计算机领域本科教育教学改革试点
工作计划（“101计划”）研究成果

数据结构

授课教师：屈卫兰

湖南大学 信息科学与工程学院

第 9 章

不相交集

提纲

9.1 问题引入

9.2 等价关系、等价类和不相交集

9.3 不相交集的存储实现

9.4 不相交集的基本运算实现

9.5 不相交集的应用

9.6 拓展延伸

9.7 应用场景

9.1 问题引入：Kruskal算法的高效实现

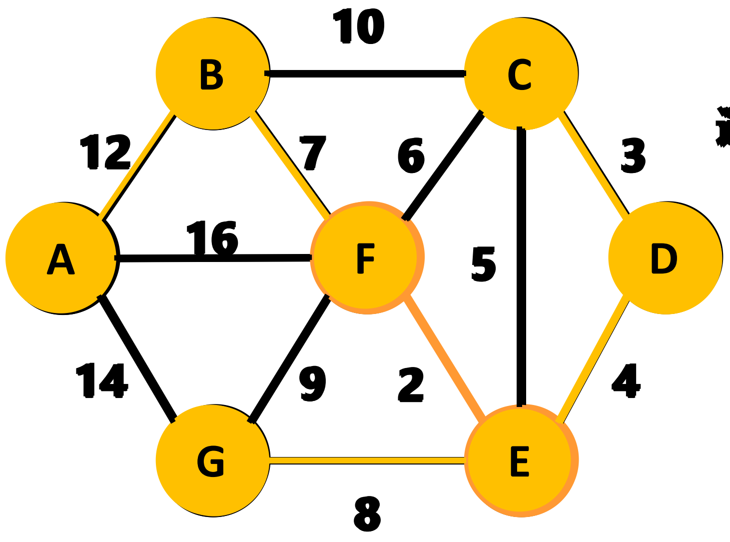
求最小生成树的Kruskal算法：

- 按权重递增顺序考虑每条边
- 并把连接不同连通分量的边$e=(u,v)$加入生成树。
- 这需要**动态地维护图的连通性**
- 需要支持下列三种操作：

  ① （初始化）初始化一个无向图$G=(V,E)$，其中$E=\emptyset$（空集），即每个顶点分属于不同的连通分量。

  ② （加边）在图中加入一条边(u,v)：$E\leftarrow E\cup\{(u,v)\}$。

  ③ （连通性查询）查询顶点u和顶点v是否属于同一连通分量，即查询两顶点之间是否有路径相连。



9.1 问题引入：Kruskal算法的高效实现

- 直接做法：利用无向图实现

✓加边操作只需$O(1)$时间；

✓连通性查询可以通过图的遍历实现，在$n = |V|$个顶点的图中，每次查询最坏需要$O(n)$。

- 在Kruskal算法中，对每条边均需要进行一次连通性查询，因此m=|E|次查询的总时间复杂度为$O(nm)$。

9.1 问题引入：Kruskal算法的高效实现

- 注意：只需要查询顶点之间**是否连通**，不关心它们具体**通过哪条路径连通**
- 此外，只需要支持**加边操作**，而不需要支持**删边操作**。
- 这种情况下，与其完整地维护无向图的结构，不如直接维护连通分量构成的**集合**
- 每个连通分量用其中顶点的集合表示。

1. 初始时，每个顶点都是独立的连通分量，此时有� 个仅包含单一顶点的集合：{� _1},{� _2},…,{� _� }
2. 每加入一条边(� ,�)，就将� 所属的集合和� 所属的集合合并
3. 对于连通性查询(� ，�)，只需查询� 和� 是否在同一集合中

连通性查询问题变成了维护若干不相交的集合，并动态地合并、查找的问题。

9.1 问题引入：Kruskal算法的高效实现

- 利用**不相交集**的数据结构，这些集合操作仅需每操作$O(\alpha(n))$的时间复杂度，其中$\alpha(\cdot)$是一个增长极其缓慢的函数，一般可以认为$\alpha(n)$。该时间复杂度仅略高于$O(1)$，而**大大低于图的遍历所需的$O(n)$**。

9.2 等价关系、等价类和不相交集

- 不相交集与数学中**等价关系**、**等价类**的概念密切相关
- 元素之间的等价关系自然地定义了若干不相交集的集合
- 因此，不相交集常常用于处理等价性查询的问题
- 例如，两个顶点在同一连通分量中就可以看做一种等价性

9.2 等价关系、等价类和不相交集

等价性查询的一般定义：

定义 9-1. （**等价关系**）称在集合X上的二元关系~为一个等价关系，若其满足：

- （**自反性**）$\forall a \in X$，有$a \sim a$；
- （**对称性**）$\forall a, b \in X$，若$a \sim b$，则$b \sim a$；
- （**传递性**）$\forall a, b, c \in X$，若$a \sim b$，$b \sim c$，则$a \sim c$。

9.2 等价关系、等价类和不相交集

- 一个最常见的等价关系是定义在整数集ℤ上的相等关系=。不难验证，该关系满足定义9-1中的三条性质。
- 等价关系将“相等”的概念推广到了一般的集合。

例 9.1. 不同问题中的等价关系：

✓ 对于平面上全部三角形构成的集合R^6，三角形之间的全等关系≌即相似关系~均为等价关系

✓ 对于无向图G=(V,E)中顶点构成的结合V,定义代表~顶点间的连通性，即$\forall u, v \in X$，u~v当且仅当u、v连通，则顶点间的连通性是一个等价关系。

