

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ПЕТРА ВЕЛИКОГО»
ВШ программной инженерии



ПОЛИТЕХ
Санкт-Петербургский
политехнический университет
Петра Великого

Расчетное задание №1

по дисциплине «Математические методы в управлении»

Составление рациона животного

Выполнил
Студент гр. 3530202/70201, к. IV

Имхасина И.Х.
(i=10)

Преподаватель

Суханов А.А.

Санкт-Петербург
Осень, 2020 г.

Постановка задачи

Для кормления животного требуется внести в рацион витамины А, В, С. Витамины содержатся в кормовых смесях 1 и 2 в заданных процентных соотношениях (см. табл.1). Даны дневные нормы потребления витаминов и стоимости кормовых смесей.

Таблица 1

	Смесь 1	Смесь 2	Дневная норма
Витамин А	-	0.1 %	0.003 г
Витамин В	0.3 %	$(3-i/24)*0.1 \%$	0.027 г
Витамин С	0.1 %	$(2+i/30)*0.1 \%$	$(12+i/2)*0.001 \text{ г}$
Цена	0.1 руб/г	$(3+ i-6)*0.015 \text{ руб/г}$	

Здесь i – порядковый номер студента в списке группы (по алфавиту).

Требуется:

1. Определить наиболее дешевый рацион питания животного, обеспечивающий дневную норму витаминов

2. При какой цене на смесь 1 ее невыгодно (выгодно) использовать в рационе?

3. В ответ вывести:

- f^* - оптимальное значение функционала
- x_1, x_2 - оптимальное количество смеси 1 и смеси 2
- $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ - двойственные переменные из решения эквивалентной двойственной задачи
- C_1^* - граничная цена на смесь 1

Ход решения (подставим i=10)

	Смесь 1	Смесь 2	Дневная норма
Витамин А	-	0.1%	0.003 г
Витамин В	0.3%	62/240%	0.027 г
Витамин С	0.1%	70/300%	0.017 г
Цена	0.1 руб/г	0.105 руб/г	-

1)

Запишем условие задачи:

$$f = 0.1 * x_1 + 0.105 * x_2 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} 0 * x_1 + 0.001 * x_2 \geq 0.003 \\ 0.003 * x_1 + \frac{62}{24000} * x_2 \geq 0.027 \\ 0.001 * x_1 + \frac{70}{30000} * x_2 \geq 0.017 \end{cases}, \quad x_i \geq 0$$

Канонический вид:

$$g = -0.1 * x_1 - 0.105 * x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 0 * x_1 + 0.001 * x_2 - x_3 = 0.003 \\ 0.003 * x_1 + \frac{62}{24000} * x_2 - x_4 = 0.027 \\ 0.001 * x_1 + \frac{70}{30000} * x_2 - x_5 = 0.017 \end{cases}, \quad x_i \geq 0$$

Решим вспомогательную задачу:

$$\begin{cases} 0 * x_1 + 0.001 * x_2 - x_3 + x_6 = 0.003 \\ 0.003 * x_1 + \frac{62}{24000} * x_2 - x_4 + x_7 = 0.027 \\ 0.001 * x_1 + \frac{70}{30000} * x_2 - x_5 + x_8 = 0.017 \end{cases}, \quad x_i \geq 0$$

$$W = x_6 + x_7 + x_8 \rightarrow \min$$

Начальный базис: (x_6, x_7, x_8)

Построим начальную симплекс таблицу:

$$x_6 = -0.001 * x_2 + x_3 + 0.003$$

$$x_7 = -0.003 * x_1 - \frac{62}{24000} * x_2 + x_4 + 0.027$$

$$x_8 = -0.001 * x_1 - \frac{70}{30000} * x_2 + x_5 + 0.017$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_6	0	-0.001	1	0	0	0.003
x_7	-0.003	$-\frac{62}{24000}$	0	1	0	0.027
x_8	-0.001	$-\frac{70}{30000}$	0	0	1	0.017
W	-0.004	$-\frac{710}{120000}$	1	1	1	0.047

Определяем переменную, которую включим в базис: $\max |\Delta_i|, \Delta_i < 0$. Для данной таблицы x_2 .

Определяем переменную, которую исключим из базиса: $\min_{a_{ik} < 0} \left(-\frac{b_i}{a_{ik}}\right)$. Для данной таблицы x_6 .

$$x_2 = 1000 * x_3 - 1000 * x_6 + 3$$

$$x_7 = -0.003 * x_1 - \frac{31}{12} x_3 + \frac{31}{12} * x_6 + x_4 + \frac{77}{4000}$$

$$x_8 = -0.001 * x_1 - \frac{7}{3} * x_3 + \frac{7}{3} * x_6 + x_5 + \frac{1}{100}$$

