Formes bilinéaires symétriques, formes quadratiques

Antoine MOTEAU antoine.moteau@wanadoo.fr

Table des matières

Formes bilinéaires symétriques, formes quadratiques.

On se place dans l'espace $\mathbb{R}^n$, euclidien, muni de sa base canonique, orthornormé directe.

- lorsque l'on écrit $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, il s'agit de l'écriture de x dans la base canonique
- pour exprimer x dans une autre base, par exemple $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \cdots, \overrightarrow{e_n})$, on écrira $x = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x'_k\, \overrightarrow{e_k}$.

1 Formes bilinéaires symétriques sur $\mathbb{R}^n$

1.1 Définition

Définition 1.1.1.

Une application φ, de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}$, est une forme bilinéaire symétrique si

- φ est linéaire par rapport à la deuxième variable :

$$\forall\, u, v, w \in \mathbb{R}^n,\ \forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ \varphi(u, \lambda\, v + \mu\, w) = \lambda\, \varphi(u, v) + \mu\, \varphi(u, w)$$

- φ est symétrique : $\forall\, u, v \in \mathbb{R}^n, \varphi(u, v) = \varphi(v, u)$

Remarque. On aura, par symétrie, la linéarité par rapport à la première variable :

$$\forall\, u, v, w \in \mathbb{R}^n,\ \forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ \varphi(\lambda\, v + \mu\, w, u) = \lambda\, \varphi(v, u) + \mu\, \varphi(w, u)$$

Remarque. On peut avoir des formes bilinéaires (linéaires par rapport à chaque variable) qui ne soient pas symétriques.

- L'application φ_1, définie sur $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ par : $\varphi_1\big((x, y), (x', y')\big) = 3\, x\, x' + x\, y' + 2\, y\, x' - y\, y'$ est une forme bilinéaire non symétrique sur $\mathbb{R}^2$.
- L'application φ_2, définie sur $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ par : $\varphi_2\big((x, y), (x', y')\big) = 3\, x\, x' + x\, y' + \, y\, x' - y\, y'$ est une forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}^2$.

1.2 Matrice associée à une forme bilinéaire symétrique

Définition 1.2.1.

Soit φ une forme bilinéaire symétrique de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}$.
La matrice associée à φ, relativement à une base $\mathcal{B} = \big(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \cdots, \overrightarrow{e_n}\big)$ (quelconque) de $\mathbb{R}^n$, est la matrice :

$$A = \Big(\varphi\big(\,\overrightarrow{e_i}, \overrightarrow{e_j}\,\big)\Big)_{i,j=1\cdots n} \qquad \text{(matrice symétrique et réelle)}$$

Théorème 1.2.1.

Soit φ une forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}^n$ et A la matrice associée à φ relativement à la base $\mathcal{B} = \big(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \cdots, \overrightarrow{e_n}\big)$.

Pour x et x' vecteurs de $\mathbb{R}^n$, de matrices colonne de composantes X et X' relativement à la base $\mathcal{B}$,

$$\varphi(x, x') = {}^{t}X\, A\, X'$$

En particulier, si $A = \big(a_{i,j}\big)_{i,j=1\cdots n}$, pour $x = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k\, \overrightarrow{e_k}$ et $x' = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x'_k\, \overrightarrow{e_k}$, on a :

$$\varphi(x, x') = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\, x_i\, x'_j \qquad \textit{avec} \quad a_{i,j} = \varphi\,(\overrightarrow{e_i}, \overrightarrow{e_j})\,.$$

Preuve. Du fait de la bilinéarité, il suffit de le vérifier pour tout i et tout j avec $\overrightarrow{e_i}$ (de matrice $X = X_i$) et $\overrightarrow{e_j}$ (de matrice $X' = X_j$) :

$$A\,X_j = \left(\sum_{k=1}^{n} \varphi(\,\overrightarrow{e_i},\overrightarrow{e_k}\,)\,\delta_{k,j}\right)_{i=1\cdots n} = \left(\varphi(\,\overrightarrow{e_i},\overrightarrow{e_j}\,)\right)_{i=1\cdots n} \text{ et } {}^tX_i\left(A\,X_j\right) = \left(\sum_{k=1}^{n}\delta_{i,k}\,\varphi(\,\overrightarrow{e_k},\overrightarrow{e_j}\,)\right) = \varphi(\,\overrightarrow{e_i},\overrightarrow{e_j}\,)$$

