Géométrie en dimension 2.
Enveloppes, développées, développantes

Antoine MOTEAU antoine.moteau@wanadoo.fr

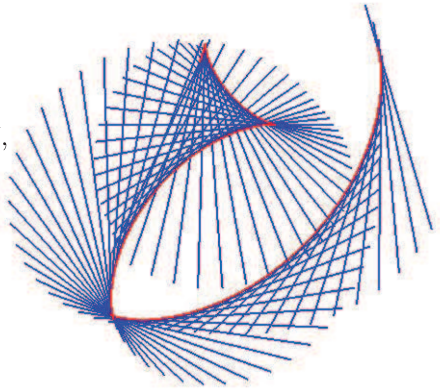
Table des matières

Géométrie en dimension 2. Enveloppes, Développées, Développantes

Le plan affine euclidien est muni de son repère canonique orthonormé $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.

1 Enveloppe d'une famille de droites dépendant d'un paramètre

1.1 Définition



Soient

- I un intervalle de $\mathbb{R}$
- $\left(\mathcal{D}(t)\right)_{t\in I}$ une famille de droites dépendant du paramètre $t \in I$, chaque droite $\mathcal{D}(t)$ ayant pour équation cartésienne

$$D(t): \qquad x\,a(t) + y\,b(t) + c(t) = 0$$

avec a, b, c fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur I

Pour $t \in I$, on note $\mathcal{D}'(t)$ la droite d'équation cartésienne :

$$D'(t): \qquad x\,a'(t) + y\,b'(t) + c'(t) = 0$$

Théorème 1.1.1.

Si, pour tout $t \in I$, les droites $\mathcal{D}(t)$ et $\mathcal{D}'(t)$ se coupent en un seul point $M(t)$, tel que l'arc (Γ), de paramétrage $t \longmapsto M(t)$ soit de classe $\mathcal{C}^1$ et régulier sur I,

alors (Γ) est l'unique arc admettant comme tangente, au point $M(t)$, la droite $\mathcal{D}(t)$.

(Γ) **est l'enveloppe de la famille de droites** $\left(\mathcal{D}(t)\right)_{t\in I}$.

Preuve.

1. Analyse :
   Soit un arc (Γ), $t \longmapsto M(t) = O + x(t)\,\overrightarrow{i} + y(t)\,\overrightarrow{j}$, de classe $\mathcal{C}^1$ et régulier sur I tel, pour tout $t \in I$, la droite $\mathcal{D}(t)$ soit tangente à (Γ) en $M(t)$.
   $M(t) \in \mathcal{D}(t)$ et $\dfrac{d\overrightarrow{M}}{dt}(t)$ dirige $\mathcal{D}(t)$ se traduit par $\begin{cases} x(t)\,a(t) + y(t)\,b(t) + c(t) = 0 \\ x'(t)\,a(t) + y'(t)\,b(t) = 0 \end{cases}$
   En dérivant la première équation par rapport à t puis en enlevant la deuxième, on obtient : $x(t)\,a'(t) + y(t)\,b'(t) + c'(t) = 0$, Ce qui prouve que $M(t)$ appartient aussi à $\mathcal{D}'(t)$.

2. Synthèse :
   Soit $M(t) = O + x(t)\,\overrightarrow{i} + y(t)\,\overrightarrow{j}$ le seul point satisfaisant aux équations

$$\begin{cases} x(t)\,a(t) + y(t)\,b(t) + c(t) = 0 \\ x(t)\,a'(t) + y(t)\,b'(t) + c'(t) = 0 \end{cases} \qquad \text{et tel que } \frac{d\overrightarrow{M}}{dt}(t) \neq \overrightarrow{0}$$

   En dérivant la première équation puis en combinant avec la deuxième, on obtient
   $x'(t)\,a(t) + y'(t)\,b(t) = 0$, ce qui prouve que $\dfrac{d\overrightarrow{M}}{dt}(t)$ dirige $\mathcal{D}(t)$ et ainsi que :
   $\mathcal{D}(t)$ est tangente en $M(t)$ à la courbe décrite par les points $M(t)$.

