非线性方程 (组) 在 MATLAB 中的求解方法

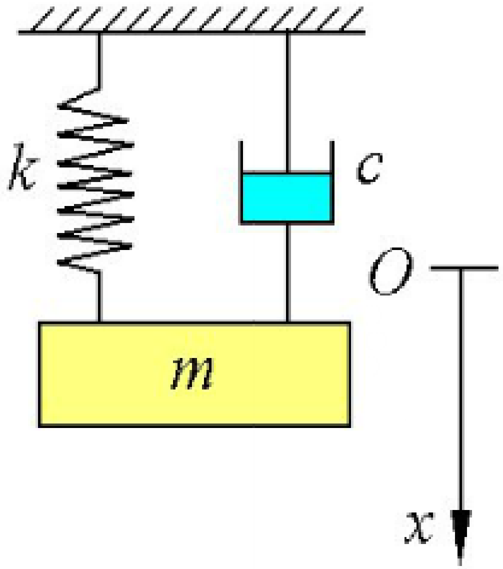
教学内容

- 一元方程的图解法
- 二元方程组的图解法
- 图解法的局限性
- 多项式型方程的求解 (solve)
- solve 函数的局限性
- 非线性方程 (组) 数值解的一般求法 (fsolve)
- fsolve 函数总结

一元方程的图解法

一个有阻尼的振动系统，振动方程如下，求出 ***x (t) = 0.1*** 对应的时刻 ***t***

$$x(t) = 0.8 \times e^{-6t} \times \sin(30t)$$



根据振动方程，有

$$x(t) = 0.8 \times e^{-6t} \times \sin(30t) = 0.1$$

移项，可得

$$0.8 \times e^{-6t} \times \sin(30t) - 0.1 = 0$$

设 ***f(t)*** 为

$$f(t) = 0.8 \times e^{-6t} \times \sin(30t) - 0.1$$

