

# Surfaces usuelles

Antoine MOTEAU [antoine.moteau@wanadoo.fr](mailto:antoine.moteau@wanadoo.fr)

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Rappels (éléments tangents)</b>	<b>3</b>
1.1	Surface définie par des équations paramétrées . . . . .	3
1.1.1	Plan tangent en un point régulier . . . . .	3
1.1.2	Tangentes à une courbe tracée sur la surface . . . . .	3
1.2	Surface définie par une équation cartésienne . . . . .	3
1.2.1	Plan tangent en un point régulier . . . . .	3
1.2.2	Tangentes à une courbe tracée sur la surface . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Cylindres</b>	<b>4</b>
2.1	Définition . . . . .	4
2.2	Sections droites d'un cylindre . . . . .	4
2.3	Exemples déjà connus . . . . .	4
2.4	Equation(s) d'un cylindre défini par sa direction et une directrice . . . . .	4
2.4.1	Cylindre dont la directrice est définie par des équations paramétriques . . . . .	5
2.4.2	Cylindre dont la directrice est définie par deux équations cartésiennes . . . . .	6
2.5	Equation(s) d'un cylindre défini par une section droite . . . . .	7
2.5.1	Section droite définie par des équations paramétriques . . . . .	7
2.5.2	Section droite définie par deux équations cartésiennes . . . . .	7
2.6	Equation(s) d'un cylindre de révolution autour d'un axe . . . . .	7
2.6.1	Cylindre de révolution défini par la donnée d'un point et de l'axe . . . . .	7
2.6.2	Cylindre de révolution défini par la donnée d'une génératrice et de l'axe . . . . .	7
2.7	Reconnaissance, caractéristiques d'un cylindre . . . . .	8
2.7.1	Identification d'un cylindre d'après des équations paramétriques . . . . .	8
2.7.2	Identification d'un cylindre d'après une équation cartésienne . . . . .	8
2.8	Equation(s) d'un cylindre défini par sa direction et une condition de contact . . . . .	10
2.8.1	Surface de contact définie par une équation cartésienne . . . . .	10
2.8.2	Surface de contact définie par des équations paramétriques . . . . .	10
<b>3</b>	<b>Cônes</b>	<b>11</b>
3.1	Définition générale . . . . .	11
3.2	Sections planes d'un cône . . . . .	11
3.3	Exemples déjà connus . . . . .	11
3.4	Equation(s) d'un cône défini par son sommet et une directrice . . . . .	11
3.4.1	Cône dont la directrice est définie par des équations paramétriques . . . . .	12
3.4.2	Cône dont la directrice est définie par deux équations cartésiennes . . . . .	13
3.5	Equation(s) d'un cône défini par son sommet et une section plane . . . . .	13
3.5.1	Section plane définie par des équations cartésiennes . . . . .	13
3.5.2	Section plane définie par des équations paramétriques . . . . .	13
3.6	Equation(s) d'un cône de révolution autour d'un axe . . . . .	14
3.6.1	Cône de révolution défini par l'axe, le sommet et le demi-angle au sommet . . . . .	14
3.6.2	Cône de révolution défini par l'axe de révolution et une génératrice . . . . .	14
3.7	Reconnaissance, caractéristiques d'un cône . . . . .	15
3.7.1	Identification d'un cône d'après des équations paramétriques . . . . .	15
3.7.2	Identification d'un cône d'après une équation cartésienne . . . . .	16
3.8	Equation(s) d'un cône défini par son sommet et une condition de contact . . . . .	17
3.8.1	Surface de contact définie par une équation cartésienne . . . . .	17
3.8.2	Surface de contact définie par des équations paramétriques . . . . .	17

<b>4</b>	<b>Surfaces de révolution</b>	<b>18</b>
4.1	Définition	18
4.2	Exemples déjà connus	18
4.3	Equation(s) d'une surface de révolution définie géométriquement	18
4.4	Equation(s) d'une surface de révolution définie par l'axe et une méridienne	19
4.4.1	Méridienne définie par des équations cartésiennes	19
4.4.2	Méridienne définie par des équations paramétriques	20
4.5	Equation(s) d'une surface de révolution définie par l'axe et une directrice	20
4.5.1	Obtention d'une équation cartésienne	20
4.5.2	Obtention d'équations paramétriques	23
4.6	Recherche d'une méridienne à partir d'une équation cartésienne	24
4.7	Reconnaissance, caractéristiques d'une surface de révolution	25
4.7.1	Identification d'une surface de révolution d'après de (bonnes) équations paramétriques	25
4.7.2	Identification d'une surface de révolution d'après une équation cartésienne	25
<b>5</b>	<b>Exemples de surfaces particulières ...</b>	<b>27</b>
5.1	Surface (non orientable) de Mobius, ruban de Mobius	27
5.1.1	Définition	27
5.1.2	Equations paramétriques de la surface de Mobius	27
5.1.3	Equation cartésienne de la surface de Mobius	28
5.2	Surface engendrée par les tangentes à une courbe gauche	28
5.2.1	Courbe définie par des équations paramétriques	28
5.2.2	Courbe définie par des équations cartésiennes	29
5.3	Surface engendrée par des droites s'appuyant sur deux droites fixes	29
5.3.1	Droites fixes orthogonales entre elles et non coplanaires	29
5.4	Exemples de cônoïdes	30
5.4.1	Cônoïdes droits (génératrices perpendiculaires à l'axe)	30
<b>6</b>	<b>Surfaces réglées</b>	<b>31</b>
6.1	Définition	31
6.2	Equations paramétriques d'une surface réglée	31
6.3	Reconnaissance d'une surface réglée	31
6.3.1	Surface définie par une équation cartésienne	31
6.3.2	Surface définie par des équations paramétriques	32
6.4	Exemples de surfaces réglées ou non	32
6.5	Plan tangent à une surface réglée en un point d'une génératrice	32
<b>7</b>	<b>Surfaces développables</b>	<b>33</b>
7.1	Définition	33
7.2	Exemples de surfaces réglées développables	33
7.3	Exemples de surfaces réglées non développables	33

# Surfaces usuelles

L'espace affine réel  $\mathcal{E}_3$ , de dimension 3, est muni du repère canonique  $\mathcal{R}_c = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , orthonormal direct, d'axes  $Ox, Oy, Oz$ .

On cherchera souvent à se placer dans un repère (orthonormal direct) adapté au problème, en prenant soin d'établir clairement les formules de changement de repère et on se replacera ensuite dans le repère initial.

**Par défaut, les coordonnées des points sont exprimées dans le repère canonique.**

## 1 Rappels (éléments tangents)

### 1.1 Surface définie par des équations paramétrées

Soit une surface paramétrée  $(\Sigma)$ , de classe  $\mathcal{C}^1$ , définie sur (l'ouvert)  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^2$ , par le paramétrage :

$$\begin{aligned} \Omega &\longrightarrow \mathcal{E}_3 \\ (u, v) &\longmapsto M(u, v) = \begin{pmatrix} x = f(u, v) \\ y = g(u, v) \\ z = h(u, v) \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_c}, \quad f, g \text{ et } h \text{ étant de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \Omega. \end{aligned}$$

#### 1.1.1 Plan tangent en un point régulier

- Un point  $M(u, v)$  est dit régulier si les vecteurs  $\frac{\partial \vec{M}}{\partial u}(u, v)$  et  $\frac{\partial \vec{M}}{\partial v}(u, v)$  sont indépendants.
- Le plan tangent, en un point  $M(u, v)$  régulier, est dirigé par les vecteurs  $\frac{\partial \vec{M}}{\partial u}(u, v)$  et  $\frac{\partial \vec{M}}{\partial v}(u, v)$
- La normale, en un point  $M(u, v)$  régulier, est dirigée par le vecteur  $\frac{\partial \vec{M}}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial \vec{M}}{\partial v}(u, v)$

On obtient facilement une équation cartésienne du plan tangent en  $M(u, v)$ , soit à l'aide d'un déterminant, soit à l'aide d'un produit scalaire.

#### 1.1.2 Tangentes à une courbe tracée sur la surface

Lorsque  $u$  et  $v$  sont fonctions simultanées d'un même paramètre  $t$  décrivant une partie (ouvert)  $I$  de  $\mathbb{R}$ , la courbe paramétrée  $(\Gamma)$ , définie sur  $I$  par le paramétrage  $\left( t \longmapsto M(u(t), v(t)) \right)$  est une courbe de classe  $\mathcal{C}^1$  tracée sur la surface  $(\Sigma)$ . La tangente à  $(\Gamma)$  au point  $M(u(t), v(t))$  est dirigée par le vecteur

$$\frac{\partial \vec{M}}{\partial u}(u(t), v(t)) \frac{du}{dt}(t) + \frac{\partial \vec{M}}{\partial v}(u(t), v(t)) \frac{dv}{dt}(t) \quad (\text{s'il est non nul})$$

### 1.2 Surface définie par une équation cartésienne

Soit une surface  $(S)$ , définie par une équation cartésienne  $f(x, y, z) = 0$ , où  $f$  est une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  sur un ouvert contenant  $(S)$ .

#### 1.2.1 Plan tangent en un point régulier

- Un point  $M$  de  $(S)$  est dit régulier si  $\overrightarrow{\text{grad}} f(M) \neq \vec{0}$
- En un point  $M$  régulier de  $(S)$ , le vecteur  $\overrightarrow{\text{grad}} f(M)$  dirige la normale au plan tangent en  $M$  à  $(S)$

On obtient facilement une équation cartésienne du plan tangent en  $M$  à l'aide d'un produit scalaire.

#### 1.2.2 Tangentes à une courbe tracée sur la surface

L'intersection de  $(S)$  avec une surface  $(S')$  d'équation cartésienne  $g(x, y, z) = 0$  (avec  $g$  de classe  $\mathcal{C}^1$ ) est une courbe  $(\Gamma)$ , tracée sur  $(S)$ .

- En un point  $M$  de  $(\Gamma)$ , si les plans tangent à  $(S)$  en  $M$  et à  $(S')$  en  $M$  ne sont pas confondus, leur intersection définit la tangente à  $(\Gamma)$  en  $M$ .
- En un point  $M$  de  $(\Gamma)$ , si  $\overrightarrow{\text{grad}} f(M)$  et  $\overrightarrow{\text{grad}} g(M)$  ne sont pas colinéaires, la tangente à  $(\Gamma)$  en  $M$  est dirigée par le vecteur

$$\overrightarrow{\text{grad}} f(M) \wedge \overrightarrow{\text{grad}} g(M)$$

## 2 Cylindres

### 2.1 Définition

#### Définition 2.1.1.

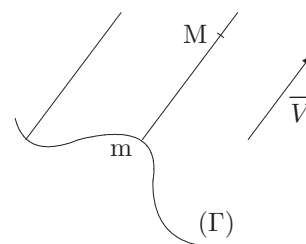
Un cylindre est une surface engendrée par une famille de droites

(droites génératrices du cylindre)

qui

- sont de direction fixe (la direction du cylindre)
- et vérifient une autre condition ...

si cette autre condition est de rencontrer une courbe fixe, cette courbe est appelée (courbe) directrice du cylindre.



### 2.2 Sections droites d'un cylindre

#### Définition 2.2.1.

Les courbes obtenues en coupant un cylindre par un plan orthogonal à la direction du cylindre sont les **sections droites** du cylindre.

*Remarque.* Une section droite est une courbe directrice plane.

*Remarque.* Les courbes obtenues en coupant un cylindre par un plan quelconque, ne contenant pas la direction du cylindre, sont également des directrices, qualifiées de sections planes du cylindre.

### 2.3 Exemples déjà connus

Les cylindres quadratiques sont les quadriques suivantes :

- cylindre à base circulaire, d'équation réduite dans un repère adapté  $x^2 + y^2 = R^2$  ( $z$  quelconque).
- cylindre à base elliptique, d'équation réduite dans un repère adapté  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $z$  quelconque).
- cylindre à base parabolique, d'équation réduite dans un repère adapté  $y^2 = 2px$  ( $z$  quelconque).
- cylindre à base hyperbolique, d'équation réduite dans un repère adapté  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $z$  quelconque).

Cependant, les cylindres ne se limitent pas à ces quelques exemples ...

S'il est assez facile d'identifier un cylindre quadratique à partir d'une équation cartésienne (par réduction orthogonale de la matrice associée par exemple), en dehors des quadriques, il n'est pas toujours évident d'identifier un cylindre à partir

- d'une équation cartésienne
- ou à partir d'équations paramétriques, quand elles ne sont pas de forme canonique (voir ci-dessous).

### 2.4 Equation(s) d'un cylindre défini par sa direction et une directrice

- La direction du cylindre est le plus souvent définie à l'aide d'un vecteur directeur (ou alors on se ramène rapidement à cette définition).
- Une courbe directrice est le plus souvent définie par
  - par trois équations paramétriques
  - par deux équations cartésiennes
 (ou alors on se ramène préalablement à cette définition).

*Remarque.* Si la courbe directrice est une section droite, la direction du cylindre peut ne pas être précisée. Il faut alors déterminer cette direction à partir (du plan) de la section droite.

### 2.4.1 Cylindre dont la directrice est définie par des équations paramétriques

On suppose que la directrice  $(\Gamma)$  est définie par les équations paramétriques : 
$$\begin{cases} x = x_1(t) \\ y = y_1(t) \\ z = z_1(t) \end{cases} \quad t \in I$$
 et que la direction du cylindre est donnée par le vecteur  $\vec{V} = a \vec{i} + b \vec{j} + c \vec{k}$ .

$M(x, y, z) \in (\Sigma)$  ssi  $\exists m \in (\Gamma) : \overrightarrow{mM}$  est colinéaire à  $\vec{V}$

$$\text{ssi } \exists t \in I : \exists \lambda \in \mathbb{R} : \begin{cases} x - x_1(t) = \lambda a \\ y - y_1(t) = \lambda b \\ z - z_1(t) = \lambda c \end{cases}$$

$$1. \text{ On obtient directement des équations paramétriques du cylindre } (\Sigma) : \begin{cases} x = x_1(t) + \lambda a \\ y = y_1(t) + \lambda b \\ z = z_1(t) + \lambda c \end{cases} \quad \begin{cases} t \in I \\ \lambda \in \mathbb{R} \end{cases}$$

2. Pour obtenir une équation cartésienne du cylindre  $(\Sigma)$ , on pourra éliminer les deux paramètres entre les trois équations paramétriques.

**Exemple 2.4.1.1.** Cylindre  $(\Sigma)$  défini par 
$$\begin{cases} \text{sa direction, de vecteur : } \vec{V} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k} \\ \text{une directrice paramétrée par : } \begin{cases} x = \frac{t}{t-1} \\ y = \frac{t^2}{t-1} \\ z = \frac{t^3}{t-1} \end{cases} \end{cases}$$

$$1. \text{ Le cylindre } (\Sigma) \text{ a pour équations paramétriques } \begin{cases} x = \frac{t}{t-1} + \lambda \\ y = \frac{t^2}{t-1} + 2\lambda \\ z = \frac{t^3}{t-1} - \lambda \end{cases} \quad \begin{cases} t \in \mathbb{R} \setminus \{1\} \\ \lambda \in \mathbb{R} \end{cases}$$

2. Pour obtenir une équation cartésienne de  $(\Sigma)$ ,

(a) l'élimination de  $\lambda$ , entre les trois équations paramétrées, conduit à

$$M(x, y, z) \in (\Sigma) \iff \exists t : \begin{cases} 2 \left( x - \frac{t}{t-1} \right) = y - \frac{t^2}{t-1} \\ x - \frac{t}{t-1} = -z + \frac{t^3}{t-1} \end{cases}$$

(b) il reste à éliminer  $t$  entre ces deux dernières équations :

$$\begin{cases} 2x - y = \frac{2t - t^2}{t-1} & \left( = 1 - t + \frac{1}{t-1} \right) \\ x + z = \frac{t + t^3}{t-1} & \left( = 2 + t + t^2 + \frac{2}{t-1} \right) \end{cases} \quad \begin{cases} (t-1)(2x-y) = 2t - t^2 \\ -3x + 2y + z = 3t + t^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (t-1)(2x-y) = 2t - t^2 \\ -3x + 2y + z + (t-1)(2x-y) = 5t \end{cases} \quad \begin{cases} (t-1)(2x-y) = 2t - t^2 \\ -5x + 3y + z = -t(2x-y-5) \end{cases}$$

En posant  $P = 5x - 3y - z$  et  $Q = 2x - y$ , on a  $t = \frac{P}{Q-5}$  (sauf pour  $2x - y - 5 = 0$ ) que l'on reporte dans la première équation pour obtenir l'équation cartésienne sous la forme :

$$\left( \frac{P}{Q-5} - 1 \right) Q = 2 \frac{P}{Q-5} - \left( \frac{P}{Q-5} \right)^2$$

ou encore, en multipliant par  $(Q-5)^2$  (et on récupère ainsi les points où  $2x - y - 5 = 0$ ) :

$$(P - (Q-5)) Q (Q-5) - 2P(Q-5) + P^2 = 0 \quad \text{avec} \quad \begin{cases} P = 5x - 3y - z \\ Q = 2x - y \end{cases}$$

*Remarque.* La direction du cylindre est l'intersection des plans d'équations  $P = 0$  et  $Q = 0$ .