Définition 1.1.1.

Le point $M(t)$ d'intersection de la droite $\mathcal{D}(t)$ et de la droite $\mathcal{D}'(t)$ est appelé **point caractéristique** de la droite $\mathcal{D}(t)$.

(L'enveloppe est donc l'ensemble des points caractéristiques).

1.2 Mise en œuvre

Pour résoudre le système des deux équations linéaires, à deux inconnues $x(t)$ et $y(t)$:

$$\begin{cases} x(t)\ a(t) + y(t)\ b(t) + c(t) = 0 \\ x(t)\ a'(t) + y(t)\ b'(t) + c'(t) = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x(t)\ a(t) + y(t)\ b(t) = -c(t) \\ x(t)\ a'(t) + y(t)\ b'(t) = -c'(t) \end{cases}$$

il est préférable d'utiliser les **formules de Cramer** sur un intervalle I où le système est de Cramer.

1.3 Exemples

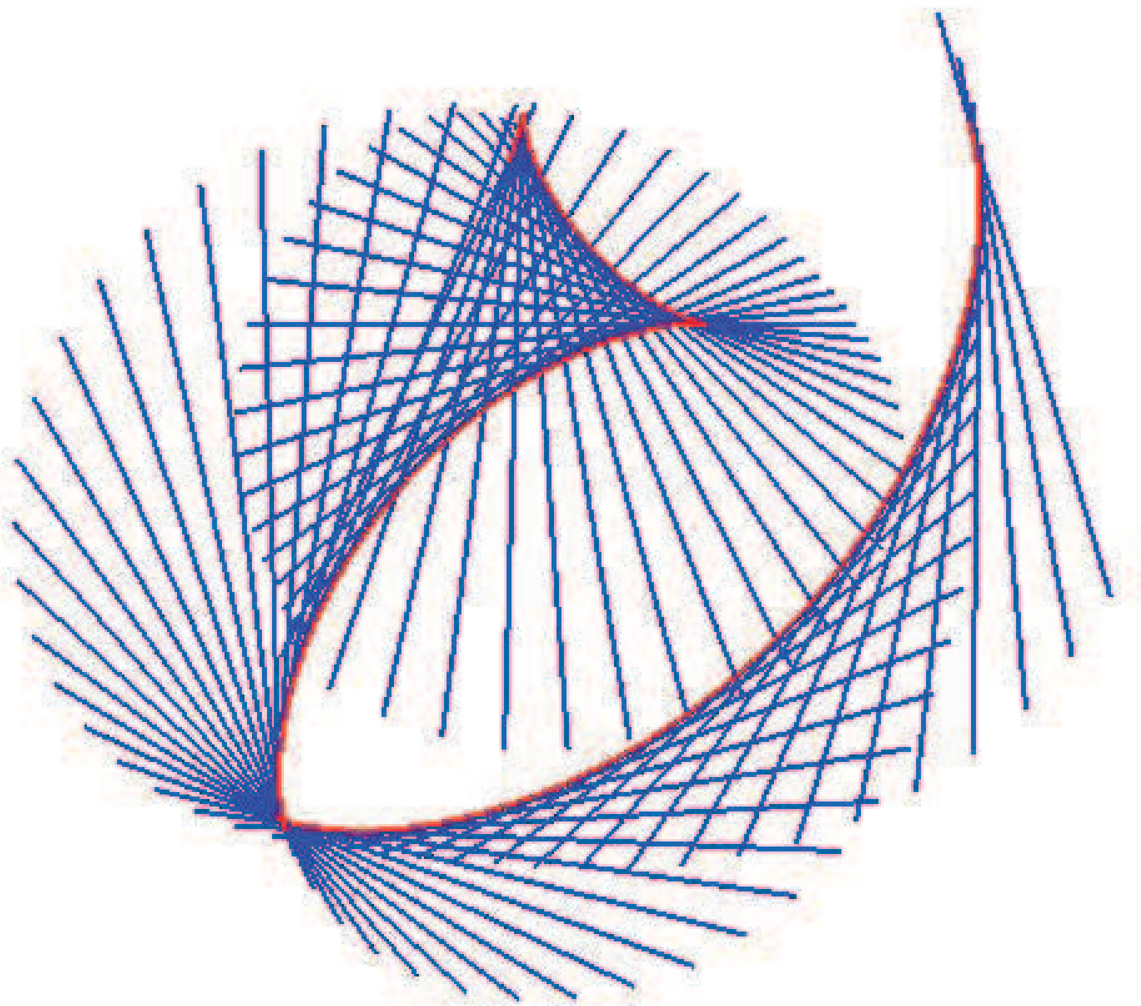
Exemple 1.3.0.1. Déterminer l'enveloppe des droites coupant l'axe Ox en A et l'axe Oy en B, de façon que le triangle AOB soit d'aire constante $k > 0$.