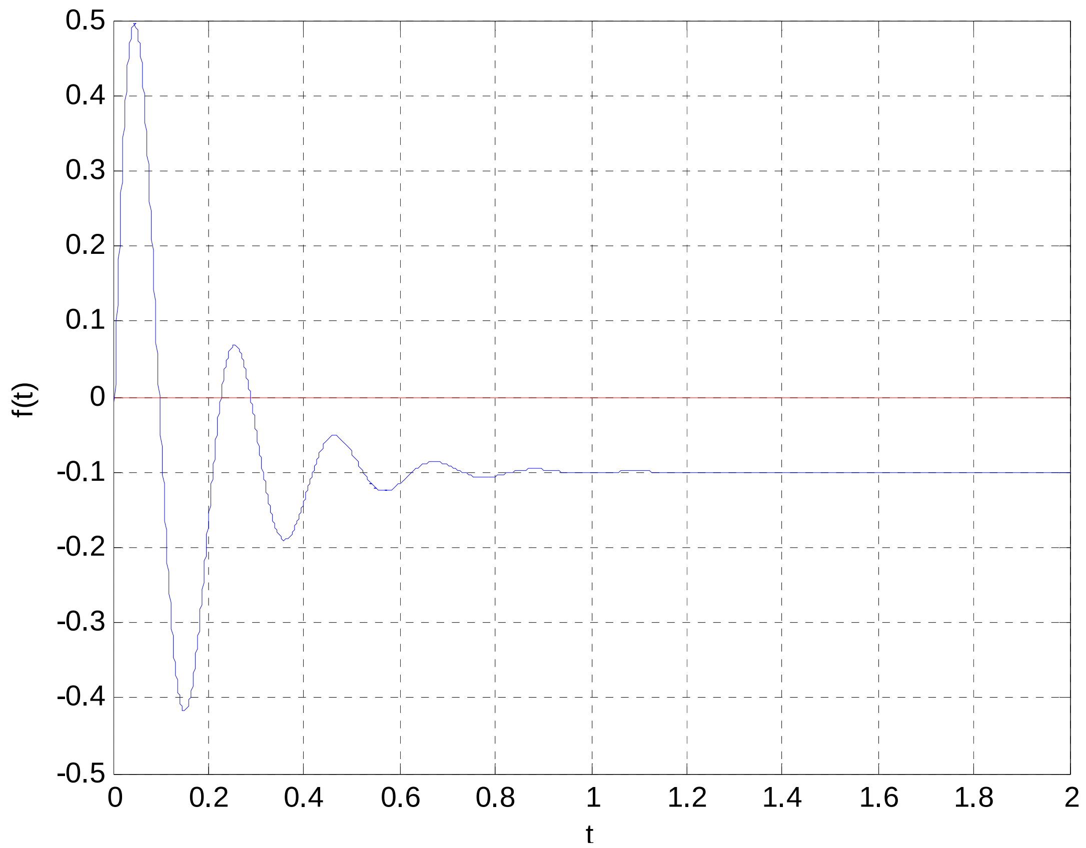
以上问题，转换为求非线性方程 ***f(t) =0*** 的根

一元方程的图解法

图解法，即，绘制方程的曲线，然后找出对应的 ***t*** 值

$$f\left(t\right)=0.8\times e^{-6t}\times\sin\left(30t\right)-0.1=0$$

在 **MATLAB** 中绘制 ***f(t)*** 的曲线，以及 ***y = 0*** *的直线*，相交点即 ***f(t) = 0*** 的根



在 **[0, 2]** 区间内，方程有四个根，约为

0.004

0.097

0.226

0.288

二元方程组的图解法

用图解法，求二元方程组的解，其中 ***x*** 和 ***y*** 的范围均为 **[-5, 5]**

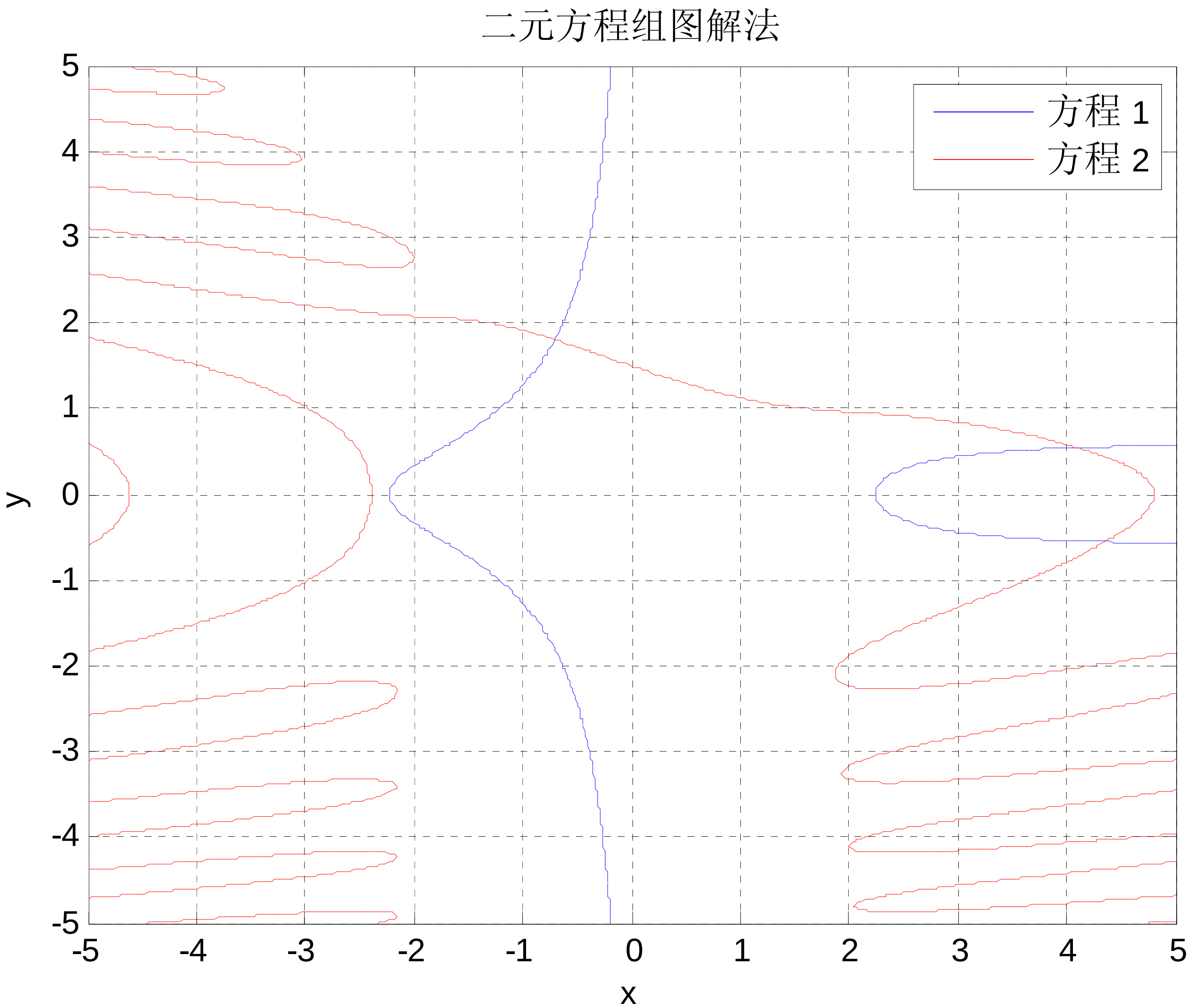
$$\begin{cases} x^2 e^{-xy^2} = 5 \\ x^3 \cos\left(x + y^2\right) + y^2 e^{x+y} = 10 \end{cases}$$