### 2.4.2 Cylindre dont la directrice est définie par deux équations cartésiennes

On suppose que la directrice  $(\Gamma)$  est définie comme intersection de deux surfaces par :  $\begin{cases} f(x, y, z) = 0 \\ g(x, y, z) = 0 \end{cases}$   
la direction du cylindre étant donnée par le vecteur  $\vec{V} = a \vec{i} + b \vec{j} + c \vec{k}$ .

$$\begin{aligned} M(x, y, z) \in (\Sigma) \text{ ssi } & \left( \exists m \in (\Gamma) : \overrightarrow{mM} \text{ est colinéaire à } \vec{V} \right) \\ & \text{ssi } \left( \exists \lambda \in \mathbb{R} : m = M + \lambda \vec{V} \in (\Gamma) \right) \\ & \text{ssi } \exists \lambda \in \mathbb{R} : \begin{cases} f(x + \lambda a, y + \lambda b, z + \lambda c) = 0 \\ g(x + \lambda a, y + \lambda b, z + \lambda c) = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

En éliminant le paramètre  $\lambda$  entre ces deux équations, on obtient une équation cartésienne de  $(\Sigma)$ .

**Exemple 2.4.2.1.** Cylindre  $(\Sigma)$  dont les génératrices

$$\begin{cases} \text{sont dirigées par } \vec{V} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k} \\ \text{s'appuient sur la courbe } (\Gamma) \text{ d'équations : } \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} M(x, y, z) \in (\Sigma) \text{ ssi } & \left( \exists \lambda \in \mathbb{R} : m = M + \lambda \vec{V} \in (\Gamma) \right) \\ & \text{ssi } \exists \lambda \in \mathbb{R} : \begin{cases} (x + \lambda)^2 + (y + 2\lambda)^2 + (z - \lambda)^2 = 1 \\ (x + \lambda) + (y + 2\lambda) + (z - \lambda) = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

de la deuxième équation on déduit  $\lambda = -\frac{1}{2}(x + y + z)$ , que l'on reporte dans la première équation, pour obtenir une équation cartésienne de  $(\Sigma)$  :  $(x - y - z)^2 + (2x + 2z)^2 + (x + y + 3z)^2 = 4$  ou encore

$$P^2 + (P + Q)^2 + Q^2 - 4 = 0 \quad \text{avec} \quad \begin{cases} P = x - y - z \\ Q = x + y + 3z \end{cases}$$

*Remarques.*

- La direction du cylindre est l'intersection des plans d'équations  $P = 0$  et  $Q = 0$ .
- Ici, il s'agit d'une quadrique, et on peut chercher à préciser plus sa nature :
  - Méthode 1 : étude matricielle (diagonaliser la partie quadratique), changement de repère orthonormé, équation cartésienne dans le nouveau repère, puis identification des sections droites, dans le nouveau repère (coniques définies par des équations cartésiennes réduites dans leur plan).
  - Méthode 2 : changement de repère orthonormé sans étude matricielle : base orthonormée directe  $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$  où  $\vec{K}$  est colinéaire à  $\vec{V}$ , équation cartésienne dans le nouveau repère, puis identification des sections droites, dans le nouveau repère (coniques définies par des équations cartésiennes réduites dans leur plan).
  - Méthode 3 : identification directe, dans le repère actuel, des sections droites, d'équations

$$\begin{cases} (x - y - z)^2 + (2x + 2z)^2 + (x + y + 3z)^2 = 4 \\ x + 2y - z = \mu \end{cases}$$

L'identification n'étant pas évidente sous cette forme, on pourra chercher les projections orthogonales des sections droites sur les plans de coordonnées. Par exemple :

Si  $(\mathcal{C})$  est la projection d'une section droite sur le plan  $xOy$ ,

$$\begin{aligned} m(x, y) \in (\mathcal{C}) \text{ ssi } & \exists M(x, y, z) : \begin{cases} (x - y - z)^2 + (2x + 2z)^2 + (x + y + 3z)^2 = 4 \\ x + 2y - z = \mu \end{cases} \\ & \text{ssi } \exists z \in \mathbb{R} : \begin{cases} (x - y - z)^2 + (2x + 2z)^2 + (x + y + 3z)^2 = 4 \\ x + 2y - z = \mu \end{cases} \\ & \text{ssi } \dots \text{ équation cartésienne en } (x, y), \text{ dépendant de } \mu, \\ & \text{obtenue par élimination de } z \text{ entre les deux équations précédentes;} \end{aligned}$$

## 2.5 Equation(s) d'un cylindre défini par une section droite

On doit vérifier que la section droite est une courbe plane. Le calcul de l'équation du plan de la section droite donne la direction du cylindre. Il ne restera plus qu'à appliquer les méthodes précédentes ...

### 2.5.1 Section droite définie par des équations paramétriques

**Exemple 2.5.1.1.** Cylindre  $(\Sigma)$  ayant pour section droite  $(\Gamma)$  d'équations paramétriques : 
$$\begin{cases} x = t^2 + t - 1 \\ y = t + 1 \\ z = t^2 + 1 \end{cases}$$

En éliminant  $t$  entre les trois équations, on vérifie que les points de  $(\Gamma)$  se trouvent dans le plan d'équation  $x - y - z = 3$ . La direction du cylindre est donnée par le vecteur  $\vec{V} = \vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$ . Ensuite, comme précédemment ... on obtient des équations paramétriques, puis une équation cartésienne.

### 2.5.2 Section droite définie par deux équations cartésiennes

**Exemple 2.5.2.1.** Cylindre  $(\Sigma)$  ayant pour section droite  $(\Gamma)$  d'équations : 
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \\ (x - 1)^2 + (y - 1)^2 + z^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

En enlevant la deuxième équation à la première (élimination des carrés), on vérifie que les points de  $(\Gamma)$  se trouvent dans le plan d'équation  $x + y - 1 = 0$ . La direction du cylindre est donnée par  $\vec{V} = \vec{i} + \vec{j}$ . Ensuite, on procède comme précédemment pour obtenir une équation cartésienne ...

## 2.6 Equation(s) d'un cylindre de révolution autour d'un axe

Surface (quadrique) engendrée par la rotation, autour d'un axe  $(\Delta)$ , d'une droite  $(D)$  parallèle à l'axe.

Obtention d'une équation cartésienne :

le plus simple est d'utiliser comme référence un point  $M_0$  de la droite  $(D)$  :

$$\begin{aligned} M(x, y, z) \in (\Sigma) &\text{ ssi } d(M, (\Delta)) = d(M_0, (\Delta)) \\ &\text{ssi } d(M, (\Delta))^2 = d(M_0, (\Delta))^2 \\ &\text{ssi } \dots \end{aligned}$$

et on obtient aisément une équation cartésienne, à condition de savoir exprimer la distance d'un point à une droite de l'espace (figure, point et vecteur directeur de la droite, produit vectoriel).

Obtention d'équations paramétriques (c'est un peu plus compliqué) :

- à l'aide d'équations paramétriques d'un cercle tracé sur  $(\Sigma)$ , dans un plan orthogonal à l'axe (ce qui ramène à une méthode vue précédemment).
- à l'aide d'équations paramétriques de la droite  $(D)$  et de la matrice d'une rotation autour de l'axe (voir surfaces de révolution).

### 2.6.1 Cylindre de révolution défini par la donnée d'un point et de l'axe

**Exemple 2.6.1.1.** Cylindre  $(\Sigma)$  de révolution, contenant  $O$ , et d'axe  $(\Delta)$  d'équations : 
$$\begin{cases} x + y + z - 1 = 0 \\ x - 2y - z + 1 = 0 \end{cases}$$

On vérifie que  $O$  n'appartient pas à  $\Delta$ , puis, le point  $M_0 = O$  étant donné directement, on a rapidement une équation cartésienne ... qui est naturellement celle d'une quadrique, cylindre circulaire.

### 2.6.2 Cylindre de révolution défini par la donnée d'une génératrice et de l'axe

**Exemple 2.6.2.1.** Cylindre  $(\Sigma)$  de révolution,

$$\text{d'axe } (\Delta) \text{ d'équations : } \begin{cases} x + y + z - 1 = 0 \\ x - 2y - z + 1 = 0 \end{cases} \quad \text{et de génératrice } (D) \text{ d'équations : } \begin{cases} 2x - y = 0 \\ 3x + z = 0 \end{cases}$$

On vérifie que  $(D)$  est bien parallèle à  $(\Delta)$  et distincte de  $\Delta$ , puis, ... , on a rapidement une équation cartésienne ... qui est naturellement celle d'une quadrique, cylindre circulaire.

## 2.7 Reconnaissance, caractéristiques d'un cylindre

### 2.7.1 Identification d'un cylindre d'après des équations paramétriques

**Exemple 2.7.1.1.** Soit la nappe paramétrée définie par : 
$$\begin{cases} x = f(t) + \lambda a \\ y = g(t) + \lambda b \\ z = h(t) + \lambda c \end{cases} \quad \begin{cases} t \in I \\ \lambda \in \mathbb{R} \end{cases}$$
  
 $a, b, c$  étant des constantes réelles non toutes nulles.

C'est la forme caractéristique des équations paramétriques d'un cylindre, l'identification est donc rapide : à  $t$  fixé, on obtient une droite dirigée par le vecteur  $\vec{v} = a \vec{i} + b \vec{j} + c \vec{k}$  et passant par le point  $m(t)$  de coordonnées  $(f(t), g(t), h(t))$ , ce qui prouve que l'on a un cylindre,

- de direction dirigée par  $\vec{v} = a \vec{i} + b \vec{j} + c \vec{k}$
- de directrice la courbe d'équation paramétriques 
$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \\ z = h(t) \end{cases} \quad t \in I.$$

**Exemple 2.7.1.2.** Soit la nappe paramétrée définie par : 
$$\begin{cases} x = t^2 + 2\lambda t + \lambda^2 + \lambda \\ y = t^3 + 3\lambda^2 t + 3\lambda t^2 + \lambda^3 + 2\lambda \\ z = t + 1 \end{cases} \quad \begin{cases} t \in I \\ \lambda \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Il ne s'agit pas d'une présentation sous forme caractéristique, mais remarque que l'on peut transformer ces équations sous la forme :

$$\left( \begin{cases} x = (t + \lambda)^2 + \lambda \\ y = (t + \lambda)^3 + 2\lambda \\ z = (1 + (t + \lambda)) - \lambda \end{cases} \quad \begin{cases} t \in \mathbb{R} \\ \lambda \in \mathbb{R} \end{cases} \right) \quad \text{ou} \quad \left( \begin{cases} x = u^2 & +\lambda \times (1) \\ y = u^3 & +\lambda \times (2) \\ z = (1 + u) & +\lambda \times (-1) \end{cases} \quad \begin{cases} u \in \mathbb{R} \\ \lambda \in \mathbb{R} \end{cases} \right)$$

Cette dernière forme étant caractéristique des cylindres, on en déduit qu'il s'agit d'un cylindre,

- de direction dirigée par  $\vec{v} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$
- de directrice la courbe d'équation paramétriques 
$$\begin{cases} x = u^2 \\ y = u^3 \\ z = 1 + u \end{cases} \quad u \in \mathbb{R}.$$

### 2.7.2 Identification d'un cylindre d'après une équation cartésienne

On cherche à écrire l'équation cartésienne sous la forme  $f(P, Q) = 0$ , avec  $P$  et  $Q$  formes linéaires indépendantes. La direction du cylindre alors l'intersection des plans vectoriels d'équations  $P = 0$ ,  $Q = 0$ .

**Exemple 2.7.2.1.** Soit la surface d'équation  $x^2 + y^2 + 9z^2 + 2xy - 6xz - 6yz + 3x + 3y - 11z + 5 = 0$

En posant  $P = x + y - 3z$  et  $Q = x + y - z$ , on a :

$$x^2 + y^2 + 9z^2 + 2xy - 6xz - 6yz + 3x + 3y - 11z + 5 = (P + 2)^2 - Q + 1$$

La droite d'équations  $\begin{cases} x + y - 3z = 0 & (P = 0) \\ x + y - z = 0 & (Q = 0) \end{cases}$  est dirigée par le vecteur  $\vec{V} = \vec{i} - \vec{j}$ .

$M(x, y, z) \in (\Sigma)$  ssi les points de la droite, passant par  $M$  et dirigée par  $\vec{V}$ , de coordonnées  $(X, Y, Z)$

$$\left( \text{donc tels que : } \exists \lambda \in \mathbb{R} \begin{cases} X = x - \lambda \\ Y = y + \lambda \\ Z = z \end{cases} \right)$$

vérifient la relation  $(X + Y - 3Z - 2)^2 - (X + Y - Z) + 1 = 0$

ce qui prouve qu'il s'agit d'un cylindre,

- de direction l'intersection des deux plans  $P = 0$ ,  $Q = 0$ , dirigée par  $\vec{V} = \vec{i} - \vec{j}$ .
- de directrice (section droite) la courbe d'équations cartésiennes : 
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 9z^2 + 2xy - 6xz - 6yz + 3x + 3y - 11z + 5 = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

*Remarque.* Il s'agit également d'une quadrique, que l'on peut identifier plus précisément par des méthodes spécifiques aux quadriques ...



**Exemple 2.7.2.2.** La surface d'équation  $e^z - e^x - e^y = 0$  est un cylindre :

On peut écrire l'équation sous la forme  $e^{x-z} + e^{y-z} = 1$ , c'est à dire

$$e^P + e^Q - 1 = 0 \quad \text{avec} \quad \begin{cases} P = x - z \\ Q = y - z \end{cases},$$

ce qui permet d'identifier un cylindre,

- dont la direction a pour équations  $\begin{cases} x - z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$  et est dirigée par  $\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ .
- de directrice (section droite) la courbe d'équations :  $\begin{cases} e^z - e^x - e^y = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$

$M(x, y, z) \in (\Sigma)$  ssi les points de la droite, passant par  $M$  et dirigée par  $\vec{V} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ , de coordonnées  $(X, Y, Z)$

$$\left( \text{donc tels que : } \exists \lambda \in \mathbb{R} \begin{cases} X = x + \lambda \\ Y = y + \lambda \\ Z = z + \lambda \end{cases} \right)$$

vérifient la condition  $e^{X-Z} + e^{Y-Z} = 1$ , ce qui prouve (d'après la définition) qu'il s'agit d'un cylindre.

**Exemple 2.7.2.3.** Soit la surface d'équation  $f(x, y, z) = 0$ , avec

$$x^2 + 4y^2 + z^2 - 4xy - 2xz + 4yz + 3x - 9y - 12z = 0$$

1. Comme il s'agit d'une quadrique, on peut utiliser la méthode de réduction des quadriques pour identifier ... un cylindre parabolique.
2. Ou, en posant  $P = x - 2y - z$ , on a  $f(x, y, z) - P^2 = 3x - 9y - 12z = Q$ , ce qui donne comme équation

$$P^2 + Q = 0 \quad \text{avec} \quad \begin{cases} P = x - 2y - z \\ Q = 3x - 9y - 12z \end{cases},$$

ce qui prouve qu'il s'agit d'un cylindre,

- dont la direction a pour équations  $\begin{cases} x - 2y - z = 0 \\ 3x - 9y - 12z = 0 \end{cases}$  et est dirigée par  $5\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$ .
- de directrice (section droite) la courbe d'équations :

$$\begin{cases} x^2 + 4y^2 + z^2 - 4xy - 2xz + 4yz + 3x - 9y - 12z = 0 \\ 5x + 3y - z = 0 \end{cases}$$

dont la nature (parabole) n'est pas immédiate sous cette forme ...

## 2.8 Equation(s) d'un cylindre défini par sa direction et une condition de contact

Soit un cylindre  $(\Sigma)$ , dont les génératrices  $\begin{cases} \text{sont dirigées par le vecteur } \vec{V} = a \vec{i} + b \vec{j} + c \vec{k} \\ \text{sont tangentes à une surface } (\Pi) \end{cases}$

- $(\Sigma)$  est le cylindre, de direction  $\vec{V}$ , circonscrit à la surface  $(\Pi)$ .
- $(\Sigma) \cap (\Pi)$  est le contour apparent de la surface  $(\Pi)$ , vue selon la direction de vecteur  $\vec{V}$ .