1. On commence par proposer un **bon** paramètre pour ces droites
2. puis on détermine l'équation d'une droite, en fonction de ce paramètre
3. pour en déduire (un) paramètrage de l'enveloppe
4. avant de représenter graphiquement l'enveloppe et quelques droites

Exemple 1.3.0.2. Soit la famille des droites $\left(\mathcal{D}(t)\right)_{t\in R}$, dépendant du paramètre t et d'équation

$$x\ \cos(t) + y\ \sin(t) + 5\sin\left(\frac{t}{3}\right) - 2\sin(2\,t) + 2 = 0$$

Lorsque, t varie entre -2 et 5 par incrément de 0.1, la représentation d'un tronçon de chacune des droites $\mathcal{D}(t)$, autour de son point caractéristque, donne un tracé qui évoque l'enveloppe de la famille des droites :



2 Développée d'un arc plan

2.1 Définition et notations

Définition 2.1.1.

La développée d'un arc paramétré plan, de classe $\mathcal{C}^2$ et birégulier, est l'ensemble de ses centres de courbure.

L'arc (Γ) étant représenté sous forme

- cartésienne paramétrée : $t \longmapsto M(t) = O + x(t)\ \overrightarrow{i} + y(t)\ \overrightarrow{j}$
  (ce qui inclus le cas d'une équation cartésienne $y = f(x)$, si on pose $x = t$)
- polaire paramétrée $t \longmapsto M(t) = O + r(t)\ \overrightarrow{u}(\theta(t))$
  (ce qui inclus le cas usuel $r = r(t)$ lorsque $\theta(t) = t$)

la développée (Γ_d) de (Γ) sera paramétrée par

$$t \longmapsto K(t) = M(t) + R(t)\ \overrightarrow{N}(t) \qquad \begin{cases} R(t) & \text{étant le rayon de courbure de } (\Gamma) \text{ en } M(t) \\ \overrightarrow{N}(t) & \text{étant le vecteur normal } \underline{\text{unitaire}} \text{ à } (\Gamma) \text{ en } M(t) \end{cases}$$

qui donne seulement une forme cartésienne paramétrée.

Remarques.

- (Γ) peut aussi être paramétrée par son (une) abscisse curviligne
- la développée (Γ_d) de (Γ) peut aussi être paramétrée par
  - l'abscisse curviligne de (Γ)
  - une abscisse curviligne qui lui est propre
- (Γ) peut aussi être paramétrée par l'abscisse curviligne de sa développée (Γ_d)

ce qui risque d'entraîner quelques confusions . . . si on ne prends pas quelques précautions, par exemple en adoptant les <u>**conventions**</u> suivantes :

- L'arc (Γ), premier arrivé, prends les notations usuelles (par défaut) :

$$\begin{cases} s & \text{est pris au sens de "abscisse curviligne" de } (\Gamma) \\ \overrightarrow{T} & \text{est pris au sens de "vecteur tangent unitaire" de } (\Gamma) \\ \overrightarrow{N} & \text{est pris au sens de "vecteur normal unitaire" de } (\Gamma) \\ R & \text{est pris au sens de "rayon de courbure" de } (\Gamma) \end{cases}$$

