Spé PT – Révisions (début d'année)

Révisions de Sup (un minimum, incomplet, un peu en vrac)

1. Cela n'est pas un cours ni même un résumé de cours de Sup ;
2. Cela ne couvre pas tout le programme de Sup ;
3. Cela ne couvre pas toute les compétences normales de fin de Sup ;
4. Cela n'est pas dans un ordre forcément logique.

Alors, qu'est ce que c'est ?

Je tente de couvrir une assez vaste partie d'une partie des chapitres de Sup, avec dans chaque chapitre évoqué,

- parfois un rappel des grandes lignes du chapitre
- des **rappels succints de cours**, de **méthodes**, **d'astuces de calcul**, éventuellement **sous forme de schéma**,
- éventuellement des **exemples clairs** (du moins je l'espère),
- des **exercices modestes** avec parfois des indications.
- quelques **références à des théorèmes**

> Les exercices donnés ici ne sont pas en général des exercices piégeants, ce n'est pas l'objectif ! Ils sont construits afin d'illustrer le cours de Sup, d'aider à la compréhension du cours, d'acquérir l'expérience et "les petits trucs" qui permettent de savoir comment faire, de faire vite et bien, avec un minimum de calcul, un minimum de fatigue et . . . un maximum de réussite.
>
> Cela doit vous permettre, dans un premier temps, de limiter les dégâts, puis ensuite de progresser.

En suivant ce document, en le reprenant ultérieurement, vous y trouverez le moyen d'assurer d'une grande partie des **compétences minimales** qui vous seront utile en math, mais aussi en physique et en SI.

On va traiter tout cela dans les premières semaines de Spé. Certains d'entre vous auront peut-être quelques difficultés à tout maîtriser du premier coup (on n'en fera pas un plat), mais il ne faut pas se décourager dès le départ, l'important c'est de progresser.

- N'hésitez pas à poser **et reposer** et **reposer encore** des questions ou la même question ! (vous n'êtes pas tout seul à ne pas avoir compris un truc)
- Fixez vous comme objectif de maîtriser la quasi totalité de tout cela le plus tôt possible avant décembre, parce qu'il y a le programme de Spé à traiter, avec pas mal de choses nouvelles.
- En cours d'année, je m'arrange pour qu'on ait l'occasion de revoir beaucoup de points, soit sur le programme de Sup, soit sur ce qui a été déjà fait en Spé, mais on ne peut pas revenir indéfiniment sur les mêmes choses et j'aimerai bien que le "minimum" soit acquis le plus vite possible.
- On aura quand même, en cours d'année de Spé, l'occasion de repasser (au moins une fois) sur quasiment toutes les éléments du cours de math de Sup, soit en révision, soit en approfondissement.

Finalement, un certain nombre de choses qui vous paraissaient "un monde" en Sup devraient se révéler bien plus simples, plus accessibles que vous ne le croyez :

1. problème mieux identifié
2. méthodes connues ou que l'on peut retrouver
3. et . . . il ne reste plus qu'à avoir le courage de mener ses calculs, avec soin.

Bien entendu, pour la spé, cela ne s'arrêtera pas là ! mais c'est une autre histoire ...

Bonne année de Spé à Benj'am.

---

1 Primitives ou intégrales élémentaires

Décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle, ici dans $\mathbb{R}$

$$\frac{x^9+x+1}{(x+1)^3\,(x+2)\,(x^2+1)^2} = \frac{x^9+x+1}{x^8+11\,x^6+21\,x^4+5\,x^7+17\,x^5+19\,x^3+13\,x^2+7\,x+2}$$

$$= \underbrace{x-5}_{\text{quotient}} + \frac{\overbrace{14\,x^7+38\,x^6+64\,x^5+86\,x^4+82\,x^3+58\,x^2+34\,x+11}^{\text{reste}}}{\underbrace{x^8+11\,x^6+21\,x^4+5\,x^7+17\,x^5+19\,x^3+13\,x^2+7\,x+2}_{\text{diviseur } = (x+1)^3\,(x+2)\,(x^2+1)^2}}$$

$$\frac{\overbrace{4\,x^7+38\,x^6+64\,x^5+86\,x^4+82\,x^3+58\,x^2+34\,x+11}^{\textbf{degré strictement inférieur à celui du dénominateur}}}{\underbrace{(x+1)^3}_{(A)}\;\underbrace{(x+2)}_{(B)}\;\underbrace{(x^2+1)^2}_{(C)}}$$