Un point  $M(x, y, z)$  appartient à  $(\Sigma)$  si et seulement si il existe  $m \in (\Pi)$  tel que

$$\begin{cases} \overrightarrow{mM} \text{ est colinéaire à } \vec{V} & (\text{ide, } \exists \lambda \in \mathbb{R} : m = M + \lambda \vec{V}), \\ M \text{ est dans le plan tangent en } m \text{ à } (\Pi) \end{cases}$$

### 2.8.1 Surface de contact définie par une équation cartésienne

**Exemple 2.8.1.1.** Cylindre  $(\Sigma)$  dont les génératrices

$$\begin{cases} \text{sont dirigées par } \vec{V} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k} \\ \text{sont tangentes à la surface } (\Pi) \text{ d'équation } f(x, y, z) = 0 \text{ où } f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + z^2 - 1 \end{cases}$$

1. Méthode 1 (générale) :

$$\begin{aligned} M(x, y, z) \in (\Sigma) \text{ ssi } \exists \lambda : & \begin{cases} f(M + \lambda \vec{V}) = 0 \\ \overrightarrow{\text{grad}} f(M + \lambda \vec{V}) \perp \vec{V} \end{cases} \\ \text{ssi } \exists \lambda : & \begin{cases} 10\lambda^2 + 2\lambda(x + 4y - z) + x^2 + 2y^2 + z^2 - 1 = 0 \\ 2(x + \lambda) + 8(y + 2\lambda) - 2(z - \lambda) = 0 \end{cases} \\ \text{ssi } \exists \lambda : & \begin{cases} 10\lambda^2 + 2\lambda(x + 4y - z) + x^2 + 2y^2 + z^2 - 1 = 0 \\ \lambda = -\frac{x + 4y - z}{10} \end{cases} \\ \text{ssi } (x + 4y - z)^2 - 10(x^2 + 2y^2 + z^2 - 1) &= 0 \text{ (élimination de } \lambda). \end{aligned}$$

2. Méthode 2 (particulière). On utilise le fait que  $(\Pi)$  est une quadrique :

$$\begin{aligned} M(x, y, z) \in (\Sigma) \text{ ssi la droite } (M, \vec{V}) & \text{ coupe } (\Pi) \text{ en un point double.} \\ \text{ssi } \exists \lambda : M + \lambda \vec{V} & \text{ est un point double de } (\Pi). \\ \text{ssi l'équation en } \lambda & f(x + \lambda, y + 2\lambda, z - \lambda) = 0 \text{ a une racine double.} \end{aligned}$$

L'équation  $f(x + \lambda, y + 2\lambda, z - \lambda) = 0$  est une équation du second degré en  $\lambda$ , qui s'écrit ici :

$$10\lambda^2 + 2\lambda(x + 4y - z) + x^2 + 2y^2 + z^2 - 1 = 0$$

et dont le discriminant réduit est  $\Delta' = (x + 4y - z)^2 - 10(x^2 + 2y^2 + z^2 - 1)$ .

On en déduit que :  $M(x, y, z) \in (\Sigma)$  ssi  $(x + 4y - z)^2 - 10(x^2 + 2y^2 + z^2 - 1) = 0$ .

### 2.8.2 Surface de contact définie par des équations paramétriques

**Exemple 2.8.2.1.** Cylindre  $(\Sigma)$  dont les génératrices

$$\begin{cases} \text{sont dirigées par } \vec{V} = a \vec{i} + b \vec{j} + c \vec{k} \\ \text{sont tangentes à la surface } (\Pi) \text{ d'équation paramétriques } \begin{cases} x = f(u, v) \\ y = g(u, v) \\ z = h(u, v) \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} M(x, y, z) \in (\Sigma) \text{ ssi } \exists m \in (\Pi) : \exists \lambda : & \begin{cases} m = M + \lambda \vec{V} \\ \text{la normale en } m \text{ à } (\Pi) \text{ est orthogonale à } \vec{V} \end{cases} \\ \text{ssi } \exists u, v : \exists \lambda : & \begin{cases} x + \lambda a = f(u, v) \\ y + \lambda b = g(u, v) \\ z + \lambda c = h(u, v) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial f}{\partial v}(u, v) & a \\ \frac{\partial g}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial g}{\partial v}(u, v) & b \\ \frac{\partial h}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial h}{\partial v}(u, v) & c \end{vmatrix} = 0 \end{aligned}$$

Une équation cartésienne de  $(\Sigma)$  s'obtient en éliminant les trois paramètres entre les quatre équations obtenues et, si on peut exprimer  $v$  en fonction de  $u$ , on obtiendra des équations paramétriques de  $(\Sigma)$ .

## 3 Cônes

### 3.1 Définition générale

#### Définition 3.1.1.

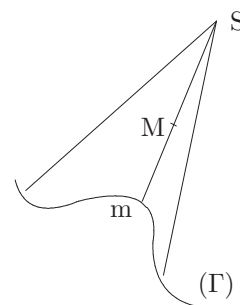
Un cône est une surface engendrée par une famille de droites

(droites génératrices du cône)

qui

- passent par un point fixe (le sommet du cône)
- vérifient une autre condition ...

si cette autre condition est de rencontrer une courbe fixe, cette courbe est appelée (courbe) directrice du cône.



### 3.2 Sections planes d'un cône

#### Définition 3.2.1.

Les courbes obtenues en coupant un cône par un plan (ne contenant pas le sommet) sont des **sections planes** du cône.

*Remarque.* Une section plane est une courbe directrice plane d'un cône inclus dans le cône d'origine (on ne retrouvera pas les droites du cône, qui sont parallèle au plan de coupe mais non contenues dans ce plan).

### 3.3 Exemples déjà connus

Les cônes quadratiques sont les quadriques suivantes :

- cône à base circulaire, d'équation réduite dans un repère adapté  $x^2 + y^2 - \tan^2(\alpha) z^2$
- cône à base elliptique, d'équation réduite dans un repère adapté  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - z^2 = 0$ .

Cependant, les cônes ne se limitent pas à ces quelques exemples ...

S'il est assez facile d'identifier un cône quadratique à partir d'une équation cartésienne (par réduction orthogonale de la matrice associée par exemple), en dehors des quadriques, il n'est pas toujours évident d'identifier un cône à partir

- d'une équation cartésienne
- ou à partir d'équations paramétriques, quand elles ne sont pas de forme canonique (voir ci-dessous).

### 3.4 Equation(s) d'un cône défini par son sommet et une directrice

- Le sommet du cône est le plus souvent donné par ses coordonnées (ou éventuellement comme intersection de deux droites ou de trois plans).
- Une courbe directrice est le plus souvent définie par
  - par trois équations paramétriques
  - par deux équations cartésiennes
 (ou alors on se ramène préalablement à cette définition).

### 3.4.1 Cône dont la directrice est définie par des équations paramétriques

On suppose que la directrice  $(\Gamma)$  est définie par les équations paramétriques : 
$$\begin{cases} x = x_1(t) \\ y = y_1(t) \\ z = z_1(t) \end{cases} \quad t \in I,$$

et que le sommet du cône est le point  $S = (a, b, c)$ ,

$$M(x, y, z) \in (\Sigma) \text{ ssi } \exists m \in (\Gamma) : \overrightarrow{SM} \text{ est colinéaire à } \overrightarrow{Sm}$$

$$\text{ssi } \exists t \in I : \exists \lambda \in \mathbb{R} : \begin{cases} x - a = \lambda (x_1(t) - a) \\ y - b = \lambda (y_1(t) - b) \\ z - c = \lambda (z_1(t) - c) \end{cases}$$

1. D'où, directement, des équations paramétriques du cône  $(\Sigma)$  : 
$$\begin{cases} x = \lambda x_1(t) + (1 - \lambda) a \\ y = \lambda y_1(t) + (1 - \lambda) b \\ z = \lambda z_1(t) + (1 - \lambda) c \end{cases} \quad \begin{cases} t \in I \\ \lambda \in \mathbb{R} \end{cases}$$
2. Pour obtenir une équation cartésienne du cylindre  $(\Sigma)$ , on pourra éliminer les deux paramètres entre les trois équations paramétriques.

**Exemple 3.4.1.1.** Cône  $(\Sigma)$  défini par 
$$\begin{cases} \text{son sommet } S, \text{ de coordonnées } (1, 1, 1) \\ \text{une directrice, paramétrée par : } \begin{cases} x = \frac{t}{t-1} \\ y = \frac{t^2}{t-1} \\ z = \frac{t^3}{t-1} \end{cases} \end{cases}$$

1. Le cône  $(\Sigma)$  a pour équations paramétriques 
$$\begin{cases} x = \lambda \frac{t}{t-1} + (1 - \lambda) \\ y = \lambda \frac{t^2}{t-1} + 2(1 - \lambda) \\ z = \lambda \frac{t^3}{t-1} - (1 - \lambda) \end{cases} \quad \begin{cases} t \in \mathbb{R} \setminus \{1\} \\ \lambda \in \mathbb{R} \end{cases}$$

2. Pour obtenir une équation cartésienne de  $(\Sigma)$ ,

(a) l'élimination de  $\lambda$ , entre les trois équations paramétrées, conduit à

$$M(x, y, z) \in (\Sigma) \iff \exists t : \begin{cases} x - 1 = \frac{y - 1}{t^2 - t + 1} \\ x - 1 = \frac{z - 1}{t^3 - t + 1} \end{cases}$$

(b) il reste à éliminer  $t$  entre ces deux dernières équations :

$$\begin{cases} (x - 1)(t^2 - t + 1) = y - 1 \\ (x - 1)(t^3 - t + 1) = z - 1 \end{cases} \quad \begin{cases} (x - 1)(t^2 - t + 1) = y - 1 \\ (x - 1)(t^2 - 2t + 1) = z - 1 - t(y - 1) \\ (x - 1)(t^2 - t + 1) = y - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x - 1)(t^2 - t + 1) = y - 1 \\ (x - 1)(-t) = z - 1 - t(y - 1) - (y - 1) \end{cases} \quad \begin{cases} t = \frac{y - z}{x - y} \end{cases}$$

En posant  $P = y - z$ ,  $Q = y$ , et  $R = x - y$ , on a  $t = \frac{P}{R}$  (sauf pour  $x - y = 0$ ) que l'on reporte dans

la première équation pour obtenir l'équation cartésienne sous la forme  $F\left(\frac{P-0}{R-0}, \frac{Q-1}{R-0}\right) = 0$  :

$$\left(\left(\frac{P}{R}\right)^2 - \frac{P}{R} + 1\right) \left(\frac{1}{\frac{Q-1}{R}} + 1\right) - 1 = 0, \text{ en excluant la droite d'équation } \begin{cases} Q = 1 \\ R = 0 \end{cases}$$

ou encore (et on récupère ainsi la droite exclue) :

$$P^2 R + P^2 (Q - 1) - P R^2 - P R (Q - 1) + R^3 = 0 \quad \text{avec} \quad \begin{cases} P = y - z \\ Q = y \\ R = x - y \end{cases}$$

*Remarque.* Le sommet du cône est l'intersection des plans d'équations  $P = 0$ ,  $Q = 1$  et  $R = 0$ .

### 3.4.2 Cône dont la directrice est définie par deux équations cartésiennes

On suppose que la directrice  $(\Gamma)$  est définie comme intersection de deux surfaces par :  $\begin{cases} f(x, y, z) = 0 \\ g(x, y, z) = 0 \end{cases}$   
le sommet étant le point  $(S)$  de coordonnées  $(a, b, c)$ .

$$\begin{aligned} M(x, y, z) \in (\Sigma) \text{ ssi } & \left( \exists m \in (\Gamma) : \overrightarrow{Sm} \text{ est colinéaire à } \overrightarrow{SM} \right) \\ & \text{ssi } \left( \exists \lambda \in \mathbb{R} : m = S + \lambda \overrightarrow{SM} \in (\Gamma) \right) \\ & \text{ssi } \exists \lambda \in \mathbb{R} : \begin{cases} f(a + \lambda(x-a), b + \lambda(y-b), c + \lambda(z-c)) = 0 \\ g(a + \lambda(x-a), b + \lambda(y-b), c + \lambda(z-c)) = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

En éliminant le paramètre  $\lambda$  entre ces deux équations, on obtient une équation cartésienne de  $(\Sigma)$ .

**Exemple 3.4.2.1.** Cône  $(\Sigma)$  dont les génératrices

$$\begin{cases} \text{passent par le point } S \text{ de coordonnées } (a, b, c) = (1, 1, 1) \\ \text{s'appuient sur l'hyperbole } (\Gamma) \text{ d'équations : } \begin{cases} x^2 - y^2 - 2y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} M(x, y, z) \in (\Sigma) \text{ ssi } & \exists m \in (\Gamma) : \overrightarrow{Sm} \text{ est colinéaire à } \overrightarrow{SM} \\ & \text{ssi } \exists \lambda \in \mathbb{R} : m = S + \lambda \overrightarrow{SM} \in (\Gamma) \\ & \text{ssi } \exists \lambda \in \mathbb{R} : \begin{cases} (a + \lambda(x-a))^2 - (b + \lambda(y-b))^2 - 2(b + \lambda(y-b)) = 0 \\ c + \lambda(z-c) = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

De la deuxième équation on déduit  $\lambda = -\frac{c}{z-c}$ , que l'on reporte dans la première équation, ce qui donne

$$\left(a - c \frac{x-a}{z-c}\right)^2 - \left(b - c \frac{y-b}{z-c}\right)^2 - 2\left(b - c \frac{y-b}{z-c}\right) = 0 \text{ soit } F\left(\frac{x-a}{z-c}, \frac{y-b}{z-c}\right) = 0 \quad \text{ou encore}$$

$$\left[a(R-c) - c(P-a)\right]^2 - \left[b(R-c) - c(Q-b)\right] \left[(b+2)(R-c) - c(Q-b)\right] = 0 \quad \text{avec } \begin{cases} P = x \\ Q = y \\ R = z \end{cases}$$

ce qui se développe en :  $x^2 - y^2 - 2z^2 - 2xz + 4yz - 2y + 2z = 0$  (équation cartésienne du cône).

*Remarques.*

- Le sommet du cône est l'intersection des plans d'équations  $P = a$ ,  $Q = b$  et  $R = c$ .
- Ici, il s'agit d'une quadrique, et comme on a un cône, elle est presque complètement identifiée. On a le sommet  $S = (1, 1, 1)$ ; il manque l'axe ... il manque ...

### 3.5 Equation(s) d'un cône défini par son sommet et une section plane

On doit vérifier que la section plane est une courbe plane. Ensuite, il n'y aucune particularité et on revient aux méthodes précédentes.

#### 3.5.1 Section plane définie par des équations cartésiennes

**Exemple 3.5.1.1.** Cône  $(\Sigma)$  défini par  $\begin{cases} \text{son sommet } S, \text{ de coordonnées } (0, 0, 0) \\ \text{une section plane, d'équations : } \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 3 \\ x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1 \end{cases} \end{cases}$

#### 3.5.2 Section plane définie par des équations paramétriques

**Exemple 3.5.2.1.** Cône  $(\Sigma)$  défini par  $\begin{cases} \text{son sommet } S, \text{ de coordonnées } (0, 0, 0) \\ \text{une section plane, paramétrée par : } \begin{cases} x = t \\ y = 2t^2 + 2t + 1 \\ z = t + 1 \end{cases} \end{cases}$

### 3.6 Equation(s) d'un cône de révolution autour d'un axe

Surface (quadrique) engendrée par la rotation, autour d'un axe  $(\Delta)$ , d'une droite  $(D)$  qui rencontre l'axe en un seul point (le sommet du cône).

Obtention d'une équation cartésienne :

le plus simple est d'utiliser le produit scalaire et la norme pour établir les conditions d'appartenance d'un point au cône.

Obtention d'équations paramétriques (c'est un peu plus compliqué) :

- à l'aide d'équations paramétriques d'un cercle tracé sur  $(\Sigma)$ , dans un plan orthogonal à l'axe (ce qui ramène à une méthode vue précédemment).
- à l'aide d'équations paramétriques d'une droite génératrice et de la matrice d'une rotation autour de l'axe (voir surfaces de révolution).

#### 3.6.1 Cône de révolution défini par l'axe, le sommet et le demi-angle au sommet

Si besoin, on vérifiera que le sommet appartient bien à l'axe ...

Cône de révolution  $(\Sigma)$   $\left\{ \begin{array}{l} \text{de sommet le point } S \text{ de coordonnées } (a, b, c) = \dots \\ \text{d'axe } (\Delta) \text{ dirigé par le vecteur } \vec{V} = u \vec{i} + v \vec{j} + w \vec{k} = \dots \\ \text{et de demi-angle au sommet } \alpha = \dots \end{array} \right.$

$$\begin{array}{l} M(x, y, z) \neq S \in (\Sigma) \text{ ssi } \overrightarrow{SM} \text{ fait un angle de } \alpha \text{ (ou } \pi - \alpha) \text{ avec } \vec{V} \\ M(x, y, z) \in (\Sigma) \text{ ssi } \left( \langle \overrightarrow{SM} | \vec{V} \rangle \right)^2 = \|\overrightarrow{SM}\|^2 \|\vec{V}\|^2 \cos^2(\alpha) \end{array}$$

ce qui donne directement l'équation du cône, sous la forme :

$$\left[ (x-a)u + (y-b)v + (z-c)w \right]^2 - K \left[ (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 \right] = 0 \text{ avec } K = \|\vec{V}\|^2 \cos^2(\alpha)$$

**Exemple 3.6.1.1.** Le cône de révolution de sommet  $O$ , d'axe  $Oz$ , de demi-angle au sommet  $\alpha$

a pour équation cartésienne  $x^2 + y^2 - \tan^2(\alpha) z^2 = 0$ .