- L'arc (Γ_d), dernier arrivé, prends les notations qui restent (inusitées ou plus lourdes) :

$$\begin{cases} s_d \text{ ou } s_1 \text{ ou } \sigma & \text{est pris au sens de "abscisse curviligne" de } (\Gamma_d) \\ \overrightarrow{T}_d \text{ ou } \overrightarrow{T}_1 & \text{est pris au sens de "vecteur tangent unitaire" de } (\Gamma_d) \\ \overrightarrow{N}_d \text{ ou } \overrightarrow{N}_1 & \text{est pris au sens de "vecteur normal unitaire" de } (\Gamma_d) \\ R_d \text{ ou } R_1 & \text{est pris au sens de "rayon de courbure" de } (\Gamma_d) \end{cases}$$

<u>**mais il ne faut jamais utiliser des notations "prime"**</u> qui produiraient la plus grande confusion dans un <u>**contexte de dérivation**</u>.

2.2 Propriétés

Théorème 2.2.1.

Etant donné un arc (Γ), de paramétrage $t \longmapsto M(t)$, de classe $\mathcal{C}^2$, la développée de (Γ) admet comme tangente, en son point birégulier $K(t) = M(t) + R(t)\ \overrightarrow{N}(t)$, la normale à (Γ) au point $(M(t)$.

Autrement dit, $\boxed{\textbf{la développée de } (\Gamma) \textbf{ est l'enveloppe des normales de } (\Gamma).}$

Preuve.

En paramétrant la développée (Γ_d) de (Γ) par (une) l'abscisse curviligne s de (Γ),

$$K(t) \equiv K(s) = M(s) + R(s)\,\overrightarrow{N}(s)$$

on obtient un vecteur tangent à (Γ_d) en $K(t) = K(s)$ en dérivant par rapport à s :

$$\frac{\overrightarrow{dK}}{ds} = \frac{\overrightarrow{dM}}{ds} + \frac{dR}{ds}(s)\,\overrightarrow{N}(s) + R(s)\,\frac{\overrightarrow{dN}}{ds} = \overrightarrow{T} + \frac{dR}{ds}\,\overrightarrow{N}(s) + R\,\frac{-1}{R}\,\overrightarrow{T} = \frac{dR}{ds}\,\overrightarrow{N}(s)$$

ce qui prouve que la normale à (Γ) en $M(t) = M(s)$ est tangente à (Γ_d) en $K(t) = K(s)$.

Remarque. $\dfrac{\overrightarrow{dK}}{ds}$ n'est pas le vecteur tangent unitaire en K à (Γ_d)
puisque s n'est pas l'abscisse curviligne sur (Γ_d) !

2.3 Détermination pratique de la développée

2.3.1 Comme ensemble des centres de courbures

Il faut, exprimer le centre de courbure en fonction de t : $K(t) = M(t) + R(t)\,\overrightarrow{N}(t)$,
ce qui demande les calculs successifs de :

$$\frac{\overrightarrow{dM}}{dt} \quad ; \quad s' = \frac{ds}{dt} = \left\|\frac{\overrightarrow{dM}}{dt}\right\|_2 \quad ; \quad \overrightarrow{T} \quad ; \quad \overrightarrow{N} \quad ; \quad R$$

- Une fois le calcul de $\overrightarrow{T} = \dfrac{\overrightarrow{dM}}{ds}$ effectué, on obtient $\overrightarrow{N}$ sans calculs.
- Le calcul de R est parfois facile, surtout si on a l'angle α.

2.3.2 Comme enveloppe des normales

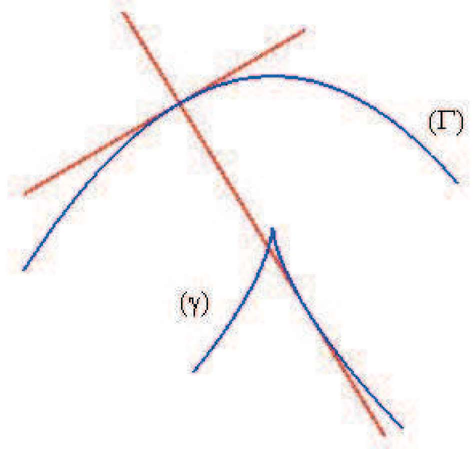
Cette méthode, qui n'utilise pas l'abscisse curviligne, est plus automatique que la précédente, mais peut aussi être plus calculatoire (si on ne sait pas simplifier les expressions intermédiaires).