$$= \frac{a_1}{\underbrace{(\underbrace{x+1}_{\text{atome}})^3}_{\text{molécule}}} + \frac{b_1}{(x+1)^2} + \frac{c_1}{x+1}$$
{on épuise les degrés de la molécule (A), de 3 à 1, avec des <u>numérateurs</u> de degré immédiatement inférieur au <u>degré de l'atome</u>

$$+ \frac{a_2}{x+2}$$
{épuisement immédiat de la molécule (atomique) (B)

$$+ \frac{a_3\,x+\alpha_3}{\underbrace{(\underbrace{x^2+1}_{\text{atome}})^2}_{\text{molécule}}} + \frac{b_3\,x+\beta_3}{x^2+1}$$
{on épuise les degrés de la molécule (C), de 2 à 1, avec des <u>numérateurs</u> de degré immédiatement inférieur au <u>degré de l'atome</u>

Après "t'a toute une semaine pour défaire les nœuds" (trouver les coefficients) ...

Intégration par parties : $\displaystyle\int u\,v' = \big[u\times v\big] \ominus \int u'\,v$; $\Big(\big(U\times V\big)' = U'\times V + U\times V'\Big)$

$$\int \underbrace{x}_{u}\;\underbrace{\sin x}_{v'}\,dx = \cdots \quad ; \quad \int \ln x\,dx = \int \underbrace{1}_{u'}\;\underbrace{\ln x}_{v}\,dx = \cdots$$

Double intégration par parties : $\displaystyle I = \int \underbrace{\sin x}\;\underbrace{e^x}\,dx = \cdots = \cdots = -I + \sin x\,e^x - \cos x\,e^x.$

Dérivées usuelles : (donc primitives usuelles) $\boxed{\textbf{Tableau à connaître sur le bout des doigts}}$

Bidouille de sécurité : $\displaystyle\int \frac{1}{x^5}\,dx$?
$$\begin{cases} \text{si je dérive } \dfrac{1}{x^5} \text{ je trouve du } \dfrac{???}{x^6} \quad \left(\dfrac{-5}{x^6}\right) \\ \text{donc } \displaystyle\int \frac{1}{x^5}\,dx = \frac{K}{x^4} \text{ et je bidouille } K \text{ pour que ca marche} \end{cases}$$

1.1 Basiques

---

a) **Exercice 1-1-1 :** $\boxed{\text{~~Intégrer sans jamais dériver~~ Intégrer en dérivant}}$

$$\int \underbrace{1}\times\underbrace{\sqrt{1+x^2}}\,dx \;;\; \int (1-x^2)^{3/2}\,dx \;;\; \int \ln(x)\,dx \;;\; \int \ln^2(x)\,dx$$

---

b) **Exercice 1-1-2 :**
$$\begin{cases} \displaystyle\int \frac{1}{\underbrace{x^2+x}+1}\,dx \;;\; \int \frac{1}{(x^2+x+1)^2}\,dx \;;\; \int \frac{1}{(x^2+x+1)^n}\,dx \quad (\text{pour } n\in\mathbb{N}) \\ \displaystyle\int \frac{1}{x\,(x+1)}\,dx \;;\; \int \frac{1}{x\,(x^2+x+1)}\,dx \;;\; \int \frac{3\,x^2-4\,x+3}{x^2+x+1}\,dx \;;\; \int \frac{3\,x^2-x+3}{x\,(x+1)}\,dx \end{cases}$$

c) **Exercice 1-1-3 :** Avec une puissance impaire, c'est facile !

$$\begin{cases} \displaystyle\int \sin^3 x\,dx \quad ; \int \sin^3\,x\,\cos^4\,x\,dx \quad ; \int \cos^4 x\,dx \\ \displaystyle\int \frac{1}{\sin x}\,dx \quad ; \int \frac{1}{\cos^2\,x}\,dx \quad ; \int \frac{1}{\cos^3\,x}\,dx \quad ; \int \frac{1}{\cos^4 x}\,dx \quad ; \quad \int \tan x\,dx \quad ; \int \tan^2 x\,dx \end{cases}$$

d) **Exercice 1-1-4 :** ~~Intégrer sans jamais dériver~~ Intégrer en dérivant

$$\int \underbrace{1} \times \underbrace{\arctan x}\,dx \; ; \int \arcsin x\,dx \; ; \int \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)dx$$

e) **Exercice 1-1-5 :**

$$\int \frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x}\,dx \; ; \int \frac{\cos^3 x + \cos x - 3}{2 + \cos x}\,dx$$ (pour la $2^{\text{ième}}$, éclater au préalable)

f) **Exercice 1-1-6 :** Dans $R[X]$ les polynômes insécables (atomes) sont de degré 1 ou 2.

$$\int \frac{1}{x^4+x^2+1}\,dx \; ; \int \frac{1}{x^4+x^2+2\,x}\,dx$$ Casser en atomes dans $\mathbb{R}[X]$ ...