✓ 对于所有生物构成的集合，两种生物是否属于同一科构成一个等价关系。

9.2 等价关系、等价类和不相交集

对集合中的任意元素，称所有与其等价的元素为一个等价类：

- **定义 9-2.** （**等价类**）给定集合X和等价关系~，定义某一元素$a \in X$的等价类为$\{x \in X，x \sim a\}$。

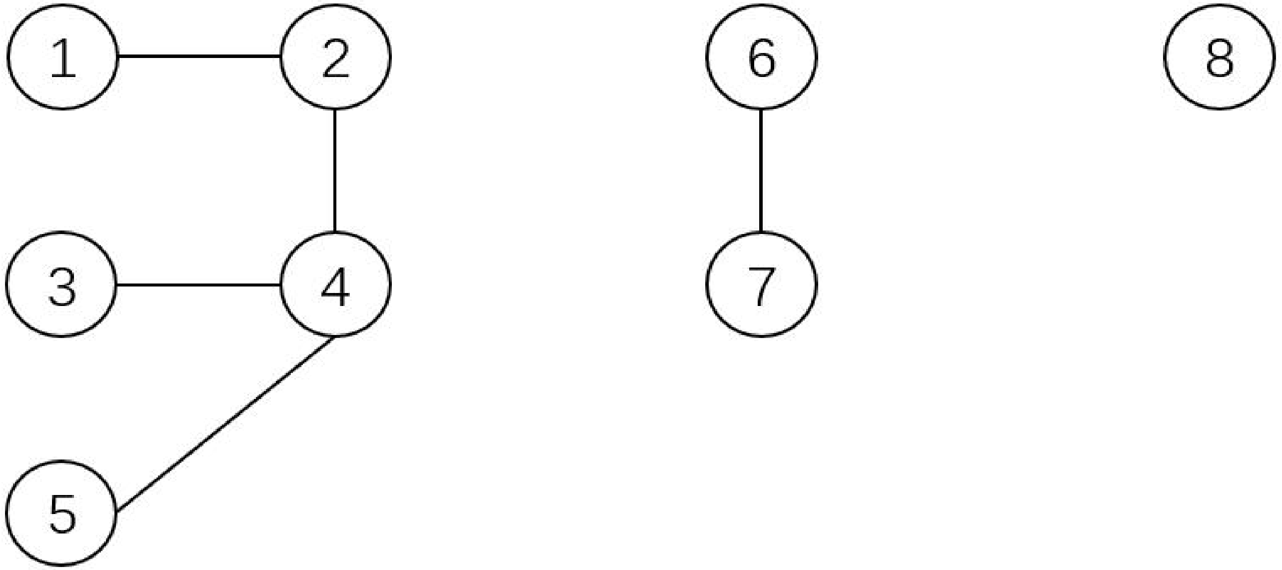
等价关系把集合划分成若干个不相交的等价类，每个等价类中的元素互相等价。称所有等价类构成的集合为一个商集。

- **定义 9-3.** （**商集**）集合X关于等价关系~的商集记作X/~，定义为:
  - $X/\sim \; := \{\{x \in X，x \sim a\}, a \in X\}.$

商集是一系列集合，这些集合彼此不相交，并且其并集是全集X。这与不相交集的概念恰好对应。

9.2 等价关系、等价类和不相交集

- **例 9.2**. 在下图所示的无向图$G = (V, E)$中，考虑顶点间的连通关系~（见例9.1）。
- 该连通关系将点集V划分为了三个等价类，分别为{1,2,3,4,5}、{6,7}和{8}。这些等价类彼此不相交，且它们的并集为全集V。本例中，每个等价类是一个无向图中的连通分量。



无向图$\boldsymbol{G} = (\boldsymbol{V}, \boldsymbol{E})$中连通性等价关系定义的等价类

9.2 等价关系、等价类和不相交集

- 不相交集可以用于等价性的动态查询。
- 等价性的查询在计算机科学中有广泛应用。例如，在编译器的设计中，用于判断符号地址的等价性。

不相交集维护某集合X关于等价关系~的商集$X/\sim$

等价关系的增加对应Union操作，即将两个等价类合并

等价性的查询对应Find操作。若要查询两元素x、y的等价性，只需判断是否有$\mathrm{Find}(x) = \mathrm{Find}(y)$

9.3 不相交集的存储实现

不相交集数据结构定义：

给定n个元素组成的集合X。不失一般性，令$X = \{1,2,\dots,n\}$。

不相交集的数据结构动态维护了集合X的一组划分，即若干个不相交的集合$X_1,\dots,X_m$，满足:

- $\forall i \neq j, X_i \cap X_j = \emptyset$;
- $\cup_{i=1}^{m} Xi = X$。

例：考虑集合X={1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}。

合法的划分：{{1, 2, 3, 4, 5}, {6, 7}, {8}}或{{1} {2}, {3}, {4}, {5}, {6}, {7}, {8}};

以下不是集合X的划分: {{1, 2, 3, 4, 5}, {6, 7}}和{{1, 2, 3}, {3, 4, 5}, {5, 6, 7, 8}} 。

9.3 不相交集的存储实现

不相交集的数据结构需要动态处理集合的合并和查询操作，其ADT定义如下：

代码 9-1 不相交集的抽象数据类型定义

ADT DisjointSet {

数据对象：

n个元素构成的全集X。

数据关系：

$\{< i,j > | i,j \in X\}$表示i、j属于同一个集合。

基本操作:

InitSet(*set*, *n*)：

建立n个不相交的集合$X_1, \ldots, X_n$，其中每个集合初始只有一个元素：$X_i = \{i\}, \forall i = 1, \ldots, n$。