On obtient aisément le vecteur $\dfrac{\overrightarrow{dM}}{dt}$, tangent à (Γ) en $M(t)$, et on en déduit immédiatement l'équation cartésienne de la normale $\mathcal{N}$ à (Γ) en $M(t)$:

$$m = O + X\,\overrightarrow{i} + Y\,\overrightarrow{j} \in \mathcal{N} \iff \left\langle \overrightarrow{m\,M(t)} \,\middle|\, \frac{\overrightarrow{dM}}{dt} \right\rangle = 0$$

Par simple dérivation, on obtient l'autre équation et ensuite, les formules de Cramer donnent une représentation paramétrique de la développée.

Exemple 2.3.2.1.



(Γ) est la parabole d'équation cartésiennes $y = -x^2 + 3$

et d'équations paramétriques $\begin{cases} x = t \\ y = -t^2 + 3 \end{cases}$

- La normale $\mathcal{D}(t)$ à (Γ) en $M(t)$ a pour équation

$$(x - t) \times 1 + (y + t^2 - 3) \times (-2t) = 0$$

- Le système $\begin{cases} \mathcal{D}(t) : & x - 2t\,y = 2t^3 - 5t \\ \mathcal{D}'(t) : & -2y = 6t^2 - 5 \end{cases}$ donne les équations paramétriques de (Γ_d) : $\begin{cases} x = -4t^3 \\ y = \dfrac{5 - 6t^2}{2} \end{cases}$

On a représenté

- $\begin{cases} (\Gamma) \text{ pour } t \text{ variant entre } -0.8 \text{ et } +0.6 \\ (\Gamma_d) \text{ pour } t \text{ variant entre } -0.47 \text{ et } +0.4 \end{cases}$
- la tangente et la normale à (Γ) au point $M(t = -0.3)$

3 Développantes d'un arc plan

3.1 Définition

Définition 3.1.1.

> Un arc qui admet l'arc (Γ) comme développée est appelé <u>une</u> **développante** de (Γ).

Remarque. La recherche des développantes est en quelque sorte l'opération réciproque de la recherche de la développée.

3.2 Recherche des développantes

3.2.1 Analyse :

Soient $\begin{cases} (\Gamma) : t \longmapsto M(t) \text{ un arc de classe } \mathcal{C}^2, \text{ birégulier,} \\ (\Gamma_d) : t \longmapsto K(t) \text{ la développée de } (\Gamma), \text{ que l'on suppose de classe } \mathcal{C}^2. \end{cases}$

Déterminer (Γ) comme développante de (Γ_d) consiste à tenter d'exprimer (Γ) à partir de (Γ_d).

<u>Notations</u>

Pour (Γ) :
- Le point courant est noté M
- L'abscisse curviligne est s
- Le rayon de courbure en M est R
- Le vecteur unitaire tangent en M est $\overrightarrow{T} = \dfrac{\overrightarrow{dM}}{ds}$
- Le vecteur unitaire normal en M est $\overrightarrow{N}$ $\quad \left(\det\left(\overrightarrow{T}, \overrightarrow{N}\right) = 1\right)$

Pour (Γ_d) :
- Le point courant est noté K
- L'abscisse curviligne est σ
- Le rayon de courbure en K est R_d
- Le vecteur unitaire tangent en K est $\overrightarrow{T_d} = \dfrac{\overrightarrow{dK}}{d\sigma}$
- Le vecteur unitaire normal en K est $\overrightarrow{N_d}$ $\quad \left(\det\left(\overrightarrow{T_d}, \overrightarrow{N_d}\right) = 1\right)$

Le point courant K de (Γ_d) peut s'exprimer sous les formes :

(1)	$K(t) = M(t) + R(t)\,\overrightarrow{N}(t)$	(Γ) étant paramétrée par son paramètre initial t
(2)	$K(s) = M(s) + R(s)\,\overrightarrow{N}(s)$	(Γ) étant paramétrée par son abscisse curviligne s
(3)	$K(\sigma) = M(\sigma) + R(\sigma)\,\overrightarrow{N}(\sigma)$	(Γ) étant paramétrée par σ, abscisse curviligne de Γ_d