将方程组移项，改写成 ***f(x, y) = 0*** 的形式

$$\begin{cases} x^2 e^{-xy^2} - 5 = 0 \\ x^3 \cos\left(x + y^2\right) + y^2 e^{x+y} - 10 = 0 \end{cases}$$

分别绘制两个方程的曲线，相交点即为方程组的解

二元方程组的图解法



在指定的区间内，方程组有三组根，约为 **[-0.71, 1.8], [4.1, 0.54], [4.36, -0.555]**

图解法的局限性

- 仅适用于一元和二元方程的求解
- 目测选点，不够精确
- 无法求解方程的复数根

多项式型方程的求解

求解二次方程的解

$$x^2 + 4 = 0$$

求解二次方程 **(系数为参数)** 的解

$$ax^2 + bx + c = 0$$

solve 函数

- ✓ 一次求出多项式方程的所有根
- ✓ 结果为解析解

```
>> syms a b c x
>> eq1=x^2+4;
>> solve(eq1)

ans =

  2*i
 -2*i

>> eq2=a*x^2+b*x+c;
>> solve(eq2,'x')

ans =

 -(b + (b^2 - 4*a*c)^(1/2))/(2*a)
 -(b - (b^2 - 4*a*c)^(1/2))/(2*a)
```

多项式型方程的求解

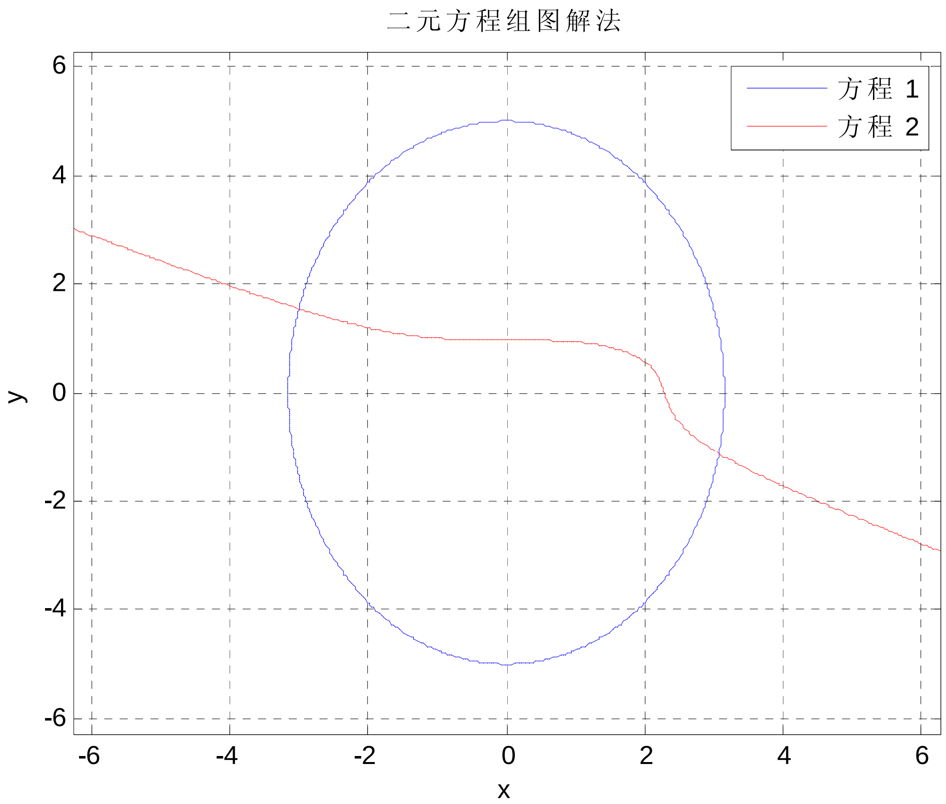
求解多项式方程组的解

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{5} = 5 \\ x^3 + 9y^3 + 4y = 12 \end{cases}$$

将方程组**移项**，改写成 ***f(x, y) = 0*** 的形式

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{5} - 5 = 0 \\ x^3 + 9y^3 + 4y - 12 = 0 \end{cases}$$