**Exemple 3.6.1.2.** Le cône de révolution  $(\Sigma)$   $\left\{ \begin{array}{l} \text{de sommet le point } S \text{ de coordonnées } (a, b, c) = (1, 1, 1) \\ \text{d'axe } (\Delta) \text{ dirigé par } \vec{V} = u \vec{i} + v \vec{j} + w \vec{k} = \vec{i} + 2 \vec{j} - \vec{k} \\ \text{et de demi-angle au sommet } \alpha = \frac{\pi}{6}, \end{array} \right.$

a pour équation cartésienne ...

#### 3.6.2 Cône de révolution défini par l'axe de révolution et une génératrice

On vérifiera en premier que l'axe et la génératrice se coupent en un seul point (sommet) du cône ...

Soit le cône de révolution  $(\Sigma)$   $\left\{ \begin{array}{l} \text{d'axe la droite } (\Delta) \dots \\ \text{admettant comme génératrice la droite } (D) \dots \end{array} \right.$

On note  $S$  le seul point commun à  $\Delta$  et  $(D)$ ,  $\vec{V}$  un vecteur non nul de  $(\Delta)$  et  $\vec{U}$  un vecteur non nul de  $(D)$ .

$$\begin{array}{l} M(x, y, z) \neq S \in (\Sigma) \text{ ssi le cercle d'axe } (\Delta) \text{ passant par } M \text{ rencontre } (D) \\ M(x, y, z) \in (\Sigma) \text{ ssi } \exists m \in (D) : \left\{ \begin{array}{l} \langle \overrightarrow{SM} | \vec{V} \rangle = \langle \overrightarrow{Sm} | \vec{V} \rangle \quad (\text{même angle}) \\ \|\overrightarrow{SM}\| = \|\overrightarrow{Sm}\| \quad (\text{même distance au sommet}) \end{array} \right. \\ \text{ssi } \exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que, avec } m = S + \lambda \vec{U}, \left\{ \begin{array}{l} \left( \langle \overrightarrow{SM} | \vec{V} \rangle \right)^2 = \left( \langle \overrightarrow{Sm} | \vec{V} \rangle \right)^2 \\ \|\overrightarrow{SM}\|^2 = \|\overrightarrow{Sm}\|^2 \end{array} \right. \end{array}$$

On obtient deux équations dépendant du paramètre  $\lambda$ , et en éliminant  $\lambda$  entre ces deux équations, on en déduit une équation cartésienne de  $(\Sigma)$ .

**Exemple 3.6.2.1.** Cône de révolution  $(\Sigma)$ , 
$$\begin{cases} \text{d'axe } (\Delta) \text{ d'équations } \begin{cases} x - y - z = -4 \\ x + y = 3 \end{cases} \\ \text{de directrice } (D) \text{ d'équations } \begin{cases} 2x - y - z = -3 \\ -y + z = 1 \end{cases} \end{cases}$$

Sommet, vecteur directeur de l'axe et équations

> S := [1,2,-1]; V := [1,-1,2];

> Ea1 := x-y-z=-4; Ea2 := x+y = 3;

Génératrice : direction et équations

> U := [2,1,1];

> Ed1 := 2\*x-y-z=-3; Ed2 := -y+z = 1;

Vérification d'intersection

> solve( {Ea1,Ea2, Ed1,Ed2}, {x,y,z} );

Recherche de l'équation cartésienne

> M := [x,y,z];

> m := evalm(S+lambda\*U);

> E1 := dotprod(M-S,V)-dotprod(m-S,U);

> E2 := dotprod(M-S,M-S,'orthogonal')-dotprod(m-S,m-S,'orthogonal');

> s := eliminate( {E1,E2}, lambda);

> Eq := op(s[2]);

$(\Sigma)$  a pour équation cartésienne :

$$-59 + 2x - 5x^2 + 34y - 5y^2 + 16z - 2z^2 - 2xy + 4xz - 4yz = 0$$

ou encore :

Décomposition en plans

> s1 := subs( y = P +2 + Q, Eq);

> s2 := subs( z = P +3 + R, s1);

> s3 := subs( x = P + 1, s2); expand(s3);

$$-4QR - 14P^2 - 16PQ - 5Q^2 - 4PR - 2R^2 = 0 \quad \text{avec} \quad \begin{cases} P = x - 1 \\ Q = -x + y - 1 \\ R = -x + z - 2 \end{cases}$$

## 3.7 Reconnaissance, caractéristiques d'un cône

### 3.7.1 Identification d'un cône d'après des équations paramétriques

**Exemple 3.7.1.1.** Soit la nappe paramétrée définie par 
$$\begin{cases} x = \lambda f(t) + (1 - \lambda) a \\ y = \lambda g(t) + (1 - \lambda) b \\ z = \lambda h(t) + (1 - \lambda) c \end{cases} \quad \begin{cases} t \in I \\ \lambda \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$a, b, c$  étant des constantes réelles non toutes nulles.

C'est la forme caractéristique des équations paramétriques d'un cône, l'identification est donc rapide : à  $t$  fixé, on obtient une droite de paramètre  $\lambda$ , qui passe par le point fixe  $S$  de coordonnées  $(a, b, c)$  (pour  $\lambda = 0$ ) et par le point de coordonnées  $(f(t), g(t), h(t))$  (pour  $\lambda = 1$ ).

Il s'agit donc d'un cône,  $\begin{cases} \text{dont le sommet } S \text{ a pour coordonnées } (a, b, c) \\ \text{de directrice la courbe d'équation paramétriques : } \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \\ z = h(t) \end{cases} \quad t \in I \end{cases}$

Cependant, pour une surface paramétrée qui est un cône, le paramétrage n'est pas toujours donné sous une forme caractéristique. Si on a de bonnes raisons pour penser qu'il s'agit d'un cône, on peut essayer

- de transformer les équations paramétriques initiales en des équations paramétriques caractéristiques telles que dans l'exemple ci-dessus ...
- d'établir une équation cartésienne (par élimination des paramètres) et d'identifier la nature d'après cette équation cartésienne (voir ci-dessous).

**Exemple 3.7.1.2.** Soit la nappe paramétrée définie par : 
$$\begin{cases} x = \lambda^2 + t\lambda + \lambda + 1 \\ y = \lambda^3 + 2\lambda^2 t + \lambda t^2 - 2\lambda + 2 \\ z = \lambda^4 + 3\lambda^3 t + 3\lambda^2 t^2 + \lambda t + \lambda - 1 \end{cases} \quad \begin{cases} t \in I \\ \lambda \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Il ne s'agit pas d'une présentation sous forme caractéristique, mais on remarque que l'on peut transformer ces équations sous la forme :

$$\left( \begin{cases} x = \lambda(t + \lambda) + (1 - \lambda) \times (1) \\ y = \lambda(t + \lambda)^2 + (1 - \lambda) \times (2) \\ z = \lambda(t + \lambda)^3 + (1 - \lambda) \times (-1) \end{cases} \quad \begin{cases} t \in \mathbb{R} \\ \lambda \in \mathbb{R} \end{cases} \right) \quad \text{ou} \quad \left( \begin{cases} x = \lambda u + (1 - \lambda) \times (1) \\ y = \lambda u^2 + (1 - \lambda) \times (2) \\ z = \lambda u^3 + (1 - \lambda) \times (-1) \end{cases} \quad \begin{cases} u \in \mathbb{R} \\ \lambda \in \mathbb{R} \end{cases} \right)$$

Cette dernière forme étant caractéristique des cônes, on en déduit qu'il s'agit d'un cône,

- de sommet le point  $S = (1, 2, -1)$ ,
- de directrice la courbe d'équation paramétriques  $\begin{cases} x = u \\ y = u^2 \\ z = u^3 \end{cases} \quad u \in \mathbb{R}.$

### 3.7.2 Identification d'un cône d'après une équation cartésienne

On cherche à écrire l'équation cartésienne de la surface sous la forme :

$$f\left(\frac{P - \alpha}{R - \gamma}, \frac{Q - \beta}{R - \gamma}\right) = 0 \quad \text{où } P, Q \text{ et } R \text{ sont des formes linéaires indépendantes}$$

(en excluant les points de la surface qui sont situés sur le plan d'équation  $R - \gamma = 0$ ).

Le sommet du cône sera alors l'intersection des plans d'équations  $P - \alpha = 0$ ,  $Q - \beta = 0$ ,  $R - \gamma = 0$ .

**Exemple 3.7.2.1.** Surface  $(\Sigma)$  d'équation  $(2x - y + z - 1)^2 + (x + y + z - 2)^2 - (3x + y + 2z - 5)^2 = 0$ .

L'équation s'écrit :  $(P - 1)^2 + (Q - 2)^2 - (R - 5)^2 = 0$  avec  $\begin{cases} P = 2x - y + z \\ Q = x + y + z \\ R = 3x + y + 2z \end{cases}.$

Les trois plans, d'équations  $P = 1$ ,  $Q = 2$  et  $R = 5$ , se coupent en un unique point  $S$ , de  $(3, 2, -3)$ ,

unique solution du système  $\begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ x + y + z = 2 \\ 3x + y + 2z = 5 \end{cases}$

$M(x, y, z) \in (\Sigma)$  ssi les points de la droite passant par  $M$  et par  $S = (3, 2, -3)$ , de coordonnées  $(X, Y, Z)$ ,

$$\left( \begin{array}{l} \text{donc tels que : } \exists \lambda \in \mathbb{R} \begin{cases} X - 3 = \lambda(x - 3) \\ Y - 2 = \lambda(y - 2) \\ Z + 3 = \lambda(z + 3) \end{cases} \end{array} \right)$$

vérifient la relation  $(2X - Y + Z - 1)^2 + (X + Y + Z - 2)^2 - (3X + Y + 2Z - 5)^2 = 0$

ce qui prouve qu'il s'agit d'un cône, de sommet  $S = (3, 2, -3)$ .

*Remarque.* Comme il s'agit également d'une quadrique, l'étude spécifique des quadriques permet de préciser davantage la nature du cône .... Ce n'est pas un cône de révolution (pourquoi?).

**Exemple 3.7.2.2.** Surface  $(\Sigma)$  d'équation  $(2x - y + z - 1)^2 + (x + y + z - 2)^2 - (3x + 2z - 5)^2 = 0$ .

$(\Sigma)$  n'est pas un cône. Pourquoi? Préciser complètement la nature de  $(\Sigma)$ .

**Exemple 3.7.2.3.**

- La surface  $(\Sigma)$  d'équation  $x^2 - y^2 + z^2 = 0$  est un cône, de révolution. Préciser son axe, son sommet et son demi-angle au sommet.
- La surface  $(\Sigma')$  d'équation  $x^2 - y^2 + z^2 - 1 = 0$  n'est pas un cône. Préciser sa nature.



### 3.8 Equation(s) d'un cône défini par son sommet et une condition de contact

Soit un cône  $(\Sigma)$ , dont les génératrices  $\begin{cases} \text{passent par le point } S \text{ de coordonnées } (a, b, c) \\ \text{sont tangentes à une surface } (\Pi) \end{cases}$

- $(\Sigma)$  est le cône, de sommet  $S$ , circonscrit à la surface  $(\Pi)$ .
- $(\Sigma) \cap (\Pi)$  est le contour apparent de la surface  $(\Pi)$ , vue depuis le point  $S$ .

Un point  $M(x, y, z)$  appartient à  $(\Sigma)$  si et seulement si il existe  $m \in (\Pi)$  tel que

$$\begin{cases} \overrightarrow{Sm} \text{ est colinéaire à } \overrightarrow{SM} & (\text{ide, } \exists \lambda \in \mathbb{R} : m = S + \lambda \overrightarrow{SM}) , \\ M \text{ est dans le plan tangent en } m \text{ à } (\Pi) \end{cases}$$

#### 3.8.1 Surface de contact définie par une équation cartésienne

**Exemple 3.8.1.1.** Cône  $(\Sigma)$  dont les génératrices

- $$\begin{cases} \text{passent par le point } S \text{ de coordonnées } (a, b, c) = (1, 2, -1) \\ \text{sont tangentes à la surface } (\Pi) \text{ d'équation } f(x, y, z) = 0 \text{ où } f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + z^2 - 1 \end{cases}$$

1. Méthode 1 (générale) :  $M(x, y, z) \in (\Sigma)$  ssi  $\exists \lambda : \begin{cases} f(S + \lambda \overrightarrow{SM}) = 0 \\ \overrightarrow{\text{grad}} f(S + \lambda \overrightarrow{SM}) \perp \overrightarrow{SM} \end{cases}$

$$\begin{aligned} \text{ssi } \exists \lambda : & \begin{cases} (1 + \lambda(x-1))^2 + 2(2 + \lambda(y-2))^2 + (-1 + \lambda(z+1))^2 - 1 = 0 \\ (1 + \lambda(x-1))(x-1) + (2 + \lambda(y-2))(y-2) + (-1 + \lambda(z+1))(z+1) = 0 \end{cases} \\ \text{ssi } \exists \lambda : & \begin{cases} (10 - 2x + x^2 - 8y + 2y^2 + 2z + z^2)\lambda^2 + (-20 + 2x - 2z + 8y)\lambda + 9 = 0 \\ (-4y^2 - 2x^2 - 4z + 4x + 16y - 20 - 2z^2)\lambda - 2x + 20 - 8y + 2z = 0 \end{cases} \\ \text{ssi } & 4x^2 + y^2 + 4z^2 - 4xy + xz + 4yz + x + 4y - z - 5 = 0 \text{ (élimination lourde de } \lambda). \end{aligned}$$

2. Méthode 2 (particulière). On utilise le fait que  $(\Pi)$  est une quadrique :

$$\begin{aligned} M(x, y, z) \in (\Sigma) & \text{ ssi la droite } (S, \overrightarrow{SM}) \text{ coupe } (\Pi) \text{ en un point double} \\ & \text{ssi } \exists \lambda : S + \lambda \overrightarrow{SM} \text{ est un point double de } (\Pi) \\ & \text{ssi l'équation } f(a + \lambda(x-a), b + \lambda(y-b), c + \lambda(z-c)) = 0 \text{ admet une racine double} \end{aligned}$$

L'équation  $f(a + \lambda(x-a), b + \lambda(y-b), c + \lambda(z-c)) = 0$  est une équation du second degré en  $\lambda$ ,  $(10 - 2x + x^2 - 8y + 2y^2 + 2z + z^2)\lambda^2 + (-20 + 2x - 2z + 8y)\lambda + 9 = 0$ , de discriminant réduit  $\Delta' = -32x^2 - 8x + 32xy - 8xz - 32y - 32zy + 40 + 8z - 8y^2 - 32z^2$ . Donc

$$M(x, y, z) \in (\Sigma) \text{ ssi } 4x^2 + y^2 + 4z^2 - 4xy + xz + 4yz + x + 4y - z - 5 = 0.$$

#### 3.8.2 Surface de contact définie par des équations paramétriques

**Exemple 3.8.2.1.** Cône  $(\Sigma)$  dont les génératrices

- $$\begin{cases} \text{se coupent au point } S \text{ de coordonnées } (a, b, c) \\ \text{sont tangentes à la surface } (\Pi) \text{ d'équation paramétriques } \begin{cases} x = f(u, v) \\ y = g(u, v) \\ z = h(u, v) \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} M(x, y, z) \in (\Sigma) & \text{ ssi } \exists m \in (\Pi) : \exists \lambda : \begin{cases} m = S + \lambda \overrightarrow{SM} \\ \text{la normale en } m \text{ à } (\Pi) \text{ est orthogonale à } \overrightarrow{SM} \end{cases} \\ & \text{ssi } \exists u, v : \exists \lambda : \begin{cases} a + \lambda(x-a) = f(u, v) \\ b + \lambda(y-b) = g(u, v) \\ c + \lambda(z-c) = h(u, v) \end{cases} \text{ et } \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial f}{\partial v}(u, v) & x-a \\ \frac{\partial g}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial g}{\partial v}(u, v) & y-b \\ \frac{\partial h}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial h}{\partial v}(u, v) & z-c \end{vmatrix} = 0 \end{aligned}$$

Une équation cartésienne de  $(\Sigma)$  s'obtient en éliminant les trois paramètres entre les quatre équations obtenues et, si on peut exprimer, par exemple,  $v$  en fonction de  $u$  et  $\lambda$ , on obtiendra aussi des équations paramétriques de  $(\Sigma)$  selon les paramètres  $u$  et  $\lambda$ .