- Choisissons le paramétrage de K par s : $K(s) = M(s) + R(s)\,\overrightarrow{N}(s)$. En dérivant par raport à s,

$$\frac{\overrightarrow{dK}}{ds} = \frac{\overrightarrow{dM}}{ds} + \frac{dR}{ds}\overrightarrow{N} + R\frac{\overrightarrow{dN}}{ds} = \overrightarrow{T} + \frac{dR}{ds}\overrightarrow{N} + R\left(-\frac{1}{R}\right)\overrightarrow{T} = \frac{dR}{ds}\overrightarrow{N}$$

or $\overrightarrow{T_d} = \dfrac{\overrightarrow{dK}}{d\sigma} = \dfrac{\overrightarrow{dK}}{ds}\,\dfrac{ds}{d\sigma}$ et on en déduit que $\boxed{\overrightarrow{T_d} \text{ est colinéaire à } \overrightarrow{N}}$

- Choisissons le paramétrage de K par σ : $K(\sigma) = M(\sigma) + R(\sigma)\,\overrightarrow{N}(\sigma)$ $\quad \left(M(\sigma) = K(\sigma) - R(\sigma)\,\overrightarrow{N}(\sigma)\right)$.

  Comme $\overrightarrow{N}(\sigma)$ est colinéaire à $\overrightarrow{T_d}(\sigma)$, il existe une fonction f telle que

  $\boxed{M(\sigma) = K(\sigma) + f(\sigma)\,\overrightarrow{T_d}(\sigma) \quad , f \text{ inconnue pour l'instant.}}$ et en dérivant par rapport à σ,

$$\frac{\overrightarrow{dM}}{d\sigma} = \frac{\overrightarrow{dK}}{d\sigma} + f'(\sigma)\,\overrightarrow{T_d}(\sigma) + [\cdots]\,\overrightarrow{N_d}(\sigma) = \Big[1 + f'(\sigma)\Big]\,\overrightarrow{T_d}(\sigma) + [\cdots]\,\overrightarrow{N_d}(\sigma)$$

  $\dfrac{\overrightarrow{dM}}{d\sigma}$, vecteur de la tangente en M à (Γ), est orthogonal à la normale en M à (Γ) (tangente en K à (Γ_d)), donc orthogonal à $\overrightarrow{T_d}(\sigma)$. La composante de $\dfrac{\overrightarrow{dM}}{d\sigma}$ sur $\overrightarrow{T_d}(\sigma)$ est nulle, ce qui prouve que $f'(\sigma) = -1$

$$\boxed{M(\sigma) = K(\sigma) + \left(k - \sigma\right)\overrightarrow{T_d}(\sigma) \quad \text{où } k \text{ est une constante à déterminer}}$$

3.2.2 Synthèse.

Soit $(\Gamma_d) : t \longmapsto K(t)$ un arc de classe $\mathcal{C}^2$, birégulier (on garde les notations précédentes).

On vérifie qu'un arc (Γ), défini par un paramétrage fonction de l'abscisse curviligne de (Γ_d) de la forme :

$$M(\sigma) = K(\sigma) + \Big(k - \sigma\Big)\ \overrightarrow{T_d}(\sigma) \qquad \text{(où } k \text{ est une constante arbitraire)}$$

est une développante de (Γ_d). Pour cela, il suffit de vérifier que (Γ_d) est la développée de (Γ) :