- ✓ 使用 **solve** 函数求解方程组
- ✓ 将求解结果带回方程组验算



图解法只能显示实数根

多项式型方程的求解

求解多项式方程组 (含变量倒数) 的解

$$\begin{cases} x^2+\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{y^2}=7 \\ x^3+\dfrac{1}{x^2}+y^3=2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x^2+\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{y^2}-7=0 \\ x^3+\dfrac{1}{x^2}+y^3-2=0 \end{cases}$$

在以上的方程组里，多增加一项，求解并查看错误信息

$$\begin{cases} x^2+\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{y^2}-7=0 \\ x^3+\dfrac{1}{x^2}+y^3-\dfrac{3}{y^2}-2=0 \end{cases}$$

多项式型方程的求解

求解多项式方程组 **(含参数系数)** 的解

$$
\begin{cases}
ax^2 + bx + 7y - cz = 0 \\
2x + dy - 3z - 5 = 0 \\
y - z - 6 = 0
\end{cases}
$$

在以上的方程组里，修改一项，求解并查看警告信息

$$
\begin{cases}
ax^2 + bx + 7y - cz = 0 \\
2x + dy - 3z - 5 = 0 \\
y^2 - z - 6 = 0
\end{cases}
$$

solve 函数的局限性

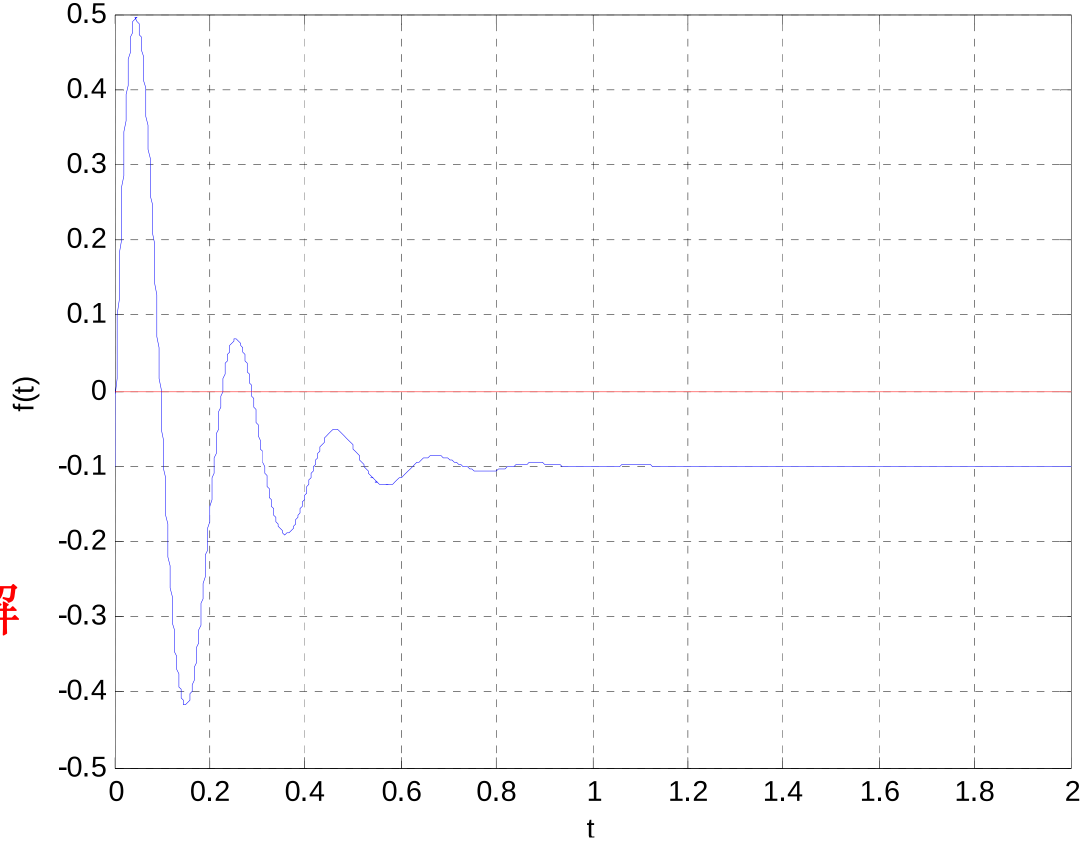
求解一元非线性方程 (超越方程)