## 4 Surfaces de révolution

### 4.1 Définition

#### Définition 4.1.1.

Une surface de révolution est une surface engendrée par une famille de cercles

- d'axe une droite fixe ( $\Delta$ ) (l'axe de la surface)
- vérifiant une autre condition ... (par exemple "rencontrer une courbe fixe")

Les cercles générateurs sont les "**(cercles) parallèles**"

L'axe est "**l'axe de révolution**"

Les plans contenant l'axe sont les "**(plans) méridiens**"

L'intersection de la surface avec un plan méridien est une "**(courbe) méridienne**".

La courbe (gauche) que doivent rencontrer les cercles est une "**(courbe) directrice**".

*Remarque.* Une (courbe) méridienne est un cas particulier de (courbe) directrice.

### 4.2 Exemples déjà connus

Dans les cônes, les cylindres, on a rencontré des exemples de surface de révolution qui sont des quadriques :

- cylindre de révolution, défini par  $\begin{cases} \text{une section droite circulaire,} \\ \text{ou une droite tournant autour d'un axe qui lui est parallèle,} \end{cases}$   
d'équation réduite dans un repère adapté  $x^2 + y^2 = R^2$  ( $z$  quelconque).
- cône de révolution, défini par une droite tournant autour d'un axe qu'elle rencontre,  
d'équation réduite dans un repère adapté  $x^2 + y^2 - \tan^2(\alpha) z^2 = 0$ .

Cependant, les surfaces de révolution ne se limitent pas à ces quelques exemples ...

S'il est assez facile d'identifier une quadrique de révolution à partir d'une équation cartésienne (par réduction orthogonale de la matrice associée par exemple), en dehors des quadriques, il n'est pas toujours évident d'identifier une surface de révolution à partir

- d'une équation cartésienne
- ou à partir d'équations paramétriques, quand elles ne sont pas de forme canonique (voir ci-dessous).

### 4.3 Equation(s) d'une surface de révolution définie géométriquement

Une surface est de révolution est en général définie par la donnée de son axe, d'une courbe directrice ou d'une méridienne.

- L'axe est donné le plus souvent par deux équations cartésiennes et on pourra en déterminer un point et un vecteur directeur.
- Une courbe directrice est le plus souvent définie par
  - trois équations paramétriques
  - ou deux équations cartésiennes (intersection de deux surfaces)
 (ou alors on se ramène préalablement à cette définition).
- Une méridienne est la plus souvent définie comme l'intersection

$$\begin{cases} \text{d'une surface, définie par une équation cartésienne ou par des équations paramétriques,} \\ \text{et} \\ \text{d'un plan méridien (on vérifiera qu'il contient l'axe)} \end{cases}$$

(ou alors on se ramène préalablement à cette définition).

## 4.4 Equation(s) d'une surface de révolution définie par l'axe et une méridienne

### 4.4.1 Méridienne définie par des équations cartésiennes

Après avoir identifié le plan méridien, on peut faire un changement de repère pour se placer dans un repère orthonormé direct  $(\Omega, \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$  où

- l'axe de  $(\Sigma)$  est porté par  $\Omega Z$
  - le plan  $X \Omega Z$ , d'équation  $Y = 0$ , contient la méridienne de  $(\Sigma)$ .
- On supposera que, dans ce plan, l'équation de la méridienne peut se mettre sous la forme  $X = f(Z)$ .

En calculant dans le nouveau repère,

$$\begin{aligned} M(X, Y, Z) \in (\Sigma) \quad \text{ssi} \quad M \text{ et le point } m \text{ de } (\Gamma), \text{ de coordonnées } (f(Z), 0, Z), \\ \text{sont équidistants de l'axe } \Omega Z \\ \text{ssi } X^2 + Y^2 = f(Z)^2 \end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à revenir dans le repère d'origine, ce qui est facile si on écrit l'équation sous la forme :

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = Z^2 + f(Z)^2$$

puisque

- $x^2 + y^2 + z^2 = X^2 + Y^2 + Z^2$  (changement de repère orthonormé)
- $Z$  s'exprime simplement à l'aide de  $x, y$  et  $z$  (formules de changement de repère).

**Exemple 4.4.1.1.** Surface de révolution  $(\Sigma)$ , engendrée par rotation de la parabole d'équation  $\begin{cases} y^2 = 2pz \\ x = 0 \end{cases}$

1. autour de  $Oz$  : on se trouve directement dans un bon repère et  $(\Sigma)$  a pour équation  $x^2 + y^2 = 2pz$ .
2. autour de  $Oy$  : on se trouve directement dans un bon repère et  $(\Sigma)$  a pour équation  $x^2 + z^2 = \left(\frac{y^2}{2p}\right)^2$ .

**Exemple 4.4.1.2.** Cylindre de révolution d'axe  $Oz$  et de rayon  $a$

Là encore, on se trouve directement dans un bon repère, avec une méridienne d'équations  $\begin{cases} y = a \\ x = 0 \end{cases}$ .

On en déduit l'équation du cylindre :  $x^2 + y^2 = a^2$ .

**Exemple 4.4.1.3.** Tore circulaire : surface de révolution  $(\Sigma)$ , engendrée par la rotation, autour de  $\Delta = Oz$ ,

du cercle  $(\Gamma)$  :  $\begin{cases} \text{situé dans le plan } xOz \text{ (plan méridien)} \\ \text{centré au point de coordonnées } (a, 0, 0) \\ \text{de rayon } r > 0 \end{cases}$

Ici, on est directement dans un bon repère, mais l'équation de la méridienne dans le plan  $xOz$  n'est pas de la forme  $x = f(z)$  (équation  $(x - a)^2 + z^2 = r^2$ ).

On peut faire un calcul direct à partir de deux équations cartésiennes de  $(\Gamma)$  :  $\begin{cases} (x - a)^2 + z^2 = r^2 \\ y = 0 \end{cases}$

$$\begin{aligned} M(x, y, z) \in (\Sigma) \quad \text{ssi} \quad \exists m \in (\Gamma), \text{ tel que } \begin{cases} M \text{ et } m \text{ sont dans un même plan, perpendiculaire à l'axe} \\ M \text{ et } m \text{ sont équidistants d'un point connu de l'axe} \end{cases} \\ \text{ssi} \quad \exists (x_1, y_1, z_1) \in \mathbb{R}^3 : \begin{cases} \begin{cases} (x_1 - a)^2 + z_1^2 = r^2 \\ y_1 = 0 \end{cases} \\ 0x_1 + 0y_1 + z_1 = 0x + 0y + z \\ (x_1 - 0)^2 + (y_1 - 0)^2 + (z_1 - 0)^2 = (x - 0)^2 + (y - 0)^2 + (z - 0)^2 \end{cases} \end{aligned}$$

On élimine les trois paramètres  $x_1, y_1$  et  $z_1$  :

```
> E1 := (x1-a)^2+z1^2-r^2=0; E2 := y1=0;
> Ea := x1^2+y1^2+z1^2 = S; Eb := z1 = P;
> s := eliminate( {E1,E2,Ea,Eb}, {x1,y1,z1});
> Eq := op(s[2]);
```

Equation cartésienne de  $(\Sigma)$  :  $(S^2 + a^2 - r^2)^2 - 4a^2(S^2 - P^2) = 0$  avec  $\begin{cases} S = x^2 + y^2 + z^2 \\ P = z \end{cases}$ .

### 4.4.2 Méridienne définie par des équations paramétriques

**Exemple 4.4.2.1.** Tore circulaire : surface de révolution  $(\Sigma)$ , engendrée par la rotation, autour de  $\Delta = Oz$ ,

$$\text{du cercle } (\Gamma) : \begin{cases} \text{situé dans le plan } xOz \text{ (plan méridien)} \\ \text{centré au point de coordonnées } (a, 0, 0) \\ \text{de rayon } r > 0 \end{cases}$$

Le cercle méridien  $(\Gamma)$ , a pour équations paramétriques : 
$$\begin{cases} x = a + r \cos t \\ y = 0 \\ z = r \sin t \end{cases}$$

A l'aide de rotations, d'axe  $\Delta$  passant par  $A$ , on obtient des équations paramétriques de  $(\Sigma)$  :

$$\begin{aligned} M(x, y, z) \in (\Sigma) \quad & \text{ssi} \quad \exists m \in (\Gamma), \exists \theta \in \mathbb{R}, \text{ tels que} \\ & \overrightarrow{AM} \text{ se déduit de } \overrightarrow{Am} \text{ par une rotation d'axe } \Delta \text{ et d'angle } \theta \\ & \text{ssi} \quad \exists \lambda \in \mathbb{R}, \exists \theta \in \mathbb{R} : \begin{pmatrix} x-0 \\ y-0 \\ z-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a+r \cos t & -0 \\ 0 & -0 \\ r \sin t & -0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{La surface } (\Sigma) \text{ a pour équations paramétriques } \begin{cases} x = (a + r \cos t) \cos \theta \\ y = (a + r \cos t) \sin \theta \\ z = r \sin t \end{cases} \quad \begin{matrix} t \in [0, 2\pi[ \\ \theta \in [0, 2\pi[ \end{matrix}$$

## 4.5 Equation(s) d'une surface de révolution définie par l'axe et une directrice

### 4.5.1 Obtention d'une équation cartésienne

Soit la surface de révolution  $(\Sigma)$ , engendrée par la rotation d'une courbe  $(\Gamma)$  autour d'une droite  $(\Delta)$ .

- L'axe  $(\Delta)$  étant caractérisé par  $\begin{cases} \text{un de ses points, } A, \text{ de coordonnées } (a, b, c) \\ \text{un vecteur directeur } \vec{V} = u \vec{i} + v \vec{j} + w \vec{k} \end{cases}$
- La courbe  $(\Gamma)$  étant définie par  $\begin{cases} \text{des équations paramétriques} \\ \text{ou par deux équations cartésiennes} \end{cases}$

$M(x, y, z)$  appartient à  $(\Sigma)$  ssi il existe un cercle d'axe  $(\Delta)$  passant par  $M$  et qui rencontre  $(\Gamma)$

ssi  $\left( \begin{array}{l} \text{la sphère centrée en } A, \text{ passant par } M, \\ \text{le plan orthogonal à } (\Delta), \text{ passant par } M \end{array} \right)$  rencontrent  $(\Gamma)$

ssi  $\exists m \in (\Gamma)$  appartenant  $\left( \begin{array}{l} \text{à la sphère centrée en } A, \text{ passant par } M, \\ \text{au plan orthogonal à } (\Delta), \text{ passant par } M \end{array} \right)$

ssi  $\exists (x_1, y_1, z_1) \in \mathbb{R}^3$  tel que  $\left( \begin{array}{l} \bullet \text{ le point } m, \text{ de coordonnées } (x_1, y_1, z_1), \text{ appartient à } (\Gamma) \\ \bullet (x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 + (z_1 - c)^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 \\ \bullet u x_1 + v y_1 + w z_1 = u x + v y + w z \end{array} \right)$

- Si  $(\Gamma)$  est définie par deux équations cartésiennes, il faudra éliminer les trois paramètres  $x_1, y_1$  et  $z_1$  entre quatre équations pour obtenir une équation cartésienne de  $(\Sigma)$ .
- Si  $(\Gamma)$  est définie par trois équations paramétriques, du paramètre  $t$ , il faudra éliminer les quatre paramètres  $t, x_1, y_1, z_1$  entre cinq équations pour obtenir une équation cartésienne de  $(\Sigma)$ .  
(l'élimination de seulement trois paramètres pourrait conduire à des équations paramétriques de  $(\Sigma)$ ).

**Exemple 4.5.1.1.** Cylindres et cônes de révolution autour d'un axe

On peut prendre la méthode exposée ci-dessus ou tout autre méthode, par exemple :

- Pour un cylindre de révolution,  $\begin{cases} \text{distance d'un point à l'axe} \\ \text{cercle parallèle, sous forme cartésienne ou paramétrée} \\ \text{changement de repère ...} \end{cases}$
- Pour un cône de révolution,  $\begin{cases} \text{utilisation du demi-angle au sommet} \\ \text{cercle parallèle, sous forme cartésienne ou paramétrée} \\ \text{changement de repère ...} \end{cases}$

**Exemple 4.5.1.2.** Surface de révolution  $(\Sigma)$ ,

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{d'axe } (\Delta), \text{ passant par } A \text{ de coordonnées } (1, 2, 1), \text{ dirigé par } \vec{V} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k} \\ \text{engendrée par la rotation, autour de } (\Delta), \text{ de la droite } (D) : \begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ 2x - y = 2 \end{cases} \end{array} \right.$$

*Remarque.* Si  $(D)$  est perpendiculaire à  $(\Delta)$ , on a un plan "troué", sinon  $(\Sigma)$  est une quadrique dont on peut préciser la nature :

- si  $(D)$  est parallèle à  $(\Delta)$ ,  $(\Sigma)$  est un cylindre
- si  $(D)$  rencontre  $(\Delta)$ , en seul point  $S$ ,  $(\Sigma)$  est un cône de sommet  $S$
- sinon,  $(\Sigma)$  est un hyperboloïde de révolution à une nappe

1. Equation cartésienne de  $(\Sigma)$ , à partir d'équations paramétriques de  $(D)$  : 
$$\begin{cases} x = x_1(t) = 1 + 2t \\ y = y_1(t) = 0 + 4t \\ z = z_1(t) = 0 - 3t \end{cases}$$

$$M(x, y, z) \in (\Sigma) \text{ ssi } \exists t \in \mathbb{R} :$$

$$\begin{cases} (x_1(t) - 1)^2 + (y_1(t) - 2)^2 + (z_1(t) - 1)^2 = (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 1)^2 \\ x_1(t) - y_1(t) + z_1(t) = x - y + z \end{cases}$$

$$M(x, y, z) \in (\Sigma) \text{ ssi } \exists t \in \mathbb{R} :$$

$$\begin{cases} ((1 + 2t) - 1)^2 + ((0 + 4t) - 2)^2 + ((0 - 3t) - 1)^2 = (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 1)^2 \\ (1 + 2t) - (0 + 4t) + (0 - 3t) = x - y + z \end{cases}$$

$$M(x, y, z) \in (\Sigma) \text{ ssi } \exists t \in \mathbb{R} : \begin{cases} 29t^2 - 10t + 5 - ((x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 1)^2) = 0 \\ t = \frac{1 - (x - y + z)}{5} \end{cases}$$

$(\Sigma)$  a pour équation cartésienne :

$$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 29xy + 29xz - 29yz + 21x + 54y + 21z - 23 = 0$$

$$\text{soit } 25S - 29P^2 + 8P - 104 = 0 \quad \text{avec } \begin{cases} S = (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 1)^2 \\ P = x - y + z. \end{cases}$$

2. Equation cartésienne de  $(\Sigma)$ , à partir des deux équations cartésiennes de  $(D)$  : 
$$\begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ 2x - y = 2 \end{cases}$$

$$M(x, y, z) \in (\Sigma) \text{ ssi } \exists (x_1, y_1, z_1) \in \mathbb{R}^3 :$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \begin{cases} x_1 + y_1 + 2z_1 = 1 \\ 2x_1 - y_1 = 2 \end{cases} & \text{(point de } (D)) \\ \begin{cases} (x_1 - 1)^2 + (y_1 - 2)^2 + (z_1 - 1)^2 = (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 1)^2 \\ x_1 - y_1 + z_1 = x - y + z \end{cases} & \begin{array}{l} \text{(sphère centrée en } A) \\ \text{(plan orthogonal à l'axe)} \end{array} \end{array} \right.$$

L'élimination de  $x_1$ ,  $y_1$  et  $z_1$  est un peu plus lourde que précédemment.

On utilise avec profit les notations simplificatrices, 
$$\begin{cases} S = (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 1)^2 \\ P = x - y + z \end{cases},$$
 pour obtenir l'équation cartésienne de  $(\Sigma)$  sous la forme :  $25S - 29P^2 + 8P - 104 = 0$ .

3. Equations paramétriques de  $(\Sigma)$ , à partir d'équations paramétriques de  $(D)$  ...  
(voir exemple ci-dessous).

**Exemple 4.5.1.3.** Surface de révolution  $(\Sigma)$ ,

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{d'axe } (\Delta), \text{ passant par } A \text{ de coordonnées } (1, 2, 1), \text{ dirigé par } \vec{V} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k} \\ \text{engendrée par la rotation, autour de } (\Delta), \text{ du cercle } (\Gamma) \text{ d'équation : } \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ 2x - y = 0 \end{cases} \end{array} \right.$$

*Remarque.*  $(\Sigma)$  est un tore (elliptique, puisque le cercle  $(\Gamma)$  n'est pas dans un plan méridien).

1. Equation cartésienne de  $(\Sigma)$ , à partir d'équations paramétriques de  $(\Gamma)$  :

$$\dots \text{ il faut d'abord paramétrer } (\Gamma), \text{ ce qui se fait simplement ici : } \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{5}} \cos t \\ y = \frac{2}{\sqrt{5}} \cos t \\ z = \sin t \end{cases}$$

ensuite ... on fait comme précédemment ...