DestorySet(*set*)：

释放不相交集*set*所占用的所有空间。

Find(*set*, *x*)：查询元素*x*所在的集合。

Union(set, *x*, *y*)：合并元素*x*和元素*y*所在的集合。

}

9.3 不相交集的存储实现

- 思考：Find操作查询元素所在的集合，输入是一个元素，输出是一个集合……
  - *如何表示一个集合?*
- 由于集合是动态变化的，难以实时给集合从1开始按顺序编号
- 技巧：规定每个集合中X需要有一个“代表”元素$a \in X$，该元素的编号即为集合编号，即
  - $\mathbf{Find}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a}, \forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}$
- 例：对于划分{{1, 2, 3, 4, 5}, {6, 7}, {8}}，可规定集合{1, 2, 3, 4, 5}代表元素为1，则Find(2)=Find(3)=Find(4)=Find(5)=1。

9.4 不相交集的基本运算实现

- 不相交集可利用森林的数据结构实现：
  - 每个元素*x*只需维护其父亲结点*x.parent*。
  - 特别地，规定**根结点的父亲结点是其本身**，即*x.parent=x*。
  - 规定森林中的每棵树代表一个不相交集的集合，且其“**代表**”元素是其**根结点**。
  - InitSet操作只需定义n棵仅含根结点的树，Find操作只需找到要查询的元素*x*对应的根结点。而Union操作只需将*x*和*y*元素各自对应的根结点合并。

9.4 不相交集的基本运算实现

算法9-1：初始化不相交集InitSet(*set*, *n*)

输入：元素的数量*n*，不相交集*set*={1, 2, ..., *n*}。
输出：初始化后的集合*set*。

1. **for** 每个元素 $x \in set$ **do**
2. | $x.parent \leftarrow x$
3. **end**

算法9-2：查找元素所在的集合Find(*set*, *x*)

输入：不相交集*set*中待查找的元素*x*。
输出：元素*x*所在树的根顶点。

1. **while** $x \neq x.parent$ **do**
2. | $x \leftarrow x.parent$
3. **end**
4. **return** *x*

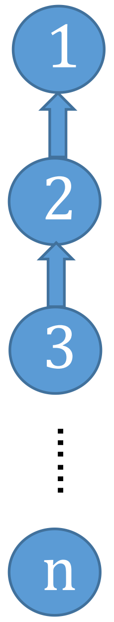
算法9-3：合并两个元素所在的集合Union(*set*, x, *y*)

输入：不相交集*set*中的两个元素*x*和*y*。
输出：合并*x*和*y*各自所在集合后的不相交集*set*。

1. $i \leftarrow \mathrm{Find}(set, x)$
2. $j \leftarrow \mathrm{Find}(set, y)$
3. $i.parent \leftarrow j$

9.4 不相交集的基本运算实现

- **问题**：在上述实现中，InitSet、Find、Union的操作时间复杂度均可达$O(n)$
- 考虑森林退化成一条链的情况：$i.parent = i - 1, \forall i = 2,3, \ldots, n$。
- 这种情况下，每次Find(set, n)均需要$O(n)$的时间复杂度，而每次Union($set, n - 1, n$)也需要$O(n)$的时间复杂度。



朴素的不相交集实现的最坏情况

9.4.1 按秩合并

- **按秩合并**策略为每个根结点x引入一个秩**x.rank**，并在合并时总是把**秩小**的树根**合并到秩大**的树根。
- **根结点**的**秩**反映了以该结点为**根**的**子树“大小”**，考虑利用树的高度作为树的秩：
- 对每个根节点x，定义其秩$x.rank$为***以x为根的树的高度减一***。
- 特别地，仅由单个结点构成的树的根结点秩为0。
- 在这种情况下，可保证树的“**平衡性**”：
  - *深度为l的子树至少有* $2^l - 1$ *个结点。*

9.4.1 按秩合并

- 采取按秩合并策略后，InitSet和Union操作的实现调整为算法9-4、算法9-5：

算法9-4：初始化采用按秩合并策略的不相交集InitSet(*set*, *n*)

输入：元素的数量*n*，不相交集*set*={1, 2, ..., *n*}。
输出：初始化后的集合*set*。

1. **for** 每个元素 $x \in set$ **do**
2. | $x.parent \leftarrow x$
3. | $x.rank \leftarrow 0$
4. **End**

算法9-5：利用按秩合并策略合并两个元素所在的集合Union(*set*, x, *y*)

输入：不相交集*set*中的两个元素*x*和*y*。
输出：合并*x*和*y*各自所在集合后的不相交集*set*。

1. $i \leftarrow \mathrm{Find}(set, x)$
2. $j \leftarrow \mathrm{Find}(set, y)$
3. **if** $i.rank > j.rank$ **then**
4. | $j.parent \leftarrow i$
5. **else if** $i.rank < j.rank$ **then**
6. | $i.parent \leftarrow j$
7. **else** $//i.rank = j.rank$
8. | $i.parent \leftarrow j$
9. | $j.rank \leftarrow j.rank + 1$
10. **end**

9.4.1 按秩合并

- **引理 9-1**. 在采用按秩合并策略的不相交集算法运行过程中，对于任意子树，若其根结点秩为$\mathbf{r}$，则该子树中至少有$\mathbf{2^r}$个结点。

证明.