Новая симплекс таблица:

	x_1	x_6	x_3	x_4	x_5	b
x_2	0	-1000	1000	0	0	3
x_7	-0.003	$\frac{31}{12}$	$-\frac{31}{12}$	1	0	$\frac{77}{4000}$

x_8	-0.001	$\frac{7}{3}$	$-\frac{7}{3}$	0	1	$\frac{1}{100}$
W	-0.004	$\frac{71}{12}$	$-\frac{59}{12}$	1	1	$\frac{117}{4000}$

Аналогично определяем переменные, которые включим и исключим в базисе. Исключаем x_8 и включаем x_3 .

$$x_3 = -\frac{3}{7000} * x_1 - \frac{3}{7} x_8 + x_6 + \frac{3}{7} x_5 + \frac{3}{700}$$

$$x_2 = -\frac{3}{7} * x_1 - \frac{3000}{7} x_8 + \frac{3000}{7} x_5 + \frac{51}{7}$$

$$x_7 = -\frac{53}{28000} * x_1 + \frac{31}{28} x_8 - \frac{31}{28} x_5 + x_4 + \frac{229}{28000}$$

Новая симплекс таблица:

	x_1	x_6	x_8	x_4	x_5	b
x_2	$-\frac{3}{7}$	0	$-\frac{3000}{7}$	0	$\frac{3000}{7}$	$\frac{51}{7}$
x_7	$\frac{-53}{28000}$	0	$\frac{31}{28}$	1	$-\frac{31}{28}$	$\frac{229}{28000}$
x_3	$-\frac{3}{7000}$	1	$-\frac{3}{7}$	0	$\frac{3}{7}$	$\frac{3}{700}$
W	$\frac{-53}{28000}$	1	$\frac{59}{28}$	1	$-\frac{31}{28}$	$\frac{229}{28000}$

Аналогично определяем переменные, которые включим и исключим в базисе. Исключаем x_7 и включаем x_1 .

$$x_1 = \frac{28000}{53} * x_4 - \frac{31000}{53} x_5 - \frac{28000}{31} x_7 + \frac{31000}{53} x_8 + \frac{229}{53}$$

$$x_3 = -\frac{12}{53} * x_4 + \frac{252}{7 * 53} * x_5 + x_6 + \frac{12}{53} x_7 - \frac{252}{53 * 7} x_8 + \frac{903}{53 * 7000}$$

$$x_2 = -\frac{12000}{53} * x_4 - \frac{36000}{53} x_5 + \frac{12000}{53} x_7 + \frac{810000}{7 * 53} x_8 + \frac{2016}{7 * 53}$$

	x_5	x_6	x_8	x_4	x_7	b
x_2	$\frac{36000}{53}$	0	$\frac{-810000}{7 * 53}$	$-\frac{12000}{53}$	$\frac{12000}{53}$	$\frac{2016}{7 * 53}$

x_1	$\frac{-31000}{53}$	0	$\frac{31000}{53}$	$\frac{28000}{53}$	$-\frac{28000}{31}$	$\frac{229}{53}$
x_3	$\frac{252}{7 * 53}$	1	$\frac{-252}{53 * 7}$	$-\frac{12}{53}$	$\frac{12}{53}$	$\frac{903}{53 * 7000}$
W	0	1	1	0	1	0

Значения W неотрицательны, достигли оптимума.

	x_5	x_4	b
x_2	$\frac{36000}{53}$	$-\frac{12000}{53}$	$\frac{2016}{7 * 53}$
x_1	$\frac{-31000}{53}$	$\frac{28000}{53}$	$\frac{229}{53}$
g	$\frac{680}{53}$	$\frac{1540}{53}$	$\frac{51380}{53 * 7 * 1000}$

$$x_1 = \frac{28000}{53} * x_4 - \frac{31000}{53} x_5 + \frac{229}{53}$$

$$x_2 = -\frac{12000}{53} * x_4 - \frac{36000}{53} x_5 + \frac{2016}{7 * 53}$$

$$f = 0.1 * x_1 + 0.105 * x_2$$

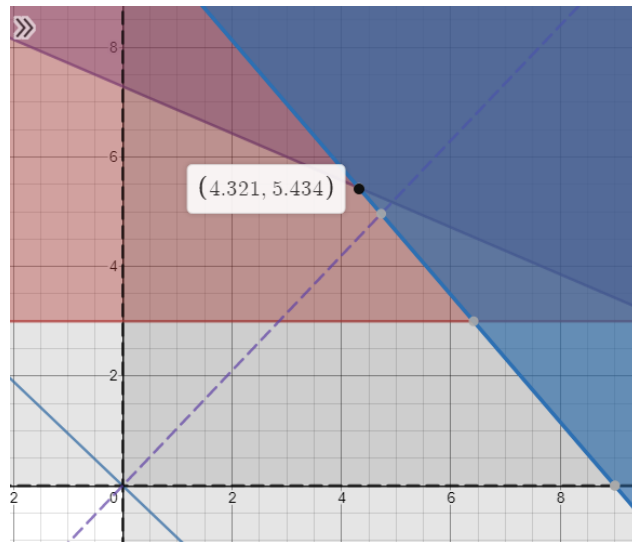
$$f = 0.1 * \frac{229}{53} + 0.105 * \frac{2016}{7 * 53} = \frac{371980}{7 * 53 * 1000}$$

