数 $f(z) = u(x, y) + \mathbf{i}v(x, y)$ 在 $z_0 = x_0 + \mathbf{i}y_0$ 处连续的充要条件是, 二元函数 $u(x, y)$ 和 $v(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处同时连续.

例 2.10

(1) $f(z) = \ln(x^2 + y^2) + \mathbf{i}(x^2 - y^2)$ 在 $\mathbf{C} \setminus \{0\}$ 内处处连续.

命题 2.3

(1) 假设复变函数 $f(z)$ 和 $g(z)$ 在 z_0 处连续, 则 $f(z) \pm g(z)$、$f(z)g(z)$ 和 $f(z)/g(z)$(此时 $g(z_0) \neq 0$) 都在 z_0 处连续且满足

$$\lim_{z \to z_0} [f(z) \pm g(z)] = \lim_{z \to z_0} f(z) \pm \lim_{z \to z_0} g(z), \quad \lim_{z \to z_0} f(z)g(z) = \lim_{z \to z_0} f(z) \cdot \lim_{z \to z_0} g(z)$$

和

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f(z_0)}{g(z_0)}.$$

(2) 假设复变函数 $h = g(z)$ 在 z_0 处连续, 而复变函数 $w = f(h)$ 在 $h = g(z_0)$ 处连续, 则复合函数 $w = f[g(z)] = (f \circ g)(z)$ 在 z_0 处连续.

例 2.11

(1) 有理整式函数 (即多项式)

$$w = P(z) = \sum_{0 \leq i \leq n} a_i z^i, \quad z \in \mathbf{C},$$

其中 a_i 是复常数, 在 $\mathbf{C}$ 上处处连续.

(2) 有理分式函数

$$w = R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

其中 $P(z)$ 和 $Q(z)$ 都是多项式, 在 $\mathbf{C} \setminus \{Q(z) = 0\}$ 内处处连续.

(3) $w = f(z)$ 在 z_0 处连续当且仅当 $\overline{f(z)}$ 在 z_0 连续.

第三章 全纯函数

3.1 全纯函数

3.1.1 复变函数的导数

假设复变函数 $w = f(z)$ 定义在区域 $D \subseteq \mathbf{C}$ 上, 且 $z_0 \in D$. 根据区域定义, 存在 z_0 的邻域 $U(z_0, \delta)$ 使得它完全包含在 D 内. 这样只要 $z \in U(z_0, \delta)$, 差 $f(z) - f(z_0)$ 有意义.

定义 3.1

假设函数 $w = f(z)$ 定义在区域 $D \subseteq \mathbf{C}$ 上, 点 $z_0 \in D$. 如果极限

$$f'(z_0) := \left.\frac{dw}{dz}\right|_{z=z_0} = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \tag{3.1.1}$$

存在, 则称 f 在 **z_0 处可导**, 并把上述极限值称为 $f(z)$ 在 **z_0 处的导数**. 如果函数 $f(z)$ 在区域 D 内处处可导, 则称 $f(z)$ 在 **D 内可导**.

♣

在上述定义中, “$z \to z_0$”是表示在复平面 $\mathbf{C}$ 上, 点 z 沿着任意方式趋于 z_0. 如果令

$$z_0 = (x_0, y_0), \quad z = (x, y),$$

那么从 z 到 z_0 至少有三条特殊的路径:

$$(x, y) \to (x, y_0) \to (x_0, y_0), \quad (x, y) \to (x_0, y) \to (x_0, y_0), \quad (x, y) \to (x_0, y_0) \text{ (直线段)}.$$

我们即将看到前面两条路径会导出一个著名的方程——Cauchy-Riemann 方程.

为了方便期间, 我们引入记号

$$\Delta z := z - z_0. \tag{3.1.2}$$

此时 (3.1.1) 可写为

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}. \tag{3.1.3}$$

3.1.2 复变函数的微分

复变函数的微分可类似定义. 假设复变函数 $w = f(z)$ 在区域 D 上有定义, 且 $z_0 \in D$. 如果存在常数 A 使得函数

$$\rho(z) := \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - A \tag{3.1.4}$$

满足

$$\lim_{z \to z_0} \rho(z) = 0, \tag{3.1.5}$$

则称 f 在 **z_0 处可微**, 而把 $A(z - z_0)$ 称为 $f(z)$ 在 **z_0 处的微分**. 利用无穷小记号, (3.1.5) 等价于

$$f(z) = f(z_0) + A(z - z_0) + o(z - z_0), \quad \text{当 } z \to z_0, \tag{3.1.6}$$

或

$$f(z_0+\Delta z)=f(z_0)+A\Delta z+o(\Delta z), \quad 当\ \Delta z\to 0. \tag{3.1.7}$$

如果函数 $f(z)$ 在区域 D 内处处可微, 则称 $f(z)$ 在***D* 内可微**.

(1) 函数 $f(z)$ 在 $z_0\in D$ 处可导等价于在 z_0 处可微.

(2) 函数 $f(z)$ 在 $z_0\in D$ 处可导, 则必在 z_0 处连续; 但是反之不一定成立.

例 3.1

(1) 证明 $f(z)=z^n, n\in\mathbf{N}^*$, 在 $\mathbf{C}$ 内可导, 且 $f'(z)=nz^{n-1}$.

解: 利用二项式定理得到

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{\Delta z\to 0}\frac{(z+\Delta z)^n-z^n}{\Delta z} = \lim_{\Delta z\to 0}\sum_{0\le k\le n-1}\binom{n}{k}z^k(\Delta z)^{n-k-1} \\ &= \binom{n}{n-1}z^{n-1} = nz^{n-1}. \end{aligned}$$

(2) 讨论函数 $f(z)=2x-\mathbf{i}y$ 在 $\mathbf{C}$ 内的连续性和可导性.

解: 因为实部 $2x$ 和虚部 y 都是关于 x,y 的二元连续函数, 所以 $f(z)$ 在 $\mathbf{C}$ 内处处连续. 对任意 $z=x+\mathbf{i}y\in\mathbf{C}$, 有

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta)-f(z)}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{2\Delta x-\mathbf{i}\Delta y}{\Delta x+\mathbf{i}\Delta y}.$$

如果 $z+\Delta z$ 沿着平行于实轴的直线趋于 z, 那么得到

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{2\Delta z-\mathbf{i}\Delta y}{\Delta x+\mathbf{i}\Delta y}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\Delta x}{\Delta x}=2;$$

如果 $z+\Delta z$ 沿着平行于虚轴的直线趋于 z, 那么得到

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{2\Delta x-\mathbf{i}\Delta y}{\Delta x+\mathbf{i}\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{-\mathbf{i}\Delta y}{\mathbf{i}\Delta y}=-1.$$

因此函数 $f(z)=2x-\mathbf{i}y$ 在 $\mathbf{C}$ 内处处不可导. ♠

利用数学分析里类似的证法, 我们得到

命题 3.1

(1) 假设复变函数 $f(z)$ 和 $g(z)$ 在区域 $D\subseteq\mathbf{C}$ 内的 z_0 处可导. 则

$$\begin{aligned} [f\pm g]'(z_0) &= f'(z_0)\pm g'(z_0), \\ (fg)'(z_0) &= f'(z_0)g(z_0)+f(z_0)g'(z_0), \\ \left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) &= \frac{f'(z_0)g(z_0)-f(z_0)g'(z_0)}{g^2(z_0)} \quad (g(z_0)\neq 0). \end{aligned}$$

(2) 假设复变函数 $h=g(z)$ 定义在区域 $D\subseteq\mathbf{C}$ 上且在 z_0 处可导, 而 $w=f(h)$ 定义在区域 $E\subseteq\mathbf{C}$ 上 (这里 $g(D)\subseteq E$) 且在 $h_0=g(z_0)$ 处可导. 则复合函数 $w=f(g(z))=(f\circ g)(z)$ 在 z_0 处可导且满足

$$(f\circ g)'(z_0)=f'(g(z_0))g'(z_0).$$

(3) 如果 $w=f(z)$ 和 $z=g(w)$ 互为反函数, $g'(w_0)\neq 0$, 且均可导, 则 $f'(z_0)=1/g'(w_0)$, 这里 $z_0:=g(w_0)$. ♡

3.1.3 全纯函数

首先研究复变函数 $f(z)=|z|^2$. 任取 $z_0=x_0+\mathbf{i}y_0\in\mathbf{C}$, 考虑

$$\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}=\frac{|z_0+\Delta z|^2-|z_0|^2}{\Delta z}=\overline{z_0}+\overline{\Delta z}+z_0\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}.$$

如果 $z_0=0$, 那么得到

$$f'(0)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(\Delta)-f(0)}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\overline{\Delta z}=0.$$

如果 $z_0\neq 0$, 我们考虑 $z_0+\Delta z$ 沿着直线 $y-y_0=k(x-x_0)$ 趋于 z_0; 此时就得到

$$\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}=\frac{\Delta x-\mathbf{i}\Delta y}{\Delta x+\mathbf{i}\Delta y}=\frac{1-\mathbf{i}k}{1+\mathbf{i}k}.$$

由于 k 的任意性, 这就表明此时 $f(z)$ 在 z_0 处不可导.

上面这个例子就表明, 存在仅在一点可导的复变函数.

定义 3.2

如果复变函数 $w=f(z)$ 在点 $z_0\in\mathbf{C}$ 处及其某个邻域内处处可导, 则称 $f(z)$ 在$\boldsymbol{z_0}$ **处全纯**. 如果 $f(z)$ 在区域 $D\subseteq\mathbf{C}$ 内处处全纯, 则称 $f(z)$ 在$\boldsymbol{D}$ **内全纯**, 此时也称 $f(z)$ 是 D 内的一个**全纯函数**.

如果 $f(z)$ 在 z_0 不全纯, 则称 z_0 为 $f(z)$ 的**奇点**. ♣

根据这个定义, 函数 $f(z)=|z|^2$ 在整个复平面 $\mathbf{C}$ 内处处不全纯.

注 3.1

复变函数 $w=f(z)$ 在区域 D 内全纯和在 D 内可导是等价的, 但是 $w=f(z)$ 在一点处全纯要比在一点处可导需要更多的条件. ♣

1851 年, Cauchy陆续发表了几篇关于复变函数性质的论文, 同时引入了一些新的术语. 当时他用 “synectique’’ 来表示全纯函数. 直到后来, Charles Auguste Briot和Jean Claude Bouquet 才引入现在的术语——全纯.

命题 3.2

(1) 如果复变函数 $f(z)$ 和 $g(z)$ 在区域 D 内全纯, 那么 $f(z)\pm g(z)$、$f(z)g(z)$ 和 $f(z)/g(z)$ (除去 $g(z)=0$ 的点) 都在 D 内全纯.

(2) 如果复变函数 $h=g(z)$ 在 z 平面上的区域 D 内全纯, $w=f(h)$ 在 h 平面上的区域 E 内全纯, 且 $g(D)\subseteq E$, 那么复合函数 $w=f(g(z))=(f\circ g)(z)$ 在 D 内全纯. ♡

例 3.2

(1) 复变函数 $f(z)=z^2$ 在 $\mathbf{C}$ 内处处全纯.

(2) 复变函数 $f(z)=2x-\mathbf{i}y$ 在 $\mathbf{C}$ 内处处不全纯.

(3) 复变函数 $f(z)=1/z$ 在 $\mathbf{C}\setminus\{0\}$ 内处处全纯, 且 $z=0$ 是一个奇点. ♠

3.1.4 Cauchy-Riemann 方程

假设复变函数 $w = f(z) = u + \mathbf{i}v$, 这里 $u = u(x, y)$ 和 $v = v(x, y)$ 分别为 w 的实部和虚部, 在点 $z = x + \mathbf{i}y$ 处可导. 则根据定义得到

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}.$$

如果令 $\Delta z = \Delta x + \mathbf{i}\Delta y$ 和 $f(z + \Delta z) - f(z) = \Delta u + \mathbf{i}\Delta v$, 我们得到

$$\Delta u = u(x + \Delta x, y + \Delta y) - u(x, y), \quad \Delta v = v(x + \Delta x, y + \Delta y) - v(x, y).$$

因此

$$f'(z) = \lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \frac{\Delta u + \mathbf{i}\Delta v}{\Delta x + \mathbf{i}\Delta y}.$$

注意到上述中 $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$ 的方式是任意的, 特别地, 我们考虑两种特殊的趋近方式:

$$(\Delta x \to 0, \Delta y = 0) \quad \text{和} \quad (\Delta x = 0, \Delta y \to 0).$$

由第一种方式得到

$$f'(z) = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta u}{\Delta x} + \mathbf{i}\frac{\Delta v}{\Delta x} \right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \mathbf{i} \lim_{\Delta x \to} \frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

即可知, $u_x := \partial u / \partial x$ 和 $v_x := \partial v / \partial x$ 都存在且满足

$$f'(z) = u_x + \mathbf{i}v_x. \tag{3.1.8}$$

而由第二种方式得到

$$f'(z) = \lim_{\Delta y \to 0} \left(\frac{\Delta v}{\Delta y} - \mathbf{i}\frac{\Delta u}{\Delta y} \right) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta y} - \mathbf{i} \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta y}.$$

即可知, $u_y := \partial u / \partial y$ 和 $v_y := \partial v / \partial xy$ 都存在且满足

$$f'(z) = v_y - \mathbf{i}u_y. \tag{3.1.9}$$

比较 (3.1.8) 与 (3.1.9) 得到了著名的 **Cauchy-Riemann 方程**

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x. \tag{3.1.10}$$

方程 (3.1.10) 首次出现在 1752 年Jean le Rond d'Alembert 的论文《Essai d'une nouvelle théorie de la résistance des fluides》中, 之后在 1797 年, Euler 在论文《Ulterior disquisitio de formulis integralibus imaginariis》中把这个方程和全纯函数联系起来了. 1814 年, Cauchy在《Mémoire sur les intégrales définies》中利用该方程来构建他自己的函数论. 1851 年, Riemann在他博士论文《Grundlagen für eine allgemeine Theories der Funktionen einer veränderlichen komplexen Grösse》中也出现了这个方程.

定理 3.1. (复变函数可导的必要条件)

如果复变函数 $f(z) = u + \mathbf{i}v$, 这里 $u = u(x, y)$ 和 $v = v(x, y)$, 定义在区域 D 内, 且在点 $z = x + \mathbf{i}y \in D$ 处可导, 那么

(1) u_x, u_y, v_x, v_y 在 (x, y) 处存在,

(2) u 和 v 在 (x, y) 处满足 Cauchy-Riemann 方程 (3.1.10).

♡

例 3.3

满足**定理 3.1** 条件的复变函数未必是可导的. 比如考虑函数 $f(z)=\sqrt{|xy|}$, $z=x+\mathbf{i}y\in\mathbf{C}$. 此时

$$u=u(x,y)=\sqrt{|xy|},\quad v=v(x,y)=0.$$

计算得到

$$u_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(\Delta x,0)-u(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{0}{\Delta x}=0.$$

同样可得 $u_y(0,0)=v_x(0,0)=v_y(0,0)=0$. 但是 $f(z)=\sqrt{|xy|}$ 在 $z=0$ 处不可导, 这是因为假设 $f'(0)$ 存在,

$$f'(0)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(\Delta z)-f(0)}{\Delta z}=\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\frac{\sqrt{|\Delta x\Delta y|}}{\Delta x+\mathbf{i}\Delta y}.$$

如果考虑 $(\Delta x,\Delta y=k\Delta x)\to(0,0)$, 那么得到

$$f'(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{|k|}|\Delta x|}{\Delta x(1+\mathbf{i}k)}$$

这是不可能的. ♠

这个例子表明, “u_x,u_y,v_x,v_y 在 (x,y) 处存在”这个条件还是较弱. 因为二元函数 $u=u(x,y)$ 和 $v=v(x,y)$ 可微, 可以推出四个偏导数 u_x,u_y,v_x,v_y 都存在, 但是反之不一定对.

定理 3.2. (复变函数可导的充要条件)

如果复变函数 $f(z)=u+\mathbf{i}v$, 这里 $u=u(x,y)$ 和 $v=v(x,y)$, 定义在区域 D 内, 那么 $f(z)$ 在点 $z=x+\mathbf{i}y\in D$ 处可导的充要条件是

(1) $u=u(x,y)$ 和 $v=v(x,y)$ 在 (x,y) 处可微,

(2) u 和 v 在 (x,y) 处满足 Cauchy-Riemann 方程 (3.1.10). ♡

证: 假设 $f(z)$ 在点 $z=x+\mathbf{i}y$ 处可导. 则得到

$$f(z+\Delta z)-f(z)=f'(z)\Delta z+\rho(\Delta z)\Delta z$$

其中 $\lim_{\Delta z\to 0}\rho(\Delta z)=0$. 若令

$$f(z+\Delta z)-f(z)=\Delta u+\mathbf{i}\Delta v,\quad f'(z)]=a+\mathbf{i}b,\quad \rho(\Delta z)=\rho_1+\mathbf{i}\rho_2,$$

则得到

$$\begin{aligned}\Delta u+\mathbf{i}\Delta v &= (a+\mathbf{i}b)(\Delta x+\mathbf{i}\Delta y)+(\rho_1+\mathbf{i}\rho_2)(\Delta x+\mathbf{i}\Delta y)\\ &= (a\Delta x-b\Delta y+\rho_1\Delta x-\rho_2\Delta y)+\mathbf{i}(b\Delta x+a\Delta y+\rho_2\Delta x+\rho_1\Delta y).\end{aligned}$$

实部与虚部分离, 我们有

$$\Delta u=a\Delta x-b\Delta y+\rho_1\Delta x-\rho_2\Delta y,\quad \Delta v=b\Delta x+a\Delta y+\rho_2\Delta x+\rho_1\Delta y.$$

根据 $\lim_{\Delta z\to 0}\rho(\Delta z)=0$, 可知 $\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\rho_1=\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\rho_2=0$. 而

$$\frac{\Delta x}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}},\quad \frac{\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$$

是有界的, 故

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}(\rho_1\Delta x-\rho_2\Delta y)=\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}(\rho_2\Delta x+\rho_1\Delta y)=0.$$

这就表明 u 和 v 在 (x,y) 处可微且

$$a=u_x=v_y,\quad b=-u_y=v_x,$$

即满足 Cauchy-Riemann 方程.

反之, 假设 u,v 在点 (x,y) 处可微, 且满足 Cauchy-Riemann 方程. 此时

$$\Delta u=u_x\Delta x+u_y\Delta y+o_u(d),\quad \Delta v=v_x\Delta x+v_y\Delta y+o_v(d)$$

这里 $d=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$, 而 $\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}o_u(d)/d=\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}o_v(d)/d=0.$ 把 Cauchy-Riemann 方程 $u_x=v_y$ 和 $v_y=-u_x$ 带入

$$f(z+\Delta z)-f(z)=\Delta u+\mathbf{i}\Delta v=(u_x+\mathbf{i}v_x)\Delta x+(u_y+\mathbf{i}v_y)\Delta y+o_u(d)+\mathbf{i}o_v(d)$$

得到

$$f(z+\Delta z)-f(z)=(u_x+\mathbf{i}v_x)\Delta z+o_u(d)+\mathbf{i}o_v(d)$$

或

$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=u_x+\mathbf{i}v_x+\frac{o_u(d)+\mathbf{i}o_v(d)}{\Delta z}.$$

因为

$$\left|\frac{o_u(d)+\mathbf{i}o_v(d)}{\Delta z}\right|\le\frac{|o_u(d)|}{d}+\frac{|o_v(d)|}{d}\to 0,\quad \text{当 } \Delta z\to 0,$$

所以

$$f'(z)=u_x+\mathbf{i}v_x=v_y-\mathbf{i}u_y,$$

即 $f(z)$ 在 $z=x+\mathbf{i}y$ 处可导. □

定理 3.3

复变函数 $f(z)=u+\mathbf{i}v$, 这里 $u=u(x,y)$ 和 $v=v(x,y)$, 在区域 D 内全纯的充要条件是 u 和 v 在 D 内可微, 且满足 Cauchy-Riemann 方程.

在《第二卷》我们知道区域 D 内具有一阶连续偏导数的二元函数在 D 内必可微, 因此得到

推论 3.1

假设二元函数 $u=u(x,y)$ 和 $v=v(x,y)$ 在区域 D 内具有一阶连续偏导数, 并且满足 Cauchy-Riemann 方程, 则复变函数 $f(z)=u+\mathbf{i}v$ 在 D 内全纯.

例 3.4

(1) 研究复变函数 $f(z)=\bar{z}$ 的可导性与全纯性.

解: 此时 $u=x$ 而 $v=-y$. 因为

$$u_x=1,\quad v_y=-1,\quad u_y=0,\quad v_y=0,$$

所以该函数不满足 Cauchy-Riemann 方程, 故处处不可导. 由于 u 和 v 均可微, 因此也是处处不全纯. □

(2) 研究复变函数 $f(z) = z\mathbf{Re}(z)$ 的可导性与全纯性.

解: 此时 $u = x^2$ 而 $v = xy$. 因为

$$u_x = 2x, \quad u_y = 0, \quad v_x = y, \quad v_y = x,$$

所以该函数仅在 $z = 0$ 处满足 Cauchy-Riemann 方程, 故仅在 $z = 0$ 处可导但在整个复平面上处处不全纯. □

(3) 研究复变函数 $f(z) = \overline{z}z^2$ 的可导性与全纯性.

解: 此时 $u = x^3 + xy^2$ 而 $v = x^2y + y^3$. 因为

$$u_x = 3x^2 + y^2, \quad u_y = 2xy, \quad v_x = 2xy, \quad v_y = x^2 + 3y^2,$$

所以该函数仅在 $z = 0$ 处满足 Cauchy-Riemann 方程, 故仅在 $z = 0$ 处可导但在整个复平面上处处不全纯. □

(4) 证明复变函数 $f(z) = e^x(\cos y + \mathbf{i}\sin y)$ 在整个复平面内处处全纯, 并满足 $f'(z) = f(z)$.

证: 此时 $u = e^x \cos y$ 而 $v = e^x \sin y$. 因为

$$u_x = e^x \cos y, \quad u_y = -e^x \sin y, \quad v_x = e^x \sin y, \quad v_y = e^x \cos y,$$

所以该函数在整个复平面内处处全纯. □

(5) 如果复变函数 $f(z)$ 在区域 $D \subseteq \mathbf{C}$ 内满足 $f'(z) \equiv 0$, 即导数恒为 0, 那么 $f(z)$ 在 D 内为一常数.

证: 因为 $f'(z) = u_x + \mathbf{i}v_x = v_y - \mathbf{i}u_x$, 所以 $f'(z) \equiv 0$ 推出

$$u_x = v_x = v_x = v_y = 0, \quad \text{任意 } (x, y) \in D.$$

利用二元函数的 Taylor 展开可知 u 和 v 在 D 内均为常数, 因而 $f(z)$ 在 D 内为一常数. □

(6) 如果复变函数 $f(z) = u + \mathbf{i}v$ 在区域 D 内全纯, 那么

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}|f(z)|\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y}|f(z)|\right)^2 = |f'(z)|^2. \tag{3.1.11}$$

证: 因为 $|f(z)| = \sqrt{u^2 + v^2}$, 所以

$$\partial_x|f(z)| = \frac{uu_x + vv_x}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \quad \partial_y|f(z)| = \frac{uu_y + vv_y}{\sqrt{u^2 + v^2}}.$$

从而得到

$$\begin{aligned}
(\partial_x|f(z)|)^2 + (\partial_y|f(z)|)^2 &= \frac{u^2u_x^2 + v^2v_x^2 + 2uvu_xv_x + u^2u_y^2 + v^2v_y^2 + 2uvu_yv_y}{u^2 + v^2} \\
&= \frac{u^2u_x^2 + v^2v_x^2 + 2uvu_xv_x + u^2v_x^2 + v^2u_x^2 - 2uvv_xu_x}{u^2 + v^2} \\
&= u_x^2 + v_x^2 \quad = \quad |f'(z)|^2. \quad \square
\end{aligned}$$

(7) 证明 Cauchy-Riemann 方程的极坐标形式是

$$u_r = \frac{1}{r}v_\theta, \quad v_r = -\frac{1}{r}u_\theta. \tag{3.1.12}$$

证: 利用 $x = r\cos\theta$ 和 $y = r\sin\theta$ 即可得到. □

(8) 考虑三个条件:

$$A: f \text{ 在 } z_0 \text{ 处连续}, \quad B: f \text{ 在 } z_0 \text{ 处可导}, \quad C: f \text{ 在 } z_0 \text{ 处全纯}.$$

则

- $A \not\Rightarrow B$: $f(z) = 2x - \mathbf{i}y$ 和 $z_0 = 0$.
- $B \not\Rightarrow C$: $f(z) = |z|^2$ 和 $z_0 = 0$.
- $C \Rightarrow B \Rightarrow A$.

♠

3.2 复变基本初等函数

在《第一卷》我们知道有 6 种基本初等函数, 在本节我们将它们推广到复变量.

3.2.1 指数函数

指数函数 $f(x) = e^x$ 是满足微分方程

$$f'(x) = f(x), \quad f(0) = 1$$

的唯一解. 根据**例 3.4** (4), 我们定义复变指数函数如下

定义 3.3

对任何 $z = x + \mathbf{i}y \in \mathbf{C}$, 称

$$e^z := e^x(\cos y + \mathbf{i}\sin y) \tag{3.2.1}$$

为由复变量 z 所定义的**指数函数**.

♣

根据指数函数 e^z 的定义, 我们得到

$$|e^z| = e^x, \quad (e^z)' = e^z, \quad e^0 = 1, \quad \mathbf{Arg}(e^z) = y + 2\pi\mathbf{Z}.$$

进一步可知, 对任意 $z \in \mathbf{C}$ 都有 $e^z \neq 0$.

(1) e^z 满足加法定理

$$e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2}. \tag{3.2.2}$$

事实上,

$$\begin{aligned} e^{z_1} \cdot e^{z_2} &= e^{x_1}(\cos y_1 + \mathbf{i}\sin y_1) \cdot e^{x_2}(\cos y_2 + \mathbf{i}\sin y_2) \\ &= e^{x_1+x_2}\left[(\cos y_1\cos y_2 - \sin y_1\sin y_2) + \mathbf{i}(\sin y_1\cos y_2 + \cos y_1\sin y_2)\right] \\ &= e^{x_1+x_2}[\cos(y_1+y_2) + \mathbf{i}\sin(y_1+y_2)] \\ &= e^{x_1+x_2+\mathbf{i}(y_1+y_2)} \;=\; e^{z_1+z_2}. \end{aligned}$$

(2) 如果 $z=\mathbf{i}x$ 是纯虚数, 那么得到

$$e^{\mathbf{i}x}=\cos x+\mathbf{i}\sin x,\quad x\in\mathbf{R}. \tag{3.2.3}$$

这样, 根据 (3.2.1) 和 (3.2.3) 得到 (3.2.2) 的特殊情形

$$e^z=e^{x+\mathbf{i}y}=e^x\cdot e^{\mathbf{i}y}. \tag{3.2.4}$$

(3) e^z 是周期 $2k\pi\mathbf{i}$, $k\in\mathbf{Z}$, 的周期函数. 事实上

$$e^{z+2k\pi\mathbf{i}}=e^z\cdot e^{2k\pi\mathbf{i}}=e^z(\cos(2k\pi)+\mathbf{i}\sin(2k\pi))=e^z.$$

(4) 因为 $e^z\cdot e^{-z}=e^{z-z}=e^0=1$, 所以

$$e^{-z}=\frac{1}{e^z}. \tag{3.2.5}$$

特别地,

$$\frac{e^{z_1}}{e^{z_2}}=e^{z_1-z_2}. \tag{3.2.6}$$

3.2.2 对数函数

指数函数 e^z 的反函数称为**对数函数**, 即, 满足方程

$$e^w=z \tag{3.2.7}$$

这里 $z\neq 0$, 的函数 w 称为**对数函数**并记为 $w=\mathrm{Ln}(z)$.

如果令 $w=u+\mathbf{i}v$ 和 $z=re^{\mathbf{i}\theta}$, 那么得到

$$e^u(\cos v+\mathbf{i}\sin v)=e^w=e^r(\cos\theta+\mathbf{i}\sin\theta).$$

故得到

$$u=\ln r,\quad v=\theta+2\pi\mathbf{Z},$$

或者得到

$$\mathrm{Ln}(z)=\ln|z|+\mathbf{i}\,\mathbf{Arg}(z). \tag{3.2.8}$$

因此复变对数函数是多值函数, 其中任意两个值相差 $2\pi\mathbf{i}$ 的整数倍.

(1) 当 $\mathbf{Arg}(z)=\mathbf{arg}(z)$ 时, 得到复变对数函数的**主值**

$$\ln(z):=\ln|z|+\mathbf{i}\,\mathbf{arg}(z). \tag{3.2.9}$$

由此得到

$$\mathrm{Ln}(z)=\ln z+2\pi\mathbf{i}\mathbf{Z}, \tag{3.2.10}$$

并称它们都是 $\mathrm{Ln}(z)$ 的一个**分支**.