利用归纳法，对子树根结点的秩r进行归纳:

1. $\mathrm{r}=0$时子树中仅含一个结点，命题成立。

2. 假设命题对所有不超过$\mathrm{r}-1$的秩成立。考虑根结点root的秩为$\mathrm{r}>0$的子树:

由于 $\mathbf{r} = \mathbf{root.rank} > \mathbf{0}$，根结点root的秩必然是与另一棵根为root' 的树进行Union操作时设置而来。

不失一般性，设该次Union前有:

$$\text{root}.\mathbf{rank} = \boldsymbol{root'}.\mathbf{rank} = \mathbf{r}-\mathbf{1}$$

否则该次Union前一定存在某次Union(root, root′ ′)，且

$$\text{root}.\mathbf{rank} = \mathbf{root''}.\mathbf{rank} = \mathbf{r} - \mathbf{1};$$

而Union操作不会令树中的结点数目减少。

3. 由归纳假设，可知此时以root和root'为根的子树中都各有至少$\mathbf{2^{r-1}}$个结点，故合并后的子树中至少有$\mathbf{2^r}$个结点。

4. 由归纳法，命题对所有$\mathrm{r}\in\mathbb{N}$成立。

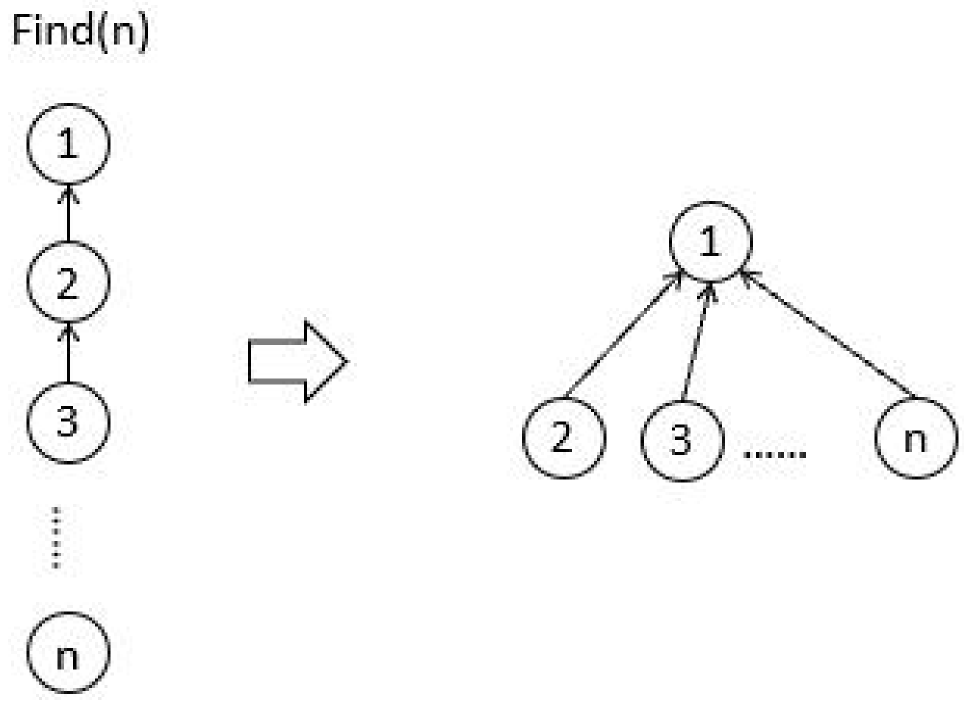
9.4.1 按秩合并

> **引理 9-1**. 在采用按秩合并策略的不相交集算法运行过程中，对于任意子树，若其根结点秩为r，则该子树中至少有2^r个结点。

- 每次Find、Union操作的时间复杂度取决于查找链的长度，即Find操作找到的根结点的秩加一。 最坏情况下，全部的n个结点构成一棵树。根据引理9-1，该树根的秩不超过$\log n$。因此，不相交集每次Find、Union操作的时间复杂度为$O(\log n)$。

9.4.2 路径压缩

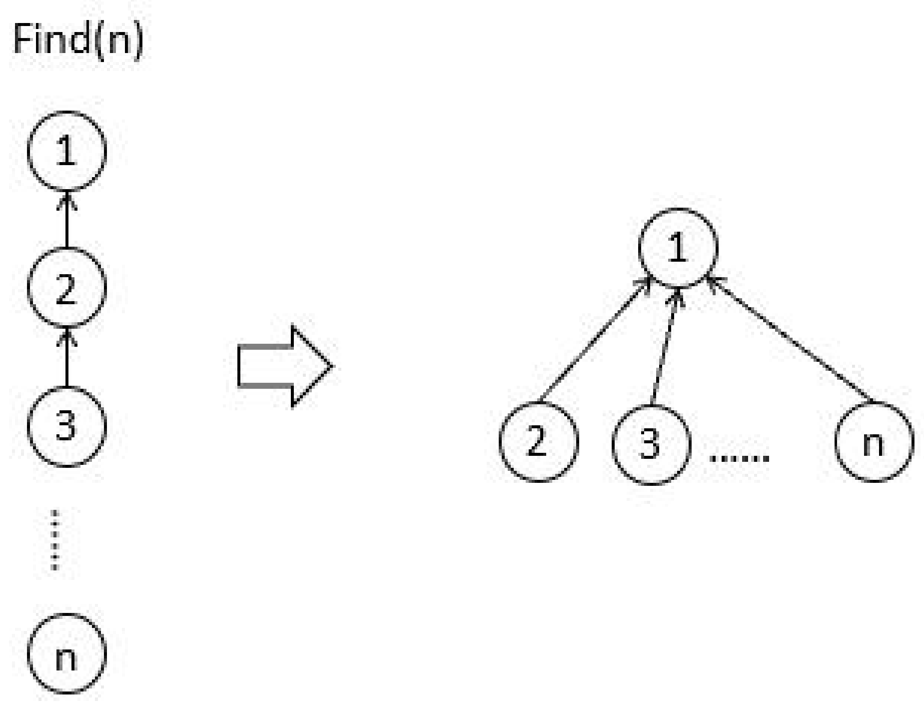
- 假设某次查找时，路径深度过大，导致该次查找的时间成本很高。我们只需调整森林的结构，将查找路径上的所有结点直接连接至根。
- 这样，下次查找这条路径上的结点时只需$O(1)$时间即可完成。这个技巧称为**路径压缩（Path Compression）**。