Exemple 1.2.0.1. L'application φ, définie sur $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ par :

$$\varphi((x,y,z),(x',y',z')) = 3\,x\,x' + x\,y' + 2\,x\,z' + y\,x' + y\,y' - y\,z' + 2\,z\,x' - z\,y' + z\,z'$$

est une forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}^3$ et $\varphi((x,y,z),(x',y',z')) = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$

Exemple 1.2.0.2. L'application φ, définie sur $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ par :

$$\varphi((x,y,z),(x',y',z')) = 3\,x\,x' + x\,y' + 2\,x\,z' + 5\,y\,x' + y\,y' + 3\,y\,z' + z\,x' - z\,y' + z\,z'$$

est une forme bilinéaire sur $\mathbb{R}^3$, mais elle n'est pas symétrique.

Remarque. On pourrait l'écrire matriciellement, mais avec une matrice non symétrique.

1.2.1 Changement de base

Théorème 1.2.2.

Soit φ une forme bilinéaire sur $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases (quelconques) de $\mathbb{R}^n$.
Si A est la matrice associée à φ dans la base $\mathcal{B}$ et A' la matrice associée à φ dans la base $\mathcal{B}'$, alors

$$A' = {}^tP\,A\,P \quad \text{où } P \text{ est la matrice de passage de } \mathcal{B} \text{ à } \mathcal{B}'$$

Preuve.

Soient x et y deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$, de matrices colonne de composantes X et Y relativement à la base $\mathcal{B}$, et X' et Y' relativement à la base $\mathcal{B}'$.
On a $\varphi(x,y) = {}^tX\,A\,Y$ et $\varphi(x,y) = {}^tX'\,A'\,Y'$
Comme $X = P\,X'$ et $Y = P\,Y'$, on en déduit ${}^tX\,A\,Y = {}^t(P\,X')\,A\,P\,Y'$, d'où ${}^tX'\left({}^tP\,A\,P\right)Y' = X'\,A'\,Y'$.
Ainsi, $\forall\, X', Y'$, on a ${}^tX'\left({}^tP\,A\,P\right)Y' = X'\,A'\,Y'$ et on en déduit que ${}^tP\,A\,P = A'$.

1.3 Produit scalaire

Théorème 1.3.1.

Soit φ une forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{B}$ une base (quelconque) de $\mathbb{R}^n$ et A la matrice associée à φ dans la base $\mathcal{B}$.
φ est un produit scalaire si et seulement si les valeurs propres de A sont strictement positives.

Preuve.

A est symérique réelle, donc diagonalisable dans $\mathbb{R}$ et on sait que l'on peut écrire $A = P\,\Delta\,P^{-1}$, avec Δ matrice diagonale des valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ de A et P matrice, que l'on choisit orthogonale.

Le choix de P orthogonale (avec $P^{-1} = {}^tP$) est fondamental dans cette démonstration !

P étant la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$, d'après le théorème précédent, la matrice ${}^tP\,A\,P$ est la matrice associée à φ dans la base $\mathcal{B}' = (\overrightarrow{e'_1}, \overrightarrow{e'_2}, \cdots, \overrightarrow{e'_n})$.
Or, puisque P a été choisie orthogonale, ${}^tP\,A\,P = P^{-1}\,A\,P = \Delta$ (diagonale des valeurs propres).
Pour que φ soit un produit scalaire, il ne lui manque que les propriétés "positive" et "définie", que l'on examine en se plaçant dans la base $\mathcal{B}'$:

Pour $u = \sum_{k=1}^{n} u_i\,\overrightarrow{e'_i}$, de matrice colonne associée U dans la base $\mathcal{B}'$, $\varphi(u,u) = {}^tU\,\Delta\,U = \sum_{k=1}^{n} \lambda_i\,u_i^2$, ce qui permet d'établir que φ est "positive" et "définie" si et seulement si tous les λ_i sont strictement positifs.