$$f = \frac{371980}{7 * 53 * 1000} \approx 1.00264$$

$$x_1 \approx 4.32075$$

$$x_2 \approx 5.43396$$

Графическое представление



Двойственная задача

Исходная задача:

$$f = 0.1 * x_1 + 0.105 * x_2 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} 0 * x_1 + 0.001 * x_2 \geq 0.003 \\ 0.003 * x_1 + \frac{62}{24000} * x_2 \geq 0.027 \\ 0.001 * x_1 + \frac{70}{30000} * x_2 \geq 0.017 \end{cases}$$

$$x_i \geq 0$$

Получаем двойственную задачу:

$$F = 0.003 * \lambda_1 + 0.027 * \lambda_2 + 0.017 * \lambda_3 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 0.003 * \lambda_2 + 0.001 * \lambda_3 \leq 0.1 \\ \lambda_1 + \frac{62}{24000} * \lambda_2 + \frac{70}{30000} * \lambda_3 \leq 0.105 \end{cases}$$

$$\lambda_i \geq 0$$

Канонический вид:

$$F = 0.003 * \lambda_1 + 0.027 * \lambda_2 + 0.017 * \lambda_3 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 0.003 * \lambda_2 + 0.001 * \lambda_3 + \lambda_4 = 0.1 \\ \lambda_1 + \frac{62}{24000} * \lambda_2 + \frac{70}{30000} * \lambda_3 + \lambda_5 = 0.105 \end{cases}$$

Строим симплекс таблицу:

$$\lambda_4 = 0.1 - 0.003 * \lambda_2 - 0.001 * \lambda_3$$

$$\lambda_5 = 0.105 - \lambda_1 - \frac{62}{24000} * \lambda_2 - \frac{70}{30000} * \lambda_3$$

	λ_1	λ_2	λ_3	b
λ_4	0	-0.003	-0.001	0.1
λ_5	-1	$-\frac{62}{24000}$	$-\frac{70}{30000}$	0.105
F	0.003	0.027	0.017	0

Включим λ_2 , исключим λ_4 .

$$\lambda_5 = \frac{17}{900} - \lambda_1 - \frac{53}{36000} * \lambda_3 + \frac{31}{36} * \lambda_4$$

$$\lambda_2 = \frac{100}{3} - \frac{1000}{3} * \lambda_4 - \frac{1}{3} * \lambda_3$$

	λ_1	λ_3	λ_4	b
λ_2	0	$\frac{-1}{3}$	$\frac{-1000}{3}$	$\frac{100}{3}$
λ_5	-1	$-\frac{53}{36000}$	$\frac{31}{36}$	$\frac{17}{900}$
F	0.003	$\frac{8}{1000}$	-9	$\frac{9}{10}$

Включим λ_3 , исключим λ_5 .

$$\lambda_3 = \frac{680}{53} - \frac{36000}{53} * \lambda_1 + \frac{31000}{53} * \lambda_4 + \frac{36000}{53} * \lambda_5$$

$$\lambda_2 = \frac{4620}{159} + \frac{1200}{53} \lambda_1 - \frac{84000}{3 * 53} * \lambda_4 + \frac{12000}{53} * \lambda_5$$

	λ_1	λ_4	λ_5	b

λ_2	$\frac{1200}{53}$	$-\frac{84000}{3 * 53}$	$\frac{12000}{53}$	$\frac{4620}{159}$
λ_3	$-\frac{36000}{53}$	$\frac{31000}{53}$	$\frac{36000}{53}$	$\frac{680}{53}$
F	$-\frac{287841}{53000}$	$-\frac{229}{53}$	$\frac{8 * 36}{53}$	$\frac{5314}{5300}$

Достигли оптимума.

$$\lambda_1 = 0$$

$$\lambda_2 = 4620/159 \approx 29.0566$$

$$\lambda_3 = 680/53 \approx 12.8302$$

$$F = 0 + 0.027 * \frac{4620}{159} + 0.017 * \frac{680}{53} = \frac{53140}{53000} \approx 1.0026$$

2) Определим при какой цене на смесь 1 ее невыгодно (выгодно) использовать в рационе.

Исходя из графического представления:

$$\begin{pmatrix} c_1^* \\ 0.105 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0.003 \\ \frac{62}{24000} \end{pmatrix}$$

$$c_1^* = \frac{0.105 * 0.003}{\frac{62}{24000}} \approx 0.1219$$

Ответ (i = 10):

$$f^* = 1.0026$$

$$x_1 \approx 4.3208$$

$$x_2 \approx 5.43396$$

$$\lambda_1 = 0$$

$$\lambda_2 = 29.0566$$

$$\lambda_3 = 12.8302$$

$$c_1^* = 0.1219$$