路径压缩

9.4.2 路径压缩

利用路径压缩技巧，不相交集的查找可以重写成为算法9-6。该算法首先递归地查找到根r，之后逐层返回，并将路径上所有结点的父结点均设为r。



路径压缩

算法9-6: 以路径压缩策略查找元素所在的集合Find(*set*, *x*)

输入： 不相交集*set*中待查找的元素*x*。
输出： 元素*x*所在树的根结点。

---

1. **if** $x \neq x.parent$ **then**
2. | $x.parent \leftarrow$ Find(set, $x.parent$)
3. **end**
4. **return** $x.parent$

9.4.2 路径压缩

- 下图演示了同时采用按秩合并和路径压缩策略时，8个元素构成的不相交集的合并过程。

初始时，所有结点均不相连，结点的秩均为0

Union(5, 1)时，两结点具有相同的秩，此时将5合并到1，并将结点的秩置为1

Union(6, 5)时，两棵秩为1的树合并成为一棵秩为2的树

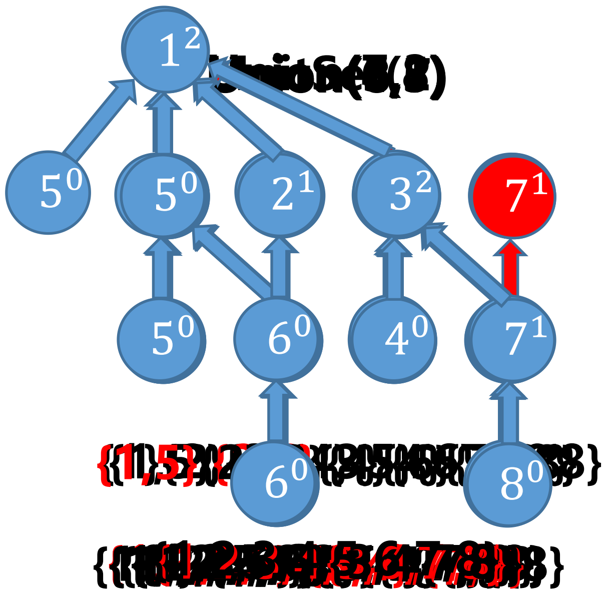
Union(3, 6)时，首先执行的Find(6)进行了路径压缩，将6直接连接至1

*此时2成为叶子结点，但其秩未发生改变。结点1的秩也仍是2

合并操作将两棵秩为2的树合并成一棵秩为3的树

树有2^3=8个结点，在可能出现的秩为3的树中是结点数目最少的

Union(3,6)



采用了按秩合并和路径压缩的不相交集运行示例

(*图中i^r表示编号为i，秩为r的顶点)

9.4.2 路径压缩

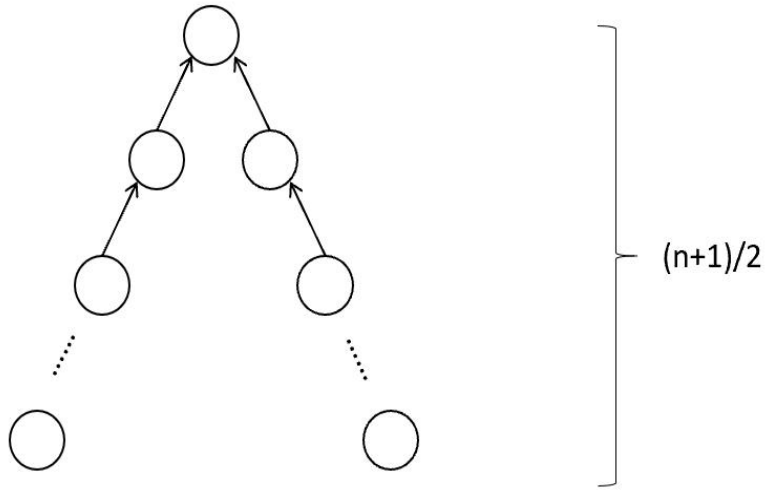
- 实现不相交集非常简单，但分析其时间复杂度却非常困难。虽然单个操作的时间复杂度较高，最坏可达$O(\log n)$。然而，由于路径压缩策略的存在，每次访问完一条路径后，下次访问该路径上结点的时间复杂度就会降低，因此算法整体的时间复杂度仍然较低。

9.4.2 路径压缩

- 使用均摊分析技巧，考虑连续的m个操作的总时间复杂度。
- 可证明,同时使用按秩合并和路径压缩后，n个元素组成的不相交集上进行m次Find/Union操作的时间复杂度为$\boldsymbol{O(m\alpha(n))}$，即每次操作的均摊时间复杂度为$\boldsymbol{O(\alpha(n))}$。其中：
  - $\boldsymbol{\alpha(n)}$是增长非常缓慢的函数，对$\boldsymbol{n < 10^{80}}$均有$\boldsymbol{\alpha(n) \leq 4}$。
  - $\boldsymbol{10^{80}}$与可观测的宇宙中原子的数目具有相当的数量级。
- 因此，Find/Union操作几乎具有常数时间复杂度。
- 尽管如此，不能称Find/Union具有$O(1)$的时间复杂度，因为
  - $n \to \infty$时, 仍有$\alpha(n) \to \infty$
- 可证明$\boldsymbol{O(\alpha(n))}$时间复杂度上界是紧的，即不相交集不存在$O(1)$时间复杂度的算法。