2 Formes quadratiques sur $\mathbb{R}^n$

2.1 Définition

Définition 2.1.1.

On appelle forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$, toute application q de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}$ telle qu'il existe (au moins) une forme bilinéaire ϕ sur $\mathbb{R}^n$ vérifiant :

$$\forall\, u \in \mathbb{R}^n,\ q(u) = \phi(u,u)$$

Exemple 2.1.0.1. On se place dans $\mathbb{R}^n$, muni de sa base canonique.

1. Si $q(x,y,z) = x^2 + 2\,y^2 + 3\,z^2$, alors q est une forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$:
   il suffit de prendre ϕ telle que $\phi\big((x,y,z),(x',y',z')\big) = x\,x' + 2\,y\,y' + 3\,z\,z'$.
2. Si $q(x,y,z,t) = x^2 + y^2 + z^2 - t^2$, alors q est une forme quadratique sur $\mathbb{R}^4$:
   il suffit de prendre ϕ telle que ....
3. Si $q(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4\,x\,y + 2\,x\,z$, alors q est une forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$ et on peut prendre
   - ϕ telle que $\phi\big((x,y,z),(x',y',z')\big) = x\,x' + y\,y' + z\,z' - 4\,x\,y' + 2\,x\,z'$ (non symétrique)
   - ϕ telle que $\phi\big((x,y,z),(x',y',z')\big) = x\,x' + y\,y' + z\,z' - 2\,x\,y' - 2\,y\,x' + x\,z' + z\,x'$ (symétrique).
4. $x^3 + x^2 + y^2 + z^2 - x\,y + 2\,x\,z + x + 3$ n'est pas l'expression d'une forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$:
   à partir d'une forme bilinéaire, on n'obtient pas de terme en x^3, ni en x, ni de terme constant.

Remarque. L'expression d'une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$, dans une base donnée, est une somme de monômes de degré 2 des composantes de l'argument.

2.2 Forme polaire

Théorème 2.2.1.

Etant donnée une forme quadratique q sur $\mathbb{R}^n$, l'application

$$\begin{array}{rccll} \varphi_q : & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} & \\ & (u,v) & \longmapsto & \varphi_q(u,v) & = \dfrac{1}{2}\big[\,q(u+v) - q(u) - q(v)\,\big] \\ & & & & = \dfrac{1}{4}\big[\,q(u+v) - q(u-v)\,\big] \end{array}$$

est une forme bilinéaire symétrique telle que $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ q(x) = \varphi_q(x,x)$.

$\boxed{\varphi_q \text{ est la forme } \textbf{polaire} \text{ de la forme quadratique } q.}$

Preuve. Si la symétrie est évidente, la bilinéarité ne l'est pas. On construit φ par un moyen détourné :

1. Soit $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \cdots, \overrightarrow{e_n})$ une base de $\mathbb{R}^n$ (par exemple la base canonique).
   Pour $x = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k\, \overrightarrow{e_k}$, on écrit $q(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{i,i}\, x_i^2 + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} a_{i,j}\, x_i\, x_j$.
   Pour $i > j$, on pose $a_{i,j} = a_{j,i}$ et on considère l'application φ définie par :
   $$\text{Pour } x = \sum_{k=1}^{n} x_k\, \overrightarrow{e_k},\ \text{et } x' = \sum_{k=1}^{n} x'_k\, \overrightarrow{e_k}, \quad \text{on a} \quad \varphi(x,x') = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\, x_i\, x'_j.$$
   φ est une forme bilinéaire symétrique et, pour tout x, $\varphi(x,x) = q(x)$.
2. $q(u+v) = \varphi(u+v,u+v) = \varphi(u,u+v) + \varphi(v,u+v) = \varphi(u,u) + \varphi(u,v) + \varphi(v,u) + \varphi(v,v)$,
   d'où, φ étant symétrique, $q(u+v) = q(u) + 2\,\varphi(u,v) + q(v)$ et on en déduit la première formule.
3. De même, $q(u+v) - q(u-v) = \varphi(u+v,u+v) - \varphi(u-v,u-v) = \cdots = 4\,\varphi(u,v)$
   et on en déduit la deuxième formule.