(2) 对任意 $z_1,z_2\neq 0,\infty$, 有

$$\mathrm{Ln}(z_1z_2)=\mathrm{Ln}(z_1)+\mathrm{Ln}(z_2),\quad \mathrm{Ln}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\mathrm{Ln}(z_1)-\mathrm{Ln}(z_2). \tag{3.2.11}$$

若记 $z_1 = r_1 e^{\mathbf{i}\theta_1}$ 和 $z_2 = r_2 e^{\mathbf{i}\theta_2}$, 则 $z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{\mathbf{i}(\theta_1+\theta_2)}$ 和

$$\begin{aligned} \mathrm{Ln}(z_1 z_2) &= \ln(r_1 r_2) + \mathbf{i}(\theta_1 + \theta_2) + 2\pi\mathbf{i}\mathbf{Z} \\ &= \ln r_1 + \ln r_2 + \mathbf{i}\theta_1 + \mathbf{i}\theta_2 + 2\pi\mathbf{i}\mathbf{Z} \quad = \quad \mathrm{Ln}(z_1) + \mathrm{Ln}(z_2). \end{aligned}$$

同理可证第二个等式.

(3) 对数函数 $\mathrm{Ln}(z)$ 的各个分支在除去原点与负实轴的复平面 (即在区域 $\mathbf{C} \setminus (-\infty, 0]$) 内处处连续、处处全纯, 且满足

$$(\mathrm{Ln}(z))' = \frac{1}{z}, \quad z \in \mathbf{C} \setminus (-\infty, 0]. \tag{3.2.12}$$

因为

$$\mathrm{Ln}(z) = \ln z + 2\pi\mathbf{i}\mathbf{Z},$$

所以只要对主值 $\ln z = \ln|z| + \mathbf{i}\,\mathbf{arg}(z)$ 来证明就可以了. 首先注意到, $\ln|z|$ 在 $z = 0$ 处不连续, 而在其它点都是连续的. 如果 $z = x + \mathbf{i}y$ 且 $x < 0$ 时, 那么

$$\lim_{y \to 0+} \mathbf{arg}(z) = \pi, \quad \lim_{y \to 0-} \mathbf{arg}(z) = -\pi.$$

因此 $\mathbf{arg}(z)$ 在 $(-\infty, 0]$ 上不连续. 因此 $\ln z$ 仅在 $\mathbf{C} \setminus (-\infty, 0]$ 上连续. 在区域 $\{z \in \mathbf{C} : -\pi < \mathbf{arg}(z) < \pi\}$ 内, $z = e^w$ 的反函数 $w = \ln z$ 是单值的, 因此

$$\frac{dw}{dz} = \frac{1}{\frac{de^w}{dw}} = \frac{1}{e^w} = \frac{1}{z}.$$

故 $\ln z$ 在 $\mathbf{C} \setminus (-\infty, 0]$ 内全纯.

之后不加说明, $\mathrm{Ln}(z)$ 都是指 $\mathbf{C} \setminus (-\infty, 0]$ 上的某一分支.

3.2.3 幂函数

对任意非零复数 $a \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$ 和任意复数 $b \in \mathbf{C}$, 定义**乘幂** a^b 为

$$a^b := e^{b\mathrm{Ln}a}. \tag{3.2.13}$$

因为 $\mathrm{Ln}(a) = \ln|a| + \mathbf{i}\,\mathbf{arg} + 2\pi\mathbf{i}\mathbf{Z}$, 所以

$$a^b \quad = \quad e^{b\mathbf{Ln}(a)} \quad = \quad e^{b[\ln|a| + \mathbf{i}\,\mathbf{arg}(a) + 2\pi\mathbf{i}\mathbf{Z}]} \quad = \quad e^{b\ln a} \cdot e^{2b\pi\mathbf{i}\mathbf{Z}}.$$

故 a^b 一般来说是多值的.

(1) 如果 $b \in \mathbf{Z}$, 那么得到

$$a^b = e^{b\ln a}, \quad b \in \mathbf{Z}. \tag{3.2.14}$$

此时 a^b 是单值的.

(2) 如果 $b = p/q \in \mathbf{Q}$ 时, 这里 $p, q \in \mathbf{Z}$, $(p, q) = 1$ 和 $q > 0$, 那么得到

$$\begin{aligned} a^b &= e^{\frac{p}{q}\ln a} \cdot e^{2\frac{p}{q}k\pi\mathbf{i}} \\ &= e^{\frac{p}{q}\ln|a|}\left\{\cos\left[\frac{p}{q}\left(\mathbf{arg}(a) + 2k\pi\right)\right] + \sin\left[\frac{p}{q}\left(\mathbf{arg}(a) + 2k\pi\right)\right]\right\}, \end{aligned} \tag{3.2.15}$$

这里 $k \in \{0, 1, \cdots, q-1\}$. 故此时 a^b 是多值的.

(3) 当 $b=n\in\mathbf{N}_+$ 时, 我们得到

$$a^n \;=\; a^{n\mathbf{Ln}(a)} = e^{\mathbf{Ln}(a)+\cdots\mathbf{Ln}(a)} \;=\; e^{\mathbf{Ln}(a)}\cdots e^{\mathbf{Ln}(a)} \;=\; a\cdots a \;=\; a^n.$$

(4) 当 $b=1/n, n\in\mathbf{N}_+$, 时, 我们得到

$$\begin{aligned} a^{1/n} &= e^{\frac{1}{n}\mathbf{Ln}(a)} = e^{\frac{1}{n}\ln|a|}\left[\cos\left(\frac{\mathbf{arg}(a)+2k\pi}{n}\right)+\mathbf{i}\sin\left(\frac{\mathbf{arg}(a)+2k\pi}{n}\right)\right] \\ &= |a|^{1/n}\left[\cos\left(\frac{\mathbf{arg}(a)+2k\pi}{n}\right)+\mathbf{i}\sin\left(\frac{\mathbf{arg}(a)+2k\pi}{n}\right)\right] = \sqrt[n]{a}, \end{aligned}$$

这里 $k\in\{0,1,\cdots,n-1\}$.

(5) 我们称

$$z^b = e^{b\mathbf{Ln}(z)},\quad z\in\mathbf{C}, \tag{3.2.16}$$

为**幂函数**.

(6) 在区域 $\mathbf{C}\setminus(-\infty,0]$ 上, 我们得到

$$(z^b)' = bz^{b-1},\quad z\in\mathbf{C}\setminus(-\infty,0]. \tag{3.2.17}$$

例 3.5

(1) 求 $\mathrm{Ln}\,2$、$\mathrm{Ln}(-1)$、$\mathrm{Ln}(-\mathbf{i})$ 的值和主值.

解: 根据定义得到

$$\begin{aligned} \mathrm{Ln}\,2 &= \ln 2+2\pi\mathbf{i}\mathbf{Z}, \\ \mathrm{Ln}(-1) &= \ln 1+\mathbf{i}\,\mathbf{arg}(-1)+2\pi\mathbf{i}\mathbf{Z} = \pi\mathbf{i}+2\pi\mathbf{i}\mathbf{Z}, \\ \mathrm{Ln}(-\mathbf{i}) &= \ln 1+\mathbf{i}\,\mathbf{arg}(-\mathbf{i})+2\pi\mathbf{i}\mathbf{Z} = -\frac{\pi\mathbf{i}}{2}+2\pi\mathbf{i}\mathbf{Z}, \end{aligned}$$

且主值分别为 $\ln 2$、$\ln(-1)=\pi\mathbf{i}$、$\ln(-\mathbf{i})=-\pi\mathbf{i}/2$. □

(2) 计算 $1^{\sqrt{2}}$ 和 $\mathbf{i}^{\mathbf{i}}$.

解: 利用 (3.2.13) 得到

$$\begin{aligned} 1^{\sqrt{2}} &= e^{\sqrt{2}\mathrm{Ln}1} = e^{\sqrt{2}(0+2k\pi\mathbf{i})} = \cos(2\sqrt{2}k\pi)+\mathbf{i}\sin(2\sqrt{2}k\pi), \\ \mathbf{i}^{\mathbf{i}} &= e^{\mathbf{i}\mathrm{Ln}\mathbf{i}} = e^{\mathbf{i}(1+\frac{\pi}{2}+2k\pi\mathbf{i})} = e^{-(\frac{\pi}{2}+2k\pi)}, \end{aligned}$$

这里 $k\in\mathbf{Z}$. □

(3) 下面两个等式是不对的:

$$\mathrm{Ln}(z^2)=2\mathrm{Ln}\,z,\quad \mathrm{Ln}\sqrt{z}=\frac{1}{2}\mathrm{Ln}\,z.$$

事实上, 如果 $z=re^{\mathbf{i}\theta}$, 那么得到 $z^2=r^2e^{2\mathbf{i}\theta}$ 和

$$\mathrm{Ln}(z^2)=2\ln r+2\theta\mathbf{i}+2\pi\mathbf{i}\mathbf{Z},\quad 2\mathrm{Ln}\,z=2\ln r+2\theta\mathbf{i}+4\pi\mathbf{i}\mathbf{Z}.$$

因为 $\sqrt{z}$ 有两个分支

$$\sqrt{z}=r^{1/2}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{2}+\mathbf{i}\sin\frac{\theta+2k\pi}{2}\right),\quad k=0,1.$$

当 $k=0$ 时,

$$\mathrm{Ln}\sqrt{z}=\frac{1}{2}\ln r+\frac{\theta}{2}\mathbf{i}+2\pi\mathbf{i}\mathbf{Z},\quad \frac{1}{2}\mathrm{Ln}\,z=\frac{1}{2}\ln r+\frac{\theta}{2}\mathbf{i}+2\pi\mathbf{i}\mathbf{Z};$$

当 $k=1$ 时,

$$\mathrm{Ln}\sqrt{z}=\frac{1}{2}\ln r+\frac{\theta+2\pi}{2}\mathbf{i}+2\pi\mathbf{i}\mathbf{Z},\quad \frac{1}{2}\mathrm{Ln}\,z=\frac{1}{2}\ln r+\frac{\theta}{2}\mathbf{i}+(2\pi+1)\mathbf{i}\mathbf{Z}.$$

3.2.4 三角函数和双曲函数

利用指数函数 e^z 的定义我们有

$$e^{\mathbf{i}x}=\cos x+\mathbf{i}\sin x,\quad e^{-\mathbf{i}x}=\cos x-\mathbf{i}\sin x,$$

或

$$\cos x=\frac{e^{\mathbf{i}x}+e^{-\mathbf{i}x}}{2},\quad \sin x=\frac{e^{\mathbf{i}x}-e^{-\mathbf{i}x}}{2\mathbf{i}}. \tag{3.2.18}$$

对任意复数 $z\in\mathbf{C}$, 定义**正弦函数**和**余弦函数**分别为

$$\cos z:=\frac{e^{\mathbf{i}z}+e^{-\mathbf{i}z}}{2},\quad \sin z:=\frac{e^{\mathbf{i}z}-e^{-\mathbf{i}z}}{2\mathbf{i}}. \tag{3.2.19}$$

根据定义, 我们有如下的基本性质:

(1) $\sin z$ 和 $\cos z$ 都是以 2π 为周期的周期函数.

(2) $\cos z$ 是偶函数, 而 $\sin z$ 是奇函数.

(3) 三角恒等式仍旧成立, 比如

$$\begin{aligned}
\sin(z_1+z_2)&=\sin z_1\cos z_2+\cos z_1\sin z_2,\\
\cos(z_1+z_2)&=\cos z_1\cos z_2-\sin z_1\sin z_2,\\
\cos^2 z+\sin^2 z&=1,\\
\sin(2z)&=2\sin z\cos z,\\
\sin\left(\frac{\pi}{2}-z\right)&=\cos z,\quad \cos(z+\pi)=-\cos z.
\end{aligned}$$

(4) $\sin z$ 和 $\cos z$ 都是复平面内的全纯函数, 且满足

$$(\sin z)'=\cos z,\quad (\cos z)'=-\sin z. \tag{3.2.20}$$

(5) Euler 公式成立,

$$e^{\mathbf{i}z}=\cos z+\mathbf{i}\sin z,\quad z\in\mathbf{C}. \tag{3.2.21}$$

(6) $\sin z$ 的零点为 $z=k\pi$, 而 $\cos z$ 的零点为 $z=k\pi+\frac{\pi}{2}$, 其中 $k\in\mathbf{Z}$. 之后, 我们将会证明

$$\sin z=z\prod_{n\geq 1}\left(1-\frac{z^2}{n^2\pi^2}\right),\quad \cos z=\prod_{n\geq 1}\left[1-\frac{4z^2}{(2n-1)^2\pi^2}\right]. \tag{3.2.22}$$

特别地, 取 $z=\pi/2$ 得到Wallis 公式

$$\frac{2}{\pi}=\prod_{n\geq 1}\left(1-\frac{1}{4n^2}\right)=\prod_{n\geq 1}\frac{(2n-1)(2n+1)}{2n\cdot 2n}=\frac{1\cdot 3}{2\cdot 2}\cdot\frac{3\cdot 5}{4\cdot 4}\cdot\frac{5\cdot 7}{6\cdot 6}\cdots\cdots.$$

(7) 注意, 一般来说复变函数 $\sin z$ 和 $\cos z$ 都不是有界的, 这和实变函数 $\sin x$ 和 $\cos x$ 有

界是不一样. 取 $z=\mathbf{i}y$ 得到

$$\cos(\mathbf{i}y)=\frac{e^{-y}+e^{y}}{2},\quad \sin(\mathbf{i}y)=\frac{e^{-y}-e^{y}}{2\mathbf{i}}.$$

则当 $y\to+\infty$ 时, $|\sin(\mathbf{i}y)|\to+\infty$ 和 $|\cos(\mathbf{i}y)|\to+\infty$.

同样我们可以定义复变量 z 的**正切函数**、**余切函数**、**正割函数**和**余割函数**:

$$\tan z:=\frac{\sin z}{\cos z},\quad \cot z:=\frac{\cos z}{\sin z},\quad \sec z:=\frac{1}{\cos z},\quad \csc z:=\frac{1}{\sin z}. \tag{3.2.23}$$

它们的周期性可以由 $\sin z$ 与 $\cos z$ 的周期性得到, 比如 $\tan z$ 的周期为 π. 又比如, 关于它们的三角恒等式亦成立, 比如

$$\tan(2z)=\frac{2\tan z}{1-\tan^2 z}.$$

把实变量换成复变量, 我们得到复变量 z 的**双曲正弦函数**、**双曲余弦函数**和**双曲正切函数**如下

$$\mathrm{sh}\, z:=\frac{e^{z}-e^{-z}}{2},\quad \mathrm{ch}\, z:=\frac{e^{z}+e^{-z}}{2},\quad \mathrm{th}\, z:=\frac{\mathrm{sh}\, z}{\mathrm{ch}\, z},\quad z\in\mathbf{C}. \tag{3.2.24}$$

类似可证,

(1) $\mathrm{sh}\, z$、$\mathrm{ch}\, z$ 和 $\mathrm{th}\, z$ 都是以 $2\pi\mathbf{i}$ 为周期的周期函数.

(2) $\mathrm{ch}\, z$ 是偶函数, 而 $\mathrm{sh}\, z$ 和 $\mathrm{th}\, z$ 都是奇函数.

(3) $\mathrm{sh}\, z$ 和 $\mathrm{ch}\, z$ 都是复平面上的全纯函数, 且满足

$$(\mathrm{ch}\, z)'=\mathrm{sh}\, z,\quad (\mathrm{sh}\, z)'=\mathrm{ch}\, z,\quad z\in\mathbf{C}. \tag{3.2.25}$$

(4) 对任意 $y\in\mathbf{R}$ 有

$$\cos(\mathbf{i}y)=\mathrm{ch}\, y,\quad \sin(\mathbf{i}y)=\mathbf{i}\,\mathrm{sh}\, y,\quad y\in\mathbf{R}. \tag{3.2.26}$$

(5) 对任何 $x,y\in\mathbf{R}$, 都有

$$\begin{aligned}
\cos(x+\mathbf{i}y) &= \cos x\,\mathrm{ch}\, y-\mathbf{i}\sin x\,\mathrm{sh}\, y, \quad \sin(x+\mathbf{i}y) = \sin x\,\mathrm{ch}\, y+\mathbf{i}\cos x\,\mathrm{sh}\, y,\\
\mathrm{ch}(\mathbf{i}y) &= \cos y, \quad \mathrm{sh}(\mathbf{i}y) = \mathbf{i}\sin y,\\
\mathrm{ch}(x+\mathbf{i}y) &= \mathrm{ch}\, x\cos y+\mathbf{i}\,\mathrm{sh}\, x\sin y, \quad \mathrm{sh}(x+\mathbf{i}y) = \mathrm{sh}\, x\cos y+\mathbf{i}\,\mathrm{ch}\, x\sin y,\\
|\cos(x+\mathbf{i}y)|^2 &= \cos^2 x+\mathrm{sh}^2 y, \quad |\sin(x+\mathbf{i}y)|^2 = \sin^2 x+\mathrm{sh}^2 y.
\end{aligned}$$

(6) 对任意 $z_1,z_2\in\mathbf{C}$, 得到

$$\begin{aligned}
\mathrm{ch}^2 z-\mathrm{sh}^2 z &= 1, \quad \mathrm{sh}^2 z+\mathrm{ch}^2 z = \mathrm{ch}(2z),\\
\mathrm{sh}(z_1+z_2) &= \mathrm{sh}\, z_1\,\mathrm{ch}\, z_2+\mathrm{ch}\, z_2\,\mathrm{sh}\, z_2, \quad \mathrm{ch}(z_1+z_2) = \mathrm{ch}\, z_1\,\mathrm{ch}\, z_2+\mathrm{sh}\, z_1\,\mathrm{sh}\, z_2.
\end{aligned}$$

3.2.5 反三角函数和反双曲函数

称方程

$$z=\cos w=\frac{e^{\mathbf{i}w}+e^{-\mathbf{i}w}}{2} \tag{3.2.27}$$

的所有根 w 为 z 的**反余弦函数**, 记作 $z = \mathrm{Arccos}\, z$. 根据 (3.2.27) 得到

$$0 = e^{2\mathbf{i}w} - 2ze^{\mathbf{i}w} + 1 = \left(e^{\mathbf{i}w} - z\right)^2 + (1 - z^2)$$

从而解出

$$e^{\mathbf{i}w} = z + \sqrt{z^2 - 1},$$

这里 $\sqrt{z^2-1}$ 表示为双值函数, 和

$$\mathrm{Arccos}\, z = -\mathbf{i}\,\mathrm{Ln}\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right), \quad z \in \mathbf{C}. \tag{3.2.28}$$

类似地, 我们可以定义**反正弦函数**和**反正切函数**

$$\mathrm{Arcsin}\, z := -\mathbf{i}\,\mathrm{L}\left(\mathbf{i}z + \sqrt{1 - z^2}\right), \quad \mathrm{Arctan}\, z := -\frac{\mathbf{i}}{2}\mathrm{Ln}\frac{1 + \mathbf{i}z}{1 - \mathbf{i}z}. \tag{3.2.29}$$

对双曲函数, 我们同样可做相同的操作. 比如, 称方程

$$z = \mathrm{sh}\, w = \frac{e^w - e^{-w}}{2}. \tag{3.2.30}$$

的所有根 w 为 z 的**反双曲正弦函数**, 记作 $z = \mathrm{Arsh}\, z$. 根据 (3.2.30) 得到

$$0 = e^{2w} - 2ze^{w} - 1 = (e^w - z)^2 +$$

从而解出

$$e^{w} = z + \sqrt{z^2 + 1},$$

这里 $\sqrt{z^2-1}$ 表示为双值函数, 和

$$\mathrm{Arsh}\, z = -\mathbf{i}\,\mathrm{Ln}\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right), \quad z \in \mathbf{C}. \tag{3.2.31}$$

类似地, 我们可以定义**反双曲余弦函数**和**反双曲正切函数**

$$\mathrm{Arch}\, z := \mathrm{L}\left(\mathbf{i}z + \sqrt{z^2 - 1}\right), \quad \mathrm{Arth}\, z := \frac{1}{2}\mathrm{Ln}\frac{1 + z}{1 - z}. \tag{3.2.32}$$

第四章 复积分

4.1 复积分基本性质

假设 $\mathcal{C}$ 为复平面 $\mathbf{C}$ 上给定的一条光滑或分段光滑曲线.

(1) 如果沿曲线 $\mathcal{C}$ 固定一个走向, 我们称 $\mathcal{C}$ 为**有向曲线**并把规定的走向称为有向曲线 $\mathcal{C}$ 的**正方向**或**正向**. 把与规定走向相反的方向称为**负方向**或**负向**.

(2) 对有向曲线 $\mathcal{C}$, 我们用 $-\mathcal{C}$ 或 $\mathcal{C}^-$ 来表示曲线 $\mathcal{C}$ 被赋予负方向时的有向曲线.

(3) 当有向曲线 $\mathcal{C}$ 是以 A 与 B 为端点的曲线时, 若规定的走向是从 A 到 B, 则称 A 为有向曲线 $\mathcal{C}$ 的**起点**而 B 为**终点**. 有向闭曲线是两个端点重合的有向曲线.

(4) 如果 $\mathcal{C}$ 是简单曲线, 那么沿着 $\mathcal{C}$ 只有两种走向. 我们规定简单曲线的正方向是指从起点到终点的方向; 当 $\mathcal{C}$ 是简单闭曲线时, 曲线的正方向规定为: 当曲线上的点 P 按着此方向沿着曲线 $\mathcal{C}$ 运动时, 该曲线靠近 P 点的内部始终位于 P 点的左方.

定义 4.1

假设 $\mathcal{C}$ 是复平面 $\mathbf{C}$ 内以 A 为起点而 B 为终点的一条简单光滑 (或分段光滑) 的有向曲线, 复变函数 $w = f(z)$ 在 $\mathcal{C}$ 上有定义. 把 $\mathcal{C}$ 任意划分为 n 个弧段, 对应的分点分别记为

$$T : A = P_0, \quad P_1, \quad \cdots, \quad P_{k-1}, \quad P_k, \quad \cdots \quad P_n = B,$$

并在每个小弧段 $\widehat{P_{k-1}P_k}$ 上任取一点 Q_k. 由于复平面上的点可以用复数来表示, 我们记

$$P_k = z_k, \quad Q_k = \zeta_k.$$

从考虑复数的有限和

$$\sigma(f, T, \boldsymbol{\zeta}) := \sum_{1\le k\le n} f(\zeta_k)(z_k - z_{k-1}) = \sum_{1\le k\le n} f(\zeta_k)\Delta z_k,$$

其中 $\Delta z_k := z_k - z_{k-1}$. 定义划分 T 的模为

$$||T|| := \max_{1\le k\le n} \Delta s_k,$$

这里 Δs_k 是小弧段 $\widehat{P_{k-1}P_k}$ 的长度.

称函数 $w = f(z)$ 沿曲线 $\mathcal{C}$ 可积, 如果如下极限

$$\lim_{||T||\to 0} \sigma(f, T, \boldsymbol{\zeta})$$

存在且极限值和 ξ_k 的选取无关. 此时把该极限值称为 $f(z)$ **沿着曲线 $\mathcal{C}$ 的积分**并记作

$$\int_{\mathcal{C}} f(z)\, dz = \lim_{||T||\to 0} \sigma(f, T, \boldsymbol{\zeta}) = \lim_{||T||\to 0} \sum_{1\le k\le n} f(\zeta_k)\Delta z_k, \tag{4.1.1}$$

而把 C 称为**积分路径**. 当 C 为闭曲线时, (4.1.1) 记作

$$\oint_C f(z)\,dz.$$

假设 $\mathcal{D}$ 是复平面 $\mathbf{C}$ 内的区域, 为了方便期间引入记号

$$\begin{aligned} C(\mathcal{D}) &:= \{f \text{ 在 } \mathcal{D} \text{ 内连续}\}, \\ D(\mathcal{D}) &:= \{f \text{ 在 } \mathcal{D} \text{ 内可导}\}, \\ H(\mathcal{D}) &:= \{f \text{ 在 } \mathcal{D} \text{ 内全纯}\}, \\ R(\mathcal{D}) &:= \{f \text{ 在 } \mathcal{D} \text{ 内可积}\}. \end{aligned}$$

这样就得到关系 (最后一个关系见**定理 4.1**)

$$H(\mathcal{D}) = D(\mathcal{D}) \subsetneq C(\mathcal{D}) \subsetneq R(\mathcal{D}).$$

对 $z_0 \in \mathcal{D}$, 我们还可以定义

$$C(z_0) := \{f \text{ 在 } z_0 \text{ 处连续}\}, \quad D(z_0) := \{f \text{ 在 } z_0 \text{ 处可导}\}, \quad H(z_0) := \{f \text{ 在 } z_0 \text{ 处全纯}\}.$$

这样就得到关系

$$H(z_0) \subsetneq D(z_0) \subsetneq C(z_0).$$

4.1.1 复积分的计算公式

为了讨论方便, 我们假设复变函数 $f(z) = u + \mathbf{i}v$ 在区域 $\mathcal{D}$ 内连续, 这里 $z = x + \mathbf{i}y$, $u = u(x, y)$ 和 $v = v(x, y)$. 如果令

$$z_k = x_k + \mathbf{i}y_k, \quad \zeta_k = \xi_k + \mathbf{i}\eta_k,$$

那么得到

$$\begin{aligned} \sigma(f, T, \boldsymbol{\zeta}) &= \sum_{1\le k\le n} f(\zeta_k)\Delta z_k = \sum_{1\le k\le n} [u(\xi_k, \eta_k) + \mathbf{i}v(\xi_k, \eta_k)](\Delta x_k + \mathbf{i}\Delta y_k) \\ &= \sum_{1\le k\le n} [u(\xi_k, \eta_k)\Delta x_k - v(\xi_k, \eta_k)\Delta y_k] \\ &\quad + \mathbf{i} \sum_{1\le k\le n} [v(\xi_k, \eta_k)\Delta x_k + u(\xi_k, \eta_k)\Delta y_k]. \end{aligned}$$

由于 u 和 v 都是连续的, 因此得到

$$\int_C f(z)\,dz = \left(\int_C u\,dx - v\,dy\right) + \mathbf{i}\left(\int_C v\,dx + u\,dy\right). \tag{4.1.2}$$

形式上, (4.1.2) 可如下推导

$$\int_C f(z)\,dz = \int_C (u + \mathbf{i}v)(dx + \mathbf{i}dy) = \int_C (u\,dx - v\,dy + \mathbf{i}v\,dx + \mathbf{i}u\,dy).$$

定理 4.1

如果复变函数 $f(z)$ 在区域 $\mathcal{D}$ 内连续, 那么 $f(z)$ 沿着 $\mathcal{D}$ 内任意简单光滑有向曲线 C 的积分必存在, 且由 (4.1.2) 给出.

4.1.2 复积分的参数计算公式

当光滑曲线 C 由参数方程

$$z = z(t) = x(y) + \mathbf{i}y(t), \quad \alpha \le t \le \beta$$

给出时, 其中 $z'(t) \neq 0$ $(\alpha < t < \beta)$, (4.1.2) 可有简单的计算公式. 我们规定曲线 C 的正方向为参数 t 增加的方向, 起点 $A = z(\alpha)$, 而终点 $B = z(\beta)$. 因此

$$\begin{aligned}\int_C f(z)\,dz &= \int_\alpha^\beta \big[u(x(t), v(t))x'(t) - v(x(t), y(t))y'(t)\big]\,dt \\ &\quad + \mathbf{i}\int_\alpha^\beta \big[v(x(t), y(t))x'(t) + u(x(t), y(t))y'(t)\big]\,dt \\ &= \int_\alpha^\beta [u(x(t), y(t)) + \mathbf{i}v(x(t), y(t))]\,[x'(t) + \mathbf{i}y'(t)]dt = \int_\alpha^\beta f(z(t))z'(t)\,dt.\end{aligned}$$

即

$$\int_C f(z)\,dz = \int_\alpha^\beta f(z(t))z'(t)\,dt. \tag{4.1.3}$$

例 4.1

(1) 计算

$$I = \int_C z\,dz$$

其中 C 为从原点到点 $a + \mathbf{i}b$ 的直线段, 这里 $a, b \in \mathbf{R}$ 且 $ab \neq 0$.

解: 有向曲线 C 可写为

$$z(t) = at + \mathbf{i}bt, \quad 0 \le t \le 1.$$

因此 $z'(t) = a + \mathbf{i}b \neq 0$ 和

$$\int_C z\,dz = \int_0^1 (at + \mathbf{i}bt)(a + \mathbf{i}b)dt = (a + \mathbf{i}b)^2 \int_0^1 t\,dt = \frac{(a + \mathbf{i}b)^2}{2}. \quad \square$$

(2) 计算

$$I = \oint_C \frac{dz}{(z - z_0)^{n+1}}$$

其中 C 是以 z_0 为中心, r 为半径的圆周, 方向为逆时针, $n \in \mathbf{Z}$.