1.2 Plus élaborés, mais classiques

a) **Exercice 1-2-7 : Intégrales de Wallis** : Calculer, pour $n \in \mathbb{N}$,

$I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx \quad (n \in \mathbb{N})\,;$ (envisager les cas $n = 2\,p$ et $n = 2\,p+1$)

Formules de récurrence (double IPP), puis expression en fonction de p, avec des factorielles et des puissances ... que l'on confirme par récurrence.

b) **Exercice 1-2-8 :** Décomposition en éléments simples d'une fonction rationnelle à pôles simples dans $\mathbb{R}$.

$$f(x) = \frac{4\,x^4 - 44\,x^3 + 174\,x^2 - 292\,x + 182}{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)} = \frac{n(x)}{d(x)}, \begin{cases} n(x) & = 4\,x^4 - 44\,x^3 + 174\,x^2 - 292\,x + 182 \\ d(x) & = \displaystyle\prod_{k=1}^{5}(x-k) \\ & = x^5 - 15\,x^4 + 85\,x^3 - 225\,x^2 + 274\,x - 120 \end{cases}$$

En déduire $\displaystyle\int_6^7 f(x)\,dx$.

c) **Exercice 1-2-9 :** Décomposition en éléments simples d'une fonction rationnelle à pôles simples $\dfrac{d\,'(x)}{d(x)}$.

$$f(x) = \frac{5\,x^4 - 60\,x^3 + 255\,x^2 - 450\,x + 274}{x^5 - 15\,x^4 + 85\,x^3 - 225\,x^2 + 274\,x - 120} = \frac{n(x)}{d(x)}, \begin{cases} n(x) & = d\,'(x) \\ d(x) & = \displaystyle\prod_{k=1}^{5}(x-k) \end{cases}$$

En déduire $\displaystyle\int_6^7 f(x)\,dx$.

d) **Exercice 1-2-10 :** Décomposition en éléments simples d'une fonction rationnelle à pôles simples dans $\mathbb{C}$.

$$f(x) = \frac{6\,x^3 - 2\,x^2 + 6\,x - 8}{x^4 + 5\,x^2 + 4} = \frac{n(x)}{d(x)}, \text{ avec } \begin{cases} n(x) = 6\,x^3 - 2\,x^2 + 6\,x - 8 \\ d(x) = (x-i)(x+i)(x-2\,i)(x+2\,i) \end{cases}$$

En déduire $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$.

2 Dérivation

2.1 Retour à la définition

a) **Exercice 2-1-11 :** Soit la fonction f définie sur $]-1,0[\cup]0,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{\sin x}{\ln(1+x)}$.
f est (naturellement) de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,0[\cup]0,+\infty[$.

- Montrer que f admet un prolongement continu en 0 et préciser sa valeur.
- Montrer que f ainsi prolongée est dérivable en 0 et donner la valeur de sa dérivée en 0.
- f ainsi prolongée est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage de 0 ?

b) **Exercice 2-1-12 :** Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x)=x\,\sin\dfrac{1}{x}$.
f est (naturellement) de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$.

- Montrer que f admet un prolongement continu en 0 et préciser sa valeur.
- Montrer que f ainsi prolongée n'est pas dérivable en 0.

2.2 Calculs

a) **Exercice 2-2-13 :** Dérivée de $x\longmapsto \cos^3\left(\sin^2\left(e^{x\,\ln(1+\cos^2 x)}\right)\right)$.

b) **Exercice 2-2-14 :** Dérivée $1000^{ième}$ de $x\longmapsto e^{2\,x}\,(x^2+x+1)$.

c) **Exercice 2-2-15 :** Soit la fonction $f : x\longmapsto e^{-1/x^2}$, définie pour $x\in\mathbb{R}^*$.

- Montrer que f admet un prolongement par continuité en 0.
- Montrer que ce prolongement est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
- Montrer que ce prolongement est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
- Donner le développement limité à l'ordre 123456789 de f en 0.