$$f(t)=0.8\times e^{-6t}\times\sin(30t)-0.1$$

```
>> syms t
>> eq1=0.8*exp(-6*t)*sin(30*t)-0.1;
>> solve(eq1)

ans =

0.0042870417963290871380573439799886
```



对于非多项式方程，只能求出一个解

solve 函数的局限性

求解一元非线性方程 (超越方程)

$$f(x) = \sin(x) + \cos\left(x^x\right) - 10$$

```
>> syms x
>> eq2=sin(x)+cos(x^x)-10;
>> s2=solve(eq2)

s2 =

98.395408219472484524557308589775

>> err2=subs(eq2,x,s2)

err2 =

-11.086710325428119092194367518788
```

对于稍许复杂的方程，求解结果出现很大误差

solve 函数的局限性

- ✓ 求解复杂的多项式方程时，可能会产生错误的求解结果
- ✓ 求解复杂的多项式方程时，可能无法求解，且非常耗时
- ✓ 求解超越方程时，只能返回一个解
- ✓ 求解超越方程时，可能返回错误解
- ✓ ……

非线性方程 (组) 数值解的一般求法

fsolve 函数的调用格式 (仅列出两种)

```
x = fsolve(fun,x0)
[x,fval,exitflag] = fsolve(fun,x0,options)
```

fun: 函数，用于定义方程 (组)

x0: 计算初值

x: 求解结果 (方程的根)

fval: 将求解结果 x 带入方程 (组) fun，对应的值，即 fun(x)

exitflag: 返回方程组求解结果的状态 (详见 help 文档)

options: 方程的求解设置

非线性方程 (组) 数值解的一般求法

使用 **fsolve** 函数，求解以下超越方程的根

$$f(t) = 0.8 \times e^{-6t} \times \sin(30t) - 0.1 = 0$$

为了便于代码书写和理解，将方程的变量统一用 ***x*** 表示，输出值用 ***F*** 表示

$$F = 0.8 \times e^{-6x} \times \sin(30x) - 0.1 = 0$$

在函数 **myfun1** 中定义方程 **F**

```
function F=myfun1(x)
F=0.8*exp(-6*x)*sin(30*x)-0.1;
end
```

初值 **x0** 分别设定为**0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5** 等，求解方程 **F** 的根，并观察结果

非线性方程 (组) 数值解的一般求法

- 使用 fsolve 函数的第二种调用格式，求解方程 F 的根

```
[x,fval,exitflag] = fsolve(fun,x0,options)
```

- 使用 optimset 函数，设置 options

```
options = optimset('Display','iter','TolFun',1e-8);
```

  - ✓ 显示每次迭代的结果
  - ✓ 求解精度设置为 10^{-8}

- 运行求解程序，并观察求解结果
- 修改求解精度，再次运行求解程序，并观察求解结果

非线性方程 (组) 数值解的一般求法

使用 **fsolve** 函数，求解以下超越方程组的根

$$\begin{cases} x^2 e^{-xy^2} = 5 \\ x^3 \cos\left(x + y^2\right) + y^2 e^{x+y} = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 e^{-xy^2} - 5 = 0 \\ x^3 \cos\left(x + y^2\right) + y^2 e^{x+y} - 10 = 0 \end{cases}$$