2.3 Matrice (symétrique réelle) associée

Définition 2.3.1.

> La matrice associée à une forme quadratique q sur $\mathbb{R}^n$, relativement à une base $\mathcal{B}$, est la matrice (symétrique réelle) associée à sa forme polaire, relativement à $\mathcal{B}$.
>
> Si A est cette matrice, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ de matrice colonne X relativement à $\mathcal{B}$, $\quad q(x) = {}^tX\,A\,X$.

La matrice symétrique associée à q peut s'obtenir par la règle du dédoublement :

Soit φ la forme polaire de la forme quadratique q.
Soit $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \cdots, \overrightarrow{e_n})$ une base de $\mathbb{R}^2$ (par exemple la base canonique) et $A = \left(a_{i,j}\right)_{i,j=1\cdots n}$ la matrice (symétrique réelle) associée à q (et à φ) relativement à la base $\mathcal{B}$.

Pour $x = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k\,\overrightarrow{e_k}$ et $y = \sum\limits_{k=1}^{n} y_k\,\overrightarrow{e_k}$, on a : $\varphi(x,y) = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{i,j}\,x_i\,y_j \quad$ avec $a_{i,j} = \varphi\big(\overrightarrow{e_i}, \overrightarrow{e_j}\big)$.

D'où $q(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{i,i}\,x_i^2 + 2\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n} a_{i,j}\,x_i\,y_j$ et on en en déduit que :

$$\boxed{\begin{cases} \forall\, i = 1..n, & a_{i,i} = \dfrac{1}{2}\,\dfrac{\partial^2 q}{\partial x_i^2}(x) \\ \forall\, i,j = 1..n, & a_{i,j} = \dfrac{1}{2}\,\dfrac{\partial^2 q}{\partial x_i\,\partial x_j}(x) \end{cases}}$$

Exemple 2.3.0.2. La forme quadratique q, définie sur $\mathbb{R}^3$ par

$$q(x,y,z) = x^2 + 2\,y^2 - z^2 - 2\,x\,y + 6\,x\,z + 8\,y\,z\ ,$$

a pour forme polaire la forme φ définie par : $\quad \phi\big((x,y,z),(x',y',z')\big) = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$

2.4 Réduction dans une base orthonormale directe de $\mathbb{R}^n$

Soit q une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$, de matrice associée $A = \Big(a_{i,j}\Big)_{i,j=1\cdots n}$ (symétrique et réelle), relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

La matrice A, symétrique réelle, est diagonalisable dans $\mathbb{R}$ et il existe une matrice P, **orthogonale**, que l'on choisit **directe** ($\det(P) = 1$), telle que $A = P\,\Delta\,P^{-1}$ où Δ est une matrice diagonale (dont les éléments diagonaux sont les valeurs propres de A).

- P est la matrice de passage de la base canonique (orthonormale et directe, pour le produit scalaire canonique) à une base $\mathcal{B}'$ **orthonormale** et directe.
- $X = {}^t(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ étant la matrice colonne des composantes de x (dans la base canonique) et $X' = {}^t(x'_1, x'_2, \cdots, x'_n)$ la matrice colonne des composantes de ce même x dans la base $\mathcal{B}'$, on a :

$$X = P\,X' \ \text{ d'où } \ q(x) = {}^tX\,A\,X = {}^tX'\,{}^tP\,A\,P\,X' = {}^tX'\,P^{-1}\,A\,P\,X' = {}^tX'\,\Delta\,X'$$

> $q(x)$ ne s'exprime plus que comme combinaison linéaire des carrés des composantes de x dans la base $\mathcal{B}'$:
>
> $$\begin{aligned} q(x) &= \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}\,x_i^2 + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} a_{i,j}\,x_i\,y_j && \text{dans la base canonique} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\,{x'_i}^2 && \text{dans la base } \mathcal{B}' \quad (\text{les } \lambda_i \text{ étant les valeurs propres de } A) \end{aligned}$$

2.4.1 Exemples et applications

1. **norme or not norme** :

   Une forme quadratique est une norme si et seulement si sa forme polaire est un produit scalaire donc si et seulement si les valeurs propres de la matrice (symétrique réelle) associée (dans la base canonique) sont toutes strictement positives.