解: 考虑有向曲线 C 的参数方程

$$z(\theta) = z_0 + re^{\mathbf{i}\theta}, \quad 0 \le \theta \le 2\pi.$$

因为 $z'(\theta) = \mathbf{i}re^{\mathbf{i}\theta} \neq 0$, 所以

$$\oint_C \frac{dz}{(z - z_0)^{n+1}} = \int_0^{2\pi} \frac{\mathbf{i}re^{\mathbf{i}\theta}}{r^{n+1}e^{\mathbf{i}(n+1)\theta}}d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{\mathbf{i}}{r^n e^{\mathbf{i}n\theta}}d\theta = \frac{\mathbf{i}}{r^n}\int_0^{2\pi} e^{-\mathbf{i}n\theta}d\theta.$$

当 $n = 0$ 时,

$$\oint_C \frac{dz}{z - z_0} = \mathbf{i}\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi\mathbf{i};$$

当 $n \neq 0$ 时,

$$\oint_C \frac{dz}{(z - z_0)^{n+1}} = \frac{\mathbf{i}}{r^n}\int_0^{2\pi} [\cos(n\theta) - \mathbf{i}\sin(n\theta)]d\theta = 0.$$

所以

$$\frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\int_{|z-z_0|=r}\frac{dz}{(z-z_0)^{n+1}}=\delta_{n0}=\begin{cases}1, & n=0,\\ 0, & n\neq 0.\end{cases} \tag{4.1.4}$$

4.1.3 复积分的基本性质

根据定义我们得到

命题 4.1

假设复变函数 $f(z)$ 和 $g(z)$ 在区域 D 内都是连续函数，而 C 是 D 内的光滑或分段光滑的有向曲线.

(1) 如果 C^- 表示和 C 方向相反的有向曲线，那么

$$\int_{C^-}f(z)dz=-\int_C f(z)dz. \tag{4.1.5}$$

(2) 对任意常数 $k\in\mathbf{C}$，有

$$\int_C kf(z)dz=k\int_C f(z)dz. \tag{4.1.6}$$

(3) $f(z)\pm g(z)$ 沿着 C 的积分存在且

$$\int_C[f(z)\pm g(z)]dz=\int_C f(z)dz\pm\int_C g(z)dz. \tag{4.1.7}$$

(4) 如果 C 是由若干段光滑曲线段 $C_1,\cdots,C_k$ 依次连接所构成的分段光滑曲线，那么

$$\int_C f(z)dz=\sum_{1\leq i\leq k}\int_{C_i}f(z)dz. \tag{4.1.8}$$

(5) 如果曲线 C 的长度为 $|C|=L$ 且 $f(z)$ 在 C 上满足 $|f(z)|\leq M$，那么有如下的**积分不等式**

$$\left|\int_C f(z)dz\right|\leq\int_C|f(z)|ds\leq ML. \tag{4.1.9}$$

证: 只证 (5). 根据定义 (4.1.1) 有

$$\int_C f(z)dz=\lim_{||T||\to 0}\sum_{1\leq k\leq n}f(\zeta_k)\Delta z_k,$$

这里 $||T||=\max_{1\leq k\leq n}\Delta s_k$. 因此

$$\left|\sum_{1\leq k\leq n}f(\zeta_k)\Delta z_k\right|\leq\sum_{1\leq k\leq n}|f(\zeta_k)||\Delta z_k|\leq\sum_{1\leq k\leq n}|f(\zeta_k)|\Delta s_k\leq M\sum_{1\leq k\leq n}\Delta s_k=ML.$$

两边取极限就得到 (4.1.9). □

例 4.2

(1) 计算

$$I=\int_C\overline{z}dz$$

其中 C 分别为

(a) 沿着从原点到 $z_0 = 1+\mathbf{i}$ 的直线段 $\mathcal{C}_1$: $z = (1+\mathbf{i})t, 0 \le t \le 1$;

(b) 沿着从原点到 $z_1 = 1$ 的直线段 $\mathcal{C}_2$: $z = t, 0 \le t \le 1$, 与从 z_1 到 z_0 的直线段 $\mathcal{C}_3$: $z = 1 + \mathbf{i}t, 0 \le t \le 1$ 所连接称的折线.

解: (a) 计算得到

$$I = \int_0^1 (1-\mathbf{i})t \cdot (1+\mathbf{i})dt = \int_0^1 2t\,dt = 1.$$

(b) 计算得到

$$I = \int_{\mathcal{C}_2} \overline{z}dz + \int_{\mathcal{C}_3} \overline{z}dz = \int_0^1 t\,dt + \int_0^1 (1-\mathbf{i}t)\cdot \mathbf{i}dt = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} + \mathbf{i}\right) = 1 + \mathbf{i}.$$

上述例子告诉我们, 积分值 I 不仅和起点 $z=0$ 及终点 $z = 1+\mathbf{i}$ 有关, 而且还和具体的有向曲线 $\mathcal{C}$ 有关. 出现这个现象的原因是复变函数 $f(z) = \overline{z}$ 不是全纯的. □

(2) 假设 $\mathcal{C}$ 为从原点到 $3+4\mathbf{i}$ 的直线段, 估计积分

$$I = \int_{\mathcal{C}} \frac{dz}{z-\mathbf{i}}$$

的上界.

解: $\mathcal{C}$ 的参数方程为 $z(t) = (3+4\mathbf{i})t, 0 \le t \le 1$. 因此从 (4.1.9) 得到

$$\left|\int_{\mathcal{C}} \frac{dz}{z-\mathbf{i}}\right| \le \int_{\mathcal{C}} \frac{ds}{|z-\mathbf{i}|}.$$

因为

$$\frac{1}{|z-\mathbf{i}|} = \frac{1}{|3t + (4t-1)\mathbf{i}|} = \frac{1}{\sqrt{25t^2 - 8t + 1}} \le \frac{5}{3}$$

和

$$\int_{\mathcal{C}} ds = 5,$$

所以

$$\left|\int_{\mathcal{C}} \frac{dz}{z-\mathbf{i}}\right| \le \frac{5}{3} \times 5 = \frac{25}{3}.$$

如果直接利用 (4.1.3) 得到

$$I = \int_0^1 \frac{(25t-4)+3\mathbf{i}}{25t^2-8t+1}dt = \frac{1}{2}\ln 18 + \frac{\mathbf{i}}{5}\left(\arctan\frac{1}{3} + \arctan\frac{4}{3}\right). \quad \square$$

(3) 假设 $\mathcal{C}$ 为正向圆周 $|z| = 2$ 在第一象限的部分, 证明

$$\left|\int_{\mathcal{C}} \frac{dz}{z^2+1}\right| \le \frac{\pi}{3}.$$

证: 注意到, 如果 $|z| = 2$, 我们得到

$$|z^2+1| \ge \left||z^2| - 1\right| = |z|^2 - 1 = 2^2 - 1 = 3.$$

故

$$\left|\int_{\mathcal{C}} \frac{dz}{z^2+1}\right| \le \int_{\mathcal{C}} \frac{ds}{|z^2+1|} \le \int_{\mathcal{C}} \frac{ds}{3} = \frac{1}{3} \times \frac{2\pi \times 2}{4} = \frac{\pi}{3}. \quad \square$$

(4) 计算积分

$$I := \int_{\mathcal{C}} e^{|z|^2} \mathbf{Re}(z)\,dz,$$

其中 $\mathcal{C}$ 为从 $z_1 = 0$ 到 $z_2 = 1+\mathbf{i}$ 的直线段 $\overline{z_1z_2}$.

解: 考虑 $\mathcal{C}$ 的参数方程, $z=(1+\mathbf{i})t, 0\le t\le 1$. 故

$$I \;=\; \int_0^1 e^{2t^2}t(1+\mathbf{i})\,dt \;=\; \frac{1}{4}(1+\mathbf{i})e^{2t^2}\Big|_0^1 \;=\; \frac{1}{4}(e^2-1)(1+\mathbf{i}).\quad\square$$

4.2 Cauchy-Goursat 定理

假设有向曲线 $\mathcal{C}$ 的起点为 A 而终点为 B, 我们知道积分

$$\int_{\mathcal{C}} f(z)\,dz$$

的值一般来说不仅和 A, B 有关而且还和具体的曲线 $\mathcal{C}$ 有关.

那么一个很自然的问题是, 上述积分值什么时候只跟 A, B 有关呢? 从 (4.1.2) 得到

$$\int_{\mathcal{C}} f(z)\,dz = \left(\int_{\mathcal{C}} u\,dx - v\,dy\right) + \mathbf{i}\left(\int_{\mathcal{C}} v\,dx + u\,dy\right).$$

于是就归结到实部和虚部的两个曲线积分什么时候只跟 A, B 有关. 这样我们自然想到 Green 定理.

定理 4.2

(1) 假设 $\mathcal{D}$ 是平面内的区域且 $P, Q\in C(\mathcal{D})$. 则下列命题等价:

(a) 对 $\mathcal{D}$ 内任意分段光滑的曲线 $\mathcal{C}$, 曲线积分

$$\int_{\mathcal{C}} P\,dx + Q\,dy$$

与路径 $\mathcal{C}$ 无关, 只与 $\mathcal{C}$ 的起点和终点有关;

(b) $Pdx+Qdy$ 在 $\mathcal{D}$ 上是正合的, 即存在 $U\in C^1(\mathcal{D})$ 使得 $dU = Pdx + Qdy$ 成立;

(c) 沿着 $\mathcal{D}$ 内的任意分段闭曲线 $\mathcal{C}$, 有

$$\oint_{\mathcal{C}} P\,dx + Q\,dy = 0.$$

(2) 如果进一步假设 $P, Q\in C^1(\mathcal{D})$, 则上述等价的 (a), (b), (c) 可推出

(d) 在 $\mathcal{D}$ 内处处成立

$$Q_x = P_y.$$

(3) 如果 $\mathcal{D}$ 是平面内的单连通区域且 $P, Q\in C^1(\mathcal{D})$, 则 (a), (b), (c), (d) 互相等价.

证: **《第二卷》, 13.9.2 节**. $\square$

根据上述定理可知, 积分

$$\int_{\mathcal{C}} f(z)\,dz = \left(\int_{\mathcal{C}} u\,dx - v\,dy\right) + \mathbf{i}\left(\int_{\mathcal{C}} v\,dx + u\,dy\right).$$

与路径 $\mathcal{C}$ 无关, 如果 $u, v\in C^1(\mathcal{D})$ 且满足 Cauchy-Riemann 方程. 特别地, 如果 $f(z)$ 在 $\mathcal{D}$ 内是全纯函数, 同时导函数 $f'(z) = u_x + \mathbf{i}v_x$ 在 $\mathcal{D}$ 内连续, 那么 $f(z)$ 沿着 $\mathcal{D}$ 内任意一条闭曲线的积分等于零.

4.2.1 Cauchy-Goursat 定理

Cauchy在 “导函数 $f'(z)$ 连续” 这个条件下, 证明了 $f(z)$ 沿着 $\mathcal{D}$ 内任意一条闭曲线的积分等于零. 之后, 法国数学家Édouard Jean-Baptiste Goursat(古萨)在 1884 年去掉了 “导函数 $f'(z)$ 连续” 这个条件.

定理 4.3. (Cauchy-Goursat 定理)

如果 $f(z)$ 在简单闭曲线 $\mathcal{C}$ 上以及由它所围成的区域 $\mathcal{D}$ 内处处全纯, 那么 $f(z)$ 沿着 $\mathcal{C}$ 的积分为零, 即

$$\oint_{\mathcal{C}} f(z)\,dz = 0. \tag{4.2.1}$$

♡

证:

上述定理有两个一般形式的结论.

定理 4.4

(1) 如果函数 $f(z)$ 在单连通 $\mathcal{D}$ 内处处全纯, 那么 $f(z)$ 沿着 $\mathcal{D}$ 内任何一条闭曲线 $\mathcal{C}$ 的积分等于零.

(2) 如果 $f(z)$ 在简单闭曲线 $\mathcal{C}$ 上连续, 而在由 $\mathcal{C}$ 所围成的区域 $\mathcal{D}$ 内处处全纯, 那么 $f(z)$ 沿着 $\mathcal{C}$ 的积分为零.

♡

应用 Cauchy-Goursat 定理 (定理 4.4 (1)) 要注意以下几个问题:

(1) 假设条件 “$\mathcal{D}$ 为单连通” 必不可少: 取 $\mathcal{D} = \{z \in \mathbf{C} : \frac{1}{2} < |z| < 1\}$, 对任何 $\mathcal{D}$ 内的闭曲线 $\mathcal{C}$ 都有

$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{dz}{z} = 2\pi\mathbf{i}.$$

(2) 假设条件 “$f(z)$ 在 $\mathcal{D}$ 内处处全纯 “必不可少: 取 $\mathcal{D} = \{z \in \mathbf{C} : |z| < 2\}$ 和 $\mathcal{C} = \{z \in \mathbf{C} : |z| = 1\}$, 则

$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{dz}{z} = 2\pi\mathbf{i}.$$

(3) 如果 $\mathcal{D}$ 不是单连通的话, 我们须要求 $\mathcal{C}$ 是简单闭曲线; 如果 $\mathcal{D}$ 是单连通的话, $\mathcal{C}$ 可以是任何的闭曲线.

(4) Cauchy-Goursat 定理的逆定理一般是不对的. 比如考虑复变函数 $f(z) = 1/z^2$, 它沿着 $\mathbf{C}$ 内的任意闭曲线 $\mathcal{C}$ 的积分都为零,

$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{dz}{z^2} = 0,$$

但是此函数在 $z = 0$ 处不全纯.

当然, 在一定条件下 (如果 $f(z)$ 本身是连续的话), 逆定理是对的, 参见定理 4.15.

4.2.2 Cauchy-Goursat 定理的历史

Cauchy-Goursat 定理实际上最早由Gauss进行研究并给出证明, 可是这也是他众多没有正式发表的数学成果之一. 1811 年, 在寄给他好友Friedrich Wilhelm Bessel的信中, Gauss写道: “这是一个非常漂亮的定理, 我将在合适的场合给出它相当简单的证明. 它与级数展开有关的其他美丽的真理息息相关.”

Poisson在 1815 年注意到并且在 1820 年的一篇论文中讨论了, 沿着复平面上的路径进行积分.

第一个正式发表的证明归功于Cauchy, 他在 1825 年发表的一篇很重要的论文[1]. 他在论文里默认了连续函数总是可导的——这个信念普遍被十八世纪和十九世纪的人们接受. 在 1846 年的一篇论文[2]中, Cauchy给出了一个新的证明.

当然在 1842 年, Weierstrass在利用幂级数重构复分析理论时也独立地发现了这个定理. 他使用幂级数的技巧是从他的老师Gundermann那里学来的. 虽然这个工作他没有正式发表, 但是通过在不同场合的演讲而被数学界所知晓. Weierstrass并不担心优先权, 因为他的很多结果在当时已被其他人发表, 他关心的是他所阐明的函数论的方法.

定理 4.3是Goursat 在 1884 年的论文[3]隐式给出的. 事实上, Goursat在 1884 年的论文里的证明确实没有用到导函数连续这个条件, 之后在 1900 年的论文[4]开篇就给了说明:

> J'ai reconnu depuis longtemps que la démonstration du théorème de Cauchy, que jái donnée en 1883, ne supposait pas la continuité de la dérivée. Pour répondre au désir qui m'a é té exprimeé par M. le Professeur Wm.F. Osgood, je vais indiquer ici rapidement comment on peut faire cette extension.
>
> (我早就认识到, 我在 1883 年给出的柯西定理的证明并没有假设导数的连续性. 为了回应 Osgood 教授向我表达的愿望, 我将在此简要说明如何进行此扩展.)

基于Goursat在 1884 年论文的想法, Eliakim Hastings Moore(摩尔)在 1900 年的论文[5]里也给出了**定理 4.3**的一个简单证明.

定理 4.4 起源于Erich Kamke在 1932 年提的问题[6], 即 Cauchy-Goursat 定理是否在 (2) 中的条件下成立. 1 年后, Denjoy给出了证明, 同年J. L. Walsh给出了一个简单的证明[7].

---

[1]Cauchy, A. L. *Mémoire sur les intégrales définies prises entre des limites imaginaires*, Bull. des Sci. Math., **7**(1874), 265-304.

[2]Cauchy, A. L. *Sur les intégrales qui s'étendent à tous les points d'une courble fermée*, Comp. Rend., **23**(1846), 251-255.

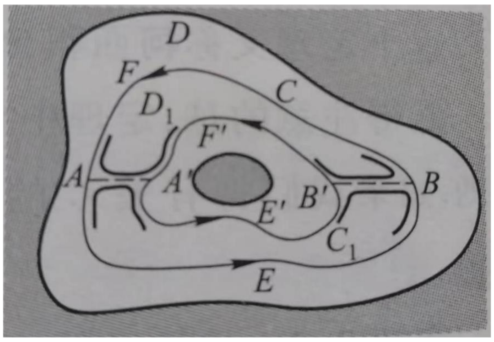
[3]Goursat, E. *Démonstration du théoréme de Cauchy: Extrait d'une lettre adressée à M. Hermite*, Acta. Math., **4**(1884), 197-200.

[4]Goursat, E. *Sur la Definition Generale Des Founctions Analytiques, D'Apres Cauchy*, Trans. AMS., **1**(1900), no. 1, 14–16.

[5]Moore, E. H. *A simple proof of the fundamental Cauchy-Goursat theorem*, Trans. AMS., **1**(1900), no. 4, 499-506

[6]Kamke, E. *Zu dem Integralsatz von Cauchy*, Math. Z., **35**(1932), 539-543.

[7]Walsh, J. L. *The Cauchy-Coursat theorem for rectifiable Jordan curves*, PNAS., **19**(1933), no. 5, 540-541.



(图片来自网络)
图 4.1: 多连通区域 $\mathcal{D}$ 里 $\mathcal{C}$ 与 $\mathcal{C}_1$ 所构成的区域 $\mathcal{D}_1$

4.2.3 Cauchy-Goursat 定理的推广

Cauchy-Goursat 定理要求区域是单连通的, 为了把定理推广到多连通区域, 我们首先做些初步的探索.

假设 $\mathcal{D}$ 是复平面内的多连通区域, 函数 $f(z)$ 在 $\mathcal{D}$ 内全纯, $\mathcal{C}$ 为 $\mathcal{D}$ 内任意一条简单闭曲线.

(1) 如果 $\mathcal{C}$ 的内部完全包含在 $\mathcal{D}$ 内, 则根据定理 **4.3**可知,

$$\oint_{\mathcal{C}} f(z)dz = 0.$$

(2) 如果 $\mathcal{C}$ 的内部不完全包含在 $\mathcal{D}$ 内, 则 $f(z)$ 沿着 $\mathcal{C}$ 的积分不一定为零. 比如考虑例 **4.1**(2).

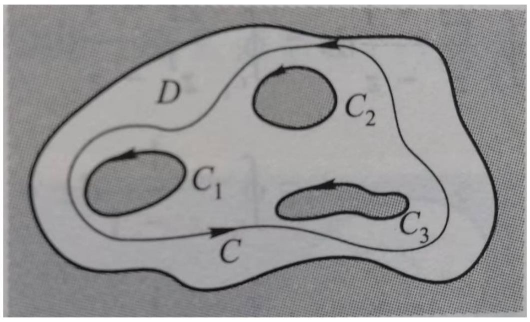
(3) 为了进一步研究情形 (2), 我们再在 $\mathcal{D}$ 内取一条简单闭曲线 $\mathcal{C}_1$, 并要求 $\mathcal{C}_1$ 在 $\mathcal{C}$ 的内部, 而且以 $\mathcal{C}$ 及 $\mathcal{C}_1$ 为边界的区域 $\mathcal{D}_1$ 完全包含在 $\mathcal{D}$ 内.

作两条不相交的光滑曲线段 $\widehat{AA'}$ 和 $\widehat{BB'}$, 它们依次连接 $\mathcal{C}$ 上某点 A 到 $\mathcal{C}_1$ 上的点 A', 以及 $\mathcal{C}_1$ 上某点 B'(异于 A') 到 $\mathcal{C}$ 上的点 B, 而且这两条曲线段除了端点外完全包含在 $\mathcal{D}_1$, 如图 4.1 所示. 因此, $AEBB'E'A'A$ 和 $AA'F'B'BFA$ 分别形成了两条含在 $\mathcal{D}$ 内的简单闭曲线, 并且它们的内部完全包含在 $\mathcal{D}$ 内的. 分别对它们用 Cauchy-Goursat 定理得到

$$\oint_{AEBB'E'A'A} f(z)dz = 0, \quad \oint_{AA'F'B'BFA} f(z)dz = 0.$$

结合 $\mathcal{C}$ 及 $\mathcal{C}_1$ 的定向, 我们得到

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{\widehat{AEB}} f(z)dz + \int_{\widehat{BB'}} f(z)dz + \int_{\widehat{B'E'A'}} f(z)dz + \int_{\widehat{A'A}} f(z)dz \\
&= \int_{\widehat{AEB}} f(z)dz + \int_{\widehat{BB'}} f(z)dz - \int_{\widehat{A'E'B'}} f(z)dz + \int_{\widehat{A'A}} f(z)dz, \\
0 &= \int_{\widehat{AA'}} f(z)dz + \int_{\widehat{A'F'B'}} f(z)dz + \int_{\widehat{B'B}} f(z)dz + \int_{\widehat{BFA}} f(z)dz \\
&= \int_{\widehat{AA'}} f(z)dz - \int_{\widehat{B'F'A'}} f(z)dz + \int_{\widehat{B'B}} f(z)dz + \int_{\widehat{BFA}} f(z)dz.
\end{aligned}$$



(图片来自网络)
图 4.2: 复合闭路定理

两式相加得到

$$0=\left(\int_{\widehat{AEB}}+\int_{\widehat{BFA}}\right)f(z)dz-\left(\int_{\widehat{A'E'B'}}+\int_{\widehat{B'F'A'}}\right)f(z)dz$$

或

$$\oint_C f(z)dz=\oint_{C_1} f(z)dz.$$

这表明 $f(z)$ 沿着较大的简单闭曲线作积分后的值, 等于它沿着较小的简单闭曲线作积分后的值.

我们把这两条简单闭曲线 C 和 C_1 看成是一条复合闭路 Γ, 同时规定 Γ 的正向如下: 当闭曲线 C 按照图 4.1 中逆时针进行时, 闭曲线 C_1 则按顺时针进行, 从而保证沿着 Γ 的正向前进时 Γ 的内部总是在 Γ 的左边. 此时记作

$$\Gamma=C+C_1^-=C-C_1.$$

这样我们得到了等价的公式

$$\oint_\Gamma f(z)dz=0.$$

一般地, 我们由如下

定理 4.5. (复合闭路定理)

假设 C 为多连通区域 D 内的一条简单闭曲线, $C_1,\cdots,C_n$ 是在 C 内部的 n 条简单闭曲线, 它们互相不包含也不相交, 并且以 $C,C_1,\cdots,C_n$ 为边界的区域完全包含在 D 内 (如图 4.2 所示). 如果 $f(z)$ 在 D 内全纯, 那么

$$\oint_C f(z)dz=\sum_{1\le k\le n}\oint_{C_k} f(z)dz, \tag{4.2.2}$$

这里 C 及 C_k 都取正向. 等价地,

$$\oint_\Gamma f(z)dz=0, \tag{4.2.3}$$

这里 Γ 是由 C 及 $C_k, k=1,\cdots,n$, 所组成的复合闭路, 其中 C 取正向, 而 C_k 取负向, 并记

$$\Gamma=C+\sum_{1\le k\le n}C_k^-=C-\sum_{1\le k\le n}C_k.$$

♡

定理 4.6. (闭路形变原理)

在给定区域内的全纯函数 $f(z)$ 沿着闭曲线的积分, 不因闭曲线在区域内作连续变形而改变它的值, 只要在变形过程中曲线不经过 $f(z)$ 的奇点.

例 4.3

(1) 对任何包含 $z_0 \in \mathbf{C}$ 的正向简单闭曲线 $\mathcal{C}$, 我们有

$$\frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\oint_{\mathcal{C}}\frac{dz}{(z-z_0)^{n+1}}=\delta_{n0}=\begin{cases}1, & n=0,\\ 0, & n\neq 0,\end{cases}\tag{4.2.4}$$

这里 $n \in \mathbf{Z}$.

证: 根据**定理 4.6**, 我们可以把 $\mathcal{C}$ 形变到以 z_0 为圆心的位于 $\mathcal{C}$ 内部的正向圆周 $|z-z_0|=r$. 这样就转化成**例 4.1**(2). □

(2) 计算

$$\oint_{\Gamma}\frac{2z-1}{z^2-z}dz$$

的值, 其中 Γ 为包含圆周 $|z|=1$ 在其内部的任意正向简单闭曲线.

解: 因为被积函数

$$f(z)=\frac{2z-1}{z^2-z}=\frac{2z-1}{z(z-1)}=\frac{1}{z-1}+\frac{1}{z}$$

有两个奇点 $z=0$ 和 $z=1$. 因此在 Γ 内作两个互不包含也互不相交的正向圆周 $\mathcal{C}_1=\{|z|=r_1\}$ 和 $\mathcal{C}_2=\{|z-1|=r_2\}$, 使得 $\mathcal{C}_1$ 只包含奇点 $z=0$, $\mathcal{C}_2$ 只包含奇点 $z=1$. 根据**定理 4.5**得到

$$\begin{aligned}\oint_{\Gamma}\frac{2z-1}{z^2-1}dz &= \oint_{\Gamma}\left(\frac{1}{z-1}+\frac{1}{z}\right)dz\\ &= \oint_{\mathcal{C}_1}\left(\frac{1}{z-1}+\frac{1}{z}\right)dz+\oint_{\mathcal{C}_2}\left(\frac{1}{z-1}+\frac{1}{z}\right)dz\\ &= 0+2\pi\mathbf{i}+2\pi\mathbf{i}+0 \;=\; 4\pi\mathbf{i}.\;\square\end{aligned}$$

(3) 求积分

$$I=\oint_{\mathcal{C}}\frac{z^2+1}{z^2-1}e^z dz,$$

其中 $\mathcal{C}$ 为正向圆周 $|z-z_0|=1$, 而圆心分别为 $z_0=1$, $z_0=\frac{1}{2}$, $z_0=-1$ 和 $z_0=-\mathbf{i}$.

解: 因为 $z^2-1=(z-1)(z+1)$, 所以当 $z_0=-\mathbf{i}$ 时, 根据 Cauchy-Goursat 定理 $I=0$.

根据**定理 4.6**, 在 $z_0=1$ 和 $z_0=\frac{1}{2}$ 情形时, 积分值是一样的:

$$I=\oint_{|z-1|=1}\frac{1}{z-1}\left(\frac{z^2+1}{z+1}e^z\right)dz=2\pi\mathbf{i}\left(\frac{z^2+1}{z+1}e^z\right)\bigg|_{z=1}=2\pi e\mathbf{i}.$$

类似地, 当 $z_0=-1$ 时, 得到

$$I=\oint_{|z+1|=1}\frac{1}{z+1}\left(\frac{z^2+1}{z-1}e^z\right)dz=2\pi\mathbf{i}\left(\frac{z^2+1}{z-1}e^z\right)\bigg|_{z=-1}=-2\pi e^{-1}\mathbf{i}.\;\square$$

4.3 原函数与不定积分

假设 $f(z)$ 在单连通区域 $\mathcal{D}$ 内处处全纯, 任取 $\mathcal{D}$ 内的两点 z_0, z_1. 考虑从 z_0 到 z_1 的两条分段光滑的曲线 $\mathcal{C}_1$ 和 $\mathcal{C}_2$, 使得它们构成简单闭曲线. 这样从定理 4.3得到

$$\int_{\mathcal{C}_1} f(z)dz = \int_{\mathcal{C}_2} f(z)dz.$$

如果曲线 $\mathcal{C}_1$ 和 $\mathcal{C}_2$ 除了 z_0 和 z_1 外还有其它交点, 那么我们可以把 $\mathcal{C}_1$ 和 $\mathcal{C}_2$ 所构成的闭曲线分成若干个简单闭曲线, 这样上述结论还是成立.

定理 4.7

如果 $f(z)$ 在单连通区域 $\mathcal{D}$ 内处处全纯, z_0 与 z_1 是 $\mathcal{D}$ 内给定的两点, 那么积分

$$\int_{\mathcal{C}} f(z)dz$$

的值与从 z_0 到 z_1 的路径 $\mathcal{C}$ 无关. 此时把这个公共值记为

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)dz. \tag{4.3.1}$$

4.3.1 变上限积分

如果 $f(z)$ 在单连通区域 $\mathcal{D}$ 内处处全纯, 给定 $\mathcal{D}$ 内的点 z_0. 任取 $z \in \mathcal{D}$, 根据 (4.3.1) 我们得到一个复变函数

$$F(z) := \int_{z_0}^{z} f(z)dz, \quad z \in \mathcal{D}, \tag{4.3.2}$$

称为**$f(z)$ 的变上限积分**.