2.3 Autres

a) **Exercice 2-3-16 :** Étudier les variations de la fonction $x\longmapsto x\,\arctan\left(\dfrac{x+1}{x}\right)$.

b) **Exercice 2-3-17 :** Sans utiliser le tracé de courbe avec la calculatrice,
quel est le nombre de racines réelles du polynôme $x^5+4\,x^2+x-2$?

c) **Exercice 2-3-18 :** Soit le polynôme $P=27\,x^6+54\,x^5-180\,x^4+163\,x^3-86\,x^2+36\,x-8$.

- Vérifier que P possède une racine réelle triple, α, et la calculer.
- Montrer que, en dehors de α, P ne possède qu'une seule autre racine réelle, β, simple et la localiser (dans un intervalle d'amplitude 1).

3 Développements limités ou asymptotiques, limites

3.1 Retrouver les DL de référence (en 0)

Exercice 3-1-19 :

a) DL à l'ordre 7 au voisinage de 0 de $x\longmapsto \tan x$.

b) DL à l'ordre 7 au au voisinage de 0 de $x\longmapsto \ln(1-x)$.

c) DL à l'ordre 8 au au voisinage de 0 de $x\longmapsto \sinh x$.

3.2 Exemples élémentaires

Exercice 3-2-20 :

a) DL à l'ordre 7 au voisinage de 0 de $x \longmapsto \dfrac{1}{(1+x)^2}$.

b) DL (asymptotique) à l'ordre 7 au voisinage de $+\infty$ de $x \longmapsto \arctan\left(\sqrt{\dfrac{1+x}{x-1}}\right)$.

c) DL à l'ordre 9 au voisinage de 0 de $x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

d) DL à l'ordre 4 au voisinage de 0 de $x \longmapsto \ln\bigl(\cos x\bigr)$.

e) Limite quand x tends vers 0 de $\dfrac{\sin x - \operatorname{sh} x}{\tan x - \tanh x}$.

f) Limite quand x tends vers e de $\dfrac{\sin x - \sin e}{1 - \ln x}$.

3.3 DL en dehors de l'origine

Exercice 3-3-21 :

a) DL à l'ordre 3 au voisinage de $\dfrac{\pi}{4}$ de $x \longmapsto \tan x$.

b) DL à l'ordre 2 au voisinage de 1 de $x \longmapsto \dfrac{1}{x^2+x}$.

c) Prouver que la fonction $x \longmapsto \arctan \dfrac{1}{x^2}$ admet un prolongement continu en 0.
Montrer que ce prolongement admet un DL à l'ordre 7 au voisinage de 0, et préciser ce DL.

3.4 Développement asymptotiques (exemples)

---

a) **Exercice 3-4-22 :** Oral ENSAM 2007.
Soit la courbe $\mathcal{C}$, d'équation $y = f(x)$ avec $f : x \longmapsto x \arctan\left(\dfrac{x+1}{x}\right)$.

- Montrer que $\mathcal{C}$ admet une droite asymptote quand x tends vers $+\infty$ (ou $-\infty$) et préciser la position de $\mathcal{C}$ par rapport à cette asymptote au voisinage de l'infini.
- Montrer que f n'est pas dérivable en 0, mais qu'elle est dérivable à gauche, à droite en 0.
Préciser les deux demi-tangentes à $\mathcal{C}$ en O ainsi que la position de $\mathcal{C}$ par rapport à ces tangentes au voisinage de O.
- Donner une allure convenable de la courbe $\mathcal{C}$.

Pour information, exercice d'oral Maple associé à cet exercice :
Soit le polynôme $P = 2\,x^4 - \dfrac{35}{3}\,x^3 + \dfrac{51}{2}\,x^2 + \alpha\,x + 9$.
Trouver α tel que P ait une racine triple, puis factoriser P dans $\mathbb{R}[X]$.

---

b) **Exercice 3-4-23 :** Étudier la branche infinie quand $x \to +\infty$ de la courbe $\mathcal{C}$ d'équation $y = x^2 \ln \dfrac{x+1}{x+2}$ et préciser les positions relatives de $\mathcal{C}$ et de sa courbe asymptote au voisinage de l'infini.

Pendant qu'on y est, étudier les positions relatives de $\mathcal{C}$ et de la parabole d'équation $y = -\ln(2)\,x^2$ au voisinage de O.

---

c) **Exercice 3-4-24 :** Donner un exemple de fonction f, définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ telle que la courbe $\mathcal{C}$ d'équation $y = f(x)$ admette la droite Δ d'équation $y = x + 2$ comme asymptote quand x tends vers $+\infty$, sans que la courbe $\mathcal{C}$ reste d'un même coté de Δ quand x tends vers $+\infty$.

