Approximation numérique d'une intégrale : méthode des trapèzes généralisés, accélération de Romberg

Antoine MOTEAU antoine.moteau@wanadoo.fr

Table des matières

Approximation numérique des intégrales définies. Accélérations de convergence.

1 Approximation d'une intégrale sur un segment.

1.1 Méthode des trapèzes généralisée.

La fonction f étant supposée de classe $\mathcal{C}^2$ sur le segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$,

- L'intervalle $[a,b]$ est découpé en n parties (égales) par les points $x_k = a + k\dfrac{b-a}{n}$, k compris entre 0 et n.
- f est approchée par la fonction g, affine sur chaque intervalle $[x_k, x_{k+1}]$, et telle que $g(x_k) = f(x_k)$

L'intégrale de g sur $[a,b]$ est une approximation de l'intégrale de f sur $[a,b]$.

(En fait, sur chaque sous intervalle $[x_k, x_{k+1}]$, l'intégrale de f est approchée par l'aire algébrique du trapèze de base $[x_k, x_{k+1}]$ et de hauteurs $f(x_k)$ et $f(x_{k+1})$, d'où le nom de la méthode).

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un réel $c \in]a,b[$ tel que :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \underbrace{\frac{b-a}{n}\left[\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)\right]}_{\text{approximation de l'intégrale de } f \text{ sur } [a,b]}$$

$$+ \underbrace{\frac{(b-a)^3}{12\,n^2} f^{(2)}(c)}_{\text{erreur commise}}$$

Comme c est inconnu (et dépends de n), l'erreur commise en approchant $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ par l'aire des trapèzes (c'est à dire par $\dfrac{b-a}{n}\left[\dfrac{f(a)+f(b)}{2} + \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)\right]$) , est majorée en pratique par

$$\frac{|b-a|^3}{12\,n^2} \sup_{c\in[a,b]} \left\| f^{(2)}(c) \right\| .$$

1.1.1 Illustration

1.1.2 Démonstration (différé)

1.2 Méthode de Simpson généralisée (information).

La méthode des trapèzes semble assez fruste ...et on peut être tenté de prendre en compte la concavité de f, en approchant f sur chaque intervalle $[x_k, x_{k+1}]$ par une fonction non plus affine (c'est à dire polynomiale de degré 1) mais par une fonction polynomiale de degré 2 (arc de parabole), passant par les trois points :

$$(x_k, f(x_k))\ ,\ \left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}, f\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right)\right)\ ,\ (x_{k+1}, f(x_{k+1}))$$

Cette méthode, connue sous le nom de "Méthode de Simpson", est tombée en désuétude :

- les calculs sont plus longs, avec peu d'amélioration de la précision (en moyenne),
- la méthode de Romberg, plus économique en calculs, donne des résultats remarquables (en moyenne).

2 Accélérations de la convergence d'une suite.

Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, l'approximation T_n de l'intégrale de f sur $[a, b]$, par la méthode des trapèzes généralisée, est le terme général d'une suite qui converge (doucement) vers $\displaystyle\int_a^b f(t)\, dt$.

L'idée de base est de combiner d'une certaine manière (simple, avec peu de calculs) les termes successifs d'une suite convergente, pour obtenir une nouvelle suite convergente, de même limite, mais qui converge plus vite que la précédente :
Etant donnée une suite réelle (x_n), qui converge vers le réel s, on cherche une suite (y_n)

- qui converge vers la même limite s
- plus rapidement que (x_n), au sens : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{y_n - s}{x_n - s} = 0$
  (c'est à dire, qu'à n fixé, y_n est une meilleure approximation de s que x_n).

Un procédé qui permet de construire (y_n) à partir de (x_n) est dit "*procédé d'accélération de convergence*" et (y_n) est dite "*suite accélérée*" de (x_n).

On peut ensuite appliquer le même processus à la suite (y_n) et ainsi de suite ...

2.1 Méthode d'accélération de convergence d'Aïtken.

2.1.1 Principe

A partir des n premiers termes, $x_1, x_2, \cdots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n$, de la suite (x_n), on construit
les $n-2$ premiers termes, $y_1, y_2, \cdots, y_{n-2}$, de la suite accélérée (y_n) ainsi :

$$\begin{cases} y_k = x_k - \dfrac{(x_{k+1} - x_k)^2}{x_{k+2} - 2\, x_{k+1} + x_k} & \text{si } x_{k+2} - 2\, x_{k+1} + x_k \neq 0 \\ y_h = x_k & \text{sinon} \end{cases}$$

En fait, on appliquera ce procédé plusieurs fois en construisant l'accélérée de l'accélérée de l'accélérée ... :
A partir des $n = 2\,p + 1$ premiers termes de la suite (x_n) on construit

- les $n-2$ premiers termes de l'accéléré, et à partir des termes obtenus on construit les
- les $n-4$ premiers termes de l'accéléré de l'accélérée puis on construit les
- les $n-6$ ...
- ...
- les 3 ...
- les 1 ...