9.5 不相交集的应用：最近公共祖先问题

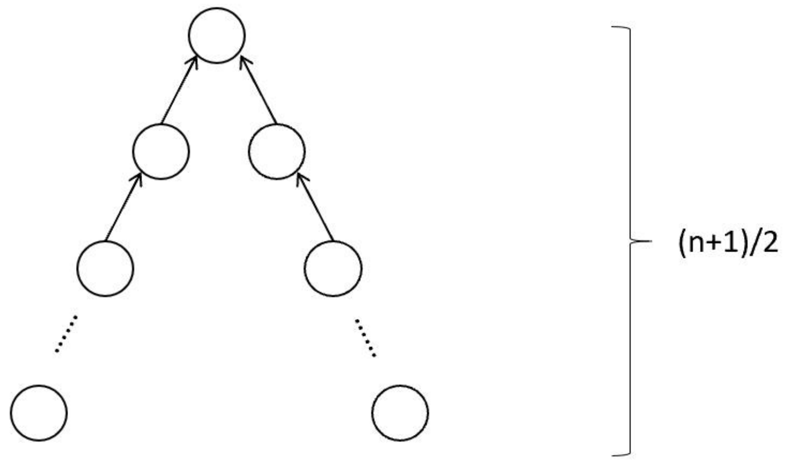
- 在一棵树中，结点u与结点v的公共祖先是所有同时是u和v祖先的结点，而其中深度最大（即离根最远）的结点称为**最近公共祖先**。
- 给定任意两个结点u和v，公共祖先构成一条以根结点为起点的链，而其中最近公共祖先是**唯一的**。



- 最近公共祖先**LCA**（Lowest Common Ancestor）**最近公共祖先问题蛮力算法的坏情况**问题考虑m个形如(u, v)的查询，每次需要查询树T中结点u和v的最近公共祖先。

9.5 不相交集的应用：最近公共祖先问题

- LCA问题可用蛮力算法求解：
  - 首先，从结点u回溯至根，将路径上每个结点均做标记；
  - 然后，从结点v回溯至根，路径上遇到的第一个有标记的结点即为结点u、v的最近公共祖先。



最近公共祖先问题蛮力算法的坏情况

- 然而，该蛮力算法的时间复杂度较高。
- 如图，若树T中有n个结点，则蛮力算法在最坏情况下每次查询的时间复杂度可达$\boldsymbol{O(n)}$。

9.5 不相交集的应用：最近公共祖先问题

求解最近公共祖先问题的离线算法（Tarjan算法）

一次性返回所有m个查询的结果，总时间复杂度仅为$O(m\alpha(n)+n)$。

Tarjan算法对树进行深度优先遍历，并按遍历的顺序处理询问。

若在遍历某结点v时，关于该结点的询问(u,v)的另一端点u已被访问过(“闭询问”），则Tarjan算法立即处理该询问

否则，若u尚未被访问（“开询问”），则将此询问留待访问u时完成。

9.5 不相交集的应用：最近公共祖先问题

- 设算法已经访问完了根为r的子树$T_1 \in T$，并且处理完毕了所有关于T_1**闭询问**。
- 需要保留哪些信息以在未来处理T_1的**开询问**呢?
- 不失一般性，考虑开询问(u, v)，其中$u \in T_1$已经被访问，而v尚未被访问。
- 因为v不是子树T_1中的结点（否则(u, v)应该是闭询问），所以(u, v)的LCA必然不会是子树T_1中的结点，最多只能是子树根r的父亲**r.parent**。
- 因此，对于后续所有关于T_1的开询问，保留子树的结构已无意义，我们可以将子树中的所有结点合并到结点**r.parent**上。
- 在后续遍历中，**r.parent**代表子树T_1中的所有结点，无需再考虑子树T_1的具体结构。 该合并操作可以用**不相交集**实现，如算法9-7。

9.5 不相交集的应用：最近公共祖先问题

算法9-7： Tarjan算法求解最近公共祖先 LCA(*tree, P, u*)

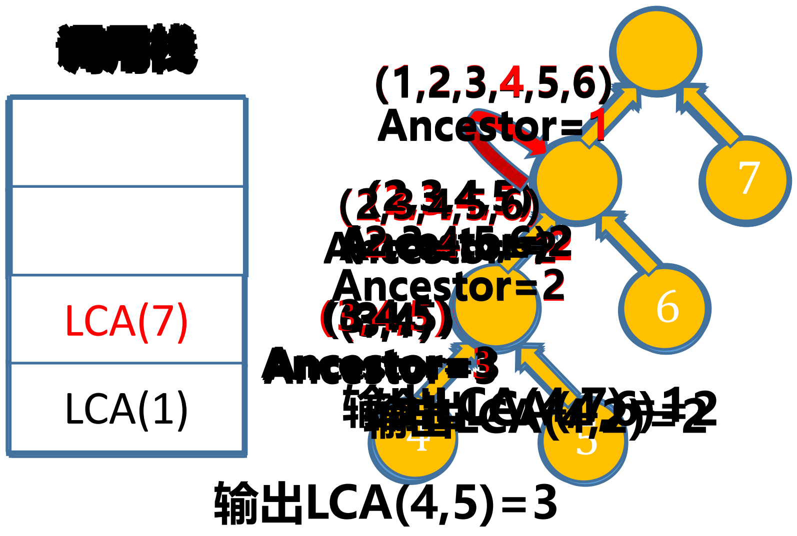
输入： 树*tree*，查询集$P = \{(u, v)\}$，当前结点u。
输出： 查询结果LCA。