---

4 Equivalents, limites

4.1 Equivalents usuels (ou presque)

---

a) **Exercice 4-1-25 :**

- Donner le millésime de l'année de naissance, de votre père (que l'on notera a), le numéro de son mois de naissance (que l'on notera m) et le numéro de son jour de naissance (que l'on notera d).
- Montrer que $e^x \underset{x\to 0}{\sim} 1 + d\,\dfrac{x^{(2+m+a)^2}}{m}$.
- Quelle est la limite de $\dfrac{e^x - 1}{d\,\dfrac{x^{(2+m+a)^2}}{m}}$ quand x tends vers 0 ?
- Et, pendant qu'on y est, donner la limite de $x \longmapsto \dfrac{e^x - 1}{d\,\dfrac{x^{(2+m+a)^2}}{m}}$ en $+\infty$ et aussi en $-\infty$.

---

b) **Exercice 4-1-26 :**

- Equivalent en 0 de $x \longmapsto \dfrac{\sin(3\,x)}{x^7 + 3\,x}$.
- Equivalent en $+\infty$ de $x \longmapsto \dfrac{9\,x^3 - 2\,x + x\,\sin(3\,x)}{x^7 + 3\,x}$.
- Equivalent en $+\infty$ de $x \longmapsto \dfrac{9\,x^3 - 2\,x + x\,\sin(3\,x) + 37\,\ln^2 x}{3\,x^3 + \ln^{2050} x + 1}$.

---

c) **Exercice 4-1-27 :** Faiblesse des équivalents.

- Montrer que $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ a une limite ℓ finie lorsque $n \to +\infty$ et que $\ell > 2$.
- Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n$.
- Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\sqrt{n}}$.

4.2 Exemples de calculs de limites par équivalents ou DL

---

a) **Exercice 4-2-28 :** Calculer $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \sinh x}{\tan x\ (\cos x - \cosh x)}$.

---

b) **Exercice 4-2-29 :** Soit $f : x \longmapsto \left(\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x^2}}\right)^{\sqrt{\dfrac{x+1}{\sqrt{x}}}}$. Calculer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$; $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x)$.

---

c) **Exercice 4-2-30 :** Un classique aux oraux de concours :

1. Calculer $\ell = \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\operatorname{ch}\sqrt{x+1} - \operatorname{ch}\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$ (c'est un peu lourd à traiter ...).
2. Donner un équivalent de $f(x) - \ell$ au voisinage de $+\infty$.

Indications : Autant faire le tout en une seule fois, avec des DL par rapport à $u = \dfrac{1}{\sqrt{x}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.
Il n'y a aucune difficulté, si ce n'est d'enchaîner des formules connues. Cependant c'est un peu compliqué et il faut le faire très soigneusement, petit bout par petit bout ...

- Transformer en forme exponentielle (à cause de l'exposant variable)
- Pour $\left(\operatorname{ch}\sqrt{x+1} - \operatorname{ch}\sqrt{x}\right)$, transformer les ch en exponentielle
- Mettre $e^{\sqrt{x}}$ en facteur
- Transformer $\sqrt{x+1} - \sqrt{x}$ en fraction ; mettre $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ en facteur, faire un DL (à un ordre suffisant)
- Recomposer par exp, en déduire un DL ...
- Continuer à remonter bout par bout ...

---

5 Equations différentielles du premier ordre

5.1 Equations différentielles à variables séparables

---

a) **Exercice 5-1-31 :** Soit l'équation différentielle : $(E) : y'(x) - x\,y^2(x) = 0$ (**non linéaire !**)

- Déterminer les solutions de (E) (sur des intervalles à préciser) et vérifier qu'il s'agit de fonctions rationnelles, dépendant d'une (seule) constante, dont on donnera l'expression rationnelle.
- (E) admet-elle des solutions définies sur $\mathbb{R}$? Si oui, en donner l'expression.

---

b) **Exercice 5-1-32 :** Soit l'équation différentielle : $(E) : x\,y'(x) - y^2(x) = -1$ (**non linéaire !**)

- Déterminer les solutions de (E) sur $]0,+\infty[$ et vérifier qu'il s'agit de fonctions rationnelles, dépendant d'une (seule) constante, dont on donnera l'expression rationnelle.
- (E) admet-elle des solutions définies sur $\mathbb{R}$? Si oui, en donner l'expression.