定理 4.8

假设 $\mathcal{D}$ 是单连通区域而 $z_0 \in \mathcal{D}$. 如果 $f \in H(\mathcal{D})$, 那么 $F \in H(\mathcal{D})$ 且满足

$$F'(z) = f(z), \quad z \in \mathcal{D}. \tag{4.3.3}$$

证: 任取 $z \in \mathcal{D}$, 我们接下来证明 $F \in D(z)$ 且 $F'(z) = f(z)$, 即证明

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} = f(z).$$

因为 $\mathcal{D}$ 是区域, 所以存在以 z 为中心的且完全包含在 $\mathcal{D}$ 内的邻域 K. 取 Δz 足够小, 使得 $z + \Delta z \in K$. 根据 (4.3.2) 得到

$$F(z+\Delta z) - F(z) = \int_{z}^{z+\Delta z} f(\zeta)d\zeta - \int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta.$$

利用定理 4.7, 上面右端中第一项积分的积分路径, 可以取成第二项积分的积分路径再加上直线段 $\overline{z(z+\Delta z)}$. 因此

$$F(z+\Delta z) - F(z) = \int_{\overline{z(z+\Delta z)}} f(\zeta)d\zeta$$

从而得到

$$\frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z) = \frac{1}{\Delta z}\int_{\overline{z(z+\Delta z)}} [f(\zeta) - f(z)]d\zeta.$$

因为 $f \in H(\mathcal{D})$, 所以 $f \in C(\mathcal{D})$ 从而对任意 $\epsilon > 0$ 存在 $\delta > 0$ 使得对任意 $\zeta \in U(z,\delta) \cap K$ 都有

$$|f(\zeta) - f(z)| < \epsilon.$$

因此当个 $|\Delta z| < \delta$ 时, 我们得到

$$\left|\frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z)\right| \le \frac{1}{|\Delta z|}\int_{z(z+\Delta z)} |f(\zeta) - f(z)| ds \le \frac{\epsilon}{|\Delta z|}\int_{z(z+\Delta z)} ds = \epsilon.$$

故 F 在 z 处可导且满足 $F'(z) = f(z)$. □

4.3.2 原函数与不定积分

定理 4.8 促使我们可引入如下

定义 4.2

假设 $\mathcal{D}$ 是区域而 $f \in C(\mathcal{D})$. 如果函数 $G \in D(\mathcal{D})$ 满足

$$G'(z) = f(z), \quad z \in \mathcal{D},$$

那么称 $G(z)$ 是 $f(z)$ 在区域 $\mathcal{D}$ 内的一个**原函数**.

♣

显然, 如果 $G(z)$ 是 $f(z)$ 在区域 $\mathcal{D}$ 上的一个原函数, 则对任意常数 $C \in \mathbf{C}$, $G(z) + C$ 也是 $f(z)$ 在区域 $\mathcal{D}$ 上的一个原函数.

(1) 反之, $f(z)$ 的任意两个原函数只相差一个复常数. 实际上, 假设 $G(z)$ 和 $H(z)$ 是 $f(z)$ 的两个原函数, 则

$$[G(x) - H(z)]' = G'(z) - H'(z) = f(z) - f(z) = 0, \quad z \in \mathcal{D}.$$

因为 $\mathcal{D}$ 是区域, 所以 $G(z) - H(z)$ 等于某个复常数 C.

(2) 根据 (1), 如果 $G(z)$ 是 $f(z)$ 在区域 $\mathcal{D}$ 上的一个原函数, 那么 $f(z)$ 在区域 $\mathcal{D}$ 上的其它原函数都可以写成 $G(z) + C, C \in \mathbf{C}$. 因此我们定义 $f(z)$ 的**不定积分**为

$$\int f(z)dz := \{G(z) + C : C \in \mathbf{C}\} \equiv G(z) + C. \tag{4.3.4}$$

(3) **定理 4.8** 告诉我们, 如果 $f(z)$ 在单连通区域 $\mathcal{D}$ 内全纯, 则由 (4.3.2) 定义的 $F(z)$ 是 $f(z)$ 在 $\mathcal{D}$ 内的一个原函数.

定理 4.9

如果 $\mathcal{D}$ 是单连通区域, $f \in H(\mathcal{D})$, 而 $G(z)$ 是 $f(z)$ 在 $\mathcal{D}$ 内的任意原函数. 则对 $\mathcal{D}$ 中的任意两点 z_0, z_1, 有

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)dz = G(z_1) - G(z_0). \tag{4.3.5}$$

♡

证: 因为变上限积分

$$\int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta$$

是 $f(z)$ 在 $\mathcal{D}$ 内的一个原函数, 所以

$$\int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta = G(z) + C$$

对某个常数 C 成立. 取 $z=z_0$ 得到

$$G(z_0)+C=0$$

这里用到了**定理 4.3**. 故

$$\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,d\zeta = G(z)-G(z_0),\quad z\in\mathcal{D}.$$

特别地, 当 $z=z_1$ 时就得到了 (4.3.5). □

复积分中也有类似的换元法和分部法.

(1) **换元法.** 假设 $w=f(z)$ 在 z 平面上的区域 $\mathcal{D}$ 内全纯, $f'(z)\neq 0$, 且它将 $\mathcal{D}$ 内的光滑曲线 $\mathcal{C}$ 映成 w 平面上的区域 $\widehat{\mathcal{D}}$ 内的光滑曲线 $\widehat{\mathcal{C}}$. 如果 $\Phi(w)$ 是连续函数, 则

$$\int_{\widehat{\mathcal{C}}} \Phi(w)\,dw = \int_{\mathcal{C}} \Phi[f(z)]f'(z)\,dz. \tag{4.3.6}$$

如果进一步 $\Phi(w)$ 是全纯函数, 且 $\mathcal{D}$ 与 $\widehat{\mathcal{D}}$ 都是单连通的, 则

$$\int_{w_1}^{w_2} \Phi(w)\,dw = \int_{z_1}^{z_2} \Phi[f(z)]f'(z)\,dz, \tag{4.3.7}$$

这里 $w_1=f(z_1)$ 和 $w_2=f(z_2)$.

证: 假设曲线 $\mathcal{C}$ 的参数方程为 $z=z(t)$, $\alpha\le t\le\beta$, $z'(t)\neq 0$ 且 $z'(t)\in C([\alpha,\beta])$. 因此曲线 $\widehat{\mathcal{C}}$ 的参数方程为 $w=w(t)=f[z(t)]$, $\alpha\le t\le\beta$ 且

$$\frac{dw}{dt}=f'(z(t))z'(t)\neq 0,$$

且 $dw/dt\in C([\alpha,\beta])$. 如果 $\phi(w)$ 连续, 则

$$\begin{aligned}\int_{\widehat{\mathcal{C}}} \Phi(w)\,dw &= \int_{\alpha}^{\beta} \Phi(w(t))w'(t)\,dt = \int_{\alpha}^{\beta} \Phi(f[z(t)])f'(z)z'(t)\,dt\\ &= \int_{\mathcal{C}} \Phi[f(z)]f'(z)\,dz.\ \square\end{aligned}$$

(2) **分部法.** 假设 $f(z)$ 和 $g(z)$ 在单连通区域 $\mathcal{D}$ 内处处全纯, $z_1,z_2\in\mathcal{D}$, 则

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)g'(z)\,dz = \Big[f(z)g(z)\Big]_{z_1}^{z_2} - \int_{z_1}^{z_2} g(z)f'(z)\,dz. \tag{4.3.8}$$

证: 这是因为

$$[f(z)g(z)]'=f'(z)g(z)+f(z)g'(z)$$

从而 $f(z)g(z)$ 是 $f'(z)g(z)+f(z)g'(z)$ 的一个原函数. □

例 4.4

(1) 计算复积分

$$I=\int_0^{\mathbf{i}} z\cos z\,dz$$

的值.

解: 因为函数 $f(z)=z\cos z$ 在整个复平面 $\mathbf{C}$ 内全纯, 并且有一个原函数 $G(z)=z\sin z+\cos z$, 所以

$$\int_0^{\mathbf{i}} z\cos z\,dz = G(\mathbf{i})-G(0)=\mathbf{i}\sin\mathbf{i}+\cos\mathbf{i}-1=\frac{1}{e}-1.\quad \square$$

(2) 沿着区域 $\{z \in \mathbf{C} : \mathrm{Im}(z), \mathrm{Re}(z) \geq 0\}$ 内的圆弧 $|z| = 1$, 计算复积分

$$\int_1^{\mathbf{i}} \frac{\ln(z+1)}{z+1} dz.$$

解: 因为函数 $f(z) = \ln(z+1)/(z+1)$ 在整个复平面 $\mathbf{C}$ 内全纯, 并且有一个原函数 $G(z) = \frac{1}{2}\ln^2(z+1)$, 所以

$$\begin{aligned} \int_1^{\mathbf{i}} \frac{\ln(z+1)}{z+1} dz &= \frac{1}{2}\left[\ln^2(1+\mathbf{i}) - \ln^2 2\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{2}\ln 2 + \frac{\pi}{4}\mathbf{i}\right)^2 - \ln^2 2\right] = -\frac{\pi^2}{32} - \frac{3}{8}\ln^2 2 + \frac{\pi \ln 2}{8}\mathbf{i}. \quad \square \end{aligned}$$

(3) 求积分

$$I = \int_1^{\mathbf{i}} \ln(z+1)\, dz$$

沿着圆周 $|z| = 1$ 在第一象限的部分.

解: 因为函数 $\ln(z+1)$ 在区域 $-\pi < \mathbf{arg}(z+1) < \pi$ 内全纯, 所以

$$\begin{aligned} I &= z\ln(z+1)\Big|_1^{\mathbf{i}} - \int_1^{\mathbf{i}} \frac{z}{z+1} dz = \mathbf{i}\ln(1+\mathbf{i}) - \ln 2 - \int_1^{\mathbf{i}} \left(1 - \frac{1}{z+1}\right) dz \\ &= \mathbf{i}\ln(1+\mathbf{i}) - \ln 2 + 1 - \mathbf{i} + \mathrm{Ln}(1+z)\Big|_1^{\mathbf{i}} \end{aligned}$$

$$= 1 - \mathbf{i} + (1+\mathbf{i})\ln(1+\mathbf{i}) - 2\ln 2 = 1 - \frac{3}{2}\ln 2 - \frac{\pi}{4} + \mathbf{i}\left(\ln\sqrt{2} + 1 + \frac{\pi}{4}\right). \quad \square$$

(4) 求积分

$$I = \int_{-1}^{\mathbf{i}} \frac{dz}{z^2 + z - 2}$$

这里路径是沿着 -1 到 $\mathbf{i}$ 的直线段.

解: 因为 $z^2 + z - 2 = (z-1)(z+2)$, 所以可以找到一个单连通区域不包含 1 和 -2, 但是包含连接 -1 与 $\mathbf{i}$ 的直线段. 因此得到

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{3}\int_{-1}^{\mathbf{i}} \left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+2}\right) dz = \frac{1}{3}\Big[\ln(z-1) - \ln(z+2)\Big]_{-1}^{\mathbf{i}} \\ &= = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\ln 10 + \mathbf{i}\arctan 3\right). \quad \square \end{aligned}$$

(5) 求积分

$$I = \int_{-\pi\mathbf{i}}^{\pi\mathbf{i}} \sin^2 z\, dz,$$

这里积分路径为从 $-\pi\mathbf{i}$ 到 $\pi\mathbf{i}$ 的人员简单光滑曲线.

解: 分部积分得到

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\pi\mathbf{i}}^{\pi\mathbf{i}} \frac{1 - \cos(2z)}{2} dz = \frac{1}{2}\left(z - \sin z \cos z\right)\Big|_{-\pi\mathbf{i}}^{\pi\mathbf{i}} \\ &= \pi\mathbf{i} - \sin(\pi\mathbf{i})\cos(\pi\mathbf{i}) = \left(\pi - \frac{1}{2}\mathrm{sh}(2\pi)\right)\mathbf{i}. \quad \square \end{aligned}$$

4.4 Cauchy 积分公式

本节我们将介绍一个非常重要的公式——Cauchy 积分公式. 根据 (4.2.4), 我们得到

$$\frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\oint_{\mathcal{C}}\frac{1}{z-z_0}dz=1$$

对任意包含 $z_0\in\mathbf{C}$ 的正向简单闭曲线 $\mathcal{C}$ 都成立. 一个自然的问题是: 什么时候成立如下的公式

$$\frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\oint_{\mathcal{C}}\frac{f(z)}{z-z_0}dz=f(z_0),$$

这里 $\mathcal{C}$ 是包含 $z_0\in\mathbf{C}$ 的任意一条正向简单闭曲线. 做差得到

$$\left|\frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\oint_{\mathcal{C}}\frac{f(z)}{z-z_0}dz-f(z_0)\right|=\left|\frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\oint_{\mathcal{C}}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}dz\right|\le\frac{1}{2\pi}\oint_{\mathcal{C}}\frac{|f(z)-f(z_0)|}{|z-z_0|}ds;$$

如果 $\mathcal{C}=\{|z-z_0|=r\}$, 那么

$$\left|\frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\oint_{\mathcal{C}}\frac{f(z)}{z-z_0}dz-f(z_0)\right|\le\frac{1}{2\pi r}\oint_{|z-z_0|=r}|f(z)-f(z_0)|ds\le\max_{|z-z_0|=r}|f(z)-f(z_0)|.$$

当 $r\to0+$ 时, 右边极限为零. 上述推导我们作了假设, 即 $\mathcal{C}$ 取成包含 z_0 的圆周, 不过这可以用**定理 4.6**做下过渡——不过需要假设 $f\in H(\mathcal{D})$ 且 $\mathcal{C}$ 包含 z_0 的任意一条正向简单闭曲线且其内部完全包含在 $\mathcal{D}$ 内.

4.4.1 Cauchy 积分公式

综上, 我们得到

定理 4.10. (Cauchy 积分公式)

如果 $f\in H(\mathcal{D})$, $\mathcal{C}$ 为区域 $\mathcal{D}$ 内的任意一条正向简单闭曲线且其内部完全包含在 D 内, 而 z_0 为 $\mathcal{C}$ 内部的一点, 那么

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\oint_{\mathcal{C}}\frac{f(z)}{z-z_0}dz. \tag{4.4.1}$$

♡

证: 因为 $f\in H(\mathcal{D})$, 所以 $f\in C(\mathcal{D})$. 因此对任意 $\epsilon>0$, 存在 $\delta>0$ 使得 $U(z_0,\delta)\subset\mathcal{D}$, 且

$$|f(z)-f(z_0)|<\epsilon,\quad |z-z_0|<\delta.$$

选取 $r<\delta$ 使得圆周 $K_r:=\{z\in\mathbf{C}:|z-z_0|=r\}$ 完全包含在 $\mathcal{C}$ 的内部. 利用用**定理 4.6**得到

$$\frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\oint_{\mathcal{C}}\frac{f(z)}{z-z_0}dz-f(z_0)=\frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\oint_{K_r}\frac{f(z)}{z-z_0}dz-f(z_0)=\frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\oint_{K_r}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}dz.$$

两边取绝对值得到

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\oint_{\mathcal{C}}\frac{f(z)}{z-z_0}dz-f(z_0)\right| &= \left|\frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\oint_{K_r}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}dz\right|\\ &\le \frac{1}{2\pi}\oint_{K_r}\frac{|f(z)-f(z_0)|}{|z-z_0|}ds < \frac{1}{2\pi}\oint_{K_r}\frac{\epsilon}{r}ds = \epsilon.\end{aligned}$$

根据 ϵ 的任意性, 我们得到了 (4.4.1). □

如果 C 是以 z_0 为圆心的圆周, 那么就得到了

推论 4.1. (全纯函数的平均值公式)

如果 $f \in H(\mathcal{D})$, $z_0 \in \mathcal{D}$, 且闭邻域 $|z - z_0| \le r$ 完全包含在 $\mathcal{D}$ 内, 那么

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f\left(z_0 + re^{\mathrm{i}\theta}\right) d\theta. \tag{4.4.2}$$

♡

证: 因为 $C := \{z \in \mathbf{C} : |z - z_0| = r\}$ 上的点可写成 $z = z_0 + re^{\mathrm{i}\theta}, \theta \in [0, 2\pi]$, 所以从 (4.4.1) 得到

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \oint_{|z-z_0|=r} \frac{f(z_0 + re^{\mathrm{i}\theta})}{re^{\mathrm{i}\theta}} d(re^{\mathrm{i}\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f\left(z_0 + re^{\mathrm{i}\theta}\right) d\theta. \quad \square$$

例 4.5

(1) 求复积分

$$I = \frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \oint_{|z|=4} \frac{\sin z}{z} dz$$

沿着圆周正向的值.

解: 由 (4.4.1) 得到

$$I = \sin 0 = 0.$$

(2) 求复积分

$$I = \frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \oint_{|z|=4} \frac{3z - 1}{(z+1)(z-3)} dz$$

沿着圆周正向的值.

解: 由 (4.4.1) 得到

$$I = \frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \oint_{|z|=4} \left(\frac{1}{z+1} + \frac{2}{z-3}\right) dz = 1 + 2 = 3.$$

(3) 求复积分

$$I = \frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \oint_{|z|=2} \frac{z^2}{z^2 + 2z + 2} dz$$

沿着圆周正向的值.

解: 由 (4.4.1) 得到

$$I = \frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \oint_{|z|=2} \left(1 - \frac{1}{z - (-1 + \mathbf{i})} - \frac{1}{z - (-1 - \mathbf{i})}\right) dz = 0 - 1 - 1 = -2.$$

♠

4.4.2 Cauchy-Pompeiu 积分公式

当 $f(z)$ 不是全纯时, 罗马尼亚数学家Dimitrie Pompeiu在 1902 年 5 月 26 日把此时的主要结果递交给了法国科学院, 论文[8]在 1905 年出版. 这篇论文也是Pompeiu在Poincaré指导下的博士论文.

[8]Pompeiu, D. *Sur la continuité des fonctions de variables complexes*, Annales de la faculté des sciences de Toulouse 2^e Séries, tome 7, n° 3 (1905), 265-315.

为了陈述 Cauchy-Pompeiu 积分公式, 对任何复变函数 $f(z)=u+\mathbf{i}v$ 引入 **Wirtinger 算子**[9]

$$\frac{\partial}{\partial z}:=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}-\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial y}\right),\quad \frac{\partial}{\partial \overline{z}}:=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial y}\right). \tag{4.4.3}$$

因此得到

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\mathbf{i}\frac{\partial f}{\partial y}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(u_x+\mathbf{i}v_x+\mathbf{i}(u_y+\mathbf{i}v_y)\right) = \frac{1}{2}\left((u_x-v_y)+\mathbf{i}(v_x+u_y)\right).\end{aligned}$$

故

$$f\in H(\mathcal{D}) \iff \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}=0. \tag{4.4.4}$$

Pompeiu得到的 Cauchy-Pompeiu 积分公式只要求复变函数 $f(z)$ 可导且导函数连续即可. 在第 **4.4.3**我们将会证明全纯函数的任意阶导数也是全纯的.

定理 4.11. (Cauchy-Pompeiu 积分公式)

假设 $\mathcal{D}$ 是复平面 $\mathbf{C}$ 内的圆盘, 复变函数 $f(z)$ 是 $\overline{\mathcal{D}}$ 上的 C^1 函数, 那么

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\oint_{\mathcal{C}}\frac{f(z)}{z-z_0}dz-\frac{1}{\pi}\iint_{\mathcal{D}}\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z)\frac{dx\wedge dy}{z-z_0}, \tag{4.4.5}$$

这里 $\mathcal{C}=\partial\mathcal{D}$. ♡

4.4.3 高阶导数公式

本小节, 我们用 Cauchy 积分公式 (4.4.1) 来证明全纯函数的任意阶导数也是全纯的.

定理 4.12. (高阶导数公式或 Cauchy 求导公式)

如果 $f\in H(\mathcal{D})$, $\mathcal{C}$ 为区域 $\mathcal{D}$ 内的任意一条正向简单闭曲线且其内部完全包含在 $\mathcal{D}$ 内, 而 z_0 为 $\mathcal{C}$ 内部的一点, 那么 $f(z)$ 在 z_0 处的任意阶导数都存在且

$$f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi\mathbf{i}}\oint_{\mathcal{C}}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz,\quad n\in\mathbf{N}. \tag{4.4.6}$$

从而得到区域 $\mathcal{D}$ 上的全纯函数的任意阶导数也是全纯函数. ♡

证: 回忆下导数 $f'(z_0)$ 的定义

$$f'(z_0)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}.$$

利用 Cauchy 积分公式 (4.4.1) 得到

$$\begin{aligned}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z} &= \frac{1}{2\pi\mathbf{i}\Delta z}\left[\oint_{\mathcal{C}}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z_0-\Delta z}d\zeta-\oint_{\mathcal{C}}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z_0}d\zeta\right]\\ &= \frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\oint_{\mathcal{C}}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)(\zeta-z_0-\Delta z)}d\zeta\\ &= \frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\oint_{\mathcal{C}}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^2}d\zeta+\frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\oint_{\mathcal{C}}\frac{f(\zeta)\Delta z}{(\zeta-z_0)^2(\zeta-z-\Delta z)}d\zeta\\ &=: \frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\oint_{\mathcal{C}}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^2}d\zeta+I.\end{aligned}$$

[9] Wirtinger, W. *Zur formalen Theorie der Funktionen von mehr komplexen Veränderlichen*, Math. Ann., **97**(1927), 357-375.

因为 $f \in H(\mathcal{D})$, 所以 $f \in C(\mathcal{D})$ 从而 $f(z)$ 在 $\mathcal{C}$ 有界, 并令 $M := \max_{\mathcal{C}} |f(z)|$. 令 d 为 z_0 点到曲线 $\mathcal{C}$ 的距离, 即

$$d = \min_{\zeta \in \mathcal{C}} |\zeta - z_0|.$$

这样对任意 $\zeta \in \mathcal{C}$, 都有 $|\zeta - z_0| \geq d$. 当 $|\Delta z| < d/2$ 时, 得到

$$|\zeta - z_0 - \Delta z| \geq |\zeta - z_0| - |\Delta z| \geq d - \frac{d}{2} = \frac{d}{2}$$

以及

$$|I| \leq \frac{1}{2\pi} \oint_{\mathcal{C}} \frac{M|\Delta z|}{d^2 \times \frac{d}{2}} ds = \frac{ML}{\pi d^3} |\Delta z|,$$

这里 L 表示曲线 $\mathcal{C}$ 的长度. 故得到

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^2} d\zeta.$$

从而证明了全纯函数 $f(z)$ 在 z_0 处的导数存在且由上式给出. 由于 z_0 的任意性, 可知 $f' \in H(\mathcal{D})$.

接下来, 我们用数学归纳法来证明 $f^{(n)}(z) \in H(\mathcal{D})$ 且 (4.4.6) 对一般的自然数 n 都成立. $n = 1$ 已证明, 假设 $f^{(n)} \in H(\mathcal{D})$ 且 (4.4.6) 对 n 成立, 下证它对 $n+1$ 亦成立. 利用 Cauchy 积分公式 (4.4.1) 得到

$$\begin{aligned}
\frac{f^n(z_0 + \Delta z) - f^{(n)}(z_0)}{\Delta z} &= \frac{n!}{2\pi\mathbf{i}\Delta z} \left[\oint_{\mathcal{C}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0 - \Delta z)^{n+1}} d\zeta - \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \right] \\
&= \frac{n!}{2\pi\mathbf{i}} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}(\zeta - z_0 - \Delta z)^{n+1}} \left[(\zeta - z_0)^{n+1} - (\zeta - z_0 - \Delta z)^{n+1} \right] d\zeta \\
&= \frac{n!}{2\pi\mathbf{i}} \oint_{\mathcal{C}} \frac{\sum_{0 \leq k \leq n} (\zeta - z_0)^k (\zeta - z_0 - \Delta z)^{n-k}}{(\zeta - z_0)^{n+1}(\zeta - z_0 - \Delta z)^{n+1}} d\zeta \\
&= \frac{(n+1)!}{2\pi\mathbf{i}} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+2}} d\zeta \\
&+ \frac{n!}{2\pi\mathbf{i}} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(\zeta) [\sum_{0 \leq k \leq n} (\zeta - z_0)^{k+1} (\zeta - z_0 - \Delta z)^{n-k} - (n+1)(\zeta - z_0 - \Delta z)^{n+1}]}{(\zeta - z_0)^{n+2}(\zeta - z_0 - \Delta z)^{n+1}} d\zeta \\
&=: \frac{(n+1)!}{2\pi\mathbf{i}} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+2}} d\zeta + I
\end{aligned}$$

因为 $f^{(n)} \in H(\mathcal{D})$, 所以 $f^{(n)} \in C(\mathcal{D})$ 从而 $f^{(n)}(z)$ 在 $\mathcal{C}$ 有界, 并令 $M_n := \max_{\mathcal{C}} |f^{(n)}(z)|$. 类似的计算得到

$$|I_n| \leq \frac{2^n M_n L}{\pi d^{n+3}} |\Delta z|,$$

这是因为

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{\sum_{0 \leq k \leq n} (\zeta - z_0)^{k+1} (\zeta - z_0 - \Delta z)^{n-k} - (n+1)(\zeta - z_0 - \Delta z)^{n+1}}{(\zeta - z_0)^{n+2}(\zeta - z_0 - \Delta z)^{n+1}} \right| \\
= &\left| \frac{\sum_{0 \leq k \leq n} (\zeta - z_0 - \Delta z)^{n-k} \Delta z \sum_{0 \leq i \leq k} (\zeta - z_0)^{k-i} (\zeta - z_0 - \Delta z)^i}{(\zeta - z_0)^{n+2}(\zeta - z_0 - \Delta z)^{n+1}} \right| \\
\leq &\ |\Delta z| \sum_{0 \leq k \leq n} \sum_{0 \leq i \leq k} \frac{1}{|\zeta - z_0|^{n+2-k+i} |\zeta - z_0 - \Delta z|^{k-i+1}}
\end{aligned}$$

$$\leq |\Delta z| \sum_{0\leq k\leq n} \sum_{0\leq i\leq k} \frac{1}{d^{n+2-k+i}(d/2)^{k-i+1}} = \frac{|\Delta z|}{d^{n+3}} \sum_{0\leq k\leq n} \sum_{0\leq i\leq k} 2^{k-i+1}$$
$$= \frac{|\Delta z|}{d^{n+3}}\left(2^{n+1}-1-\frac{n+1}{2}\right) \leq \frac{2^{n+1}}{d^{n+3}}|\Delta z|.$$

从而推出

$$f^{(n+1)}(z_0) = \frac{(n+1)!}{2\pi\mathbf{i}} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta.$$

从而证明了全纯函数 $f^{(n)}(z)$ 在 z_0 处的导数存在且由上式给出. 由于 z_0 的任意性, 可知 $f^{(n+1)} \in H(\mathcal{D})$. □

推论 4.2. (Cauchy 不等式)

假设 $\mathcal{D}$ 是复平面 $\mathbf{C}$ 内的区域, $f \in H(\mathcal{D})$, $z_0 \in \mathcal{D}$. 如果闭圆盘 $\{z \in \mathbf{C} : |z-z_0| \leq R\}$ 完全包含在 $\mathcal{D}$ 内, 那么

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!M_R}{R^n}, \tag{4.4.7}$$

这里 $M_R := \max_{|z-z_0|=R} |f(z)|$. ♡

证: 从 (4.4.6) 得到

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \left|\frac{n!}{2\pi\mathbf{i}} \oint_{|z-z_0|=R} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz\right| \leq \frac{n!}{2\pi} \oint_{|z-z_0=R} \frac{|f(z)|}{|z-z_0|^{n+1}} ds$$
$$\leq \frac{n!}{2\pi} \frac{M_R}{R^{n+1}} \oint_{|z-z_0|=R} ds = \frac{n!M_R}{R^n}. \ \square$$

例 4.6

(1) 令

$$F(z) := \oint_{|\zeta|=3} \frac{3\zeta^3 + 7\zeta^2 + 1}{(\zeta - z)^2} d\zeta,$$

求 $F'(1+\mathbf{i})$.