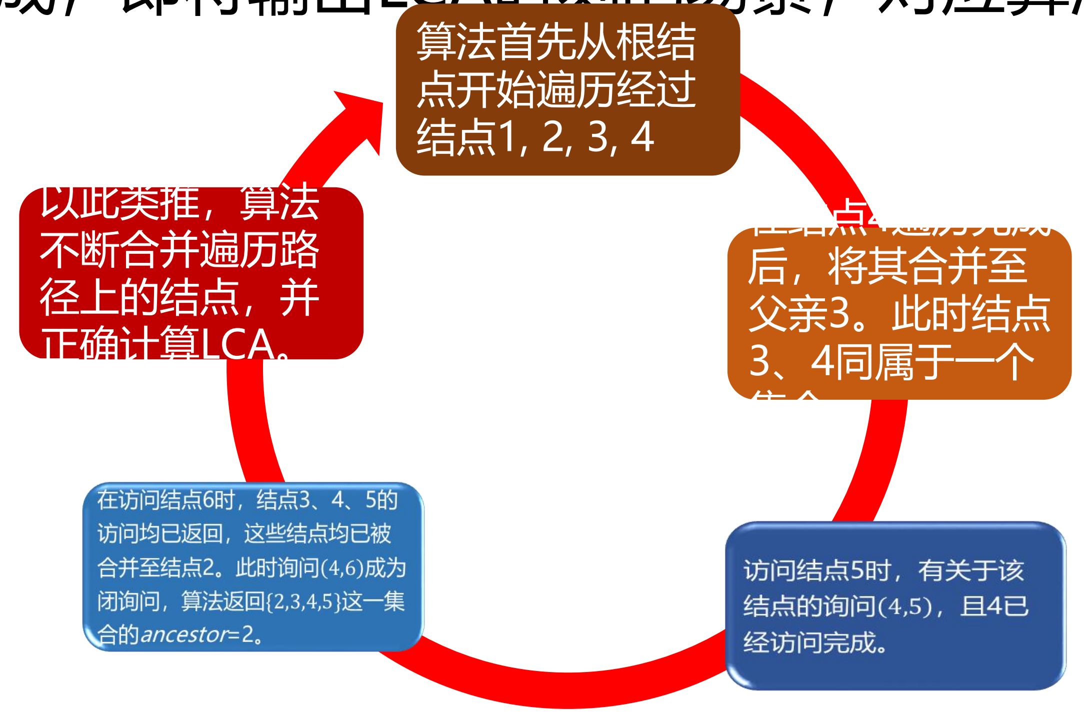
1. *set*←InitSet(*n*) // 初始化不相交集
2. *ancestor*[Find(*set*, u)]← *u* //初始化
3. **for** *u*的每个孩子*v* **do**
4. | LCA(*set*, *tree*, P, v) //深度优先遍历*u*的所有子树
5. | Union(*set*, u, v) //将子树并到根结点*u*
6. | *ancestor*[Find(*set*, u)]← *u* //记录这棵树的根是*u*
7. **end**
8. *visited*[u]←**true**
9. **for** $(u, v) \in P$的每个结点*v* **do**
10. | **if** *visited*[*v*] **then**
11. | | **print** *ancestor*[Find(*set*, v)] //输出*u*和*v*的LCA
12. | **end**
13. **End**

- 算法的执行过程中，我们维护了两个数组visited和ancestor。
- 其中visited表示结点是否访问完成，用以判断询问是否可完成。
- ancestor表示结点集合（子树）的根。这是因为在采用了按秩合并策略后，Find找到的“根”并不一定是子树实际的根，因此需要额外记录实际的根。

9.5 不相交集的应用：最近公共祖先问题

- 右图是算法运行过程的示意图。
- 本例中有4个询问：分别为LCA(4,5)、 LCA(4,6)、LCA(4,2)和LCA(4,7)。
- 右图中依次展示了结点4, 5, 3, 6, 2, 7的孩子访问完成，即将输出LCA时刻的场景，对应算法9-7第7行。