5.2 Equations différentielles d'ordre 1, linéaires, sans second membre

L'ensemble des solutions (solution générale) est un espace vectoriel de dimension 1. La solution générale est donc de la forme $y(x) = \lambda \times y_0(x)$ avec λ constante arbitraire.

5.2.1 Le b.a. ba

Exercice 5-2-33 : Sans commentaires ... mais donner la solution générale (avec une constante multiplicative).

- $y' = y$ (une fonction non nulle égale à sa dérivée, y en a pas des masses !)
- $y' = 2\,y$; $y' = \omega\,y$.

5.2.2 Usuelles

---

a) **Exercice 5-2-34 :** Résoudre l'équation différentielle : $(E) : y'(x) + 3\,x\,y(x) = 0$.

---

b) **Exercice 5-2-35 :** Résoudre l'équation différentielle : $(E) : x\,y'(x) + (x^2+1)\,y(x) = 0$.

---

c) **Exercice 5-2-36 :** Résoudre l'équation différentielle : $(E) : (x^2+1)\,y'(x) + (x^2-1)\,y(x) = 0$.

5.3 Equations différentielles d'ordre 1, "linéaires" avec second membre

L'ensemble des solutions (solution générale) est un espace affine de dimension 1.
La solution générale est donc de la forme $y(x) = \lambda \times y_0(x) + y_1(x)$ avec

- λ constante arbitraire et $\lambda \times y_0(x)$ solution générale de l'équation sans second membre associée.
- $y_1(x)$ une solution particulière de l'équation complète $\begin{cases} \text{"évidente" ou obtenue par} \\ \text{la méthode de "variation de la constante"} \end{cases}$

---

a) **Exercice 5-3-37 :** Résoudre l'équation différentielle : $(E) : x\,y(x)\,y'(x) + (x^2+1)\,y^2(x) = 1$.
Elle n'est pas linéaire ! Mais ...

---

b) **Exercice 5-3-38 :** Résoudre l'équation différentielle : $(E) : (x^2+x)\,y'(x) + y(x) = x + \ln(x)$, sur l'intervalle $]\,0, +\infty[$.

---

c) **Exercice 5-3-39 :** Déterminer une équation différentielle du premier ordre (linéaire avec second membre) dont la solution générale sur $\mathbb{R}$ est $y = \lambda\, e^{x^2} + x\, e^{x^2}$ (où λ est une constante réelle arbitraire).

5.4 Superposition

Exercice 5-4-40 : Soient les trois équations différentielles

$$\begin{cases} (E_1) : x\,y'(x) - (1+x)\,y(x) = x^2 \\ (E_2) : x\,y'(x) - (1+x)\,y(x) = -2\,\dfrac{x+1}{x}\,e^{-x} \\ (E_3) : x\,y'(x) - (1+x)\,y(x) = x^2\,\cos x - x^2\,\sin x. \end{cases}$$

de solutions particulières, sur l'intervalle $]\,0, +\infty[$, respectivement : $\begin{cases} y_1(x) = -x & \text{(pour } (E_1)), \\ y_2(x) = \dfrac{e^{-x}}{x} & \text{(pour } (E_2)), \\ y_3(x) = x\,\sin x & \text{(pour } (E_3)). \end{cases}$

Donner la solution générale, sur l'intervalle $]\,0, +\infty[$, de l'équation

$$(E) : x\,y'(x) - (1+x)\,y(x) = x^2 - 2\,\frac{x+1}{x}\,e^{-x} + x^2\,\cos x - x^2\,\sin x.$$

---

6 Equations différentielles du second ordre

Révision limitée aux équations différentielles linéaires, à coefficient constants, avec ou sans second membre somme d'exponentielle-polynômes.

6.1 Equations différentielles d'ordre 2, linéaires, sans second membre

L'ensemble des solutions (solution générale) d'une équation différentielle linéaire (sans second membre), à coefficients constants est un espace vectoriel de dimension 2.
La solution générale est donc de la forme $y(x) = \alpha \times y_1(x) + \beta\, y_1 - x)$ avec α, β constantes arbitraires, y_1 et y_2 indépendantes.

6.1.1 Le b.a. ba

Exercice 6-1-41 : Donner la solution générale des équations différentielles :

- $y'' = y$. Trouver deux fonctions indépendantes telles que $y'' = y$, ce n'est pas sorcier !.
- $y'' = -y$. Trouver deux fonctions indépendantes telles que $y'' = -y$, ce n'est pas sorcier !.
- $y'' = +\omega^2\,y$; $y'' = -\omega^2\,y$.