2. **What's the kind of the conique** :

   Soit une conique d'équation cartésienne, dans le repère canonique orthonormé direct du plan euclidien :

   $$\underbrace{a\,x^2 + b\,x\,y + c\,y^2}_{\text{partie quadratique}} + \underbrace{u\,x + v\,y}_{\text{partie linéaire}} + \underbrace{r}_{\text{constante}} = 0$$

   Cette équation s'écrit $q(x,y) + \ell(x,y) + r = 0$, avec q forme quadratique et ℓ forme bilinaire sur $\mathbb{R}^2$.

   On peut effectuer un changement de base <u>orthonormée et directe</u> (et donc de repère, en gardant la même origine), pour arriver dans un repère orthonormé direct où l'expression quadratique $q(x,y)$ ne contient plus que des carrés !

   Dans ce nouveau repère, la conique a une équation de la forme

   $$\underbrace{a'\,x'^2 + b'\,y'^2} + \underbrace{u'\,x' + v'\,y'} + r' = 0$$

   ce qui permet d'identifier aisément la nature de la conique ainsi que ses paramètres.

   Remarque. On peut ensuite faire une translation (changement d'origine du nouveau repère) pour faire disparaître la partie linéaire en totalité (cas des coniques à centre(s), par exemple ellipses et hyperboles) ou partiellement (paraboles).

3. **What's the kind of the quadrique** :

   Une quadrique est une surface de l'espace euclidien de dimension 3, dont l'équation cartésienne, dans le repère canonique orthonormé direct, est de la forme :

   $$\underbrace{a\,x^2 + b\,y^2 + c\,z^2 + \alpha\,x\,y + \beta\,x\,z + \gamma\,y\,z}_{\text{partie quadratique}} + \underbrace{u\,x + v\,y + w\,z}_{\text{partie linéaire}} + \underbrace{r}_{\text{constante}} = 0$$

   De même que pour les coniques, on effectue un changement de repère <u>orthonormé et direct</u> (de même origine), pour arriver dans un repère orthonormé direct où l'équation ne contient aucun double produit croisé $x'\,y'$, $x'\,z'$, $y'\,z'$, sous la forme

   $$\underbrace{a'\,x'^2 + b'\,y'^2 + c'\,z'^2} + \underbrace{u'\,x' + v'\,y' + w'\,z'} + r' = 0$$

   ce qui permet d'identifier la nature de la quadrique (en coupant par des plans parallèles au plans de coordonnées, on trouve certaines sortes de coniques).

   Remarque. On peut ensuite faire une translation (changement d'origine du nouveau repère) pour faire disparaître la partie linéaire en totalité (cas des quadriques à centre(s)) ou partiellement.

2.4.2 Un peu de Maple (pour finir la page)

```
> restart: with(linalg):
Expression d'une quadrique dans R^3 (partie quadratique + partie linéaire + cte
> E := x^2 + y^2 + 2 * z^2 - 2 * x*y + 4 * x*z    + x - y + z    - 3;
> f := unapply( E, (x,y,z));
Matrice symétrique réelle associée à la partie quadratique
> A := matrix( 3,3, (i,j) -> 1/2 * D[i,j](f)(0,0) );
Réduction orthogonale de A
> Eps := eigenvects( A );
> Delta := diag(seq( u[1]$u[2], u=Eps));
> Vps := [seq( op(u[3]), u=Eps)]:
> Vps2 := GramSchmidt( Vps, normalized):
> P := transpose( matrix( Vps2 ));
> .....
```

< *FIN* >