Si on veut stocker les intermédiaires de calculs, on pourra utiliser une matrice (à $n = 2\,p + 1$ lignes et $p + 1$ colonnes) , partiellement remplie, dont les termes seront définis ainsi :

- le i-ième terme de la suite initiale (x_n) sera en ligne i de la colonne 1 $(i \leqslant n)$
- le i-ième terme de la première accélération sera en ligne i de la colonne 2 $(i \leqslant n-2)$
- le i-ième terme de la k-ième accélération sera en ligne i de la colonne $k+1$ $(i \leqslant n - 2 * k)$

A l'issue du calcul, le terme de la ligne 1 et de la colonne $p+1$ devrait être une meilleure approximation de la limite s que tous les autres termes.

Remarque. Si on ne s'intéresse pas aux résultats intermédiaires, on peut ne prendre que deux vecteurs et procéder par recouvrement.

2.1.2 Preuve (différé)

2.1.3 Exemple

La suite (x_n), définie par $x_n = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \frac{4\,(-1)^i}{2\,i+1}$, converge vers π et cette convergence est très lente ...

- pour n donné, x_n est une approximation de π à $\dfrac{1}{2\,n+1}$ près.
- Pour avoir une approximation (théorique) de π par x_n à 10^{-11} près, il faut prendre $n = 200000000000$.

On applique la méthode d'accélération de Aïtken, avec $p = 6$ et $n = 2p + 1 = 13$, seulement, ce qui ne demande initialement que le calcul des 13 premiers termes de la suite x_n.
En faisant les calculs par valeurs approchées, avec 12 digits,

```
> x := k -> 4*sum((-1)^'i'/(2*'i'+1), 'i'=0..k);

> p := 6; n := 2*p + 1;
> A := matrix(n,p+1);

> for i from 1 to n do A[i,1] := evalf( x(i) ) od:

> for k from 1 to p
> do for i from 1 to n-2*k
>    do di := A[i+1,k]-A[i,k]:
>       d2i := A[i+2,k]-2*A[i+1,k]+A[i,k]:
>       if d2i = 0 then A[i,k+1] := A[i,k]
>       else A[i,k+1] := evalf( A[i,k] - di^2 /d2i ) fi
>    od
> od:
```

on obtient la matrice :

2.66666666667	3.13333333334	3.14145021645	3.14159086040	3.14159263711	3.14159265348	3.14159265359
3.46666666667	3.14523809524	3.14164332400	3.14159323124	3.14159265871	3.14159265363	
2.89523809524	3.13968253968	3.14157129020	3.14159243844	3.14159265181	3.14159265358	
3.33968253968	3.14271284272	3.14160284160	3.14159274346	3.14159265428		
2.97604617605	3.14088134088	3.14158732095	3.14159261244	3.14159265330		
3.28373848374	3.14207181707	3.14159565524	3.14159267391			
3.01707181707	3.14125482361	3.14159086271	3.14159264291			
3.25236593472	3.14183961893	3.14159377424				
3.04183961893	3.14140671850	3.14159192395				
3.23231580941	3.14173609926					
3.05840276593	3.14147968901					
3.21840276593						
3.07025461778						

- $x_{13} = 3.07025461778$ n'est qu'une approximation à 10^{-1} près de π
- le dernier terme calculé dans l'accélération, 3.14159265359, est une approximation de π à 10^{-11} près !

2.1.4 Application à l'intégration

On peut utiliser la méthode de Aïtken pour accélérer la convergence de la suite (T_n) lorsque T_n est l'approximation de $\int_a^b f(t)\,dt$ par la méthode des trapèzes à l'ordre n.