6.1.2 Usuelles

---

a) **Exercice 6-1-42 :** Sans résonance interne. Solution générale de $y''(x) + 2\,y'(x) - 3\,y(x) = 0$.

---

b) **Exercice 6-1-43 :** <u>Avec résonance interne</u>. Solution générale de $y''(x) - 2\,y'(x) + y(x) = 0$.

---

c) **Exercice 6-1-44 :** Dans le domaine complexe (exponentiel-trigonométrique).
Déterminer la solution générale de $\quad y''(x) - y'(x) + y(x) = 0$.
On donnera la réponse sous les deux formes trignométriques équivalentes :

$$\begin{cases} y = e^{r\,x}\left(\alpha\,\cos(\omega\,x) + \beta\,\sin(\omega\,x)\right) & \text{(usuelle en Math)}\,; \\ y = A\,\cos\big(\omega\,x + \varphi\big) & \text{(usuelle en Physique, SI).} \end{cases}$$

6.2 Equations différentielles d'ordre 2, "linéaires" avec second membre

L'ensemble des solutions (solution générale) est un espace <u>affine</u> de dimension 2.
La solution générale est donc de la forme $y(x) = \alpha \times y_1(x) + \beta\,y_2(x) + y_3(x)$ avec ...

---

a) **Exercice 6-2-45 :** Sans aucune résonance. Solution générale de $\quad y''(x) + 2\,y'(x) - 3\,y(x) = x\,e^{-x}$.

---

b) **Exercice 6-2-46 :** Avec résonance externe. Solution générale de $\quad y''(x) + 2\,y'(x) - 3\,y(x) = x\,e^{x}$.

---

c) **Exercice 6-2-47 :** Avec résonance interne et externe.
Déterminer la solution générale de $\quad y''(x) - 2\,y'(x) + y(x) = (x+1)\,e^{x}$.

6.3 Superposition

Exercice 6-3-48 : Résoudre l'équation différentielle

$$(E) : y''(x) - 5\,y'(x) + 6\,y(x) = x + x\,\sin x + x\,e^{x} + e^{2\,x}$$

(pas de résonance interne, une des composantes du signal d'entrée est en résonance avec le circuit).

---

7 Trigonométrie circulaire (et nombres complexes)

7.1 Formulaire

7.1.1 Relations élémentaires (cercle trigonométrique)

...

7.1.2 Formules de base

... En nombre limité (2 ou 3 minimum). Par exemple $\cos(a+b) = \cdots$

7.1.3 Formules retrouvées

... Par combinaison de formules de base. Par exemple $\cos(P) + \cos(Q) = \cdots$; $\sin a\,\cos b = \ldots$; $\tan(2\,x) = \cdots$

7.2 Equations

7.2.1 Equations de base

- $\cos x = \cos\alpha \Longleftrightarrow \begin{cases} x = ... \\ x = ... \end{cases}$; $\sin x = \sin\alpha \Longleftrightarrow \begin{cases} x = ... \\ x = ... \end{cases}$; $\tan x = \tan\alpha \Longleftrightarrow x = ...$
- $a\,\cos x + b\,\sin x = c$

7.2.2 Equations simples diverses

Exercice 7-2-49 : Pour les questions ci-dessous, on veillera à ne pas "perdre" de solution et à donner toutes les solutions (donc les donner modulo un certaine période).

a) Résoudre : $2\cos(x) + 2\,\sin(x) = \sqrt{6}$.

b) Résoudre : $2\,\sin^2(x) + 3\,\cos(x) - 3 = 0$.

c) Résoudre : $\cos(x) + \cos(3\,x) = \cos(2\,x) + \cos(4\,x)$.

d) Résoudre : $2\,\cos(x) + \dfrac{1}{2}\,\sin^2(2\,x) = \cos(3\,x) + \cos(5\,x)$.

7.3 Trigonométrie réciproque

- Restrictions pour bijections
- Graphes
- Dérivées
- Primitives
- Relations réciproques
- Relations particulières : $\begin{cases} \arcsin x + \arccos x = ... \\ \arctan x + \arctan \dfrac{1}{x} = \begin{cases} ... & \text{si } ... \\ ... & \text{si } ... \end{cases} \end{cases}$

7.4 Expressions trigonométriques plus élaborées

---

a) **Exercice 7-4-50 : Oral ENSAM 92-93.**
Pour $n \in \mathbb{N}$, résoudre dans $\mathbb{C}$: $(z+i)^{2\,n+1} - (z-i)^{2\,n+1} = 0$.
En déduire $\quad P_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \text{cotan}^2\left(\frac{k\,\pi}{2\,n+1}\right)$.