解: 观察到函数 $3z^2+7z^2+1$ 在整个复平面上全纯. 根据 (4.4.6), 当 $|z| < 3$ 时, 得到

$$F(z) = 2\pi\mathbf{i}(3z^3 + 7z^2 + 1)' = 2\pi\mathbf{i}(9z^2 + 14z), \quad |z| < 3.$$

特别地

$$F'(1+\mathbf{i}) = 2\pi\mathbf{i}(18z+14)\Big|_{z=1+\mathbf{i}} = -36\pi + 64\pi\mathbf{i}. \ \square$$

(2) 如果 C 是正向圆周 $|z| = r > 1$, 计算如下积分

$$I_1 := \oint_C \frac{\cos(\pi z)}{(z-1)^5} dz, \quad I_2 := \oint_C \frac{e^z}{(z^2+1)^2} dz.$$

解: 因为函数 $\cos(\pi z)$ 在整个复平面上全纯, 而 1 包含在圆周 C 内, 所以根据 (4.4.6) 可得

$$I_1 = \frac{2\pi\mathbf{i}}{4!} \cos^{(4)}(\pi z)\Big|_{z=1} = -\frac{\pi^5}{12}\mathbf{i}.$$

因为函数 $e^z/(z^2+1)^2$ 在 C 内有两个奇点, 所以在 C 以 $\mathbf{i}$ 为圆心作一个正向圆周 C_1,

以 $-\mathbf{i}$ 为圆心作令另一个正向圆周 $\mathcal{C}_2$. 根据**定理 4.5**得到

$$\begin{aligned}
I_2 &= \oint_{\mathcal{C}_1} \frac{e^z}{(z^2+1)^2} dz + \oint_{\mathcal{C}_2} \frac{e^z}{(z^2+1)^2} dz \\
&= \oint_{\mathcal{C}_1} \frac{e^z}{(z+\mathbf{i})^2(z-\mathbf{i})^2} dz + \oint_{\mathcal{C}_2} \frac{e^z}{(z+\mathbf{i})^2(z-\mathbf{i})^2} dz \\
&= \frac{2\pi\mathbf{i}}{1!}\left[\frac{e^z}{(z+\mathbf{i})^2}\right]'_{z=\mathbf{i}} + \frac{2\pi\mathbf{i}}{1}\left[\frac{e^z}{(z-\mathbf{i})^2}\right]'_{z=-\mathbf{i}} \quad = \quad \mathbf{i}\pi\sqrt{2}\sin\left(1-\frac{\pi}{4}\right). \quad \square
\end{aligned}$$

(3) 求积分

$$I = \oint_{|z|=r} \frac{\sin z}{z^2(z^2-z-2)} dz$$

的值, 其中 $r \neq 1, 2$.

解: 因为函数 $z^2(z^2-z-2)$ 的零点为 $z=0$, $z=-1$ 和 $z=2$. 这样我们就分为如下三种情形: $0<r<1$, $1<r<2$ 和 $r>2$. 当 $0<r<1$ 时, 考虑函数

$$f(z) = \frac{\sin z}{z^2-z-2},$$

利用 (4.4.6) 得到

$$I = \oint_{|z|=1} \frac{f(z)}{z^2} dz = 2\pi\mathbf{i} f'(0).$$

而

$$f'(z) = \frac{(z^2-z-2)\cos z - (2z-1)\sin z}{(z^2-z-2)^2}, \quad f'(0) = -\frac{1}{2},$$

故得到 $I = -\pi\mathbf{i}$. 当 $1<r<2$ 时, 在圆周 $|z|=r$ 内作两个小圆周 $\mathcal{C}_1$ 和 $\mathcal{C}_2$, 使它们互不相交且互不包含. 这样得到

$$I = \oint_{\mathcal{C}_1} \frac{\sin z}{z^2(z^2-z-2)} dz + \oint_{\mathcal{C}_2} \frac{\sin z}{z^2(z^2-z-2)} dz = I_1 + I_2.$$

对 I_1, 我们得到 $I_1 = -\pi\mathbf{i}$; 对 I_2, 我们考虑函数

$$f(z) = \frac{\sin z}{z^2(z-2)},$$

这样就得到

$$I_2 = \oint_{\mathcal{C}_2} \frac{f(z)}{z+1} dz = 2\pi\mathbf{i} f(-1) = \frac{2}{3}\pi\mathbf{i}\sin 1.$$

故

$$I = \left(\frac{2}{3}\sin 1 - 1\right)\pi\mathbf{i}.$$

当 $r>2$ 时, 在圆周 $|z|=r$ 内作三个小圆周 $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ 和 $\mathcal{C}_2$, 使它们互不相交且互不包含. 这样得到

$$\begin{aligned}
I &= \oint_{\mathcal{C}_1} \frac{\sin z}{z^2(z^2-z-2)} dz + \oint_{\mathcal{C}_2} \frac{\sin z}{z^2(z^2-z-2)} dz + \oint_{\mathcal{C}_3} \frac{\sin z}{z^2(z^2-z-2)} dz \\
&= I_1 + I_2 + I_3.
\end{aligned}$$

这里 $I_1 + I_2 = (\frac{2}{3}\sin 1 - 1)\pi\mathbf{i}$. 对 I_3, 我们取函数

$$f(z) = \frac{\sin z}{z^2(z+1)}.$$

这样就得到

$$I_3 = \oint_{\mathcal{C}_3} \frac{f(z)}{z-2} dz = 2\pi \mathbf{i} f(2) = \frac{\mathbf{i}}{6}\pi \sin 2.$$

故得到 $I = (\frac{2}{3}\sin 1 - 1 + \frac{1}{6}\sin 2)\pi\mathbf{i}$. □

(4) 考虑函数

$$f(z) := \frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \oint_{\mathcal{C}} \frac{e^{\zeta^2}\cos\zeta}{\zeta^3 - z\zeta^2} d\zeta,$$

这里 $\mathcal{C}$ 是正向的圆周 $|\zeta - z| = 3$. 求函数 $f(z)$ 在复平面上的表达式, $f'(\mathbf{i})$ 和 $f(\pi\mathbf{i})$.

解: 显然我们考虑两个临界情形, $|z| = 0$ 和 $|z| = 3$. 对后者, 被积函数在曲线 $\mathcal{C}$ 上有奇点, 此时我们要用其它办法来处理. 对前者,

$$\begin{aligned} f(0) &= \frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \oint_{|\zeta|=3} \frac{e^{\zeta^2}\cos\zeta}{\zeta^3} d\zeta = \frac{1}{2!}\left(e^{\zeta^2}\cos\zeta\right)''\Big|_{\zeta=0} \\ &= \frac{1}{2}\left[e^{\zeta^2}(2\zeta\cos\zeta - \sin\zeta)\right]'\Big|_{\zeta=0} = \frac{1}{2}e^{\zeta^2}(4\zeta^2\cos\zeta - 4\zeta\sin\zeta - \cos\zeta)\Big|_{\zeta=0} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

当 $0 < |z| < 3$, 在 $\mathcal{C}$ 内作两个圆周 $\mathcal{C}_1 : |\zeta| = r_1$ 和 $\mathcal{C}_2 : |\zeta - z| = r_2$, 使得它们互不相交也互不包含. 因此得到

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\left[\oint_{\mathcal{C}_1} \frac{e^{\zeta^2}\cos\zeta}{\zeta^2(\zeta - z)} d\zeta + \oint_{\mathcal{C}_2} \frac{e^{\zeta^2}\cos\zeta}{\zeta^2(\zeta - z)} d\zeta\right] \\ &= \left(\frac{e^{\zeta^2}\cos\zeta}{\zeta - z}\right)'\Big|_{\zeta=0} + \left(\frac{e^{\zeta^2}\cos\zeta}{\zeta^2}\right)\Big|_{\zeta=z} = -\frac{1}{z^2} + \frac{e^{z^2}\cos z}{z^2} = \frac{e^{z^2}\cos z - 1}{z^2}. \end{aligned}$$

当 $|z| > 3$ 时, $\mathcal{C}$ 内仅有一个奇点 $\zeta = z$, 所以

$$f(z) = \frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \oint_{\mathcal{C}} \frac{1}{\zeta - z}\left(\frac{e^{\zeta^2}\cos\zeta}{\zeta^2}\right) d\zeta = \frac{e^{\zeta^2}\cos z}{z^2}.$$

因为 $|\mathbf{i}| = 1 < 3$, 所以

$$f'(\mathbf{i}) = \left(\frac{e^{z^2}\cos z - 1}{z^2}\right)'\Big|_{z=\mathbf{i}} = \left(2 - \frac{4}{e}\mathrm{ch}1 + \frac{1}{e}\mathrm{sh}1\right)\mathbf{i}.$$

因为 $|\pi\mathbf{i}| = \pi > 3$, 所以

$$f(\pi\mathbf{i}) = \frac{e^{(\pi\mathbf{i})^2}\cos(\pi\mathbf{i})}{(\pi\mathbf{i})^2} = -\frac{1}{\pi^2}e^{-\pi^2}\mathrm{ch}\pi. \quad \square$$

♠

4.4.4 Liouville 定理

这个定理最早见Cauchy的论文[10], Liouville 在 1847 年的论文[11]中给出了证明. 1847 年上半年, 德国数学家Carl Wilhelm Borchardt和他的好友Ferdinand Joachimsthal在巴黎访问了Liouville, 后者在他家里讲了些他处理双周期函数理论的方法. 当Borchardt回到柏林

[10] Cauchy, A.-L. *Mémoires sur les fonctions complémentaires*(1844), Œuvres complètes d'Augustin Cauchy, 1, vol. 8, Pairs: Gaythiers-Villars, 1882.

[11] Liouville, J. *Leçons sur les fonctions doublement périodiques faites en 1847 par M. J. Liouville*, J. Reine Angew. Math., **88**(1879), 277-310.

后,就给Liouville寄了一份当时讲课的手稿副本;而Liouville授权Borchardt将其寄给Jacobi和Dirichlet. 上面提到的 1847 年的论文正是Liouville当时讲课的手稿.

定理 4.13. (Liouville 定理)

如果 $f \in H(\mathbf{C})$ 且在 $\mathbf{C}$ 上有界, 那么 $f(z)$ 在 $\mathbf{C}$ 上恒为常数.

证: 假设 $|f(z)| \leq M$, 则对任何 $z_0 \in \mathbf{C}$ 和任意 $R > 0$, 从 (4.4.7) 得到

$$|f'(z_0)| \leq \frac{M}{R}.$$

令 $R \to +\infty$ 得到 $f'(z_0) = 0$. 根据 z_0 的任意性, 我们推出 $f'(z) = 0$, 因此从**例 3.4** (5) 可知 $f(z)$ 在整个复平面上恒为常数. □

4.4.5 代数学基本定理

德国数学家Peter Roth在 1608 年出版的《Arithmetica Philosophica》一书中, 写到 "每个实系数 n 次多项式可能有 n 个根". 荷兰数学家Albert Girard在 1629 年出版的《L'invention nouvelle en l'Algèbre》一书中, 断言 "n 次多项式方程必有 n 个根", 但是并没有说这些根必须是实根.

该定理的第一个证明是法国数学家d'Alembert在 1746 年给出的[12], 但证明不完整. 之后, Euler(1749 年[13])、de Foncenex(1759 年)、Lagrange(1772 年[14])、Laplace(1795 年[15])、Gauss(1799 年在哥廷根大学的博士论文《Demonstratio nova theorematis omnem functionem algebraicam rationalem integram unius variabilis in factores reales primi vel secundi gradus resolvi posse》) 也给出过证明, 不过还是都不完整. 这里稍微提下, Gauss1799 年的证明中有一个拓扑漏洞, 直到 1920 年才有Alexander Ostrowiski补上[16]. Gauss后来又给出了另外三个证法 (1815 年 12 月《Demonstratio nova altera theorematis omnem functionem algebraicam rationalem integram unius variabilis in factores reales primi vel secundi gradus resolvi posse》、1816 年 1 月《Theorematis de resolubilitate functionum algebraicarum integrarum in factores reales demonstratio tertia Supplementum commentationis praecedentis》、1849 年 7 月《Beiträge zur Theorie der algebraischen Gleichungen》), 其中第四个证法是他 71 岁公布的.

代数学基本定理第一个严格证明是Argand在 1806 年给出的并在 1813 年做了修正[17], 此时首次允许多项式的系数是复数, 而第一本包含这个证明的教材是Cauchy于 1821 年出版的《Cours d'analyse de l'École Royale Polytechnique》.

[12]D'Alembert, J. *Recherches sur le calcul intégral*, Mémoires de l'académie de Berlin 1746 (1748), 182-224.

[13]Euler, L. *Recherches sur les racines imaginaires des équations*, Mémoires de l'académie des sciences de Berlin, **5**(1751), 222-288.

[14]Lagrange, J. *Sur a forme des racines imaginaires des équations*, Nouveaux mémoires de l'Académie de Berlin 1772, 222-258.

[15]Laplace, P. *Leçons de mathématiques données à l'Ecole normale en 1795*, dans Œuvres XIV, 10-177.

[16]Ostrowiski, Alexander. *Über den ersten und vierten Gaussschen Beweis des Fundamental-Satzes der Algebra*, Carl Friedrich Gauss Werke Band X Abt. 2, 1920

[17]Argand, J. R. *Philosophie mathématique. Réflexions sur la nouvelle théorie des imaginaires, suivies 'une application à la démonstration d'un théorème d'analyses*, Annales de Mathématiques Pures et Appliquées, tome 5 (1814-1815), 197-209.

可惜的是, 上述证明没有一个是构造性的. 大约在 19 世纪中叶, Weierstrass首次提出寻找代数学基本定理的构造性证明的问题, 他自己在 1891 年给出了一个证明[18]. 另一个构造性证明则归属于Hellmuth Kneser在 1940 年的论文[19], 之后在 1981 年, 他的儿子Martin Kneser简化了证明[20].

定理 4.14. (代数学基本定理)

任意非常值的复系数多项式

$$P(z) := a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0, \quad a_0, \cdots, a_n \in \mathbf{C},$$

在复平面里至少有一个根, 即存在 $z_0 \in \mathbf{C}$ 满足 $P(z_0) = 0$. ♡

证: 假设 $P(z)$ 没有根, 此时 $1/P(z)$ 是全纯函数. 我们首先断言 $1/P(z)$ 在 $\mathbf{C}$ 上是有界的. 不妨假设 $a_n \neq 0$, 此时得到

$$\frac{P(z)}{z^n} = a_n + \left(\frac{a_{n-1}}{z} + \cdots + \frac{a_0}{z^n}\right), \quad z \neq 0.$$

因为当 $|z| \to \infty$ 时, $\lim_{z\to\infty} P(z)/z^n = a_n$, 所以存在正数 $R > 0$ 使得当 $|z| > R$ 时候, 不等式

$$|P(z)| \geq c|z|^n, \quad c := \frac{|a_n|}{2},$$

成立. 故当 $|z| > R$ 时, $|P(z)| \geq cR^n$. 由于 $P(z)$ 的连续性且没有根, 多项式 $P(z)$ 在 $|z| \leq R$ 内有正下界. 综上, 多项式 $P(z)$ 在整个复平面上有正下界从而 $1/P(z)$ 有界. 利用定理 **4.13**可知 $1/P(z)$ 恒为常数, 这与定理中的假设矛盾! □

推论 4.3

每个 n 次复系数多项式 $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ 在 $\mathbf{C}$ 内有且仅有 n 个根, 这里 $n \geq 1$. 如果这 n 个根记为 $w_1, \cdots, w_n$, 那么

$$P(z) = a_n (z - w_1) \cdots (z - w_n).$$

♡

证: 根据定理 **4.14**可知, $P(z)$ 有一个根 w_1. 在 $P(z)$ 中, 利用 $z = (z - w_1) + w_1$ 并利用二项式展开得到

$$P(z) = b_n (z - w_1)^n + \cdots + b_1 (z - w_1) + b_0,$$

这里 $b_0, \cdots, b_{n-1}$ 是新的系数, 且 $b_n = a_n$. 由于 $P(w_1) = 0$, 故得到 $b_0 = 0$ 且

$$P(z) = (z - w_1)\left[b_n (z - w_1)^{n-1} + \cdots + b_1\right] = (z - w_1) Q(z),$$

这里 $Q(z)$ 是 $n - 1$ 次复系数多项式. 对多项式的次数作归纳法得到 $P(z) = c(z -$

---

[18] Weierstrass, Karl. *Neuer Beweis des Satzes, dass jede ganze rationale Function einer Veränderlichen dargestellt werden kann als ein Product aus linearen Functionen derselben Veränderlichen*, Sitzungsberichte der königlich preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1085–1101.

[19] Kneser, Hellmuth. *Der Fundamentalsatz der Algebra und der Intuitionismus*, Mathematische Zeitschrift, **46**(1940), 287–302.

[20] Kneser, Martin. *Ergänzung zu einer Arbeit von Hellmuth Kneser über den Fundamentalsatz der Algebra*, Mathematische Zeitschrift, 177(1981), no. 2, 285–287.

$w_1)\cdots(z-w_n)$, 这里 $c\in\mathbf{C}$ 是某个常数. 上式展开比较最高项系数得到 $c=a_n$. □

4.4.6 Morera 定理

Giacinto Morera在 1886 年的论文[21] 首次给出

定理 4.15. (Morera 定理)

假设 $\mathcal{D}$ 是单连通区域, $f\in C(\mathcal{D})$, 且对 $\mathcal{D}$ 内任意简单闭曲线 C 都有

$$\oint_C f(z)dz=0.$$

则 $f\in H(\mathcal{D})$.

证: 任取一点 $z_0\in\mathcal{D}$, 根据《第二卷》, 13.9.2 节可知, 积分

$$\int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta$$

的值与连接 z_0 和 z 的路径无关, 从而定义了一个 z 的单值函数

$$F(z):=\int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta,\quad z\in\mathcal{D}.$$

注意到定理 4.8的证明只用到 $f(z)$ 的连续性, 故 $F'(z)=f(z)$ 亦成立. 由于 z 是任意的, 因此 $F\in H(\mathcal{D})$. 根据定理 4.12可知, $f\in H(\mathcal{D})$. □

推论 4.4

函数 $f(z)$ 在单连通区域 $\mathcal{D}$ 内全纯的充要条件是 $f(z)$ 在 $\mathcal{D}$ 内连续, 且对 $\mathcal{D}$ 内的任意简单闭曲线 C 都有

$$\oint_C f(z)dz=0.$$

成立.

4.5 全纯函数和调和函数

假设 $f\in H(\mathcal{D})$ 是区域 $\mathcal{D}$ 内的全纯函数. 我们知道 $f(z)$ 的实部 $u=u(x,y)$ 和虚部 $v=v(x,y)$ 满足 Cauchy-Riemann 方程

$$u_x=v_y,\quad u_y=-v_x,\quad z=x+\mathbf{i}y\in\mathcal{D}.$$

根据定理 4.12可知, $f'\in H(\mathcal{D})$ 且 $f'(z)=u_x+\mathbf{i}v_x$. 这样再次利用 Cauchy-Riemann 方程得到

$$(u_x)_x=(v_x)_y=-(u_y)_y,\quad (v_x)_x=-(u_x)_y=-(v_y)_y.$$

即 u 和 v 满足 Laplace 方程

$$\Delta u=u_{xx}+u_{yy}=0,\quad \Delta v=v_{xx}+v_{yy}=0,\quad z=x+\mathbf{i}y\in\mathcal{D}. \tag{4.5.1}$$

[21] Morera, G. *Un teorema fondamentale nellla teorica delle funzioni di una variabile complessa*, Rendiconti del Reale Instituto Lombardo di Scienze e Lettere, **19**(1886), no. 2, 304-307.

$\mathcal{D}$ 内的二元实变函数 $\varphi = \varphi(x, y)$ 称为**调和函数**, 如果 φ 具有二阶连续偏导数且满足 Laplace 方程 $\Delta\varphi = 0$.

定理 4.16

区域 $\mathcal{D}$ 内的全纯函数的实部与虚部都是 $\mathcal{D}$ 上的调和函数.

证: 剩下的是证明实部和虚部具有二阶连续偏导数. 实际上根据定理 4.12可知, 实部和虚部具有任意阶的连续偏导数. □

定义 4.3. (共轭调和函数)

假设 $u = u(x, y)$ 为区域 $\mathcal{D}$ 内给定的调和函数, 如果区域 $\mathcal{D}$ 内的另一个函数 $v = v(x, y)$ 使得 $u + \mathbf{i}v$ 在 $\mathcal{D}$ 内构成全纯函数, 则称 v 为 u 的**共轭调和函数**.

根据定义, 共轭调和函数必是调和函数. 定理 4.16告诉我们, 区域 $\mathcal{D}$ 内的全纯函数的虚部为实部的共轭调和函数.

(1) 定理 4.16 的逆命题不一定成立: 复变函数的实部和虚部都是调和函数, 不一定可以保证该复变函数是全纯的. 比如考虑 $f(z) = \bar{z}$.

(2) 注意, 如果 u 和 v 都是区域 $\mathcal{D}$ 上的调和函数, 且 v 是 u 的共轭调和函数, 那么一般来说 u 不一定是 v 的共轭调和函数. 原因是这样的, v 是 u 的共轭调和函数等价于 $u + \mathbf{i}v$ 是全纯函数, 即等价于

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x;$$

而 u 是 v 的共轭调和函数等价于 $v + \mathbf{i}u$ 是全纯函数, 即等价于

$$v_x = u_y, \quad v_y = -u_x.$$

显然上面两组方程不等价, 因此 u 不一定是 v 的共轭调和函数.

(3) 如果已知一个调和函数 u, 利用 Cauchy-Riemann 方程可以求出 u 的共轭调和函数 v, 从而得到全纯函数 $f(z) = u + \mathbf{i}v$. 一般有如下两种方法: **偏积分法**和**不定积分法**.

- **偏积分法:** 从 $v_y = u_x$ 得到

$$v = \int u_x dy + \varphi(x),$$

这里 $\varphi(x)$ 是某个仅和 x 有关的函数. 利用 $u_y = -v_x$ 可求出 $\varphi(x)$.

- **不定积分法:** 如果 $f(z) = u + \mathbf{i}v$ 是全纯函数, 那么导函数 $f'(z)$ 也是全纯函数且满足

$$f'(z) = u_x + \mathbf{i}v_x = v_y + \mathbf{i}v_x = u_x - \mathbf{i}u_y.$$

如果存在关于 z 的函数 $U(z)$ 和 $V(z)$ 使得

$$U(z) = u_x - \mathbf{i}u_y = f'(z), \quad V(z) = v_y + \mathbf{i}v_x = f'(z).$$

积分后得到

$$f(z) = \int U(z)dz + C, \tag{4.5.2}$$

$$f(z) = \int V(z)dz + C. \tag{4.5.3}$$

这样, 若已知 u 利用 (4.5.2) 可求出 $f(z)$; 若已知 v 利用 (4.5.3) 可求出 $f(z)$.

(4) 如果 $f(z)=u+\mathbf{i}v$ 在区域 $\mathcal{D}$ 内全纯, 那么 uv 也是调和函数. 事实上, 我们只要验证 uv 满足 Laplace 方程:

$$\Delta(uv)=(\Delta u)v+u(\Delta v)+2\left(u_xv_x+u_yv_y\right)=2\left(u_xv_x-u_xv_x\right)=0.$$

(5) 假设 $f(z)=u+\mathbf{i}v$ 是区域 $\mathcal{D}$ 内的全纯函数. 那么

- $\overline{\mathbf{i}f(z)}$ 也是全纯函数.
- $-u$ 是 v 的共轭调和函数.
- $\Delta(|f(z)|^2)=4(u_x^2+v_x^2)=4|f'(z)|^2$.

这是因为从 Cauchy-Riemann 方程

$$u_x=v_y,\quad u_y=-v_x$$

推出

$$v_x=(-u)_y,\quad v_y=-(-u)_x.$$

这样就证明了 $\overline{\mathbf{i}f(z)}$ 是全纯的, 且 $-u$ 是 v 的共轭调和函数. 直接计算得到

$$\Delta(|f(z)|^2)=2(\Delta u)u+2(\Delta v)v+2\left(u_x^2+u_y^2+v_x^2+v_y^2\right)=4\left(u_x^2+v_x^2\right)=4|f'(z)|^2.$$

例 4.7

(1) 证明 $u(x,y)=y^3-3x^2y$ 为调和函数, 并求其共轭调和函数 $v(x,y)$ 和由它们构成的全纯函数 $f=u+\mathbf{i}v$.

证: 直接计算得到

$$u_x=-6xy,\quad u_y=3y^2-3x^2,\quad u_{xx}=-6y,\quad u_{yy}=6y,$$

所以 $\Delta u=0$. 从 $v_y=u_x=-6xy$ 直接积分得到

$$v=\int(-6xy)dy+g(x)=-3xy^2+g(x),\quad -u_y=v_x=-3y^2+g'(x)$$

以及

$$-3y^2+3x^2=-3y^2+g'(x).$$

因此 $g'(x)=3x^2$ 或者 $g(x)=x^3+C$. 最后得到

$$v(x,y)=x^3-3xy^2+C,\quad f(z)=u+\mathbf{i}v=y^3-3x^2y+\mathbf{i}(x^3-3xy^2+C)=\mathbf{i}(z^3+C).$$

如果用不定积分法求解, 首先注意到

$$f'(z)=u_x-\mathbf{i}u_y=-6xy-\mathbf{i}(3y^2-3x^2)=3\mathbf{i}z^2=U(z).$$

因此

$$f(z)=\int U(z)dz+C=\mathbf{i}z^3+C.\quad\square$$

(2) 已知调和函数 $v=e^x(y\cos y+x\sin y)+x+y$, 求全纯函数 $f(z)=u+\mathbf{i}v$ 使得 $f(0)=0$.

解: 直接计算得到

$$v_x=e^x(y\cos y+x\sin y+\sin y)+1,\quad v_y=e^x(\cos y-y\sin y+x\cos y)+1.$$

从 $u_x = v_y$ 得到

$$u = e^x(x\cos y - y\sin y) + x + g(y).$$

从 $u_y = -v_x$ 得到

$$g'(y) = -1, \quad g(y) = -y + C.$$

故

$$f(z) = ze^z + (1+\mathbf{i})z + C.$$

结合 $f(0) = 0$ 求出 $C = 0$. 最后的全纯函数为 $f(z) = ze^z + (1+\mathbf{i})z$.

如果用不定积分法求解, 首先注意到

$$f'(z) = v_x + \mathbf{i}v_y = e^z + ze^z + 1 + \mathbf{i} = V(z).$$

因此

$$f(z) = \int V(z)dz + C = ze^z + (1+\mathbf{i})z + C. \quad \square$$

定理 4.17

如果 $u = u(x,y)$ 是区域 $\mathcal{D}$ 内的调和函数, $\mathcal{C}$ 为 $\mathcal{D}$ 内以 $z_0 = x_0 + \mathbf{i}y_0$ 为中心的任何一个正向圆周: $|z - z_0| = r$, 它的内部全含于 $\mathcal{D}$ 内.

(1) $u(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点的值等于 u 在圆周 $\mathcal{C}$ 上的平均值, 即

$$u(x_0,y_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(x_0 + r\cos\varphi, y_0 + r\sin\varphi)\,d\varphi. \tag{4.5.4}$$

(2) $u(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点的值等于 u 在闭圆盘 $|z - z_0| \le r_0$ 上的平均值, 即

$$u(x_0,y_0) = \frac{1}{\pi r_0^2}\int_0^{r_0}\int_0^{2\pi} u\left(x_0 + r\cos\varphi, y_0 + r\sin\varphi\right) r d\varphi dr. \tag{4.5.5}$$

证: 因为 u 是调和函数, 所以存在存在 u 的共轭调和函数 $v = v(x,y)$ 使得复变函数 $f(z) = u + \mathbf{i}v$ 在 $\mathcal{D}$ 内是全纯的.

(1) 根据 (4.4.2) 得到

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(z_0 + re^{\mathbf{i}\varphi}\right)d\varphi$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u\left(x_0 + r\cos\varphi, y_0 + r\sin\varphi\right)d\varphi + \frac{\mathbf{i}}{2\pi}\int_0^{2\pi} v\left(x_0 + r\cos\varphi, y_0 + r\sin\varphi\right)d\varphi$$

由此得到了 (4.5.4).