1. Calcul de R

$$\frac{d\overrightarrow{M}}{d\sigma} = \frac{d\overrightarrow{K}}{d\sigma} - \overrightarrow{T_d} + \Big(k - \sigma\Big)\ \frac{d\overrightarrow{T_d}}{d\sigma} = \frac{k-\sigma}{R_d}\ \overrightarrow{N_d}$$

$$\frac{d^2\overrightarrow{M}}{d\sigma^2} = fonc(\sigma)\ \overrightarrow{N_d} - \frac{k-\sigma}{R_d}\ \frac{1}{R_d}\ \overrightarrow{T_d}$$

$$\frac{1}{R} = \frac{\det_{\mathcal{C}}\left(\dfrac{d\overrightarrow{M}}{d\sigma}, \dfrac{d^2\overrightarrow{M}}{d\sigma^2}\right)}{\left\|\dfrac{d\overrightarrow{M}}{d\sigma}\right\|_2^3} = \frac{(k-\sigma)^2}{{R_d}^3} \times \frac{{R_d}^3}{|k-\sigma|^3} \quad \text{et on en déduit que} \quad \boxed{R = |k - \sigma|}$$

2. Calcul de $\dfrac{ds}{d\sigma}$

$$\frac{d\overrightarrow{M}}{ds} = \frac{d\overrightarrow{M}}{d\sigma}\ \frac{d\sigma}{ds} = \frac{k-\sigma}{R_d}\ \frac{d\sigma}{ds}\ \overrightarrow{N_d} = \frac{k-\sigma}{R_d}\ \frac{1}{\dfrac{ds}{d\sigma}}\ \overrightarrow{N_d}$$

Comme $\dfrac{d\overrightarrow{M}}{ds}$ et $\overrightarrow{N_d}$ sont tous les deux unitaires, on a : $\boxed{\dfrac{ds}{d\sigma} = \pm\dfrac{k-\sigma}{R_d}}$

3. Calcul de $\overrightarrow{N}$

$\dfrac{d\overrightarrow{M}}{ds}$ étant unitaire, $\dfrac{d^2\overrightarrow{M}}{ds^2}$ est orthogonal à $\dfrac{d\overrightarrow{M}}{ds}$ colinéaire à $\overrightarrow{N_d}$ et ainsi $\boxed{\dfrac{d^2\overrightarrow{M}}{ds^2} \text{ est colinéaire à } \overrightarrow{T_d}}$

$$\frac{d^2\overrightarrow{M}}{ds^2} = \frac{d\overrightarrow{T}}{ds} = \frac{1}{R}\ \overrightarrow{N}$$

$$= \frac{d}{d\sigma}\left(\frac{d\overrightarrow{M}}{ds}\right)\ \frac{d\sigma}{ds} = \left[\underbrace{fonct(s)}_{=0}\ \overrightarrow{N_d} + \frac{k-\sigma}{R_d} \times \frac{1}{\dfrac{ds}{d\sigma}} \times \frac{-1}{R_d}\ \overrightarrow{T_d}\right]\ \frac{d\sigma}{ds}$$

$$= -\frac{k-\sigma}{R_d^2}\ \left[\frac{d\sigma}{ds}\right]^2\ \overrightarrow{T_d} = \frac{-1}{k-\sigma}\ \overrightarrow{T_d}$$

ainsi $\dfrac{1}{R}\ \overrightarrow{N} = \dfrac{-1}{k-\sigma}\ \overrightarrow{T_d}$ d'où $R\ \overrightarrow{N} = \dfrac{-R^2}{k-\sigma}\ \overrightarrow{T_d}$, ce qui donne $\boxed{R\ \overrightarrow{N} = -(k-\sigma)\ \overrightarrow{T_d}}$

4. Conclusion : le point courant de la développée de (Γ) est le point

$$M(\sigma) + R(\sigma)\ \overrightarrow{N}(\sigma) = M(\sigma) - (k - \sigma)\ \overrightarrow{T_d} = K(\sigma), \quad \text{cqfd.}$$

En "basculant" les notations entre (Γ) et (Γ_d), puis en exprimant l'abscisse curviligne en fonction d'un paramètre initial t, on obtient le théorème et la formule à appliquer :

Théorème 3.2.1.