将方程的变量统一用 ***x1, x2*** 表示，输出值用 ***F*** 表示

$$\begin{cases} F_1 = x_1^2 e^{-x_1 x_2^2} - 5 = 0 \\ F_2 = x_1^3 \cos\left(x_1 + x_2^2\right) + x_2^2 e^{x_1 + x_2} - 10 = 0 \end{cases}$$

在函数 **myfun2** 中定义方程 **F**，给定不同的初值，求解方程组的根

```
function F=myfun2(x)
F1=x(1)^2*exp(-x(1)*x(2)^2)-5;
F2=x(1)^3*cos(x(1)+x(2)^2)+x(2)^2*exp(x(1)+x(2))-10;
F=[F1;F2];
end
```

非线性方程 (组) 数值解的一般求法

使用 **fsolve** 函数，求解以下多项式方程组的根

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{5} = 5 \\ x^3 + 9y^3 + 4y = 12 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{5} - 5 = 0 \\ x^3 + 9y^3 + 4y - 12 = 0 \end{cases}$$

将方程的变量统一用 ***x1, x2*** 表示，输出值用 ***F*** 表示

$$\begin{cases} F_1 = \dfrac{x_1^2}{2} + \dfrac{x_2^2}{5} - 5 = 0 \\ F_2 = x_1^3 + 9x_2^3 + 4x_2 - 12 = 0 \end{cases}$$

在函数 **myfun3** 中定义方程 **F**，给定不同的初值 **(**复数初值**)**，求解方程组的根

```
function F=myfun3(x)
F1=x(1)^2/2+x(2)^2/5-5;
F2=x(1)^3+9*x(2)^3+4*x(2)-12;
F=[F1;F2];
end
```

非线性方程 (组) 数值解的一般求法

使用 **fsolve** 函数，求解以下超越方程组的根

$$\begin{cases} x_1 x_2 - 5x_3 + e^{x_3} = 6 \\ x_1 - 3e^{x_2 x_3} = -3 \\ 8x_2 - x_3^2 - 6e^{x_1/x_2} = 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_1 = x_1 x_2 - 5x_3 + e^{x_3} - 6 = 0 \\ F_2 = x_1 - 3e^{x_2 x_3} + 3 = 0 \\ F_3 = 8x_2 - x_3^2 - 6e^{x_1/x_2} - 10 = 0 \end{cases}$$

在函数 **myfun4** 中定义方程 **F**，给定不同的初值，求解方程组的根

```
function F=myfun4(x)
F1=x(1)*x(2)-5*x(3)+exp(x(3))-6;
F2=x(1)-3*exp(x(2)*x(3))+3;
F3=8*x(2)-x(3)^2-6*exp(x(1)/x(2))-10;
F=[F1;F2;F3];
end
```

非线性方程 (组) 数值解的一般求法

使用 **fsolve** 函数，求解以下矩阵方程的根

$$X * X * X = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$F = X * X * X - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

在函数 **myfun5** 中定义方程 **F**，给定初值，求解方程组的根

```
function F=myfun5(x)
F=x*x*x-[1 2;3 4];
end
```

fsolve 函数总结

- fsolve 可以求解方程 (组) 的实数根和复数根
- fsolve 采用迭代的数值算法，速度快
- 给定不同的初值，可以求得不同的根 (局部寻根)
- 初值给的不好，可能导致求解失败
- 关于初值如何给定的问题
  - ✓ 一元 / 二元方程 (组)，通过图解法，可以得到根的个数，并粗略地估计出根的值，用做 fsolve 的初值
  - ✓ 根据方程组中变量的实际意义，合适地给出初值。例如，时间 / 长度 / 质量等物理量，应该大于 0
  - ✓ 通过更多的练习和经验积累，自然会见多识广

教学视频获取

获取本课程的教学视频，和更多学习资源，请联系

QQ：993878382 (上下求索)

微信号：sxqiuso (上下求索)

扫一扫下面的二维码，可直接加我微信