(2) 对 (4.5.4) 两边对 r 积分得到 (4.5.5). $\square$

命题 4.2. (Poisson 公式)

(1) 假设 $f(z) = u + \mathbf{i}v$ 在区域 $\mathcal{D}$ 内处处全纯, $\mathcal{C}$ 为 $\mathcal{D}$ 内的正向圆周: $|z| = R$, 它的内部全含于 $\mathcal{D}$. 对任何 $\mathcal{C}$ 上的点 z, 有

$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - \widehat{z}}d\zeta = \oint_{\mathcal{C}} \frac{\overline{z}f(\zeta)}{\zeta\overline{z} - R^2}d\zeta = 0, \quad \widehat{z} := \frac{R^2}{\overline{z}}. \tag{4.5.6}$$

(2) 在 (1) 假设条件下, 有

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\oint_C \left(\frac{1}{\zeta - z} + \frac{\overline{z}}{R^2 - \zeta\overline{z}}\right) f(\zeta)\, d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\oint_C \frac{(R^2 - z\overline{z})f(\zeta)}{(\zeta - z)(R^2 - \zeta\overline{z})} d\zeta. \end{aligned} \tag{4.5.7}$$

(3) 在 (1) 假设条件下, 有

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{(R^2 - r^2)f(Re^{\mathbf{i}\theta})}{R^2 - 2Rr\cos(\theta - \varphi) + r^2} d\theta, \tag{4.5.8}$$

特别地, 对任意 C 内的任意点 (x, y) 有

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{(R^2 - r^2)u(R\cos\theta, R\sin\theta)}{R^2 - 2Rr\cos(\theta - \varphi) + r^2} d\theta. \tag{4.5.9}$$

♡

证: (1) 如果 z 在 C 内部, 则根据 $|\widehat{z}||\overline{z}| = R^2$ 可知 $\widehat{z}$ 在 C 外部, 因此 $f(\zeta)/(\zeta - \widehat{z})$ 在 C 上及 C 内全纯. Cauchy-Goursat 定理告诉我们

$$0 = \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - \widehat{z}} d\zeta = \oint_C \frac{\overline{z}f(\zeta)}{\zeta\overline{z} - R^2} d\zeta.$$

(2) 由 (4.4.1) 得到

$$f(z) = \frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

上式减去 (4.5.6) 与 $1/2\pi\mathbf{i}$ 的积得到

$$f(z) = \frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\oint_C \left(\frac{1}{\zeta - z} - \frac{\overline{z}}{\zeta\overline{z} - R^2}\right) f(\zeta)\, d\zeta = \frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\oint_C \frac{(R^2 - z\overline{z})f(\zeta)}{(\zeta - z)(R^2 - \zeta\overline{z})} d\zeta$$

(3) 在 (4.5.7) 中令 $\zeta = Re^{\mathbf{i}\theta}$ 和 $z = re^{\mathbf{i}\varphi}$, 我们得到

$$f(z) = \frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\oint_C \frac{(R^2 - r^2)f(Re^{\mathbf{i}\theta})}{(\zeta - z)(\overline{\zeta} - \overline{z})}\frac{d\zeta}{\zeta} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{(R^2 - r^2)f(Re^{\mathbf{i}\theta})}{R^2 - 2Rr\cos(\theta - \varphi) + r^2} d\theta.$$

对 (4.5.8) 取实部就得到 (4.5.9). □

第五章 复级数

5.1 幂级数

首先简短回忆下复数列的极限. 给定复数列 $\{z_n\}_{n\geq 1}$, 这里 $z_n \in \mathbf{C}$, 和一复数 $z \in \mathbf{C}$. 称该复数列 $\{z_n\}_{n\geq 1}$ **收敛于** z, 如果对任意 $\epsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbf{N}_*$, 使得当 $n > N$ 时, 有

$$|z_n - z| < \epsilon.$$

此时也称 z 为复数列 $\{z_n\}_{n\geq 1}$ 的**极限**, 并记作

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z \quad \text{或} \quad z_n \to z\ (n \to \infty).$$

记

$$z_n = x_n + \mathbf{i}y_n, \quad z = x + \mathbf{i}y,$$

我们得到

$$|z_n - z|^2 = |x_n - x|^2 + |y_n - y|^2.$$

这样就证明了

$\lim_{n\to\infty} z_n = z$ 当且仅当 $\lim_{n\to\infty} \mathbf{Re}(z_n) = \mathbf{Re}(z)$ 和 $\lim_{n\to\infty} \mathbf{Im}(z_n) = \mathbf{Im}(z)$.

5.1.1 复数项级数

和数项级数一样, 我们用复数列可以来定义复数项级数, 并且根据上述结果可知, 对实部与虚部同时成立的信息可以反映原来复数列的信息.

定义 5.1. (复数项级数)

对给定复数列 $\{z_n\}_{n\geq 1}$, 它的**复数项级数**形式上定义为

$$\sum_{n\geq 1} z_n := z_1 + z_2 + \cdots + z_n + \cdots. \tag{5.1.1}$$

复数项级数 (5.1.1) 的前 n 项之和

$$S_n := \sum_{1\leq i\leq n} z_n \tag{5.1.2}$$

构成了**部分和数列** $\{S_n\}_{n\geq 1}$. 如果部分和数列 $\{S_n\}_{n\geq 1}$ 收敛, 那么称复数项级数 (5.1.1) **收敛**, 并称部分和数列的极限 $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ 为该复数项级数 (5.1.1) 的**和**, 记为

$$\sum_{n\geq 1} z_n = S. \tag{5.1.3}$$

如果部分和数列 $\{S_n\}_{n\geq 1}$ 发散, 那么称复数项级数 (5.1.1) **发散**. ♣

定理 5.1

假设 $\sum_{n\geq 1} z_n$ 为复数项级数, 其中 $z_n = x_n + \mathbf{i}y_n$.

(1) $\sum_{n\geq 1} z_n$ 收敛的充要条件是 $\sum_{n\geq 1} x_n$ 和 $\sum_{n\geq 1} y_n$ 都收敛.

(2) 如果 $\sum_{n\geq 1} z_n$ 收敛, 那么 $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$.

(3) 如果 $\sum_{n\geq 1} |z_n|$ 收敛, 那么 $\sum_{n\geq 1} z_n$ 也收敛且满足

$$\left|\sum_{n\geq 1} z_n\right| \leq \sum_{n\geq 1} |z_n|. \tag{5.1.4}$$

♡

证: (1) 和 (2) 显然, 对 (3), 注意到

$$|x_n|, |y_n| \leq |z_n|, \quad \left|\sum_{1\leq i\leq n} z_i\right| \leq \sum_{1\leq i\leq n} |z_i|.$$

如果 $\sum_{n\geq 1} |z_n|$ 收敛, 那么 $\sum_{n\geq 1} |x_n$ 和 $\sum_{n\geq 1} |y_n|$ 都收敛, 从而可知 $\sum_{n\geq 1} x_n$ 和 $\sum_{n\geq 1} y_n$ 也都收敛, 因此 $\sum_{n\geq 1} z_n$ 收敛. 由于复变函数 $f(z) = |z|$ 是连续函数, 因此

$$\left|\sum_{n\geq 1} z_n\right| = \left|\lim_{n\to\infty} \sum_{1\leq i\leq n} z_i\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\sum_{1\leq i\leq n} z_i\right| \leq \lim_{n\to\infty} \sum_{1\leq i\leq n} |z_i| = \sum_{n\geq 1} |z_n|. \quad \square$$

定义 5.2. (绝对收敛和条件收敛)

复数项级数 $\sum_{n\geq 1} z_n$ 称为**绝对收敛**, 如果 $\sum_{n\geq 1} |z_n|$ 收敛. 如果 $\sum_{n\geq 1} z_n$ 收敛但 $\sum_{n\geq 1} |z_n|$ 发散, 那么称复数项级数 $\sum_{n\geq 1} z_n$ **条件收敛**.

♣

定理 5.1表明, 绝对收敛的复数项级数必收敛.

例 5.1

(1) 研究下列复数列的敛散性:

$$z_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right) e^{\mathbf{i}\frac{\pi}{n}}, \quad z_n = n\cos(\mathbf{i}n).$$

解: 对第一个复数列, 注意到

$$z_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(\cos\frac{\pi}{n} + \mathbf{i}\sin\frac{\pi}{n}\right).$$

因此

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)\cos\frac{\pi}{n} \to 1, \quad y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)\sin\frac{\pi}{n} \to 0.$$

这就表明 $\lim_{n\to\infty} z_n = 1$.

对第二个复数列, 由于 $z_n = n\,\mathrm{ch}(n) \to \infty$, 因此 $\{z_n\}_{n\geq 1}$ 发散. □

(2) 等比级数 $\sum_{n\geq 1} z^n$, 当 $|z| < 1$ 时绝对收敛, 和为 $1/(1-z)$; 当 $|z| > 1$ 时发散.

证: 当 $|z| < 1$ 时, 等比级数 $\sum_{n\geq 1} |z|^n$ 是收敛的且和为 $|z|/(1-|z|)$, 故复数项级数 $\sum_{n\geq 1} z^n$ 绝对收敛且和为

$$\sum_{n\geq 1} z^n = \lim_{n\to\infty}\left(z + z^2 + \cdots + z^n\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{z(1-z^n)}{1-z} = \frac{z}{1-z}.$$

当 $|z| \geq 1$ 时, 极限 $\lim_{n\to\infty} |z|^n = +\infty$, 故复数项级数 $\sum_{n\geq 1} z^n$ 发散. □

(3) 判断如下复数项级数的收敛性 (包括绝对收敛和条件收敛):

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}\left(1+\frac{\mathbf{i}}{n}\right), \quad \sum_{n\geq 0} \frac{(2\mathbf{i})^n}{n!}, \quad \sum_{n\geq 1}\left[\frac{(-1)^n}{n}+\frac{\mathbf{i}}{3^n}\right].$$

解: 基本想法是实、虚部分别考虑. 对一个级数, 因为 $\sum_{n\geq 1} 1/n$ 是发散, 所以原级数发散.

对第二个级数, 因为 $\sum_{n\geq 0} |(2\mathbf{i})^n/n!| = \sum_{n\geq 0} 2^n/n!$ 收敛, 所以原级数绝对收敛.

对第三个级数, 因为 $\sum_{n\geq 1}(-1)^n/n$ 仅是条件收敛, 所以原级数是条件收敛. □

(4) 判断如下复数项级数的收敛性 (包括绝对收敛和条件收敛):

$$\sum_{n\geq 1}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)e^{\mathbf{i}\frac{\pi}{n}}, \quad \sum_{n\geq 1}\frac{1+(-\mathbf{i})^{2n+1}}{n}, \quad \sum_{n\geq 1}\frac{n^2}{5^2}(1+2\mathbf{i})^n, \quad \sum_{n\geq 1}\frac{(1+\mathbf{i})^n}{2^{n/2}\cos(\mathbf{i}n)}.$$

证: (a) 因为

$$z_n := \left(1-\frac{1}{n^2}\right)e^{\mathbf{i}\frac{\pi}{n}} = \left(1-\frac{1}{n^2}\right)\left(\cos\frac{\pi}{n}+\mathbf{i}\sin\frac{\pi}{n}\right) =: x_n + \mathbf{i}y_n,$$

所以 $\lim_{n\to\infty} x_n = 1 \neq 0$. 故原复数项级数发散.

(b) 因为

$$z_n = \frac{1+(-\mathbf{i})^{2n+1}}{n} = \frac{1-(-1)^n\mathbf{i}}{n} = x_n + \mathbf{i}y_n,$$

所以

$$\sum_{n\geq 1} x_n = \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}, \quad \sum_{n\geq 1} y_n = \sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n};$$

前者是发散, 而后者是条件收敛, 故原复数项级数发散.

(c) 令 $z_n = n^2(1+2\mathbf{i})^n/5^2$, 我们考虑正项级数 $\sum_{n\geq 1}|z_n|$. 因为 $|z_n| = n^2/(\sqrt{5})^n$ 且

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|z_n|} = \frac{1}{\sqrt{5}}\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^2} = \frac{1}{\sqrt{5}} < 1,$$

所以原级数是绝对收敛.

(d) 令 $z_n = (1+\mathbf{i})^n/2^{n/2}\cos(\mathbf{i}n)$, 我们考虑正项级数 $\sum_{n\geq 1}|z_n|$. 因为

$$|z_n| = \frac{2^{n/2}}{2^{n/2}\mathrm{ch}(n)} = \frac{2}{e^n+e^{-n}} < \frac{2}{e^n}, \quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|z_n|} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{e}\sqrt[n]{2} = \frac{1}{e} < 1,$$

所以原级数是绝对收敛. □

(5) 判断如下复数项级数的收敛性 (包括绝对收敛和条件收敛):

$$\sum_{n\geq 2}\frac{\mathbf{i}^n}{\ln n}, \quad \sum_{n\geq 0}\frac{\cos(\mathbf{i}n)}{2^n}, \quad \sum_{n\geq 0}\frac{(6+5\mathbf{i})^n}{8^n}.$$

解: (a) 根据定义得到

$$\sum_{n\geq 2}\frac{\mathbf{i}^n}{\ln n} = \sum_{n\geq 1}(-1)^n\left[\frac{1}{\ln(2n)}+\frac{\mathbf{i}}{\ln(2n+1)}\right] = \sum_{n\geq 2}x_n + \mathbf{i}\sum_{n\geq 2}y_n.$$

根据交错级数的 Leibniz 判别法, $\sum_{n\geq 2}x_n$ 和 $\sum_{n\geq 2}y_n$ 都仅是条件收敛, 故原级数是条件收敛.

(b) 因为 $\cos(\mathbf{i}n)/2^n = \mathrm{ch}(n)/2^n = (e^n+e^{-n})/2^{n+1} \to +\infty$, 所以原级数发散.

(c) 因为

$$\left|\frac{(6+5\mathrm{i})^n}{8^n}\right| \le \frac{|6+5\mathrm{i}|^n}{8^n} = \left(\frac{\sqrt{61}}{8}\right)^n,$$

所以原级数绝对收敛. □

5.1.2 复变函数项级数

类似于函数项级数, 我们可以引入复变函数项级数.

定义 5.3

假设 $\{f_n(z)\}_{n\ge1}$ 为定义在集合 $\mathcal{G}\subseteq\mathbf{C}$ 上的复变函数列, 其**复变函数项级数**定义为

$$\sum_{n\ge1} f_n(z) := f_1(z)+f_2(z)+\cdots+f_n(z)+\cdots. \tag{5.1.5}$$

复变函数项级数 (5.1.5) 的前 n 项之和

$$S_n(z) := \sum_{1\le i\le n} f_i(z) \tag{5.1.6}$$

构成了**部分和函数列** $\{S_n(z)\}_{n\ge1}$. 如果对点 $z_0\in\mathcal{G}$, 极限 $\lim_{n\to\infty} S_n(z_0)$ 存在, 那么称 (5.1.5) 在点 z_0 处**收敛**. $\mathcal{G}$ 中所有使得 (5.1.5) 收敛的点构成的集合称为它的**收敛域**, 并记为 $\mathcal{D}$. 这样对每个 $z\in\mathcal{D}$, 我们都确定一个值

$$S(z) := \lim_{n\to\infty} S_n(z) = \sum_{n\ge1} f_n(z). \tag{5.1.7}$$

函数 $S(z)$ 称为 (5.1.5) 的**和函数**.

我们说复变函数项级数 (5.1.5) 在 $\mathcal{D}$ 上**处处收敛 (或点态收敛)** 到和函数 $S(z)$, 如果对任意 $z\in\mathcal{D}$, $\sum_{n\ge1} f_n(z_0)$ 收敛到 $S(z_0)$.

5.1.3 幂级数的收敛性

最简单的复变函数项级数级数是**幂级数**, 即取 $f_n(z)=c_n(z-a)^n$. 因此得到

$$\sum_{n\ge0} c_n(z-a)^n, \tag{5.1.8}$$

这里 $a, c_n\in\mathbf{C}$. 如果取 $a=0$, 就得到

$$\sum_{n\ge0} c_n z^n. \tag{5.1.9}$$

做个代换 $\zeta = z-a$, 可知 (5.1.8) 和 (5.1.9) 是等价的. 又注意到幂级数 (5.1.9) 必在 $z=0$ 处收敛.

定理 5.2. (Abel 引理)

考虑幂级数 $\sum_{n\ge0} c_n z^n$.

(1) 如果该级数在 $z_0\neq0$ 处收敛, 那么当 $|z|<|z_0|$ 时, 它在 z 处绝对收敛.

(2) 如果该级数在 $z_0\neq0$ 处发散, 那么当 $|z|>|z_0|$ 时, 它在 z 处发散.

证: (1) 根据假设得到 $\sum_{n\geq 0} c_n z_0^n$ 收敛, 因此 $\lim_{n\to\infty} c_n z_0^n = 0$. 故存在正常数 $M > 0$ 满足 $|c_n z_0^n| \leq M$ 对任意 n 都成立. 当 $|z| < |z_0|$ 时得到

$$|c_n z^n| = |c_n z_0^n| \left|\frac{z^n}{z_0}\right| \leq M \left|\frac{z}{z_0}\right|^n.$$

因为 $|z/z_0| < 1$, 所以等比级数 $\sum_{n\geq 1} M|z/z_0|^n$ 收敛. 故利用正项级数的比较法可知, $\sum_{n\geq 1} c_n z^n$ 是绝对收敛的.

(2) 否则当 $|z| > |z_0|$ 时, 幂级数 $\sum_{n\geq 0} c_n z^n$ 收敛. 这样由 (1) 推出该幂级数在 z_0 处绝对收敛, 矛盾! □

5.1.4 幂级数的收敛半径

考虑幂级数 $\sum_{n\geq 0} c_n z^n$. 此时它的收敛情况有如下三种:

(1) 在 $\mathbf{C}$ 上除 $z = 0$ 处收敛外, 其余各点都不收敛. 此时, 该级数的收敛域为单点集 $\mathcal{D} = \{0\}$.

(2) 在整个 $\mathbf{C}$ 上处处收敛, 此时该级数的收敛域为最大的区域 $\mathcal{D} = \mathbf{C}$.

(3) 即存在使得该级数收敛的点 $z_1 \neq 0$, 又存在使得该级数发散的点 $z_2 \neq 0$. 此时做两个以原点为中心的圆周

$$\mathcal{C}_1 := \{z \in \mathbf{C} : |z| = |z_1|\}, \quad \mathcal{C}_2 := \{z \in \mathbf{C} : |z| = z_2|\}.$$

根据定理 5.2, 我们得到 $|z_1| < |z_2|$, 幂级数在 $\mathcal{C}_1$ 内绝对收敛, 而在 $\mathcal{C}_2$ 外发散. 因此, 幂级数在 $|z| \leq |z_1|$ 上收敛, 而在 $|z| \geq |z_2|$ 上发散.

故我们只要研究幂级数在圆环形区域 $|z_1| < |z| < |z_2|$ 内的收敛性. 如果幂级数在上述圆环形区域内的一点处收敛, 则 Abel 定理告诉我们此时圆周 $\mathcal{C}_1$ 的半径扩大了; 如果幂级数在上述圆环形区域内的一点处发散, 则 Abel 定理告诉我们此时圆周 $\mathcal{C}_2$ 的半径减小了. 接下来, 我们将证明它们的半径会趋近于一个共同的常数 R, 使得该幂级数在圆周 $\mathcal{C}_R := \{z \in \mathbf{C} : |z| = R\}$ 的内部绝对收敛, 而在 $\mathcal{C}_R$ 的外部发散. 这个常数 R 称为该幂级数的**收敛半径**, 而把圆周 $\mathcal{C}_R$ 称为幂级数的**收敛圆**.

(4) 因为我们已经规定 $1/+\infty = +0$ 和 $1/+0 = +\infty$, 所以 (1)、(2) 和 (3) 的收敛半径都可以统一.

(5) 至于幂级数在收敛圆 $\mathcal{C}_R$ 上的敛散性, 是比较复杂的, 可能收敛, 也有可能发散 (后面会通过具体例子来阐述).

定理 5.3. (Hadamard)

假设幂级数 $\sum_{n\geq 0} c_n z^n$ 的系数满足下列条件之一:

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lambda \quad 或 \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \lambda. \tag{5.1.10}$$

则收敛半径为 $R = 1/\lambda$. 这里规定 $+\infty = 1/+0$ 和 $+0 = 1/+\infty$.

证: (1) 先考虑第一个条件 $\lim_{n\to\infty} |c_{n+1}/c_n| = \lambda$. 此时得到

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}z^{n+1}}{c_n z^n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| |z| = \lambda|z|.$$

如果 $\lambda=0$, 根据正项级数的比值判别法, 幂级数 $\sum_{n\geq 0} c_n z^n$ 对任何 $z\in\mathbf{C}$ 都是绝对收敛的, 故收敛半径为 $R=+\infty=1/+0$.

如果 $\lambda=+\infty$, 当 $z\neq 0$ 时得到

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}z^{n+1}}{c_n z^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right||z|=+\infty.$$

根据正项级数的比值判别法, 幂级数 $\sum_{n\geq 0} c_n z^n$ 对任何 $z\neq 0$ 都是发散的, 故收敛半径为 $R=0=1/+\infty$.

剩下的情形是 $0<\lambda<+\infty$. 此时当 $|z|<1/\lambda$ 时, 幂级数 $\sum_{n\geq 0} c_n z^n$ 在 $|z|=R$ 内是绝对收敛的.

要想证明该幂级数的收敛半径为 $R=1/\lambda$, 我们只要说明它在圆周 $|z|=R$ 外是发散的. 否则存在一点 z_0 位于圆周 $|z|=R$ 外部, 使得级数 $\sum_{n\geq 0} c_n z_0^n$ 收敛. 再取圆周 $|z|=R$ 外一点 z_1 满足 $|z_1|<|z_0|$. 这样根据 Abel 引理可知, 级数 $\sum_{n\geq 0}|c_n z_1^n|$ 收敛. 但是由于 $|z_1|>1/\lambda$, 我们得到

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}z_1^{n+1}}{c_n z_1^n}\right|=\lambda|z_1|>1,$$

这与级数 $\sum_{n\geq 0}|c_n z^n|$ 收敛矛盾! 因此, 幂级数在圆周 $|z|=R$ 之外是发散的.

(2) 首先考虑 $\lambda=0$ 的情形. 对任意 $z\neq 0$, 存在 $\epsilon>0$ 满足 $\epsilon|z|<1$. 对这个 $\epsilon>0$, 存在 $N\in\mathbf{N}_+$ 使得对任意 $n>N$ 都有 $\sqrt[n]{|c_n|}<\epsilon$. 故

$$|c_n z^n|\leq \epsilon^n|z|^n=(\epsilon|z|)^n.$$

由于 $\epsilon|z|<1$, 所以幂级数 $\sum_{n\geq 0} c_n z^n$ 是绝对收敛. 故此时收敛半径为 $R=+\infty=1/+0$.

再考虑 $\lambda=+\infty$ 的情形. 此时 $\lim_{n\to\infty}|c_n|=+\infty$. 故收敛半径为 $R=0=1/+\infty$.

剩下的情形是 $0<\lambda<+\infty$. 对任何 $|z|<1/\lambda$, 我们可以找到 $\epsilon>0$ 满足 $(\lambda+\epsilon)|z|<1$. 对这个 $\epsilon>0$, 存在 $N\in\mathbf{N}_+$ 使得对任意 $n>N$ 都有 $\sqrt[n]{|c_n|}<\lambda+\epsilon$. 故

$$|c_n z^n|\leq \epsilon^n|z|^n=((\lambda+\epsilon)|z|)^n.$$

由于 $(\lambda+\epsilon)|z|<1$, 所以幂级数 $\sum_{n\geq 0} c_n z^n$ 是绝对收敛. 故幂级数在圆周 $|z|=1/\lambda$ 内部是绝对收敛的. 用类似于 (1) 的方法可证, 该幂级数在圆周 $|z|=1/\lambda$ 外部是发散的. 故收敛半径为 $R=1/\lambda$. □

注 5.1

实际上, 收敛半径 R 满足所谓的 **Hadamard 公式**

$$\frac{1}{R}=\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}. \tag{5.1.11}$$

比如考虑如下的幂级数

$$\sum_{n\geq 0} z^{2n},$$

这里系数 c_n 满足

$$c_n=\begin{cases}1, & n=2k,\\ 0, & n\neq 2k.\end{cases}$$

根据 (5.1.11) 得到收敛半径为 $R=1$. ♣

例 5.2

(1) 等比级数

$$\sum_{n\geq 0} z^n$$

的收敛半径为 $R=1$, 收敛圆为 $|z|=1$, 且在此圆内, 和函数为 $1/(1-z)$. 但是在收敛圆 $|z|=1$ 上是处处发散, 因此该级数的收敛域仅为 $|z|<1$. □

(2) 讨论幂级数

$$\sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n^{3/2}}$$

的敛散性.

解: 此时 $c_n = n^{-3/2}$, 故得到

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)^{-3/2}}{n^{-3/2}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{3/2} = 1.$$

所以收敛半径为 $R=1$, 收敛圆为 $|z|=1$. 在收敛圆上, 由于

$$\sum_{n\geq 1} \left| \frac{z^n}{n^{3/2}} \right| = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{3/2}},$$

我们得到幂级数的收敛域是闭圆盘 $|z|\leq 1$, 且在这个闭圆上是绝对收敛的. □

(3) 讨论求幂级数

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(z-1)^n}{n}$$

的敛散性.

解: 此时 $c_n = 1/n$, 故得到

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{1/(n+1)}{1/n} \right| = 1.$$

所以收敛半径为 $R=1$, 收敛圆为 $|z-1|=1$. 现在讨论该幂级数在收敛圆上的敛散性. 当 $z=0$ 时, 幂级数是交错级数 $\sum_{n\geq 1}(-1)^n/n$, 因此是条件收敛的. 当 $z=2$ 时, 幂级数为调和级数 $\sum_{n\geq 1} 1/n$, 因此时发散的. 所以, 这个幂级数的收敛域至少包含开圆盘 $|z-1|<1$, 但是在圆周 $|z-1|=1$ 上既有收敛点, 又有发散点. □

(4) 讨论幂级数

$$\sum_{n\geq 0} n! z^n, \quad \sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n^n}$$

的敛散性.

解: 第一个幂级数的收敛半径是 $R=0$, 而第二个幂级数的收敛半径是 $R=+\infty$. □

(5) 讨论幂级数

$$\sum_{n\geq 0} (\cos(\mathbf{i}n)) z^n$$

的敛散性.

解: 因为

$$c_n = \cos(\mathbf{i}n) = \frac{e^n + e^{-n}}{2},$$

所以

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{c_n}{c_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{e^n+e^{-n}}{e^{n+1}+e^{-n-1}}=\frac{1}{e}.\ \square$$

(6) 讨论幂级数

$$\sum_{n\geq 0} n^{\ln n}z^n$$

的敛散性.

解: 因为

$$c_n=n^{\ln n}=e^{(\ln n)^2},$$

所以

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{e^{\ln^2 n/n}}=e^{-\lim_{n\to\infty}\frac{\ln^2 n}{n}}=e^{-0}=1.$$

当 $|z|\geq 1$ 时, $\lim_{n\to\infty} n^{\ln n}|z^n|\to+\infty$, 因此幂级数仅在 $|z|<1$ 内收敛. $\square$

5.1.5 幂级数的基本性质

《数学分析》中幂级数可以进行加减乘除四则运算, 并且在收敛域内可以任意次求导和求积分. 这些性质对复变幂级数也是成立的.

给定两个幂级数

$$\sum_{n\geq 0}a_nz^n,\quad \sum_{n\geq 0}b_nz^n$$

它们的收敛半径分别为 R_1 与 R_2, 并且在各自的收敛圆

$$\mathcal{D}_1=\{z\in\mathbf{C}:|z|<R_1\},\quad 和\quad \mathcal{D}_2=\{z\in\mathbf{C}:|z|<R_2\}$$

内分别收敛到复变函数 $f(z)$ 和 $g(z)$. 令 $R:=\min\{R_1,R_2\}$ 并考虑开圆盘 $\mathcal{D}=\{z\in\mathbf{C}:|z|<R\}$.

(1) 对任意 $\alpha,\beta\in\mathbf{C}$, 幂级数

$$\alpha\sum_{n\geq 0}a_nz^n+\beta\sum_{n\geq 0}b_nz^n$$

在 $\mathcal{D}$ 内收敛且满足

$$\alpha\sum_{n\geq 0}a_nz^n+\beta\sum_{n\geq 0}b_nz^n=\sum_{n\geq 0}(\alpha a_n+\beta b_n)z^n=\alpha f(z)+\beta g(z),\quad z\in\mathcal{D}.$$

(2) 考虑复数列

$$c_n:=\sum_{0\leq k\leq n}a_kb_{n-k}=a_0b_n+a_1b_{n-1}+\cdots+a_nb_0.$$

因此幂级数的乘积

$$\sum_{n\geq 0}a_nz^n\cdot\sum_{n\geq 0}b_nz^n$$

在 $\mathcal{D}$ 内收敛, 且满足

$$\sum_{n\geq 0} a_n z^n \cdot \sum_{n\geq 0} b_n z^n = \sum_{n\geq 0} c_n z^n = f(z)g(z), \quad z \in \mathcal{D}.$$

注 5.2

收敛半径分别为 R_1 和 R_2 的两个幂级数通过上述四则运算后, 新得到的幂级数的收敛半径 R' 满足 $R' \geq R := \min\{R_1, R_2\}$. 比如

$$\sum_{n\geq 0} z^n, \quad \sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{1+a^n} \ (0 < a < 1)$$

的收敛半径都是 $R_1 = R_2 = 1$. 但是, 它们的差

$$\sum_{n\geq 0} z^n - \sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{1+a^n} = \sum_{n\geq 0} \frac{a^n}{1+a^n} z^n$$

的收敛半径为

$$R' = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a^n}{1+a^n} \Big/ \frac{a^{n+1}}{1+a^{n+1}} \right| = \frac{1}{a} > 1.$$

然后, 在进行幂级数的差运算过程中, 我们还是要在收敛半径 R 内.

换句话说, 收敛半径分别为 R_1 和 R_2 的两个幂级数通过上述四则运算后, 新得到的幂级数至少在 $|z| < R$ 内是收敛的; 至于收敛范围是否可以扩大, 要看具体情况具体分析.

♣

例 5.3

(1) 把函数 $1/(z-a)$ 展开成幂级数 $\sum_{n\geq 0} c_n (z-a)^n$, 这里 a 与 b 是不相等的复常数.