2. Equation cartésienne de  $(\Sigma)$ , à partir des deux équations cartésiennes de  $(\Gamma)$  :

$M(x, y, z) \in (\Sigma)$  ssi  $\exists (x_1, y_1, z_1) \in \mathbb{R}^3$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = 1 \\ 2x_1 - y_1 = 0 \end{array} \right. \quad (\text{point de } (\Gamma))$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (x_1 - 1)^2 + (y_1 - 2)^2 + (z_1 - 1)^2 = (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 1)^2 \\ x_1 - y_1 + z_1 = x - y + z \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (\text{sphère centrée en } A) \\ (\text{plan orthogonal à l'axe}) \end{array}$$

```
> E1 := x1^2+y1^2+z1^2=1;
> E2 := 2*x1-y1=0;
> Ea := (x1-1)^2+(y1-2)^2+(z1-1)^2 = S;
> Eb := x1-y1+z1 = P;
> s := eliminate( {E1,E2,Ea,Eb}, {x1,y1,z1});
> Eq := op(s[2]);
```

On utilise avec profit les notations simplificatrices,  $\begin{cases} S = (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 1)^2 \\ P = x - y + z \end{cases}$ ,

pour obtenir l'équation cartésienne de  $(\Sigma)$  :

$$25 + 20P^2 - 14S + S^2 \text{ avec } \begin{cases} S = (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 1)^2 \\ P = x - y + z \end{cases}.$$

3. Equations paramétriques de  $(\Sigma)$ , à partir d'équation paramétriques de  $(\Gamma)$  ...  
(voir exemple ci-dessous).

### 4.5.2 Obtention d'équations paramétriques

On se place dans le cas où la surface  $(\Sigma)$  est engendrée par la rotation d'une courbe paramétrée  $\begin{cases} x = x_1(t) \\ y = y_1(t) \\ z = z_1(t) \end{cases}$  autour d'un axe  $(\Delta)$  passant par  $A$ , de coordonnées  $(a, b, c)$ , et dirigé par  $\vec{V} = u \vec{i} + v \vec{j} + w \vec{k}$ .

$$\begin{aligned} M(x, y, z) \text{ appartient à } (\Sigma) &\text{ ssi } M \text{ se déduit d'un point de } (\Gamma) \text{ par une rotation d'axe } (\Delta) \\ &\text{ ssi } \exists m \in (\Gamma) : \overrightarrow{AM} \text{ se déduit de } \overrightarrow{Am} \text{ dans une rotation vectorielle d'axe } (\Delta) \\ &\text{ ssi } \exists m \in (\Gamma) : \exists \theta : \overrightarrow{AM} \text{ se déduit de } \overrightarrow{Am} \text{ dans la rotation vectorielle d'axe } (\Delta) \text{ et d'angle } \theta \end{aligned}$$

On obtient directement des équations paramétriques de  $(\Sigma)$ , selon les paramètres  $t$  (de  $(\Gamma)$ ) et  $\theta$  (de rotation autour de  $(\Delta)$ ), le seul calcul un peu long étant la mise en place de la matrice de rotation ...

**Exemple 4.5.2.1.** Hyperboloïde de révolution à une nappe,  $(\Sigma)$  (suite d'un précédent exemple),

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{d'axe } (\Delta) \text{ passant par } A \text{ de coordonnées } (1, 2, 1) \text{ et dirigée par } \vec{V} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k} \\ \text{engendrée par la rotation, autour de } (\Delta), \text{ de la droite } (D) : \begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ 2x - y = 2 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = x_1(t) = 1 + 2t \\ y = y_1(t) = 0 + 4t \\ z = z_1(t) = 0 - 3t \end{cases} \end{array} \right.$$

On prépare la matrice  $R$ , d'une rotation  $r$  d'angle  $\theta$  autour de l'axe  $(\Delta)$  orienté par  $\vec{V}$  :

$$R = P R_1 {}^t P \quad \text{où } P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad R_1 = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cos(\theta) & -\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3} \sin(\theta) + \frac{1}{3} \cos(\theta) & \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3} \sin(\theta) - \frac{1}{3} \cos(\theta) \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \sin(\theta) + \frac{1}{3} \cos(\theta) - \frac{1}{3} & \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cos(\theta) & -\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3} \sin(\theta) + \frac{1}{3} \cos(\theta) \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \sin(\theta) - \frac{1}{3} \cos(\theta) + \frac{1}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \sin(\theta) + \frac{1}{3} \cos(\theta) - \frac{1}{3} & \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} M(x, y, z) \in (\Sigma) &\text{ ssi } \exists m \in (\Gamma) : \exists \theta : M = A + r(\overrightarrow{Am}) \\ &\text{ ssi } \exists t : \exists \theta : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + R \times \begin{pmatrix} x_1(t) - 1 \\ y_1(t) - 2 \\ z_1(t) - 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Avec les valeurs données, on trouve que  $(\Sigma)$  a pour équations paramétriques :

$$\begin{cases} x = \frac{4}{3} + \sqrt{3} \sin(\theta) - \frac{1}{3} \cos(\theta) & + t \left( -\frac{5}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3} \sin(\theta) + \frac{11}{3} \cos(\theta) \right) \\ y = \frac{5}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3} \sin(\theta) - \frac{5}{3} \cos(\theta) & + t \left( \frac{5}{3} + \frac{5\sqrt{3}}{3} \sin(\theta) + \frac{7}{3} \cos(\theta) \right) \\ z = \frac{4}{3} - \frac{2\sqrt{3}}{3} \sin(\theta) - \frac{4}{3} \cos(\theta) & + t \left( -\frac{5}{3} + 2\sqrt{3} \sin(\theta) - \frac{4}{3} \cos(\theta) \right) \end{cases} \quad \text{pour } \theta \in [0, 2\pi[, t \in \mathbb{R}$$

**Exemple 4.5.2.2.** Surface de révolution  $(\Sigma)$ ,

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{d'axe } (\Delta), \text{ passant par } A \text{ de coordonnées } (1, 2, 1), \text{ dirigé par } \vec{V} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k} \\ \text{engendrée par la rotation, autour de } (\Delta), \text{ du cercle } (\Gamma) \text{ d'équation : } \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ 2x - y = 0 \end{cases} \end{array} \right.$$

*Remarque.*  $(\Sigma)$  est un tore (elliptique), puisque  $(\Gamma)$  n'est pas dans un plan méridien).

$$(\Gamma) \text{ a pour équations paramétriques : } \begin{cases} x = x_1(t) = \frac{1}{\sqrt{5}} \cos t \\ y = y_1(t) = \frac{2}{\sqrt{5}} \cos t \\ z = z_1(t) = \sin t \end{cases}$$

la matrice  $R$ , de rotation d'angle  $\theta$  autour  $(\Delta)$ , a été calculée dans un exemple précédent (même axe).

$$\begin{aligned} M(x, y, z) \in (\Sigma) \text{ ssi } \exists m \in (\Gamma) : \exists \theta : M = A + r(\overrightarrow{Am}) \\ \text{ssi } \exists t : \exists \theta : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + R \times \begin{pmatrix} x_1(t) - 1 \\ y_1(t) - 2 \\ z_1(t) - 1 \end{pmatrix} \quad \text{ssi} \quad \dots \end{aligned}$$

## 4.6 Recherche d'une méridienne à partir d'une équation cartésienne

Pour identifier une des (courbes) méridiennes, il est préférable de se placer dans un repère adapté, ce qui nécessite l'identification préalable de l'axe.

1. Identification de l'axe :

La surface de révolution,  $(\Sigma)$ , ayant pour équation, dans le repère canonique  $\mathcal{R}_c = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ,

$$F(S, P) = 0 \quad \text{avec} \quad \begin{cases} S(x, y, z) = (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 \\ P(x, y, z) = ux + vy + wz \quad \text{où } (u, v, w) \neq (0, 0, 0) \end{cases}$$

son axe, qui passe par le point  $\Omega$  de coordonnées  $(a, b, c)$ , est dirigé par  $u \vec{i} + v \vec{j} + w \vec{k}$ .

2. Changement de repère :

Soit un repère orthonormé direct  $(\Omega, \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ , d'axes  $\Omega X$ ,  $\Omega Y$  et  $\Omega Z$ , où

$$\begin{cases} \vec{K} = \frac{1}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}} (u \vec{i} + v \vec{j} + w \vec{k}) \\ \vec{I} \text{ est choisi arbitrairement, de norme 1 et orthogonal à } \vec{K} \end{cases}$$

Pour un point  $M$ , de coordonnées  $\begin{cases} (x, y, z) \text{ dans le repère canonique } \mathcal{R}_c = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) \\ (X, Y, Z) \text{ dans le nouveau repère } (\Omega, \vec{I}, \vec{J}, \vec{K}) \end{cases}$ , on a :

$$\begin{cases} \|\overrightarrow{\Omega M}\|^2 &= (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = X^2 + Y^2 + Z^2 \\ \langle \overrightarrow{\Omega M} | \vec{K} \rangle &= \frac{(x - a)u + (y - b)v + (z - c)w}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}} = Z \end{cases}$$

On en déduit l'équation de  $(\Sigma)$  dans le repère  $(\Omega, \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$  :

$$\underbrace{F(X^2 + Y^2 + Z^2, au + bv + cw + Z\sqrt{u^2 + v^2 + w^2})}_{G(X^2 + Y^2 + Z^2, Z)} = 0$$

3. Méridienne (et cercle parallèle)

- La méridienne, du plan  $Y = 0$ , a pour équation (dans ce plan)  $G(X^2 + Z^2, Z) = 0$ .
- Le cercle parallèle, du plan  $Z = \lambda$ , a pour équation (dans ce plan)  $G(X^2 + Y^2 + \lambda^2, \lambda) = 0$  (cercle éventuellement vide).



## 4.7 Reconnaissance, caractéristiques d'une surface de révolution

### 4.7.1 Identification d'une surface de révolution d'après de (bonnes) équations paramétriques

**Exemple 4.7.1.1.** Surface  $(\Sigma)$  d'équations paramétriques 
$$\begin{cases} x = -\sin \theta + \lambda \cos \theta \\ y = \cos \theta + \lambda \sin \theta \\ z = \lambda \end{cases} \quad \begin{matrix} \theta \in [0, 2\pi[ \\ \lambda \in \mathbb{R} \end{matrix}$$

Après alignement, on remarque que, à  $\theta$  fixé, on obtient une droite  $(D_\theta)$ ,

- tracée sur  $(\Sigma)$ ,
- passant par le point de coordonnées  $(-\sin \theta, \cos \theta, 0)$
- dirigée par le vecteur  $\vec{U}(\theta) = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j} + \vec{k}$ .

La droite  $(D_\theta)$  étant l'image de la droite  $(D_0)$  par la rotation d'axe  $Oz$  et d'angle  $\theta$ , on en déduit que

$(\Sigma)$  est un hyperboloïde de révolution à une nappe, d'axe  $Oz$ .

On peut aussi remarquer que  $(\Sigma)$  est la quadrique d'équation cartésienne  $x^2 + y^2 - z^2 = 1$  (ou encore  $(x^2 + y^2 + z^2) - 2z^2 - 1 = 0$ , soit  $F(S, P) = 0$ , avec  $S = x^2 + y^2 + z^2$  et  $P = z$ ).

### 4.7.2 Identification d'une surface de révolution d'après une équation cartésienne

On cherche à mettre l'équation sous la forme  $F(x^2 + y^2 + z^2 + Q, P) = 0$ , avec  $P$  et  $Q$  formes linéaires.

L'axe de la surface passera par le centre de la sphère d'équation  $x^2 + y^2 + z^2 + Q = 0$  et sera orthogonal à la direction du plan d'équation  $P = 0$ .

**Exemple 4.7.2.1.** Surface  $(\Sigma)$  d'équation  $x^3 - y^3 - z^3 - 3xyz - 1 = 0$ .

On remarque que

- $(x^2 + y^2 + z^2)(x - y - z) = x^3 - y^3 - z^3 + xy^2 + xz^2 - yx^2 - yz^2 - zx^2 - zy^2$
- $(x - y - z)^3 = x^3 - y^3 - z^3 - 3x^2y - 3x^2z + 6xyz + 3xz^2 - 3zy^2 - 3yz^2$

on en déduit que  $2(x^3 - y^3 - z^3 - 3xyz) = 3(x^2 + y^2 + z^2)(x - y - z) - (x - y - z)^3$ , donc que

$(\Sigma)$  a une équation de la forme :  $3SP - P^3 - 2 = 0$  avec  $S = x^2 + y^2 + z^2$  et  $P = x - y - z$  (et  $Q = 0$ ), ce qui prouve que  $(\Sigma)$  est une surface de révolution d'axe passant par  $O$  et dirigé par  $\vec{V} = \vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$  :

$M(x, y, z) \in (\Sigma)$  ssi  $M$  appartient à l'intersection  
d'une sphère d'équation  $S = \lambda$ , centrée en  $O$   
et d'un plan d'équation  $P = \mu$ , orthogonal au vecteur  $\vec{V}$   
ssi  $M$  appartient à un cercle (parallèle) d'axe passant par  $O$  et dirigé par  $\vec{V}$

On peut en profiter pour obtenir des informations complémentaires :

1. Dans le repère orthonormal direct  $(O, \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$  où  $\begin{cases} \vec{K} = \frac{1}{\sqrt{3}} (\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}) \\ \vec{I} \text{ est arbitraire, de norme 1 et orthogonal à } \vec{K} \end{cases}$ ,

la surface  $(\Sigma)$  a pour équation cartésienne :

$$3\sqrt{3}Z(X^2 + Y^2 + Z^2) - 3\sqrt{3}Z^3 - 2 = 0, \text{ soit } 3\sqrt{3}Z(X^2 + Y^2) - 2 = 0.$$

2. Méridienne, cercle parallèle :

- La méridienne du plan  $Y = 0$  a pour équation  $3\sqrt{3}ZX^2 - 2 = 0$
- Le cercle parallèle du plan  $Z = \lambda > 0$ , a pour équation  $X^2 + Y^2 = \frac{2}{3\lambda\sqrt{3}}$

3. On obtient facilement une représentation paramétrique de  $(\Sigma)$ , dans le repère  $(O, \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$  :

$$\begin{cases} X = r \cos \theta \\ Y = r \sin \theta \\ Z = \frac{2\sqrt{3}}{9r^2} \end{cases} \quad \text{pour } r \in \mathbb{R}_+, \theta \in [0, 2\pi[$$

et, à l'aide des formules de changement de repère, on en déduit facilement des équations paramétriques dans le repère initial.

**Exemple 4.7.2.2.** Surface  $(\Sigma)$  d'équation  $x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz - 1 = 0$ .

1. En posant  $S = x^2 + y^2 + z^2$  et  $P = x + y + z$ , on vérifie que

$$x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz - 1 = \frac{3}{2} S - \frac{1}{2} P^2 - 1$$

$(\Sigma)$ , d'équation  $3S^2 - P^2 - 2 = 0$ , est une surface de révolution d'axe passant par le point  $O$  et dirigé par le vecteur  $\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ .

2.  $(\Sigma)$  est également un cylindre : en posant  $P_1 = x - y$  et  $Q_1 = x + y - 2z$ , on vérifie que

$$\text{l'équation de } (\Sigma) \text{ s'écrit aussi : } 3P_1^2 + Q_1^2 - 4 = 0,$$

ce qui prouve que  $(\Sigma)$  est un cylindre de direction dirigée par le vecteur  $\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ .

3. Comme  $(\Sigma)$  est une quadrique, elle est parfaitement qualifiée par son état de cylindre de révolution.

On pouvait aussi étudier matriciellement  $(\Sigma)$  en tant que quadrique :

- La matrice de la partie quadratique a comme valeurs propres 0 (simple) et  $\frac{3}{2}$  (double).
- La quadrique est à centre et son centre est  $O$  (immédiat : pas de partie linéaire).

La quadrique  $(\Sigma)$  est donc une surface de révolution, dont l'axe

$$\begin{cases} \text{est orienté par } \vec{i} + \vec{j} + \vec{k} & (\text{vecteur propre associé à la valeur propre simple}) \\ \text{passe par } O & (\text{centre de la quadrique}) \end{cases}$$

Dans le repère orthonormé direct  $(O, \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$  où  $\begin{cases} \vec{K} = \frac{1}{\sqrt{3}} (\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}) \\ \vec{I} \text{ et } \vec{J} \text{ sont des vecteurs propres associés à } \frac{3}{2} \end{cases}$

$(\Sigma)$  a pour équation  $\frac{3}{2} (X^2 + Y^2) - 1 = 0$  : cylindre de révolution  $\begin{cases} \text{d'axe } (O, \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}) \\ \text{de rayon } \sqrt{\frac{2}{3}} \end{cases}$

et on peut en déduire aisément un paramétrage de  $(\Sigma)$  dans le repère  $(O, \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$  : ...  
puis, par les formules de changement de repère, un paramétrage de  $(\Sigma)$  dans le repère initial.