3 Méthode d'intégration de Romberg.

3.1 Principe

Il s'agit de l'application d'une méthode d'accélération de convergence (Richardson), à une sous-suite de la suite d'approximation de $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ par la méthode des trapèzes.
On utilise, comme suite initiale, la suite (R_p) définie par $R_p = T_{2^p}$ (formule des trapèzes à l'ordre 2^p), ce qui permet de réduire le nombre d'opérations dans le calcul des termes successifs :

- R_p utilise $2^p + 1$ points
- R_{p+1} utilise $2^{p+1} + 1$ points dont les $2^p + 1$ points utilisés par R_p (donc seulement 2^p points nouveaux).

$$R_p = T_{2^p} = \frac{b-a}{2^p}\left[\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{k=1}^{2^p-1} f\left(a + k\frac{b-a}{2^p}\right)\right]$$

$$\begin{aligned}
R_{p+1} =& \frac{b-a}{2^{p+1}}\left[\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{k=1}^{2^{p+1}-1} f\left(a + k\frac{b-a}{2^{p+1}}\right)\right] \\
=& \frac{1}{2}\frac{b-a}{2^p}\left[\frac{f(a)+f(b)}{2} + \underbrace{\sum_{i=1}^{2^p-1} f\left(a + i\frac{b-a}{2^p}\right)}_{(\text{si } k=2i)} + \underbrace{\sum_{j=1}^{2^p} f\left(a + (2j-1)\frac{b-a}{2^{p+1}}\right)}_{(\text{si } k=2j-1)}\right] \\
=& \frac{1}{2}R_p + \frac{b-a}{2^{p+1}}\sum_{j=1}^{2^p} f\left(a + (2j-1)\frac{b-a}{2^{p+1}}\right)
\end{aligned}$$

On considère la matrice A à n lignes et n colonnes définie par

- $A[1,1] = R_0 = \dfrac{b-a}{1}\left[\dfrac{f(a)+f(b)}{2}\right]$
- Pour $p = 1$ jusqu'à $n-1$,

$$A[p+1,1] = R_p = \frac{1}{2}A[p,1] + \frac{b-a}{2^p}\sum_{j=1}^{2^{p-1}} f\left(a + (2j-1)\frac{b-a}{2^p}\right)$$

- Pour $i = 2$ jusqu'à n et pour $j = 2$ jusqu'à i,

$$A[i,j] = \frac{4^{j-1}A[i,j-1] - A[i-1,j-1]}{4^{j-1} - 1}$$

Remarque. seule la partie triangulaire inférieure de A est remplie.

Théorème 3.1.1.

Si f est de classe $\mathcal{C}^k$, avec $k \geqslant 0$, sur $[a,b]$, alors

$$A[p,p] \xrightarrow[p\to+\infty]{} \int_a^b f(t)\,dt$$

(et la convergence est d'autant plus rapide que k est grand)

3.2 Preuve (différé)

3.3 Exemple (évaluation de la méthode)

Calcul de $\ln(5) = \displaystyle\int_1^5 \frac{1}{x}\,dx$, en prenant $n = 5$ avec une précision de 12 digits.

```
> restart: with(linalg):
> Digits := 12;

> f := x -> 1/x; a := 1; b := 5;

> n := 8;
> A := matrix(n,n);

> A[1,1] := (b-a) * (f(a)+f(b))/2;

> for p from 1 to n-1
> do m := 2^(p-1): h := (b-a)/m/2 :
>    A[p+1,1] := evalf( A[p,1]/2 + h * sum( f(a+(2*'j'-1)*h), 'j'=1..m ))
> od:

> for i from 2 to n
> do for j from 2 to i
>    do h := 4^(j-1):
>       A[i,j] := evalf( (h*A[i,j-1] - A[i-1,j-1] ) / ( h -1))
>    od
> od:
```

ce qui donne comme résultat :

- six premières colonnes de la matrice :

2.40000000000					
1.86666666667	1.68888888889				
1.68333333334	1.62222222223	1.61777777779			
1.62896825397	1.61084656085	1.61008818343	1.60996612638		
1.61440632381	1.60955234709	1.60946606617	1.60945619130	1.60945419156	
1.61068589608	1.60944575350	1.60943864726	1.60943821205	1.60943814155	1.60943812587
1.60975028572	1.60943841560	1.60943792641	1.60943791497	1.60943791380	1.60943791358
1.60951602950	1.60943794409	1.60943791265	1.60943791244	1.60943791243	1.60943791243

- deux colonnes suivantes :

1.60943791353	
1.60943791243	1.60943791243

et on a par ailleurs (programme interne de la calculatrice) $\ln(5) = 1.60943791243$ à 10^{-11} près.

---

références :

- Henrici
- Brezinsky

< $\mathcal{FIN}$ >