解: 首先注意到

$$\frac{1}{z-b} = \frac{1}{(z-a)-(b-a)} = -\frac{1}{b-a} \cdot \frac{1}{1-\dfrac{z-a}{b-a}}.$$

令 $R := |b-a|$. 则当 $|z-a| < R$ 时, 得到幂级数展开

$$\frac{1}{z-b} = -\frac{1}{b-a} \sum_{n\geq 0} \left(\frac{z-a}{b-a}\right)^n = -\sum_{n\geq 0} \frac{(z-a)^n}{(b-a)^{n+1}}. \quad \square$$

(2) 把函数 $z/(z^2-2z-3)$ 展开成幂级数 $\sum_{n\geq 0} c_n z^n$, 并求出它的收敛半径.

解: 因为

$$f(z) = \frac{z}{z^2-2z-3} = \frac{z}{(z+1)(z-3)} = \frac{1}{4}\frac{1}{z+1} + \frac{3}{4}\frac{1}{z-3} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1+z} - \frac{1}{1-\dfrac{z}{3}}\right).$$

因此得到收敛半径是 $R = 1$ 且

$$f(z) = \frac{1}{4}\sum_{n\geq 0}\left[(-z)^n - \frac{z^n}{3^n}\right] = \frac{1}{4}\sum_{n\geq 0}\left[(-1)^n - \frac{1}{3^n}\right] z^n, \quad |z| < 1. \quad \square$$

♠

最后, 我们把实变幂级数在它收敛区间内可任意次求导和求积分, 推广到复变幂级数. 证明的方法和实情形时是一样的, 同学们可以作为练习自己做一下.

定理 5.4

假设幂级数 $\sum_{n\geq 0} c_n(z-a)^n$ 的收敛半径为 $R\in(0,+\infty]$, 和函数为 $f(z)$. 则

(1) $f(z)$ 是开圆盘 $\mathcal{D}:=|z-a|<R$ 内是全纯函数.

(2) $f(z)$ 在开圆盘 $\mathcal{D}$ 内任意阶可导, 且可以逐项求导

$$f^{(k)}(z)=\left(\sum_{n\geq 0} c_n(z-a)^n\right)^{(k)}=\sum_{n\geq k} n(n-1)\cdots(n-k+1)c_k(z-a)^{n-k}. \tag{5.1.12}$$

(3) $f(z)$ 在开圆盘 $\mathcal{D}$ 内可积, 且可以逐项积分

$$\int_\Gamma f(z)dz=\int_\Gamma\left(\sum_{n\geq 0} c_n(z-a)^n\right)dz=\sum_{n\geq 0} c_n\int_\Gamma(z-a)^n dz \tag{5.1.13}$$

这里 Γ 为 $\mathcal{D}$ 内任一光滑曲线. 特别地, 对任意 $z\in\mathcal{D}$ 得到

$$\int_a^z f(\zeta)d\zeta=\int_a^z\left(\sum_{n\geq 0} c_n(\zeta-a)^n\right)d\zeta=\sum_{n\geq 0}\frac{c_n}{n+1}(z-a)^{n+1}. \tag{5.1.14}$$

♡

5.2 Taylor 级数

假设复变函数 $f(z)$ 在开圆盘 $\mathcal{D}:=\{z\in\mathbf{C}:|z-z_0<R\}$ 上全纯. 对任意 $z\in\mathcal{D}$, 取一个圆周 $\mathcal{C}_\rho:=|\zeta\in\mathbf{C}:|\zeta-z_0|=\rho\}$ 使得 z 包含在 $\mathcal{C}_\rho$ 内. 根据 Cauchy 积分公式 (4.4.1) 得到

$$f(z)=\frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\oint_{\mathcal{C}_\rho}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta.$$

因为 $|z-z_0|<|\zeta-z_0|$ 对任意 $\zeta\in\mathcal{C}_\rho$ 都成立, 所以做等比函数展开

$$\frac{1}{\zeta-z}=\frac{1}{\zeta-z_0}\frac{1}{1-\dfrac{z-z_0}{\zeta-z_0}}=\frac{1}{\zeta-z_0}\sum_{n\geq 0}\left(\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)^n=\sum_{n\geq 0}\frac{(z-z_0)^n}{(\zeta-z_0)^{n+1}}.$$

故得到

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\oint_{\mathcal{C}_\rho}\left[\sum_{n\geq 0}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}(z-z_0)^n\right]d\zeta \\
&= \frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\oint_{\mathcal{C}_\rho}\left[\sum_{0\leq n\leq N}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}(z-z_0)^n+\sum_{n\geq N+1}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}(z-z_0)^n\right]d\zeta \\
&= \sum_{0\leq n\leq N}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n+\frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\oint_{\mathcal{C}_\rho}\left[\sum_{n\geq N+1}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}(z-z_0)^n\right]d\zeta.
\end{aligned}$$

5.2.1 Taylor 展开定理

如果我们可以证明当 $N\to\infty$ 时, 最后一个等式右边第二项趋于零, 这样就得到了

定理 5.5. (Taylor 展开定理)

假设复变函数 $f(z)$ 在开圆盘 $\mathcal{D} := \{z \in \mathbf{C} : |z - z_0| < R\}$ 内全纯, 则在 $\mathcal{D}$ 内 $f(z)$ 能唯一地展开成

$$f(z) = \sum_{n\geq 0} c_n (z - z_0)^n, \quad z \in \mathcal{D}, \tag{5.2.1}$$

其中

$$c_n = \frac{1}{2\pi \mathbf{i}} \oint_{\mathcal{C}_\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta = \frac{f^n(z_0)}{n!}, \quad n \in \mathbf{N}, \tag{5.2.2}$$

而 $\mathcal{C}_\rho := \{\zeta \in \mathbf{C} : |\zeta - z_0| = \rho\}$ 是 $\mathcal{D}$ 以 z_0 为中心的任意圆周. ♡

证: 根据前面分析, 我们只要证明

$$\lim_{N\to\infty} R_N(z) := \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2\pi \mathbf{i}} \oint_{\mathcal{C}_\rho} \left[\sum_{n\geq N+1} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} (z - z_0)^n \right] d\zeta = 0.$$

为此令

$$r := \left| \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right| = \frac{|z - z_0|}{\rho}.$$

则得到 $r \in [0, 1)$. 因为 $f \in H(\mathcal{D})$, 所以 $f \in C(\mathcal{D})$ 从而存在正常数 $M > 0$ 使得 $|f(\zeta)| \leq M$ 在 $\mathcal{C}_\rho$ 上成立. 综上可得

$$|R_N(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \oint_{\mathcal{C}_\rho} \left[\sum_{n\geq N+1} \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta - z_0|} \left| \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right|^n \right] ds \leq \frac{2\pi\rho}{2\pi} \sum_{n\geq N+1} \frac{M}{\rho} r^n = \frac{M r^{N+1}}{1 - r}.$$

由于 $r \in [0, 1)$, 令 $N \to \infty$ 就得到 $\lim_{N\to\infty} R_N(z) = 0$ 在 $\mathcal{D}$ 一致成立.

最后, 我们来证明唯一性. 假设 $f(z)$ 有另一个幂级数展开

$$f(z) = \sum_{n\geq 0} c'_n (z - z_0)^n, \quad z \in \mathcal{D}.$$

则根据 (5.1.12), 得到 $f(z_0) = c'_0$ 和 $f^{(n)}(z_0) = c'_n n!$. 因此系数 $c'_n = c_n = f^{(n)}(z_0)/n!$ 是唯一确定的. □

称 (5.2.1) 为 $f(z)$ 在 z_0 处的 **Taylor 展开式**, 等号右端的幂级数称为 $f(z)$ 在 z_0 处的 **Taylor 级数**, 而系数 $c_n = f^{(n)}(z_0)/n!$ 称为 **Taylor 系数**.

(1) 假设函数 $f(z)$ 在区域 $\mathcal{D}$ 内全纯, $z_0 \in \mathcal{D}$, d 为 z_0 到 $\mathcal{D}$ 的边界上各点的最短距离, 则当 $|z - z_0| < d$ 时, $f(z)$ 可唯一地展开为幂级数 (5.2.1).

(2) 假设函数 $f(z)$ 在区域 $\mathcal{D}$ 内全纯, $z_0 \in \mathcal{D}$, α 为 $f(z)$ 在 $\mathcal{D}$ 内距 z_0 最近的一个奇点, 则使得 Taylor 展开式 (5.2.1) 成立的收敛圆域半径为 $R = |\alpha - z_0|$.

(3) 在收敛圆上, 幂级数的收敛性与和函数的全纯性没有必然的联系. 比如幂级数

$$\sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n^2}$$

的收敛半径为 1, 所以在开圆盘 $|z| < 1$ 内幂级数绝对收敛, 且收敛到和函数 $f(z)$. 而

在圆周 $|z| = 1$ 上, 由于

$$\sum_{n\geq 1}\left|\frac{z^n}{n^2}\right| = \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$$

是收敛的, 因此幂级数的收敛域为闭圆盘 $|z| \leq 1$. 虽然和函数 $f(z)$ 在开圆盘 $|z| < 1$ 内是全纯的, 但是在圆周 $|z| = 1$ 上至少有一个奇点 $z_0 = 1$, 这是因为

$$f'(z) = \sum_{n\geq 1}\frac{z^{n-1}}{n} \to \infty$$

当 z 沿着实轴从圆周 $|z| = 1$ 内部趋于 $z_0 = 1$.

定理 5.6. (全纯函数的幂级数刻画)

复变函数 $f(z)$ 在区域 D 内全纯的充要条件是 $f(z)$ 在 D 内任一点 z_0 的邻域内可展开为幂级数

$$\sum_{n\geq 0} c_n(z-z_0)^n.$$

♡

5.2.2 求 Taylor 展开的几个方法

求给定全纯函数的 Taylor 级数展开, 一般有两个方法:

(1) **直接展开法:** 直接求导算出系数 $c_n = f^{(n)}(z_0)/n!$.

(2) **间接展开法:** 利用 Taylor 展开的唯一性, 根据已知幂级数展开, 并结合四则运算、变量替换、常微分方程等技巧, 来求出系数.

定理 5.7. (复变基本初等函数的 Taylor 级数展开)

(1) 指数函数 e^z 在复平面上处处全纯, 且满足

$$e^z = \sum_{n\geq 0}\frac{z^n}{n!}, \quad z \in \mathbf{C}. \tag{5.2.3}$$

(2) 正弦函数 $\sin z$ 和余弦函数 $\cos z$ 在复平面上处处全纯, 且满足

$$\sin z = \sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n+1}, \quad z \in \mathbf{C}, \tag{5.2.4}$$

$$\cos z = \sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{(2n)!}z^{2n}, \quad z \in \mathbf{C}. \tag{5.2.5}$$

(3) 对数函数 (主值分支) $\ln(1+z)$ 在从 $z = -1$ 向左沿着负实轴剪开的复平面内全纯, $z_0 = -1$ 是其一个奇点, 且满足

$$\ln(1+z) = \sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n-1}}{n}z^n, \quad |z| < 1. \tag{5.2.6}$$

(4) 幂级数 $(1+z)^\alpha$ 的主值分支 $e^{\alpha\ln(1+z)}$, 这里 $\alpha \in \mathbf{C}$, 在从 $z = -1$ 向左沿着负实轴剪开的复平面内全纯, 且满足

$$(1+z)^\alpha = \sum_{n\geq 0}\binom{\alpha}{n}z^n, \quad |z| < 1, \tag{5.2.7}$$

这里

$$\binom{\alpha}{n} := \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}.$$

♡

证: 直接展开. □

例 5.4

(1) 求下列函数在给定点 z_0 处的 Taylor 展开式:

(a) $f(z) = 1/(1-2z-3z^2)$, $z_0 = 0$.

(b) $f(z) = 1/z^2$, $z_0 = 1$.

(c) $f(z) = e^{z-1}/(2-z)$, $z_0 = 0$.

解: 对 (a),

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{(1+z)(1-3z)} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1+z}+\frac{3}{1-3z}\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(\sum_{n\geq 0}(-1)^n z^n + 3\sum_{n\geq 0}3^n z^n\right) = \sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n+3^{n+1}}{4}z^n \end{aligned}$$

这里收敛半径为 $R = \min\{1, 1/3\} = 1/3$.

对 (b), 首先注意到

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{1+(z-1)} = \sum_{n\geq 0}(-1)^n(z-1)^n, \quad |z-1|<1.$$

在开圆盘 $|z-1|<1$ 逐项求导得到

$$-\frac{1}{z^2} = \sum_{n\geq 1} n(-1)^n(z-1)^{n-1}, \quad \frac{1}{z^2} = \sum_{n\geq 0}(-1)^n(n+1)(z-1)^n.$$

收敛半径为 $R = 1$.

对 (c), 在 $|z/2|<1$ 内有

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2e}e^z\frac{1}{1-\frac{z}{2}} = \frac{1}{2e}\sum_{n\geq 0}\frac{(z)^n}{n!}\cdot\sum_{n\geq 0}\left(\frac{z}{2}\right)^n \\ &= \frac{1}{2e}\sum_{n\geq 0}\left(\sum_{0\leq k\leq n}\frac{1}{k!}\frac{1}{2^{n-k}}\right)z^n = \frac{1}{2e}\sum_{n\geq 0}\left(\sum_{0\leq k\leq n}\frac{2^k}{k!}\right)\frac{z^n}{2^n}. \end{aligned}$$ □

(2) 求 $z/(e^z-1)$ 在 $z=0$ 处的 Taylor 展开式.

解: 如果令

$$\frac{z}{e^z-1} = \sum_{n\geq 0}c_n z^n,$$

则得到

$$c_0 = 1, \quad c_1 = -\frac{1}{2}, \quad c_{2k} = \frac{(-1)^{k-1}B_k}{(2k)!}, \quad c_{2n+1} = 0\ (n\geq 1),$$

这里 B_k 就是所谓的**第 k 个 Bernoulli 数**, 比如

$$B_1 = \frac{1}{6}, \quad B_2 = \frac{1}{30}, \quad B_3 = \frac{1}{42}, \quad B_4 = \frac{1}{30}, \quad B_5 = \frac{5}{66}, \quad B_k \in \mathbb{Q}.$$

回顾下Riemann 引入的 ζ 函数

$$\zeta(z) := \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^z}, \quad z\in\mathbf{C}.$$

显然当 $\mathrm{Re}(z)>1$ 时, 上述复变函数项级数收敛. 特别地, 当 $z=2n\in\mathbf{N}_*$ 时, 可以证明

$$\zeta(2n)=\frac{(2\pi)^{2n}}{2(2n)!}B_n\in\mathbb{Q}\pi^{2n}. \quad \square$$

(3) 求 $\tan z$ 在 $z=0$ 处的 Taylor 展开式 (直到 z^7).

解: 因为 $\pi/2$ 是 $\tan z$ 离 $z=0$ 最近的一个奇点, 所以函数 $\tan z$ 在 $|z|<\pi/2$ 内有 Taylor 级数展开

$$\tan z=\sum_{n\geq 0}c_n z^n, \quad c_0=0.$$

由于 $\tan z$ 是奇函数, 所以进一步得到

$$\tan z=\sum_{n\geq 0}c_{2n+1}z^{2n+1}, \quad |z|<\frac{\pi}{2}.$$

根据 $\sin z=\tan z\cdot\cos z$, 我们得到

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n+1} &= \sum_{n\geq 0}c_{2n+1}z^{2n+1}\cdot\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{(2n)!}z^{2n}\\ &= c_1 z+\left(c_3-\frac{c_1}{2!}\right)z^3+\left(c_5-\frac{c_3}{2!}+\frac{c_1}{4!}\right)z^5+\left(c_7-\frac{c_5}{2!}+\frac{c_3}{4!}-\frac{c_1}{6!}\right)z^7+\cdots\\ &= \sum_{n\geq 0}\left[\sum_{i+j=n}\frac{(-1)^j c_{2i+1}}{(2j)!}\right]z^{2n+1}\sum_{n\geq 0}\left[\sum_{0\leq i\leq n}\frac{(-1)^{n-i}c_{2i+1}}{(2n-2i)!}\right]z^{2n+1}.\end{aligned}$$

比较两边系数可知

$$\frac{1}{(2n+1)!}=\sum_{0\leq i\leq n}\frac{(-1)^i c_{2i+1}}{(2n-2i)!}, \quad n\geq 0.$$

前几项分别为

$$c_1=1, \quad c_3=\frac{1}{3}, \quad c_5=\frac{2}{15}, \quad c_7=\frac{17}{315}, \quad \cdots.$$

故得到

$$\tan z=z+\frac{1}{3}z^3+\frac{2}{15}z^5+\frac{17}{315}z^7+\cdots, \quad |z|<\frac{\pi}{2}.$$

实际上, 我们可以证明

$$\tan z=\sum_{n\geq 1}\frac{2^{2n}(2^{2n}-1)B_n}{(2n)!}z^{2n-1}, \quad |z|<\frac{\pi}{2}. \quad \square \tag{5.2.8}$$

(4) 求函数 $f(z)=\ln(2+z-z^2)$ 在 $z=0$ 处的 Taylor 级数.

解: 因为 $f(z)=\ln[(2-z)(1+z)]=\ln(2-z)+\ln(1+z)$, 所以

$$f(z) = \ln 2-\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}\left(\frac{z}{2}\right)^n+\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n-1}}{n}z^n = \ln 2+\sum_{n\geq 1}\left[(-1)^{n-1}-\frac{1}{2^n}\right]\frac{z^n}{n}. \quad \square$$

(5) 求函数 $f(z)=\mathrm{ch}(z)$ 在 $z=\pi\mathbf{i}$ 处的 Taylor 级数.

解: 令 $w = z - \pi\mathbf{i}$, 则得到

$$\mathrm{ch}(z) = \mathrm{ch}(w+\pi\mathbf{i}) = \frac{e^{w+\pi\mathbf{i}} + e^{-w-\pi\mathbf{i}}}{2} = \frac{-e^{w} - e^{-w}}{2} = -\sum_{n\geq 0}\frac{(z-\pi\mathbf{i})^{2n}}{(2n)!}. \quad \square$$

(6) 求函数 $f(z) = \sin(2z - z^2)$ 在 $z = 1$ 处的 Taylor 级数.

解: 令 $w = z - 1$ 得到

$$\begin{aligned}\sin(2z - z^2) &= \sin(1 - w^2) = \sin 1 \cdot \cos(w^2) - \cos 1 \cdot \sin(w^2) \\ &= \sin 1 \cdot \sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{(2n)!}(w^2)^{2n} - \cos 1 \cdot \sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(w^2)^{2n+1} \\ &= \sum_{n\geq 0}\sin\left(1 - \frac{n\pi}{2}\right)\frac{w^{2n}}{n!} = \sum_{n\geq 0}\sin\left(1 - \frac{n\pi}{2}\right)\frac{(z-1)^{2n}}{n!}. \quad \square\end{aligned}$$

(7) 求函数 $f(z) = e^{1/(1-z)}$ 在 $z = 0$ 处的 Taylor 展开式到含 z^3 的项.

解: 若令 $u = z/(1-z)$, 则直接利用 e^u 的展开得到

$$\begin{aligned}e^{1/(1-z)} &= ee^{u} = e\sum_{n\geq 0}\frac{u^n}{n!} = e\left(1 + u + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + \cdots\right) \\ &= e\left[1 + \frac{z}{1-z} + \frac{1}{2!}\left(\frac{z}{1-z}\right)^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{z}{1-z}\right)^3 + \cdots\right] \\ &= e\left[1 + (z + z^2 + z^3 + \cdots) + \frac{1}{2}(z + z^2 + z^3 + \cdots)^2\right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{6}(z + z^2 + z^3 + \cdots)^3 + \cdots\right] = e\left(1 + z + \frac{3}{2}z^2 + \frac{13}{6}z^3 + \cdots\right), \quad |z| < 1.\end{aligned}$$

可见直接法非常麻烦, 下面我们利用构造常微分方程来求解. 对 $f(z)$ 求导得到

$$(1-z)^2 f'(z) = f(z).$$

如果 $f(z) = \sum_{n\geq 0} c_n z^n$, 则根据上述常微分方程得到递推公式

$$\begin{aligned}c_0 + c_1 z + \sum_{n\geq 2} c_n z^n &= c_1 + 2c_2 z + \sum_{n\geq 2}(n+1)c_{n+1}z^n \\ &\quad - 2c_1 z - 2\sum_{n\geq 2} n c_n z^n + \sum_{n\geq 2}(n-1)c_{n-1}z^n.\end{aligned}$$

因此

$$c_0 = c_1 = f(0) = e, \quad c_2 = \frac{3}{2}c_1$$

和

$$c_{n+1} = \frac{2n+1}{n+1}c_n - \frac{n-1}{n+1}c_{n-1}, \quad n \geq 2.$$

前几项分别为

$$c_3 = \frac{13}{6}e, \quad c_4 = \frac{73}{24}e, \quad c_5 = \frac{501}{120}e. \quad \square$$

(8) 求函数 $f(z) = \ln(1 + e^z)$ 在 $z = 0$ 处的 Taylor 展开式到含 z^4 的项.

解: 因为

$$f'(z) = \frac{e^z}{1+e^z}, \quad f''(z) = \frac{e^z}{(1+e^z)^2},$$

所以

$$(1+e^z)f''(z) = f'(z).$$

如果 $f(z) = \sum_{n\geq 0} c_n z^n$, 那么

$$\begin{aligned} f'(z) &= \sum_{n\geq 1} nc_n z^{n-1} = \sum_{n\geq 0}(n+1)c_{n+1}z^n, \\ f''(z) &= \sum_{n\geq 2} n(n-1)c_n z^{n-2} = \sum_{n\geq 0}(n+2)(n+1)c_{n+2}z^n \end{aligned}$$

从而带入得到

$$\sum_{n\geq 0}(n+1)c_{n+1}z^n = \sum_{n\geq 0}(n+2)(n+1)c_{n+2}z^n + \sum_{n\geq 0}\left[\sum_{0\leq k\leq n}\frac{(k+2)(k+1)}{(n-k)!}c_{k+2}\right]z^n.$$

因此得到

$$c_1 = f'(0) = \frac{1}{2}, \quad c_2 = \frac{1}{4}c_1 = \frac{1}{8}$$

和

$$2c_2 = 6c_3 + 2c_2 + 6c_3, \quad c_3 = 0$$

和

$$c_{n+2} = -\frac{n-1}{2(n+2)}c_{n+1} - \frac{1}{2(n+2)(n+1)}\sum_{0\leq k\leq n-2}\frac{(k+2)(k+1)c_{k+2}}{(n-k)!}, \quad n\geq 2.$$

特别地, 我们有

$$c_4 = -\frac{1}{192}, \quad c_5 = 0.$$

实际上, 我们可以证明

$$c_n = 0, \quad n \text{ 是大于等于 } 3 \text{ 的奇数}.$$

实际上, 从 $1 - f'(-z) = f'(z)$ 两边比较系数就可以得到

$$c_{n+1} = (-1)^{n+1}c_{n+1}, \quad n\geq 2.$$

因为对数函数 $\ln\zeta$ 在原点与负实轴上不全纯, 所以函数 $\ln(1+e^z)$ 离 $z=0$ 最近的奇点是方程 $1+e^z=0$ 离 $z=0$ 最近的根. 而该方程的所有根为 $z_k = (2k+1)\pi\mathbf{i}$, $k\in\mathbf{Z}$, 因此函数 $\ln(1+e^z)$ 的收敛半径为 $R=\pi$. □

(9) 证明不等式

$$|e^z - 1| \leq e^{|z|} - 1 \leq |z|e^{|z|}, \quad z\in\mathbf{C}. \tag{5.2.9}$$

证: 利用 e^z 的 Taylor 级数展开

$$e^z = 1 + \sum_{n\geq 0}\frac{z^n}{n!}, \quad z\in\mathbf{C},$$

我们得到

$$|e^z - 1| = \left|\sum_{n\geq 1}\frac{z^n}{n!}\right| \leq \sum_{n\geq 1}\frac{|z|^n}{n!} = e^{|z|} - 1.$$

另一方面

$$e^{|z|} - 1 = \sum_{n\geq 1}\frac{|z|^n}{n!} = |z|\sum_{n\geq 1}\frac{|z|^{n-1}}{n!} = |z|\sum_{n\geq 0}\frac{|z|^n}{(n+1)!} \leq |z|e^{|z|}. \quad \square$$

5.3 Laurent 级数

假设 $\mathcal{D}$ 是区域, 那么对任何全纯函数 $f \in H(\mathcal{D})$, 只要圆周 $\mathcal{C} := \{z \in \mathbf{C} : |z - z_0| = r\}$ 及其内部完全含在 $\mathcal{D}$, 我们有 Taylor 级数展开

$$f(z) = \sum_{n\geq 0} c_n (z - z_0)^n, \quad c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}.$$

一个很自然的问题是, 如果 f 不是全纯函数, 或者圆周 $\mathcal{C}$ 的内部不完全包含在 $\mathcal{D}$ 内, 此时有没有类似的级数展开?

我们再看一个来自复常微分方程里的例子. 寻找下面方程

$$z^2 f''(z) + 2zf'(z) + z^2 f(z) = 0$$

的一个非平凡解 (显然 $f(z) = 0$ 是它的平凡解). 注意到上述方程可写为

$$0 = z\left[zf''(z) + 2f'(z) + zf(z)\right] = z\left[g''(z) + g(z)\right], \quad g(z) := zf(z).$$

故得到

$$g''(z) + g(z) = 0;$$

上面微分方程有两个基本解

$$g_1(z) = \sin z, \quad g_2(z) = \cos z,$$

从而得到原微分方程的两个基本解 (除了平凡解 $f(z) = 0$ 之外)

$$f_1(z) = \frac{\sin z}{z} = \frac{1}{z}\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n+1}, \quad f_2(z) = \frac{\cos z}{z} = \frac{1}{z}\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{(2n)!}z^{2n}.$$

注意到 $f_1(z)$ 是首项为 1 的幂级数, 而 $f_2(z)$ 是首项为 $1/z$ 的幂级数.

因此, 形如

$$\sum_{n\geq -N} c_n (z - a)^n, \quad c_n \in \mathbf{C}, \quad N \in \mathbf{Z},$$

的幂级数也是很自然地出现.

再看一个幂级数展开的例子. 复变函数

$$f(z) = \frac{1}{z(1-z)} = \frac{1}{z} + \frac{1}{1-z}$$

在 $z=0$ 和 $z=1$ 处都不全纯, 但是在这两点的去心邻域 $0<|z|<1$ 和 $0<|z-1|<1$ 内处处全纯.

(1) 在圆环域 $0<|z|<1$ 内时, 有

$$f(z)=\frac{1}{z}+\sum_{n\geq 0}z^n=\sum_{n\geq -1}z^n.$$

(2) 在圆环域 $0<|z-1|<1$ 内时, 有

$$f(z)=\frac{1}{1-z}\cdot\frac{1}{1-(1-z)}=\frac{1}{1-z}\cdot\sum_{n\geq 0}(1-z)^n=\sum_{n\geq -1}(1-z)^n.$$

上述类型的幂级数称为 **Laurent 级数**, 而一般形的 Laurent 级数可写为

$$\sum_{n\in\mathbf{Z}}c_n(z-a)^n,\quad c_n\in\mathbf{C}.$$

5.3.1 Laurent 级数的历史

Laurent 级数是幂级数的一种, 它不仅包含了正数次数的项, 也包含了负数次数的项. 有时无法把函数表示为 Taylor 级数, 但可以表示为 Laurent 级数.

Laurent 级数, 首次出现于法国数学家Pierre Alphonse Laurent 在 1842 年向法国科学院提交的一篇竞争数学大奖的论文中. 但是他提交的研究报告错过了最后期限, 因此他的研究成果没有被接受从而也没有能够获奖.

虽然Laurent的论文得到了Cauchy 和Liouville的正面评价 (其实早在 1840 年, Cauchy 和Liouville审查过Laurent的另一篇论文, 同样也是正面评价并推荐发表, 但是这个建议最后没有被法国科学院采纳), 但是最后也没有被推荐发表. 1843 年 10 月 30 日, Cauchy向法国科学院提交了一份他和Liouville共同撰写的关于Laurent论文的报告. 报告中写道, Laurent论文中很多结论, 都可以从他之前论文的结果中推导出来. 在 11 月 27 日, 他向法国科学院递交的一份简短报告中, 他观察到在 1821 年证明的关于级数 $\sum_{n\geq 0}u_n$ 收敛性的定理可以推广到级数 $\sum_{n\in\mathbf{Z}}u_n$ 上去.

此事使得Laurent大失所望, 转而从事应用数学的研究, 发表了关于光理论和其他学科的论文. 他后来一直担任军事工程师, 从事应用数学研究, 直到他 1854 年去世.

1843 年, Laurent把一个较重要的定理发表在《Comptes rendus de l'Académie des Sciences》[1], 而全文则在 1863 年 (他去世后的第 9 年) 刊登在《Journal de l'École Polytechnique》[2]上.