## 5 Exemples de surfaces particulières ...

### 5.1 Surface (non orientable) de Mobius, ruban de Mobius

#### 5.1.1 Définition

##### Définition 5.1.1.

La surface de Mobius est la surface engendrée par la famille des droites qui rencontrent

- l'axe  $Oz$  (droite  $(\mathcal{D}_1)$ ),
- la droite  $(\mathcal{D}_2)$ , d'équations  $\begin{cases} x = -R \\ z = y \end{cases}$ ,
- le cercle  $(\Gamma)$  (d'axe  $Oz$ ) d'équations  $\begin{cases} x^2 + y^2 = R^2 \\ z = 0 \end{cases}$ .

*Remarque.* Cette définition est donnée dans un repère adapté où les équations sont simples.

#### 5.1.2 Equations paramétriques de la surface de Mobius

Une droite génératrice  $(D)$  rencontre  $\begin{cases} \text{la droite } (\mathcal{D}_1) \text{ (axe } Oz) \text{ en un point } m_1 \text{ de coordonnées } (0, 0, \alpha), \\ \text{la droite } (\mathcal{D}_2) \text{ en un point } m_2 \text{ de coordonnées } (-R, \beta, \beta), \\ \text{le cercle } (\Gamma) \text{ en un point } m_\theta \text{ de coordonnées } (R \cos \theta, R \sin \theta, 0). \end{cases}$

Les vecteurs  $\overrightarrow{m_1 m_2}$  et  $\overrightarrow{m_1 m_\theta}$  devant être colinéaires (composantes proportionnelles), on en déduit que

$$\alpha = \frac{-R \sin \frac{\theta}{2}}{\cos \frac{\theta}{2}} \quad (\text{pour } \theta \neq \pi \pmod{2\pi}).$$

Une droite génératrice  $(D)$  est donc une droite dépendant du paramètre  $\theta$ ,

$$\begin{cases} \text{dirigée par le vecteur } \vec{V}_\theta = \cos \theta \cos \frac{\theta}{2} \vec{i} + \sin \theta \cos \frac{\theta}{2} \vec{j} + \sin \frac{\theta}{2} \vec{k} & (\text{colinéaire à } \overrightarrow{m_1 m_\theta}) , \\ \text{passant par le point } m_\theta, \text{ de coordonnées } (R \cos \theta, R \sin \theta, 0) & (\text{point de } (\Gamma)) . \end{cases}$$

$$\begin{aligned} M(x, y, z) \in (\Sigma) \quad \text{ssi} \quad (M \text{ appartient à une droite génératrice}) \quad \text{ssi} \quad (\exists \theta : \exists \lambda \in \mathbb{R} : M = m_\theta + \lambda \vec{V}_\theta) \\ \text{ssi} \quad \exists \theta : \exists \lambda \in \mathbb{R} : \begin{cases} x = R \cos \theta + \lambda \cos \frac{\theta}{2} \cos \theta \\ y = R \sin \theta + \lambda \cos \frac{\theta}{2} \sin \theta \\ z = \lambda \sin \frac{\theta}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

En limitant l'évolution du paramètre  $\lambda$  à un intervalle  $[-\mu, +\mu]$ , on obtient un **ruban de mobius**.

#### La surface de Mobius n'est pas orientable :

On note  $m$  la fonction qui associe à  $(\theta, \lambda)$  le point  $m(\theta, \lambda)$  de paramètres  $\theta$  et  $\lambda$ .

- Les points  $M_1 = m(\theta, \lambda)$  et  $M_2 = m(\theta + 2\pi, -\lambda)$  sont confondus.
- Les normales en  $M_1$  et en  $M_2$ , calculées selon une même formule continue, sont de sens opposé :

$$\begin{cases} \frac{\partial m}{\partial \lambda}(\theta, \lambda) = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \cos \theta \\ \cos \frac{\theta}{2} \sin \theta \\ \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} & \text{et} \quad \frac{\partial m}{\partial \lambda}(\theta, \lambda) = -\frac{\partial m}{\partial \lambda}(\theta + 2\pi, -\lambda) \\ \frac{\partial m}{\partial \theta}(\theta, \lambda) = \begin{pmatrix} -\left(R + \lambda \cos \frac{\theta}{2}\right) \sin \theta - \frac{\lambda}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \theta \\ \left(R + \lambda \cos \frac{\theta}{2}\right) \cos \theta - \frac{\lambda}{2} \sin \frac{\theta}{2} \sin \theta \\ \frac{\lambda}{2} \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} & \text{et} \quad \frac{\partial m}{\partial \theta}(\theta, \lambda) = +\frac{\partial m}{\partial \theta}(\theta + 2\pi, -\lambda) \end{cases}$$

### 5.1.3 Equation cartésienne de la surface de Mobius

1. On peut reprendre le calcul précédent, sans paramètre angulaire, avec un point du cercle  $(\Gamma)$  de coordonnées  $(x_1, y_1, 0)$  vérifiant  $x_1^2 + y_1^2 = R^2$  et éliminer 4 paramètres  $(\alpha, \beta, x_1$  et  $y_1)$  entre 5 équations ...
2. On peut aussi éliminer les deux paramètres  $\theta$  et  $\lambda$  entre les trois équations paramétriques, ce qui n'est pas immédiat (à cause du mélange  $\theta$  et  $\frac{\theta}{2}$ ).

*Remarque.* On exclura quelques points de la surface (divisions facilitant le calcul) sans introduire de discussion. Ces points seront récupérés en final, par un prolongement par continuité, à l'aide d'une formule sans division.

$$\text{on a } x^2 + y^2 = \left(R + \lambda \cos \frac{\theta}{2}\right)^2 = R^2 + 2R\lambda \cos \frac{\theta}{2} + \lambda^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} = R^2 + 2R\lambda \cos \frac{\theta}{2} + \lambda^2 - z^2$$

$$\text{d'où } x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = \lambda^2 + 2R\lambda \cos \frac{\theta}{2} \quad \text{puis} \quad x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = \frac{z^2}{\sin^2 \frac{\theta}{2}} + 2Rz \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}}$$

Avec  $t = \tan \frac{\theta}{2}$ , on a  $\sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{t^2}{1+t^2}$  et comme  $\frac{y}{x} = \tan \theta = \frac{2t}{1-t^2}$ , on aura successivement :

$$\begin{cases} \frac{y}{x} = \frac{2t}{1-t^2} \\ x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = z^2 \frac{1+t^2}{t^2} + 2Rz \frac{1}{t} \end{cases} \quad \begin{cases} t^2 = 1 - \frac{2x}{y} t \\ x^2 + y^2 - R^2 = \frac{z^2}{t^2} + 2Rz \frac{1}{t} \end{cases}$$

$$\begin{cases} t^2 = 1 - \frac{2x}{y} t \\ t^2 = \frac{z^2 + 2Rzt}{x^2 + y^2 - R^2} \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{z^2 + 2Rzt}{x^2 + y^2 - R^2} = 1 - \frac{2x}{y} t \\ t^2 = 1 - \frac{2x}{y} t \end{cases} \quad \begin{cases} t = \frac{y(x^2 + y^2 - z^2 - R^2)}{2x(x^2 + y^2 - R^2) + 2Ryz} \\ t^2 = 1 - \frac{2x}{y} t \end{cases}$$

$$\text{On en déduit que } \left( \frac{y(x^2 + y^2 - z^2 - R^2)}{2x(x^2 + y^2 - R^2) + 2Ryz} \right)^2 = 1 - \frac{2x}{y} \left( \frac{y(x^2 + y^2 - z^2 - R^2)}{2x(x^2 + y^2 - R^2) + 2Ryz} \right)$$

L'équation cartésienne de la surface de Mobius s'écrit :

$$y^2 (x^2 + y^2 - z^2 - R^2)^2 - 4 (x(x^2 + y^2 - R^2) + Ryz)^2 + 4x (x^2 + y^2 - z^2 - R^2) (x(x^2 + y^2 - R^2) + Ryz) = 0$$

## 5.2 Surface engendrée par les tangentes à une courbe gauche

### 5.2.1 Courbe définie par des équations paramétriques

**Exemple 5.2.1.1.** Surface  $(\Sigma)$  engendrée par les tangentes à la courbe  $(\Gamma) : \begin{cases} x = x_1(t) = t \\ y = y_1(t) = t^2 \\ z = z_1(t) = t^3 \end{cases} \quad \text{pour } t \in \mathbb{R}$

La tangente au point de paramètre  $t$  a pour équations paramétriques :

$$\begin{cases} x = x_1(t) + \lambda x'_1(t) = t + \lambda \\ y = y_1(t) + \lambda y'_1(t) = t^2 + 2\lambda t \\ z = z_1(t) + \lambda z'_1(t) = t^3 + 3\lambda t^2 \end{cases} \quad \text{pour } \lambda \in \mathbb{R}$$

et on a immédiatement les équations paramétriques de  $(\Sigma) : \begin{cases} x = t + \lambda \\ y = t^2 + 2\lambda t \\ z = t^3 + 3\lambda t^2 \end{cases} \quad \text{pour } t \in \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{R}$

Les paramètres s'éliminent facilement,

$$\begin{cases} y = t^2 + 2(x-t)t \\ z = t^3 + 3(x-t)t^2 \end{cases} \quad \begin{cases} y = -t^2 + 2xt \\ z = -2t^3 + 3xt^2 \end{cases} \quad \begin{cases} y = -t^2 + 2xt \\ z - 2ty = -xt^2 \end{cases} \quad \begin{cases} t^2 = 2xt - y \\ z - 2ty = -xt^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t^2 = 2xt - y \\ z - 2ty = -x(2xt - y) \end{cases} \quad \begin{cases} t^2 = 2xt - y \\ t = \frac{xy - z}{2(x^2 - y)} \end{cases} \quad \left( \frac{xy - z}{2(x^2 - y)} \right)^2 = 2x \frac{xy - z}{2(x^2 - y)} - y$$

d'où l'équation cartésienne de  $(\Sigma) : 3y^2x^2 + 6yxyz - z^2 - 4x^3z - 4y^3 = 0$ .

### 5.2.2 Courbe définie par des équations cartésiennes

**Exemple 5.2.2.1.** Surface  $(\Sigma)$  engendrée par les tangentes à la courbe  $(\Gamma) : \begin{cases} f(x, y, z) = 0 \\ g(x, y, z) = 0 \end{cases}$

$$M(x, y, z) \in (\Sigma) \text{ ssi } \exists m : \begin{cases} m \in (\Sigma) \quad (\text{et est régulier}) \\ \overrightarrow{mM} \text{ est colinéaire à un vecteur directeur de la tangente en } m \text{ à } (\Sigma) \end{cases}$$

$$\text{ssi } \exists (x_1, y_1, z_1) \in \mathbb{R}^3 : \exists \lambda \in \mathbb{R} : \begin{cases} f(x_1, y_1, z_1) = 0 \\ g(x_1, y_1, z_1) = 0 \\ M = m + \lambda \overrightarrow{\text{grad}} f(m) \wedge \overrightarrow{\text{grad}} g(m) \\ (m \text{ étant le point de coordonnées } (x_1, y_1, z_1)) \end{cases}$$

$$\text{ssi } \exists x_1, y_1, z_1, \lambda \in \mathbb{R} : \dots$$

Il ne reste plus qu'à éliminer les quatre paramètres  $x_1, y_1, z_1$  et  $\lambda$  entre les cinq équations ... pour obtenir une équation cartésienne de  $(\Sigma)$ .

*Remarque.* Si on peut exprimer deux des coordonnées  $x_1, y_1$  ou  $z_1$ , d'un point  $m$  de  $(\Gamma)$ , en fonction de l'autre (à l'aide des relations  $f(x_1, y_1, z_1) = 0$  et  $g(x_1, y_1, z_1) = 0$ ), on obtiendra des équations paramétriques de  $(\Sigma)$ , en fonction des deux paramètres restants.

## 5.3 Surface engendrée par des droites s'appuyant sur deux droites fixes et soumises à une autre condition

### 5.3.1 Droites fixes orthogonales entre elles et non coplanaires

**Exemple 5.3.1.1.** Surface  $(\Sigma)$  engendrée par les droites  $(\mathcal{D})$  telles que

$$\begin{cases} (\mathcal{D}) \text{ rencontre deux droites } (\mathcal{D}_1) \text{ et } (\mathcal{D}_2) \text{ orthogonales, non coplanaires et distantes de } a > 0. \\ (\mathcal{D}) \text{ est distante de } d (> 0) \text{ du pied de la perpendiculaire commune à } (\mathcal{D}_1) \text{ et } (\mathcal{D}_2), \text{ situé sur } (\mathcal{D}_1). \end{cases}$$

On se place dans un repère orthonormé direct  $(\Omega, \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$  tel que

$$\begin{cases} \text{l'axe } \Omega Z \text{ est porté par } (\mathcal{D}_1) \\ \text{l'axe } \Omega X \text{ est porté par la perpendiculaire commune à } (\mathcal{D}_1) \text{ et } (\mathcal{D}_2), (\mathcal{D}_2) \text{ coupant } \Omega X \text{ en } (a, 0, 0) \end{cases}$$

Une droite  $(D)$ , qui coupe  $(\mathcal{D}_1)$  et  $(\mathcal{D}_2)$ , a des équations cartésiennes de la forme :

$$\begin{cases} (1) : & Y = uX & (\text{plan contenant } (\mathcal{D}_1), \text{ non parallèle à } (\mathcal{D}_2)) \\ (2) : & Z = v(X - a) & (\text{plan contenant } (\mathcal{D}_2), \text{ non parallèle à } (\mathcal{D}_1)) \end{cases}$$

$(D)$  passe par le point  $H$  de coordonnées  $(0, 0, -av)$  et est dirigée par  $\vec{V} = \vec{I} + u\vec{I} + v\vec{K}$ , donc

le fait que la distance de  $(D)$  à l'origine soit égale à  $d$  se traduit par la relation :  $d = \frac{\|\vec{\Omega H} \wedge \vec{V}\|}{\|\vec{V}\|}$ .

On a donc  $d^2 = \frac{a^2 u^2 v^2 + a^2 v^2}{1 + u^2 + v^2}$ , ce qui donne :  $u^2 (d^2 - a^2 v^2) + (d^2 - a^2) v^2 + d^2 = 0$ .

Par exemple, avec  $d = a$ , on a  $u^2 (1 - v^2) + 1 = 0$  (3).

- En éliminant  $u$  et  $v$  entre (1), (2) et (3), on obtient une équation cartésienne de  $(\Sigma)$  :

$$X^4 + X^2 Y^2 - Y^2 Z^2 - (2aX - a^2)(X^2 + Y^2) = 0$$

- En éliminant  $v$  et en posant  $X = t$ , on obtient  $(\Sigma)$  comme réunion de deux nappes paramétrées :

$$\begin{cases} X = & t \\ Y = & tu \\ Z = -a\sqrt{1 + \frac{1}{u^2}} & + t\sqrt{1 + \frac{1}{u^2}} \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} X = & t \\ Y = & tu \\ Z = a\sqrt{1 + \frac{1}{u^2}} & - t\sqrt{1 + \frac{1}{u^2}} \end{cases} \quad \text{pour } t \in \mathbb{R}, u \in \mathbb{R}^*$$

caractéristiques de surfaces réglées, dont on peut prouver qu'elles ne sont pas développables ...

## 5.4 Exemples de cônoïdes

### 5.4.1 Conoïdes droits (génératrices perpendiculaires à l'axe)

**Exemple 5.4.1.1.** Hélicoïde droit, à un plan directeur.

Soit la surface  $(\Sigma)$  engendrée par la famille des droites qui

- $\left\{ \begin{array}{l} \text{rencontrent orthogonalement l'axe d'un cylindre de révolution de rayon } a > 0, \\ \text{s'appuient sur une hélice tracée sur ce cylindre} \end{array} \right.$

On se place dans un repère orthonormé direct  $(\Omega, \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$  où

- l'axe  $\Omega Z$  est l'axe du cylindre
- l'hélice directrice, de pas  $h > 0$ , a pour équations paramétriques  $\begin{cases} X = X_1(\theta) = a \cos \theta \\ Y = Y_1(\theta) = a \sin \theta \\ Z = Z_1(\theta) = h \theta \end{cases}$

Le projeté, sur  $(\Delta) = \Omega Z$ , parallèlement à  $(\mathcal{P}) = X \Omega Y$ , du point  $m$  de paramètre  $\theta$  de l'hélice  $(\Gamma)$  est le point  $q(m)$  de coordonnées  $(0, 0, Z_1(\theta))$ .