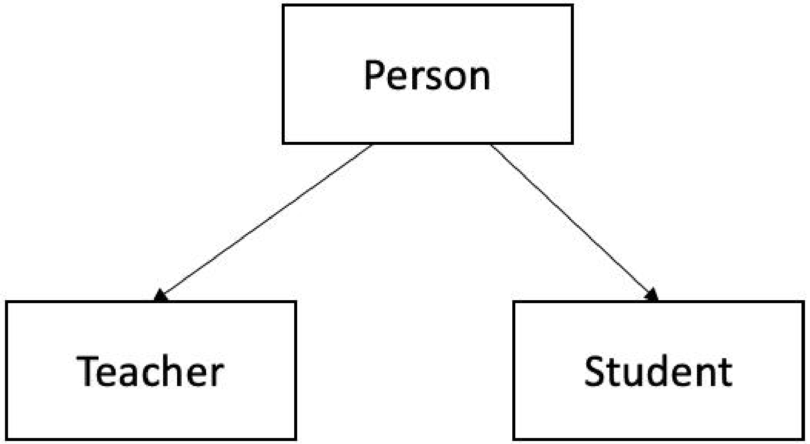




***取决于不相交集的实现，3、4均可能是该集合的代表元素。不失一般性设Find(3)=Find(4)=3，则此时ancestor[3]=3。**

***算法输出(4, 5)的LCA为ancestor[Find(4)]=ancestor[3]=3**

9.7 应用场景:面向对象的编程语言

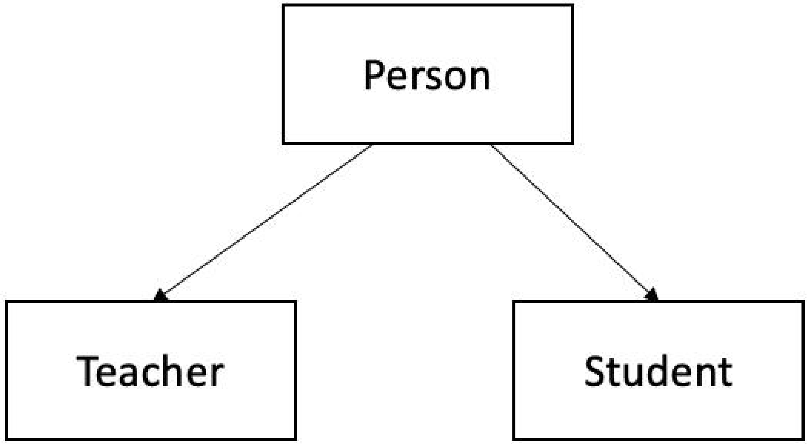


三个类间的继承关系

不相交集在许多计算机科学的真实问题上有应用。如离线最小值查询，求控制流图的支配树，类型推断，实现属性文法（Property Grammar）等。近年来，该数据结构在图像处理，数据库和量子计算等领域也有应用。

这里介绍不相交集在面向对象的编程语言中的应用。

9.7 应用场景:面向对象的编程语言

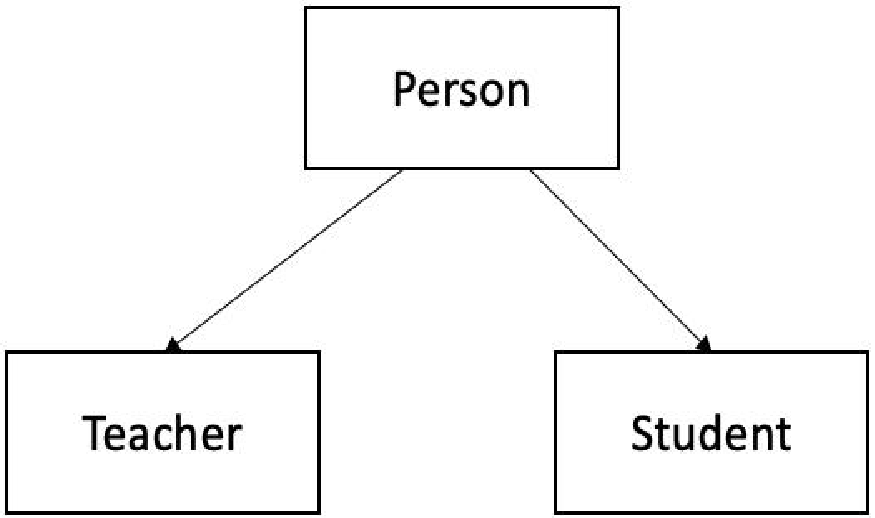


三个类间的继承关系

面向对象的编程语言中，变量的类型可以是用户定义的类（class），类之间可以有继承关系。例如说，下列C++代码定义了People、Teacher、Student三个类，其继承关系如图。

```
class Person { ... };
class Teacher : public Person { ... };
class Student : public Person { ... };
```

9.7 应用场景:面向对象的编程语言



三个类间的继承关系

假如我们定义了如下二元运算Talk：

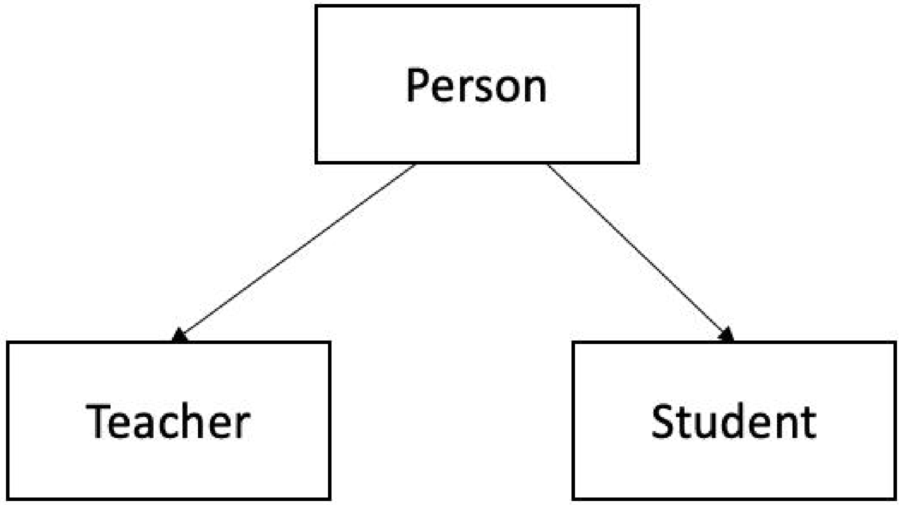
string talk(Person a, Person b);

string talk(Teacher a, Teacher b);

string talk(Student a, Student b);

不同类别之间的Talk函数可以有不同行为。例如，任意两个Person都可以谈论天气，而只有两个Student才会讨论功课。

9.7 应用场景:面向对象的编程语言



三个类间的继承关系

注意，这里我们没有定义两个参数分别是Teacher和Student的Talk函数。

假如有一个Teacher类型的变量alice和一个Student类型的变量bob，此时若调用talk(alice, bob)会发生什么呢?

实际上，编译器会寻找两个类的最近公共祖先，来调用两个People之间的Talk函数。而最近公共祖先问题又可以用不相交集来解决。

谢谢观看