Weierstrass可能是更早发现这个级数的人, 但他 1841 年的论文[3]直到他死后才发表. 在这篇文章中, 首次给出了在给定两个复极限间积分的 Cauchy 定理的严格证明 (而不使用重积分或曲面积分), 因此同时得到了 Laurent 定理.

[1]Laurent, P. A. *Extension du theórème de M. Cauchy, relatif à la convergence du développement d'une fonction suivant les puissances ascendantes de la variable*, Comp. Rend. **17**(1843), 348-349.

[2]Laurent, P. Q. *Mémoire sut la théorie des imaginaires, sur l'équilibre des témpératures et sur ;l'équilibre d'élasticité*, J. de l'Ecole Poly., **23**(1863), 75-204.

[3]Weierstrass, K. T. W. *Darstellung einer analytischen Function einer complexen Veränderlichen, deren absolute Betrag zwischen zwei gegebenen Grenzen liegt*, Ms. in Math. Werke., **1**(1894), 51-66.

这里值得一提的是, Mittag-Leffler在 1884 年给出了 Laurent 定理的一个初等证明[4]. 尽管Mittag-Leffler关于 Laurent 定理的“新”证明是初等的 (没有使用 Cauchy 积分定理), Pringsheim在 1896 年的文章[5]中还是尖锐地评论道: “这个证明给读者带来了比通常的 Cauchy-Laurent 证明还要多的困难.” Pringsheim同样对Scheeffer发表在文章[6]持批评态度, Scheeffer的证明是基于圆环映到单连通曲面上的映射.

Pringsheim在 1895 年的论文中[7]给出了 Laurent 定理的一个证明, 这个基于函数平均值的证明受到了Cauchy1840 年论文[8]的启发, 但是本质上还是用到了 Cauchy 积分定理.

5.3.2 全纯函数的 Laurent 展开定理

现在我们把 Taylor 级数

$$\sum_{n\geq 0} c_n(z-a)^n$$

推广到幂次为负的幂级数

$$\sum_{n\geq 1} c_{-n}(z-a)^{-n}.$$

假设幂级数 $\sum_{n\geq 0} c_n(z-a)^n$ 的收敛半径为 R_2, 则当 $|z-a|<R_2$ 时, $\sum_{n\geq 0} c_n(z-a)^n$ 收敛. 为了研究 $\sum_{n\geq 1} c_{-n}(z-a)^{-n}$ 的收敛性, 我们做变换

$$\zeta = \frac{1}{z-z_0},$$

这样

$$\sum_{n\geq 1} c_{-n}(z-a)^{-n} = \sum_{n\geq 1} c_{-n}\zeta^n.$$

假设上述幂级数的收敛半径为 R, 则当 $|\zeta|<R$ 时, $\sum_{n\geq 1} c_{-n}\zeta^n$ 收敛. 综上, 当 $|z-a|>R_1$ 且 $|z-a|<R_2$ 时, 这里 $R_1:=1/R$, 下述幂级数

$$\sum_{n\in\mathbf{Z}} c_n(z-z_0)^n := \sum_{n\geq 0} c_n(z-a)^n + \sum_{n\geq 1} c_{-n}(z-a)^{-n}$$

收敛. 此时必有 $R_1<R_2$. 注意到 $R_1\geq 0$ 而 $R_2\leq +\infty$.

定义 5.4. (双边幂级数)

称幂级数

$$\sum_{n\in\mathbf{Z}} c_n(z-a)^n = \sum_{n\geq 0} c_n(z-a)^n + \sum_{n\geq 1} c_{-n}(z-a)^{-n} \tag{5.3.1}$$

[4] Mittag-Leffler, G. *Démonstration nouvelle du théorème de Laurent*, Acta. Math., **4**(1884), 80-88.

[5] Pringsheim, A. *Über Vereinfachungen in der elementaren Theorie der analytischen Funktionen*, Math. Ann., **47**(1896), 121-154.

[6] Scheeffer, L. *Beweis des Laurent'shen Satzes*, Acta. Math., **4**(1884), 375-380.

[7] Pringsheim, A. *Ueber die Entwicklung eindeutiger analytischer Funktionen in Potenzreihen*, Sitz. München, **25**(1895), 75-92.

[8] Cauchy, A.-L. *Considérations nouvelles sur la théorie des suites et sur les lois de leur convergence*, Compt. Rend., **10**(1840), 640-656.

为**双边幂级数**. 幂级数 (5.3.1) **收敛**如果 $\sum_{n\geq 0} c_n(z-a)^n$ 和 $\sum_{n\geq 1} c_{-n}(z-a)^{-n}$ 同时收敛. 根据前面讨论, 双边幂级数 (5.3.1) 的收敛域一般为

$$R_1 < |z-a| < R_2. \tag{5.3.2}$$

♣

和 Taylor 级数一样, 双边幂级数 (5.3.1) 在 (5.3.2) 内的和函数是全纯的, 且可以逐项求导、逐项积分等.

定理 5.8. (Laurent 展开定理)

假设 $f(z)$ 在圆环域 $R_1 < |z-a| < R_2$ 内全纯, 则在此圆环域内 $f(z)$ 可唯一地展开成双边幂级数

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} c_n(z-a)^n, \tag{5.3.3}$$

其中

$$c_n = \frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\oint_{\mathcal{C}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta, \quad n\in\mathbf{Z}, \tag{5.3.4}$$

$\mathcal{C}$ 为该圆环域内绕着 a 地任一正向简单闭曲线.

♡

证: 在圆环域内以 a 为中心作两个正向圆周 $\mathcal{C}_1$ 和 $\mathcal{C}_2$, 半径分别为 r 和 R, 且满足 $R_1 < r < R < R_2$. 在小的圆环域 $r < |z-a| < R$ 内, 任取一点 z. 根据 Cauchy 积分公式 (4.4.1) (把闭曲线 $\mathcal{C}$ 取成 $\mathcal{C}_2 - \mathcal{C}_1$) 得到

$$f(z) = \frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\oint_{\mathcal{C}}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta = \frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\oint_{\mathcal{C}_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta - \frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\oint_{\mathcal{C}_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta = I_1 + I_2.$$

对 I_1, $\zeta\in\mathcal{C}_2$, 所以 $|z-a| < |\zeta-a| = R$. 若引入记号

$$w := \frac{z-a}{\zeta-a}$$

则得到 $|w|\in[0,1)$ 和

$$\frac{1}{\zeta-z} = \frac{1}{(\zeta-a)-(z-a)} = \frac{1}{\zeta-a}\cdot\frac{1}{1-w} = \frac{1}{\zeta-a}\sum_{n\geq 0} w^n.$$

从而得到

$$I_1 = \sum_{0\leq n\leq N}\left[\frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\oint_{\mathcal{C}_2}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta\right](z-a)^n + \frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\oint_{\mathcal{C}_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta-a}\sum_{n\geq N+1} w^n d\zeta.$$

根据闭路形变原理, **定理 4.6**, 可知

$$c_n = \frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\oint_{\mathcal{C}_2}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta, \quad 0\leq n\leq N.$$

但是 $f(z)$ 在 $\mathcal{C}_2$ 内不是全纯的, 因此 $c_n \neq f^{(n)}(a)/n!$. 又因为 $f(z)$ 在 $\mathcal{C}_2$ 连续, 所以存在正常数 M 满足 $|f(\zeta)|\leq M$. 因此得到

$$\begin{aligned}\left|I_1 - \sum_{0\leq n\leq N} c_n(z-a)^n\right| &\leq \left|\frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\oint_{\mathcal{C}_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta-a}\sum_{n\geq N+1} w^n d\zeta\right| \\ &\leq M\sum_{n\geq N+1}|w|^n = \left(\frac{|w|}{1-|w|}M\right)|w|^N.\end{aligned}$$

令 $N \to \infty$ 得到

$$I_1 = \sum_{n\geq 0} c_n(z-z_0)^n.$$

接下来,我们考虑第二个积分 I_2. 此时 $\zeta \in \mathcal{C}_1$, 所以 $|\zeta - a| < |z-a|$. 若引入记号

$$\widehat{w} := \frac{\zeta - a}{z-a}$$

则得到 $|\widehat{w}| \in [0,1)$ 和

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - a)-(z-a)} = \frac{-1}{z-a}\cdot\frac{1}{1-\widehat{w}},$$

从而得到

$$I_2 = \sum_{1\leq n\leq N}\left[\frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\oint_{\mathcal{C}_1}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{-n+1}}d\zeta\right](z-a)^{-n} + \frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\oint_{\mathcal{C}_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta - a}\sum_{n\geq N+1}\widehat{w}^n d\zeta.$$

根据闭路形变原理, **定理 4.6**, 可知

$$c_{-n} = \frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\oint_{\mathcal{C}_2}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{-n+1}}d\zeta, \quad 1\leq n\leq N.$$

类似于之前的做法,我们得到

$$I_2 = \sum_{n\geq 1} c_{-n}(z-a)^{-n}.$$

综上所述,得到了幂级数展开式 (5.3.3).

最后证明 Laurent 展开的唯一性. 假设函数 $f(z)$ 在圆环域 $R_1 < |z-a| < R_2$ 内有双边幂级数展开

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} c'_n(z-a)^n, \quad c'_n \in \mathbf{C}.$$

对圆环域内的任意一条正向简单闭曲线 $\mathcal{C}$, 利用逐项积分得到

$$c_n = \frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\oint_{\mathcal{C}}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta = \sum_{m\in\mathbf{Z}}\frac{c'_m}{2\pi\mathbf{i}}\oint_{\mathcal{C}}(\zeta-a)^{m-n-1}d\zeta = c'_n. \quad \square$$

称 (5.3.3) 为函数 $f(z)$ 在 $z=a$ 处的 **Laurent 展开式**, 等号右端的级数称为 $f(z)$ 在 $z=a$ 处的 **Laurent 级数**, 其中正幂项部分 $\sum_{n\geq 0} c_n(z-a)^n$ 与负幂项部分 $\sum_{n\geq 1} c_{-n}(z-z_0)^{-n}$ 分别称为 Laurent 级数的**全纯部分**和**主要部分**.

5.3.3 求圆环域内全纯函数的 Laurent 展开式的方法

定理 5.8给出了求圆环域内全纯函数 Laurent 展开式的一般方法. 直接用 (5.3.4) 计算处系数 c_n. 想法简单, 但是计算量较大, 有时候会很繁琐. 由此, 我们有如下两种方法来计算 Laurent 级数:

(1) **直接法:** 利用 (5.3.3) 和 (5.3.4).

(2) **间接法:** 基于展开唯一性, 利用已知函数的 Taylor 级数或 Laurent 级数, 并结合代数运算、变量替换、逐项求导、逐项求积等, 来求出所给函数的 Laurent 级数.

同一个函数在不同的圆环域内有不同的 Laurent 展开式, 这个与 Laurent 展开式的唯一性不矛盾! 我们说的 Laurent 展开式的唯一性是指, 在给定的圆环域内的 Lanrent 展开式是唯一的.

例 5.5

(1) 把函数 $f(z)=e^z/z^2$ 在圆环域 $0<|z|<+\infty$ 内展开成 Laurent 级数.

解: 直接利用公式得到

$$\frac{e^z}{z}=\sum_{n\geq 0}c_nz^n,\quad c_n=\frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\oint_C\frac{e^\zeta}{\zeta^{n+3}}d\zeta$$

这里 C 是圆环域内任意一条正向简单闭曲线. 当 $n+3\leq 0$ 时, e^zz^{-n-3} 在圆环域内全纯, 所以根据 Cauchy-Goursat 定理得到

$$c_n=0,\quad n\leq -3.$$

当 $n\geq -2$ 时, 利用 (4.4.6) 得到

$$c_n=\frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\oint_C\frac{e^\zeta}{\zeta^{n+3}}d\zeta=\frac{1}{(n+2)!}\frac{d^{n+2}}{d\zeta^{n+2}}\bigg|_{\zeta=0}e^\zeta=\frac{1}{(n+2)!}.$$

故得到

$$\frac{e^z}{z^2}=\sum_{n\geq -2}\frac{z^n}{(n+2)!}=\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!}+\frac{z}{3!}+\frac{z^2}{4!}+\cdots.$$

但是直接利用 e^z 的 Taylor 级数立即得到

$$\frac{e^z}{z^2}=\frac{1}{z^2}\sum_{n\geq 0}\frac{z^n}{n!}=\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!}+\frac{z}{3!}+\frac{z^2}{4!}+\cdots.\quad\square$$

(2) 求函数

$$f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-2)}=\frac{1}{1-z}-\frac{1}{2-z}$$

在如下圆环域

$$0<|z|<1,\quad 1<|z|<2,\quad 2<|z|<+\infty$$

内的 Laurent 展开.

解: 在上述三个圆环域内, 函数 $f(z)$ 都是全纯的.

(a) 当 $0<|z|<1$ 时, 得到

$$f(z)=\frac{1}{1-z}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{2}}=\sum_{n\geq 0}z^n-\frac{1}{2}\sum_{n\geq 0}\frac{z^n}{2^n}=\sum_{n\geq 0}\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)z^n.$$

(b) 当 $1<|z|<2$ 时, 得到

$$f(z)=\frac{-1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{2}}=-\frac{1}{z}\sum_{n\geq 0}\frac{1}{z^n}-\frac{1}{2}\sum_{n\geq 0}\frac{z^n}{2^n}=\sum_{n\in\mathbf{Z}}c_nz^n,$$

这里

$$c_n=\begin{cases}-1/2^{n+1}, & n\geq 0,\\ -1, & n<0.\end{cases}$$

(c) 当 $2<|z|<+\infty$ 时, 得到

$$f(z)=-\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}}+\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{z}}=-\frac{1}{z}\sum_{n\geq 0}\frac{1}{z^n}+\frac{1}{z}\sum_{n\geq 0}\frac{2^n}{z^n}=\sum_{n\geq 2}\frac{2^{n-1}-1}{z^n}\quad\square$$

(3) 把函数 $f(z)=z^3e^{1/z}$ 在 $0<|z|<+\infty$ 内展开成 Laurent 级数.

解: 根据 $e^z=\sum_{n\ge0}z^n/n!$ 得到

$$f(z)=z^3\sum_{n\ge0}\frac{1}{n!z^n}=z^3+z^2+\frac{z}{2}+\frac{1}{6}+\sum_{n\ge1}\frac{1}{(n+3)!z^n}.\quad\square$$

(4) 求函数

$$f(z)=\frac{1-2\mathbf{i}}{z(z+\mathbf{i})}=\frac{1-2\mathbf{i}}{\mathbf{i}}\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{z+\mathbf{i}}\right)$$

在如下圆环域

$$|z-\mathbf{i}|<1,\quad 1<|z-\mathbf{i}|<2,\quad 2<|z-\mathbf{i}|<+\infty$$

内的 Laurent 展开.

解: 注意到函数 $f(z)$ 有两个奇点 $z=0$ 和 $z=-\mathbf{i}$. 令

$$w:=z-\mathbf{i}$$

得到

$$f(z)=\frac{1-2\mathbf{i}}{(w+\mathbf{i})(w+2\mathbf{i})}=\frac{1-2\mathbf{i}}{\mathbf{i}}\left(\frac{1}{w+\mathbf{i}}-\frac{1}{w+2\mathbf{i}}\right).$$

(a) 当 $|z-\mathbf{i}|<1$ 时, 得到

$$\begin{aligned}f(z)&=\frac{1-2\mathbf{i}}{\mathbf{i}}\left[\frac{1}{\mathbf{i}}\frac{1}{1+\frac{w}{\mathbf{i}}}-\frac{1}{2\mathbf{i}}\frac{1}{1+\frac{w}{2\mathbf{i}}}\right]=\frac{1-2\mathbf{i}}{\mathbf{i}}\left[\frac{1}{\mathbf{i}}\sum_{n\ge0}\frac{w^n}{(-\mathbf{i})^n}-\frac{1}{2\mathbf{i}}\sum_{n\ge0}\frac{w^n}{(-2\mathbf{i})^n}\right]\\&=\frac{1-2\mathbf{i}}{-1}\sum_{n\ge0}\left[\frac{1}{(-\mathbf{i})^n}-\frac{1}{2(-2\mathbf{i})^n}\right]w^n\;=\;(1-2\mathbf{i})\sum_{n\ge0}\frac{1-2^{n+1}}{2^{n+1}}\mathbf{i}^nw^n.\end{aligned}$$

(b) 当 $1<|z-\mathbf{i}|<2$ 时, 得到

$$\begin{aligned}f(z)&=\frac{1-2\mathbf{i}}{\mathbf{i}}\left[\frac{1}{w}\frac{1}{1+\frac{\mathbf{i}}{w}}-\frac{1}{2\mathbf{i}}\frac{1}{1+\frac{w}{2\mathbf{i}}}\right]\\&=(1-2\mathbf{i})\sum_{n\ge0}\frac{(-\mathbf{i})^n}{w^n}+\frac{1-2\mathbf{i}}{2}\sum_{n\ge0}\left(\frac{\mathbf{i}}{2}\right)^nw^n.\end{aligned}$$

(c) 当 $|z-\mathbf{i}|>2$ 时, 得到

$$\begin{aligned}f(z)&=\frac{1-2\mathbf{i}}{\mathbf{i}}\left[\frac{1}{w}\frac{1}{1+\frac{\mathbf{i}}{w}}-\frac{1}{w}\frac{1}{1+\frac{2\mathbf{i}}{w}}\right]=\frac{1-2\mathbf{i}}{\mathbf{i}}\frac{1}{w}\sum_{n\ge0}(-1)^n\left[\frac{\mathbf{i}^n}{w^n}-\frac{(2\mathbf{i})^n}{w^n}\right]\\&=(1-2\mathbf{i})\sum_{n\ge1}\frac{(1-2^{n-1})(-\mathbf{i})^n}{w^n}.\quad\square\end{aligned}$$

(5) 求函数

$$f(z)=\frac{1}{z^2(z-1)^2}$$

在以 $z=1$ 为中心的圆环域内的 Laurent 展开式.

解: 函数 $f(z)$ 有两个奇点 $z=0$ 和 $z=1$. 这样我们分如下两个情形:

(a) 当 $0 < |z-1| < 1$ 时, 得到

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)^2}\frac{d}{dz}\left(-\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{(z-1)^2}\frac{d}{dz}\left[\frac{-1}{1+(z-1)}\right]$$

$$= \frac{1}{(z-1)^2}\frac{d}{dz}\left[\sum_{n\geq 0}(-1)^{n+1}(z-1)^n\right] = \frac{1}{(z-1)^2}\sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}n(z-1)^{n-1}$$

$$= \sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}n(z-1)^3 = \frac{1}{(z-1)^2} - \frac{2}{z-1} + \sum_{n\geq 3}(-1)^{n+1}n(z-1)^{n-3}.$$

(b) 当 $1 < |z-1| < +\infty$ 时, 得到

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)^2}\frac{d}{dz}\left(-\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{(z-1)^2}\frac{d}{dz}\left[\frac{-1}{z-1}\frac{1}{1+\dfrac{1}{z-1}}\right]$$

$$= \frac{-1}{(z-1)^2}\frac{d}{dz}\left[\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{(z-1)^{n+1}}\right] = \frac{-1}{(z-1)^2}\sum_{n\geq 0}\frac{(n+1)(-1)^{n+1}}{(z-1)^{n+2}}. \quad \square$$

(6) 求函数

$$f(z) = \frac{z\sin z}{(1-e^z)^2}$$

在圆环域 $0 < |z| < 2\pi$ 内的 Laurent 级数的主要部分.

解: 因为函数 $f(z)$ 的奇点是方程 $1-e^z = 0$ 的根, 即所有奇点是 $z_k = 2k\pi\mathbf{i}$, $k \in \mathbf{Z}$. 这里面离 $z=0$ 最近的奇点是 $\pm 2\pi\mathbf{i}$, 因此 $f(z)$ 在圆环域 $0 < |z| < 2\pi$ 内可以展开为 Laurent 级数. 利用长除法得到

$$f(z) = \frac{z\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n+1}}{\left(1-\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{z^n}{n!}\right)^3} = \frac{z^2\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n}}{-z^3\left(\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{z^n}{(n+1)!}\right)^3}$$

$$= \frac{-1}{z}\frac{1-\dfrac{z^2}{6}+\cdots}{1+\dfrac{3}{2}z+\dfrac{13}{12}z^2+\cdots} = \frac{-1}{z}(1-\frac{3}{2}z+z^2+\cdots) = -\frac{1}{z}+\frac{3}{2}-z+\cdots.$$

所以函数 $f(z)$ 的主要部分是 $-1/z$. $\square$

(7) 函数 $\tan(1/z)$ 能否在圆环域 $0 < |z| < R$, $R \in (0,+\infty)$, 内展开成 Laurent 级数?

解: 不能! 原因是, 这个函数的奇点为

$$z = 0, \quad z_n = \frac{1}{\left(n+\dfrac{1}{2}\right)\pi} \ (n \in \mathbf{Z}).$$

因为 $z_n \to 0$, 所以任何圆环域 $0 < |z| < R$ 内都含有奇点. 故在 $z=0$ 的任何圆环域内 $f(z) = \tan(1/z)$ 都不全纯, 因此不能展开成 Laurent 级数. $\square$

(8) 证明在

$$f(z)=\cos\left(z+\frac{1}{z}\right)$$

的 Laurent 展开式

$$f(z)=\sum_{n\in\mathbf{Z}}c_nz^n$$

中的系数 c_n 满足

$$c_n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(2\cos\theta)\cos(n\theta)\,d\theta,\quad n\in\mathbf{Z}.$$

证: 在 (5.3.4) 中取 C 为圆周 $|z|=1$ 得到

$$c_n=\frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\oint_{|\zeta|=1}\frac{1}{\zeta^{n+1}}\cos\left(\zeta+\frac{1}{\zeta}\right)d\zeta,\quad n\in\mathbf{Z}.$$

令 $\zeta=e^{\mathbf{i}\theta}$ 代入得到

$$\begin{aligned}
c_n &= \frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\int_0^{2\pi}\frac{\cos(e^{\mathbf{i}\theta}+e^{-\mathbf{i}\theta})}{e^{\mathbf{i}(n+1)\theta}}\mathbf{i}e^{\mathbf{i}\theta}d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\cos(2\cos\theta)}{e^{\mathbf{i}n\theta}}d\theta\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(2\cos\theta)\left[\cos(n\theta)-\mathbf{i}\ \sin(n\theta)\right]d\theta\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(2\cos\theta)\cos(n\theta)\,d\theta.\ \square
\end{aligned}$$

(9) 下列结论是否正确? 用长除法得

$$\frac{z}{1-z}=z+z^2+z^3+z^4+\cdots$$

和

$$\frac{z}{z-1}=1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\cdots.$$

因为

$$\frac{z}{1-z}+\frac{z}{z-1}=0,$$

所以

$$0=\cdots+\frac{1}{z^3}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z}+1+z+z^2+z^3+\cdots.$$

解: 不对! 因为第一个展开的收敛域是 $|z|<1$, 而第二个展开的收敛域为 $|z|>1$, 但是这两个区域不相交! $\square$

(10) 求函数 $f(z)=e^{1/(1-z)}$ 在圆形区域 $1<|z|<+\infty$ 内的 Laurent 展开式.

解: 因为 $|z|>1$, 所以

$$\frac{1}{1-z}=-\frac{1}{z}\frac{1}{1-\dfrac{1}{z}}=-\frac{1}{z}\sum_{n\geq 0}\left(\frac{1}{z}\right)^n=-\sum_{n\geq 0}\frac{1}{z^{n+1}}.$$

故 $f(z)$ 可展为

$$f(z)=\sum_{n\geq 0}c_{-n}z^{-n},\quad |z|>1.$$

直接计算可得

$$(1-z)^2 f'(z) = f(z)$$

从而得到

$$\sum_{n\ge 0} c_{-n}z^{-n} = \sum_{n\ge 2} -(n-1)c_{-(n-1)}z^{-n} - 2\sum_{n\ge 1}(-n)c_{-n}z^{-n} + \sum_{n\ge 0} -(n+1)c_{-(n+1)}z^{-n}.$$

因此

$$c_0 = \lim_{|z|\to\infty} f(z) = 1, \quad c_{-1} = -c_0 = -1, \quad c_{-2} = \frac{c_{-1}}{2} = -\frac{1}{2}$$

和

$$c_{-(n+1)} = \frac{2n-1}{n+1}c_{-n} - \frac{n-1}{n+1}c_{-(n-1)}, \quad n \ge 2.$$

特别地, 我们有 $c_{-3} = -1/6$, $c_{-4} = 1/24$ 和 $c_{-5} = 19/120$. 故

$$e^{\frac{1}{1-z}} = 1 - \frac{1}{z} - \frac{1}{2z^2} - \frac{1}{6z^3} + \frac{1}{24z^4} + \frac{19}{120z^5} + \cdots. \quad \square$$

在 (5.3.4) 中令 $n = -1$ 得到

$$\oint_C f(\zeta)\,d\zeta = 2\pi \mathbf{i} c_{-1}, \tag{5.3.5}$$

这里 C 为圆环域 $R_1 < |z-a| < R_2$ 内的任何一条正向简单闭曲线. 这就推广了 Cauchy-Goursat 定理: 如果 $f(z)$ 在 $|z-a| < R_2$ 内全纯, 则 Laurent 级数展开中 $c_n = 0$, $n \le -1$; 因此从 (5.3.5) 推出 Cauchy-Goursat 定理.

例 5.6

(1) 求积分

$$I := \oint_{|z|=3} \frac{dz}{z(z+1)(z+4)}.$$

解: 函数

$$f(z) = \frac{1}{z(z+1)(z+4)}$$

有三个奇点 $z=0$, $z=-1$ 和 $z=-4$, 因此它在圆环域 $1 < |z| < 4$ 内处处全纯. 在这个圆环域内展开 Laurent 级数得到

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{4z} - \frac{1}{3(z+1)} + \frac{1}{12(z+4)} = \frac{1}{4z} - \frac{1}{3z\left(1+\frac{1}{z}\right)} + \frac{1}{48\left(1+\frac{z}{4}\right)} \\ &= \frac{1}{4z} - \frac{1}{3z}\sum_{n\ge 0}\frac{(-1)^n}{z^n} + \frac{1}{48}\sum_{n\ge 0}\frac{(-1)^n}{4^n}z^n. \end{aligned}$$

故得到

$$c_{-1} = \frac{1}{4} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{12}$$

和

$$\oint_{|z|=3} \frac{1}{z(z+1)(z+4)}dz = 2\pi \mathbf{i} c_{-1} = -\frac{\pi \mathbf{i}}{6}. \quad \square$$

(2) 求积分

$$I := \oint_{|z|=2} \frac{ze^{1/z}}{1-z} dz.$$

解: 函数

$$f(z) = \frac{z}{1-z} e^{1/z}$$

有两个奇点 $z=0$ 和 $z=1$, 因此在圆环域 $1<|z|<+\infty$ 内处处全纯. 在这个圆环域内展开 Laurent 级数得到

$$f(z) = -e^{1/z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = -\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!z^n}\cdot\sum_{n\geq 0}\frac{1}{z^n} = -\left(1+\frac{2}{z}+\frac{5}{2z^2}+\cdots\right).$$

故得到 $c_{-1}=-2$ 和

$$\oint_{|z|=2}\frac{ze^{1/z}}{1-z}dz = 2\pi \mathbf{i} c_{-1} = -4\pi\mathbf{i}. \quad \square$$

利用 Laurent 级数, 我们还可以得到一些三角恒等式.

例 5.7

如果 k 为满足条件 $k^2<1$ 的实数, 证明

$$\sum_{n\geq 0} k^n \sin[(n+1)\theta] = \frac{\sin\theta}{1-2k\cos\theta+k^2}, \quad \sum_{n\geq 0} k^n\cos[(n+1)\theta] = \frac{\cos\theta - k}{1-2k\cos\theta+k^2}. \tag{5.3.6}$$

证: 在圆环域 $k<|z|<+\infty$ 内把函数 $1/(z-k)$ 展开为 Laurent 级数

$$\frac{1}{z-k} = \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{k}{z}} = \sum_{n\geq 0}\frac{k^n}{z^{n+1}}.$$

由于圆环域包含圆周 $|z|=1$, 因此把 $z=e^{\mathbf{i}\theta}$ 代入得到

$$\frac{1}{z-k} = \frac{1}{e^{\mathbf{i}\theta}-k} = \frac{\cos\theta - k - \mathbf{i}\sin\theta}{1-2k\cos\theta+k^2},$$

$$\sum_{n\geq 0}\frac{k^n}{z^{n+1}} = \sum_{n\geq 0}\frac{k^n}{e^{\mathbf{i}(n+1)\theta}} = \sum_{n\geq 0} k^n\left[\cos(n+1)\theta - \mathbf{i}\sin(n+1)\theta\right].$$

分离实部与虚部就得到了 (5.3.6). □

第 六 章　奇点和留数

第 七 章　共形映射

第 八 章　复变函数的应用

第 九 章　解析延拓

第 十 章 调和函数

第十一章 整函数

第 十二 章　椭圆函数

第十三章 Riemann 面