Fonctions convexes (rappels)

1 Définition

Définition 1.0.1.

Une fonction numérique, définie sur un intervalle I, est convexe sur I si et seulement si

$$\forall (x,y) \in I^2 \ , \ \forall t \in [0,1] \ , \ f\Big(t\,x + (1-t)\,y\Big) \leqslant t\,f(x) + (1-t)\,f(y)$$

(f est concave sur I ssi $-f$ est convexe sur I).

interprétation géométrique : position de la courbe relativement à ses cordes (voir graphe)

2 Caractérisation des fonctions convexes

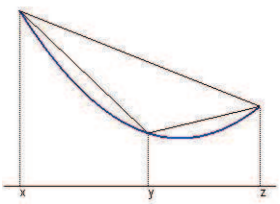
Théorème 2.0.1.

Soit f une fonction à valeurs réelles définie sur un intervalle I d'intérieur $(\overset{\circ}{I})$ non vide.
Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. *f est convexe sur I*
2. $\forall (x,y,z) \in I^3 \ , \ x < y < z \Longrightarrow \dfrac{f(y)-f(x)}{y-x} \leqslant \dfrac{f(z)-f(x)}{z-x} \leqslant \dfrac{f(y)-f(z)}{y-z}$
3. $\forall a \in I \ ,$ *la fonction h_a définie sur $I\setminus\{a\}$ par* $h_a(x) = \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ *est croissante*

<u>Preuve</u>. $(1 \Longrightarrow 2 \Longrightarrow 3 \Longrightarrow 1)$

démonstration appuyée par le graphe :
(voir programme de sup. .)



3 Convexité et dérivabilité

Théorème 3.0.2.

Soit f une fonction réelle, définie sur un intervalle I d'intérieur $(\overset{\circ}{I})$ non vide.

Si f est convexe sur I, alors, en tout point a intérieur à I $(a \in \overset{\circ}{I})$, f admet un nombre dérivé à gauche et un nombre dérivé à droite.

<u>Preuve</u>. Utilisation du Théorème de "la limite monotone" : Soit $a \in \overset{\circ}{I}$ et $(\alpha,\beta) \in I^2$, tels que $\alpha < a < \beta$.

1. sur $[\alpha, a[$, l'application $h_a : x \longmapsto \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est croissante, majorée par $\dfrac{f(\beta)-f(a)}{\beta-a}$ (très large) donc admet une limite en a. Ainsi f est dérivable à gauche en a, avec $f'_g(a) \leqslant \dfrac{f(\beta)-f(a)}{\beta-a}$
2. sur $]a,\beta]$, on a un même raisonnement (application croissante, minorée)
   Donc f est dérivable à droite en a, et de plus $f'_d(a) \geqslant \dfrac{f(\alpha)-f(a)}{\alpha-a}$
3. Comme les inégalités obtenues sont valables pour tout $a \in \overset{\circ}{I}$ et pour tout $(\alpha,\beta) \in I^2$ tel que $\alpha < a < \beta$, par passage à la limite sur l'une ou l'autre des inégalités obtenues, on en déduit (puisque $f'_g(a)$ et $f'_d(a)$ existent) que, pour tout $a \in \overset{\circ}{I}$, $f'_g(a) \leqslant f'_d(a)$.

Théorème 3.0.3. *(Conséquence directe du précédent)*

Une fonction réelle, convexe sur un intervalle, est continue sur l'intérieur de cet intervalle.

<u>Preuve</u>. Si $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ a une limite finie en a^+ (resp. a^-) alors $f(x)-f(a) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$

4 Fonctions convexes de classe $\mathcal{C}^1, \mathcal{C}^2$

Théorème 4.0.4.

Soit f une fonction réelle, de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle I.
f est convexe sur I si et seulement si f' est croissante sur I.

Preuve. (utilisation de la formule des accroissements finis)

1. Supposons f convexe sur $I = [u, v]$. En revenant à la preuve d'un théorème précédent, on a :

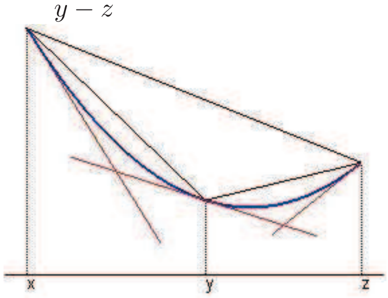
$$\forall (a, b) \in]u, v[^2, a < b \Longrightarrow f'(a) = f'_g(a) \leqslant \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f(a) - f(b)}{a - b} \leqslant f'_d(b) = f'(b)$$

2. réciproquement, par l'absurde : supposons f' croissante sur I et f non convexe sur I.
   Prenons x, y, z éléments de I tels que $x < y < z$ et $\dfrac{f(y) - f(x)}{y - x} > \dfrac{f(y) - f(z)}{y - z}$.

   Or, il existe β, $y < \beta < z$, tel que $\dfrac{f(y) - f(z)}{y - z} = f'(\beta)$

   α, $x < \alpha < y$, tel que $\dfrac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(\alpha)$.

   On peut donc trouver α et β tels que $\alpha < \beta$ et $f'(\alpha) > f'(\beta)$, ce qui contredit la croissance de f'.



Théorème 4.0.5.

Soit f une fonction réelle, de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'intervalle I.
f est convexe sur I si et seulement si f'' est positive (ou nulle) sur I.

Preuve. (conséquence immédiate du théorème précédent).

5 Convexité et barycentres

Théorème 5.0.6.

Une fonction f, réelle, définie sur un intervalle I, est convexe sur I si et seulement si

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in I^n, \forall (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) \in [0, 1]^n,$$

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1 \Longrightarrow f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k)$$

Preuve. Par récurrence sur n ...

Exemple 5.0.0.1. D'après la concavité et la monotonie de la fonction ln sur $]0, +\infty[$,

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in]0, +\infty[^n, \forall (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) \in [0, 1]^n$

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1 \Longrightarrow \prod_{k=1}^{n} {x_k}^{\lambda_k} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k$$

En particulier (avec $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = \dfrac{1}{n}$),

$$\forall (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in]0, +\infty[^n, \quad \underbrace{\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}}_{\text{moyenne géométrique}} \leqslant \underbrace{\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}}_{\text{moyenne arithmétique}}$$

< $\mathcal{FIN}$ >