$M(x, y, z)$  appartient à  $(\Sigma)$  ssi  $\exists m \in (\Gamma) : \overrightarrow{mM}$  et  $\overrightarrow{q(m)m}$  sont colinéaires

$$\text{ssi } \exists \theta \in \mathbb{R} : \exists \lambda \in \mathbb{R} : \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1(\theta) \\ Y_1(\theta) \\ Z_1(\theta) \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} X_1(\theta) - 0 \\ Y_1(\theta) - 0 \\ Z_1(\theta) - Z_1(\theta) \end{pmatrix}$$

$$\text{ssi } \exists \theta \in \mathbb{R} : \exists \lambda \in \mathbb{R} : \begin{cases} X = a \cos \theta + \lambda a \cos \theta \\ Y = a \sin \theta + \lambda a \sin \theta \\ Z = h \theta + \lambda \times 0 \end{cases}$$

On aura alors, pour  $X \neq 0$ ,  $\frac{Y}{X} = \tan \theta$ , d'où  $\frac{Y}{X} = \tan \left( \frac{Z}{h} \right)$  (ce qui est bien la forme attendue d'une équation cartésienne de conoïde) et on transforme ensuite cette équation en :  $Y = X \tan \left( \frac{Z}{h} \right)$  (il manquera les droites contenues dans les plans d'équation  $Z = h \left( \frac{\pi}{2} + k\pi \right)$ , pour  $k \in \mathbb{Z}$ ).

*Remarque.* Il restera à donner une équation cartésienne dans le repère initial ...

**Exemple 5.4.1.2.** Soit la surface  $(\Sigma)$  engendrée par les droites qui

- $\left\{ \begin{array}{l} \text{rencontrent perpendiculairement une droite } (\Delta), \\ \text{s'appuient sur une ellipse } (\mathcal{E}) \text{ située dans un plan parallèle à } (\Delta), \text{ qui ne contient pas } (\Delta). \end{array} \right.$

On se place dans un repère orthonormé direct  $(\Omega, \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ , où

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{K} \text{ est vecteur directeur de } (\Delta) \\ \text{l'ellipse } (\mathcal{E}) \text{ a pour équations : } \begin{cases} X = \alpha \\ (Y - \beta)^2 + Z^2 = r^2 \end{cases} \end{array} \right.$$

$M(X, Y, Z) \in (\Sigma)$  ssi  $\exists m_1 \in \Omega Z, m_2 \in \mathcal{E} : \overrightarrow{m_1 M}$  est colinéaire à  $\overrightarrow{m_1 m_2}$  et  $\overrightarrow{m_1 m_2} \perp \Omega Z$

$$\text{ssi } \exists m_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix}, m_2 \begin{pmatrix} \alpha \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}, \lambda : \begin{cases} M = m_1 + \lambda \overrightarrow{m_1 m_2} \\ (y_2 - \beta)^2 + z_2^2 = r^2 \\ t = z_2 \end{cases} \quad \begin{cases} y_2 = \beta + r \cos \theta \\ z_2 = r \sin \theta \end{cases}$$

$$\text{ssi } \begin{cases} X = \lambda \alpha \\ Y = \lambda (\beta + r \cos \theta) \\ Z = r \sin(\theta) \end{cases} \quad \text{pour } \lambda \in \mathbb{R}, \theta \in [0, 2\pi]$$

Par élimination de  $\lambda$  et de  $\theta$ , on obtient comme équation cartésienne  $(\alpha Y - \beta X)^2 + X^2(Z^2 - r^2) = 0$ ,

## 6 Surfaces réglées

### 6.1 Définition

#### Définition 6.1.1.

Un surface réglée est une surface engendrée par une famille de droites  $(D_t)$  variables (génératrices de la surface), dépendant de façon continue du paramètre  $t$ .

### 6.2 Equations paramétriques d'une surface réglée

1. En général, une droite génératrice  $(D_t)$   $\left\{ \begin{array}{l} \text{passe par un point } A(t) \text{ de coordonnées } (a(t), b(t), c(t)) , \\ \text{est dirigée par } \vec{V}(t) = \alpha(t) \vec{i} + \beta(t) \vec{j} + \gamma(t) \vec{k} \end{array} \right.$

$$(D_t) \text{ a pour équations paramétriques } \begin{cases} x = a(t) + u \alpha(t) \\ y = b(t) + u \beta(t) \\ z = c(t) + u \gamma(t) \end{cases} \quad \text{pour } u \in \mathbb{R}$$

et on en déduit des équations paramétriques de la surface engendrée par ces droites :

$$\begin{cases} x = a(t) + u \alpha(t) \\ y = b(t) + u \beta(t) \\ z = c(t) + u \gamma(t) \end{cases} \quad \text{pour } u \in \mathbb{R}, t \in I$$

*Remarque.* Cette représentation utilise six fonctions de la variable  $t$ .

2. Quitte à éliminer celles des droites qui sont parallèles au plan  $xOy$  (pour un nombre fini de valeurs de la variable  $t$ ), on peut donner des équations cartésiennes des droites  $(D_t)$  sous la forme :

$$\begin{cases} x - p(t) z = a(t) \\ y - b(t) z = b(t) \end{cases}, \text{ ce qui conduit à } \begin{cases} x = a(t) + u p(t) \\ y = b(t) + u q(t) \\ z = u \end{cases} \quad \text{pour } u \in \mathbb{R}$$

et on en déduit les équations paramétriques de la surface engendrée par ces droites :

$$\begin{cases} x = a(t) + u p(t) \\ y = b(t) + u q(t) \\ z = u \end{cases} \quad \text{pour } t \in I, u \in \mathbb{R}$$

*Remarque.* Cela n'utilise que quatre fonctions de la variable  $t$ , au lieu de six précédemment.

C'est sous cette dernière forme que l'on traitera le plus souvent le cas des surfaces réglées (en excluant les quelques droites parallèles au plan  $xOy$ ).

On obtient une équation cartésienne par élimination des deux paramètres  $u$  et  $t$  entre les trois équations paramétriques.

### 6.3 Reconnaissance d'une surface réglée

Cette reconnaissance n'est facile que si la surface est donnée sous la forme paramétrée suivante :

$$\begin{cases} x = a(t) + u \alpha(t) \\ y = b(t) + u \beta(t) \\ z = c(t) + u \gamma(t) \end{cases} \quad \text{pour } u \in \mathbb{R}, t \in I$$

que l'on interprète par  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \\ c(t) \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \\ \gamma(t) \end{pmatrix} \quad \left( \text{ide, } M = A(t) + u \vec{V}(t) \right) \quad \text{pour } u \in \mathbb{R}, t \in I$

interprétation où, à  $t$  fixé, on reconnaît une droite passant par  $A(t)$  et dirigée par  $\vec{V}(t)$ .

#### 6.3.1 Surface définie par une équation cartésienne

**Exemple 6.3.1.1.** Pour montrer que la surface d'équation cartésienne

$$y^2 (x^2 + y^2 - z^2 - R^2)^2 - 4 (x (x^2 + y^2 - R^2) + R y z)^2 + 4 x (x^2 + y^2 - z^2 - R^2) (x (x^2 + y^2 - R^2) + R y z) = 0$$

est une surface réglée ... il faut la paramétrer, ce qui n'est pas évident !

### 6.3.2 Surface définie par des équations paramétriques

Le paramétrage donné n'est pas forcément de la forme caractéristique des surfaces réglées. Il faut parfois transformer ce paramétrage en un autre ...

**Exemple 6.3.2.1.** La surface d'équations 
$$\begin{cases} x = \frac{u^3 + u v^2 + u}{u^2 + v^2} \\ y = \frac{2 u^3 + 2 u v^2 + u^2}{u^2 + v^2} \\ z = \frac{u^2 + 2 u + v^2}{u^2 + v^2} \end{cases}$$
 est réglée : 
$$\begin{cases} x = u & + \frac{1}{u^2 + v^2} u \\ y = 2 u & + \frac{1}{u^2 + v^2} u^2 \\ z = 1 & + \frac{1}{u^2 + v^2} 2 u \end{cases}$$

### 6.4 Exemples de surfaces réglées ou non

On a vu précédemment, comme surfaces réglées,

- en général
  - les cylindres
  - les cônes
- en particulier
  - les quadriques suivantes :
    - le cône elliptique
    - l'hyperboloïde à une nappe, de révolution ou elliptique (H1)
    - une droite double
    - les cylindres, elliptiques, hyperboliques ou paraboliques
    - un couple de plans sécants ou parallèles
    - le paraboloïde hyperbolique (c'est un conoïde)
  - la surface de Mobius
  - les surfaces engendrées par les tangentes à une courbe gauche

Parmi les surfaces non réglées, on a déjà rencontré :

- le tore
- les quadriques suivantes :
  - l'ellipsoïde
  - l'hyperboloïde à deux nappes, de révolution ou elliptique (H2)
  - le paraboloïde elliptique

### 6.5 Plan tangent à une surface réglée en un point d'une génératrice

Lorsque la surface admet un paramétrage de classe  $\mathcal{C}^1$ ,  $(t, u) \mapsto M(t, u)$ , le plan tangent,  $(\mathcal{P}_{t,u})$ , en un point régulier  $M(t, u)$ , est dirigé par les vecteurs  $\frac{\partial \vec{M}}{\partial t}(t, u)$  et  $\frac{\partial \vec{M}}{\partial u}(t, u)$ .

L'écriture avec 4 fonctions de  $t$ , de classe  $\mathcal{C}^1$ ,  $M(t, u) : \begin{cases} x = a(t) & + & u p(t) \\ y = b(t) & + & u q(t) \\ z = & & u \end{cases}$  pour  $t \in I, u \in \mathbb{R}$

conduit à des calculs plus faciles, puisque  $\frac{\partial \vec{M}}{\partial t}(t, u) = \begin{pmatrix} a'(t) + u p'(t) \\ b'(t) + u q'(t) \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $\frac{\partial \vec{M}}{\partial u}(t, u) = \begin{pmatrix} p(t) \\ q(t) \\ 1 \end{pmatrix}$

On en déduit l'équation du plan tangent  $(\mathcal{P}_{t,u})$  au point de paramètre  $u$  d'une droite génératrice  $(D_t)$  :

$$\begin{aligned} m(x, y, z) \in (\mathcal{P}_{t,u}) \quad & \text{ssi} \quad \det_{\mathcal{C}} \left( \overrightarrow{m M(t, u)}, \frac{\partial \vec{M}}{\partial t}(t, u), \frac{\partial \vec{M}}{\partial u}(t, u) \right) = 0 \\ & \text{ssi} \quad \left| \overrightarrow{m M(t, u)} \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial \vec{M}}{\partial t}(t, u) & \frac{\partial \vec{M}}{\partial u}(t, u) \end{vmatrix} \right| = 0 \\ & \text{ssi} \quad \begin{vmatrix} x - (a(t) + u p(t)) & a'(t) + u p'(t) & p(t) \\ y - (b(t) + u q(t)) & b'(t) + u q'(t) & q(t) \\ z - u & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{ssi} \quad \begin{vmatrix} x - a(t) & a'(t) + u p'(t) & p(t) \\ y - b(t) & b'(t) + u q'(t) & q(t) \\ z & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \end{aligned}$$



## 7 Surfaces développables

### 7.1 Définition

#### Définition 7.1.1.

Une surface réglée est développable si le plan tangent est invariant le long d'une droite génératrice.

### 7.2 Exemples de surfaces réglées développables

1. **Cylindres** : Un cylindre admet comme équations paramétriques 
$$\begin{cases} x = x_1(t) + \lambda a \\ y = y_1(t) + \lambda b \\ z = z_1(t) + \lambda c \end{cases} \quad \text{pour } \lambda \in \mathbb{R}, t \in I$$
  
A  $t$  fixé, on reconnaît l'équation paramétrique d'une droite, ce qui prouve que la surface est réglée.

Si on calcule un vecteur directeur de la normale en un point régulier, on constate que ce vecteur a une direction constante à  $t$  fixé (indépendante de  $\lambda$ ), ce qui prouve que la surface est développable.

2. **Cônes** : Un cône admet comme équations paramétriques 
$$\begin{cases} x = a + \lambda (x_1(t) - a) \\ y = b + \lambda (y_1(t) - b) \\ z = c + \lambda (z_1(t) - c) \end{cases} \quad \text{pour } \lambda \in \mathbb{R}, t \in I$$
  
A  $t$  fixé, on reconnaît l'équation paramétrique d'une droite, ce qui prouve que la surface est réglée.

Si on calcule un vecteur directeur de la normale en un point régulier, on constate que ce vecteur a une direction constante à  $t$  fixé (indépendante de  $\lambda$ ), ce qui prouve que la surface est développable.

3. **Surfaces engendrées par les tangentes à une courbe gauche de classe  $\mathcal{C}^2$**  :

On a vu que les équations paramétriques sont de la forme : 
$$\begin{cases} x = x_1(t) + \lambda x'_1(t) \\ y = y_1(t) + \lambda y'_1(t) \\ z = z_1(t) + \lambda z'_1(t) \end{cases} \quad \text{pour } \lambda \in \mathbb{R}, t \in I$$
  
A  $t$  fixé, on reconnaît l'équation paramétrique d'une droite, ce qui prouve que la surface est réglée.

Si on calcule un vecteur directeur de la normale en un point régulier, on constate que ce vecteur a une direction constante à  $t$  fixé (indépendante de  $\lambda$ ), ce qui prouve que la surface est développable.

4. ...

### 7.3 Exemples de surfaces réglées non développables

1. **Hyperboloïde à une nappe (H1)** : Dans un repère orthonormé direct adapté, un H1 a

- pour équation cartésienne :  $\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - \frac{z^2}{C^2} = 1$
- pour équations paramétriques : 
$$\begin{cases} x = A \cos \theta - v A \sin \theta \\ y = B \sin \theta + v B \cos \theta \\ z = v C \end{cases} \quad \text{pour } \theta \in [0, 2\pi[, v \in \mathbb{R}$$

Cette surface est engendrée par la famille de droites  $(D_\theta)$  d'équations 
$$\begin{cases} x = A \cos \theta - z \frac{A}{C} \sin \theta \\ y = B \sin \theta + z \frac{B}{C} \cos \theta \end{cases}$$

Il s'agit donc d'une surface réglée.

D'après les équations paramétriques ci-dessus, on obtient comme vecteur normal à la surface au point de paramètre  $\theta$  et  $v$  :

$$\begin{pmatrix} C B \cos \theta \\ C A \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} -C B \sin \theta \\ C A \sin \theta \\ -A B \end{pmatrix}$$

et on constate que, à  $\theta$  fixé, ce vecteur n'a pas une direction constante (il change de direction selon  $v$ ), ce qui prouve que l'hyperboloïde à une nappe (H1) est une surface réglée non développable.

2. **Paraboloïde hyperbolique** : Dans un repère orthonormé direct adapté, un PH a

- pour équation cartésienne :  $\frac{x^2}{A^2} - \frac{y^2}{B^2} - z = 0$
- pour équations paramétriques : 
$$\begin{cases} x = A \frac{u+v}{2} \\ y = B \frac{u-v}{2} \\ z = uv \end{cases} \quad \text{pour } (u, v) \in \mathbb{R}^2$$

donc est engendrée par la famille de droites  $(D_u)$  d'équations 
$$\begin{cases} x = A \frac{u}{2} + v \frac{A}{2} \\ y = B \frac{u}{2} + v \frac{-B}{2} \\ z = 0 + v u \end{cases}$$

où  $(D_u)$  passe par  $m_u = \begin{pmatrix} A \frac{u}{2} \\ B \frac{u}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$  et est dirigée par  $\vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{A}{2} \\ \frac{-B}{2} \\ u \end{pmatrix}$

Le PH est bien une surface réglée.

D'après les équations paramétriques ci-dessus, on obtient comme vecteur normal à la surface au point de paramètres  $u$  et  $v$  :

$$\begin{pmatrix} B \frac{u+v}{2} \\ A \frac{u-v}{2} \\ -A B \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

et on constate que, à  $u$  fixé (par exemple  $u = 0$ ), ce vecteur n'a pas une direction constante (il change de direction selon  $v$ ), ce qui prouve que le paraboloïde hyperbolique (PH) est une surface réglée non développable.

3. **Surface de Mobius, ruban de Mobius** :

$$\begin{cases} x = R \cos \theta + \lambda \cos \frac{\theta}{2} \cos \theta \\ y = R \sin \theta + \lambda \cos \frac{\theta}{2} \sin \theta \\ z = \lambda \sin \frac{\theta}{2} \end{cases} \quad \text{pour } \theta \in [0, 4\pi[, \lambda \in \mathbb{R}$$

A  $\theta$  fixé, on reconnaît l'équation paramétrique d'une droite, ce qui prouve que la surface est réglée.

Si on calcule un vecteur directeur de la normale en un point régulier, on constate que ce vecteur n'a pas une direction constante à  $\theta$  fixé (il change de direction selon  $\lambda$ ), ce qui prouve que la surface de Mobius n'est pas une surface développable.

4. ...

< FIN >