Les développantes d'un arc $\left|\begin{array}{l} t \longmapsto M(t), \text{ de classe } \mathcal{C}^2, \text{ birégulier} \\ \text{d'abscisse curviligne } s \longmapsto s(t) \text{ et de vecteur tangent unitaire } \overrightarrow{T}(t) \end{array}\right.$

sont les arcs définis par $\left|\begin{array}{l} t \longmapsto A(t) = M(t) + \Big(k - s(t)\Big)\ \overrightarrow{T}(t) \\ \text{avec } k \text{ constante réelle.} \end{array}\right.$

4 Exemples

On travaillera toujours avec des courbes définies par une représentation

- cartésienne paramétrique $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, éventuellement $\begin{cases} x = t \\ y = y(t) \end{cases}$ ou $\begin{cases} x = x(t) \\ y = t \end{cases}$
- ou polaire $r = r(\theta)$, éventuellement paramétrée $\begin{cases} r = r(t) \\ \theta = t \end{cases}$, ou $\begin{cases} r = r(t) \\ \theta = \theta(t) \end{cases}$ ou $\begin{cases} \theta = \theta(t) \\ r = t \end{cases}$

Le résultat sera donné par une représentation cartésienne paramétrique, même dans le cas où la courbe initiale est en polaire.

4.1 Développées

1. Développée d'une ellipse (on trouve une astroïde).
   Une ellipse étant paramétrée par $\begin{cases} x = a \ \cos t \\ y = b \ \sin t \end{cases}$, $t \in [0, 2\pi[$, dans un repère adapté.
2. Développée d'une cardioïde (on trouve une autre cardioïde).
   Une cardioïde ayant comme équation polaire $r = a\,(1 + \cos\theta)$, $\theta \in [-\pi, \pi[$, dans un repère adapté.
3. Développée d'une parabole, d'équation cartésienne $y^2 = 2p\,x$, dans un repère adapté.
4. ...

4.2 Développantes

Remarque. Pour le calcul de développantes, on se limite en général aux exemples où l'on peut déterminer exactement une primitive de s ..., ce qui réduit assez fortement le nombre d'exercices simples possibles.

1. Développantes d'une astroïde (on y retrouvera entre autres des ellipses).
   Une astroïde étant paramétrée par $\begin{cases} x = a \ \cos^3 t \\ y = b \ \sin^3 t \end{cases}$, $t \in [0, 2\pi[$, dans un repère adapté.
2. Développantes d'une cardioïde (on y retrouvera entre autres des cardioïdes).
   Une cardioïde ayant comme équation polaire $r = a\,(1 + \cos\theta)$, $\theta \in [-\pi, \pi[$, dans un repère adapté.
3. Développantes de la chaînette, d'équation cartésienne $y = a \ \cosh \dfrac{x}{a}$.
4. ...

5 Exercice à réaliser avec Maple (illustration)

Dans le plan affine euclidien, soit la droite $D(t)$ d'équation cartésienne dépendant du paramètre $t \in \mathbb{R}$:

$$x\ a(t) + y\ b(t) + c(t) = 0 \quad \text{avec} \quad \begin{cases} a(t) = \cos(t) \\ b(t) = \sin(t) \\ c(t) = 5\sin\left(\dfrac{t}{3}\right) - 2\sin(2t) + 2 \end{cases}$$

1. Pour t fixé, on cherche une représentation paramétrique de la droite $D(t)$:
   pour $M(t) \in D(t)$, $D(t)$ est paramétrée par : $u \longmapsto M(t) + u\left(-\sin(t)\,\vec{i} + \cos(t)\,\vec{j}\right)$.
   On coupe la droite $D(t)$ par une droite bien choisie, de façon à obtenir un point $M(t)$ simple, (calculs sans aucune division, et définis pour tout t).
   En choisissant la perpendiculaire à $D(t)$ qui passe par O, on aura (ici) un résultat simple.
2. Représenter graphiquement, sur un même graphe et en bleu, les droites $D(t)$, pour t compris entre -2 et 5 par pas de 0.1. (on fera varier le paramètre u, de chacune des droites, entre -5 et 5)
3. Déterminer une représentation paramétrique de l'enveloppe $(\mathcal{C})$ de la famille des droites $D(t)$.
4. Représenter, sur le même graphe, les tronçons de droites $D(t)$ (en bleu) obtenues à la question 2. et la courbe $(\mathcal{C})$ (en rouge épais).

$< \mathcal{FIN} >$