---

b) **Exercice 7-4-51 :** ...

---

c) **Exercice 7-4-52 :** ...

7.5 Autres ...

---

8 Trigonométrie hyperbolique

8.1 Formulaire (réduit)

...

8.2 Trigonométrie réciproque

- Restrictions
- Graphes
- Dérivées
- Primitives
- Relations réciproques

---

9 Nombres complexes (et trigonométrie circulaire)

9.1 Linéarisation

a) **Exercice 9-1-53 :** Calculer $\displaystyle\int \cos^6 x \, dx$; $\displaystyle\int \cos^7 x \, dx$

b) **Exercice 9-1-54 :** Exprimer $\cos(6\,x)$ comme un polynôme en $\cos(x)$.

9.2 Equation du second degré et autres

a) **Exercice 9-2-55 :** Résoudre l'équation $z^3 - 4\,z^2 - 3\,i\,z^2 + 6\,i\,z + 8 + 12\,i = 0$, sachant qu'elle a au moins une racine réelle.

b) **Exercice 9-2-56 :** Equations bicarrées.
Factoriser, dans $\mathbb{R}[X]$, les expressions $x^4 + 10\,x^2 + 9$; $x^4 + x^2 + 1$.

9.3 Transformations du plan complexe

a) **Exercice 9-3-57 :** Homographie complexe.
Image de l'ensemble des complexes de module 1 par l'application $z \longmapsto \dfrac{z+i}{z-i}$.

b) **Exercice 9-3-58 :** Inversion géométrique, inversion complexe.
Déterminer et représenter graphiquement l'image de la droite Δ, d'équation $x + y = \sqrt{2}$, par chacune des l'applications : $z \longmapsto \dfrac{1}{\bar{z}}$ et $z \longmapsto \dfrac{1}{z}$.
Indic : on pourra utiliser l'équation polaire de Δ (avec une figure).

9.4 Exercices divers

a) **Exercice 9-4-59 :** Polynômes de Tchebychev.
Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [-1, 1]$, on pose $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$.

- Montrer que $T_n(x)$ est une expression polynomiale de x.
- Donner une relation exprimant $T_{n+2}(x)$ en fonction de $T_{n+1}(x)$, $T_n(x)$ et x.
- Donner le terme dominant de $T_n(x)$, ainsi que son terme constant.
- ...

b) **Exercice 9-4-60 :** ...

10 Suites numériques, réelles ou complexes

10.1 Quelques théorèmes utiles, au sujet des

- Suites réelles monotones
- Suites réelles encadrées
- Suites réelles adjacentes
- Suites dont les sous-suites des termes d'indice pair et impair convergent vers la même limite.
- Suites réelles composées et fonctions continues
- ...

10.2 Suites réelles récurrentes, d'ordre 1

---

a) **Exercice 10-2-61 :** Fonction croissante.
Étudier la convergence de la suite $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_{n+1} = 1 + \ln(1 + u_n)$

i) dans le cas où $u_0 = 0$,

ii) dans le cas où $u_0 = 10$.

ii) dans le cas où $u_0 \in \left]-1, \dfrac{1-e}{e}\right[$.

---

b) **Exercice 10-2-62 :** Fonction décroissante.

Étudier la convergence de la suite $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{10} \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{1+u_n} \end{cases}$

10.3 Suites, réelles ou complexes, satisfaisant à une récurrence linéaire d'ordre 2

(Relation de récurrence linéaire, d'ordre2, à coefficients constants)

---

a) **Exercice 10-3-63 :** Dans $\mathbb{R}$.
Déterminer, en fonction de n, l'expression du terme général u_n des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $u_{n+2} - 5\,u_{n+1} + 6\,u_n = 0$.

En déduire les suites telles que $\begin{cases} u_{n+2} - 5\,u_{n+1} + 6\,u_n = 2 \\ u_0 = 1; u_1 = 3 \end{cases}$

---

b) **Exercice 10-3-64 :** Dans $\mathbb{C}$.
Déterminer, en fonction de n, l'expression du terme général u_n des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que
$\begin{cases} u_{n+2} - u_{n+1} + u_n = 2 \\ u_0 = 1; u_1 = 1 \end{cases}$

---

c) **Exercice 10-3-65 :** Relation se ramenant à une relation à coefficients constants.
Déterminer, en fonction de n, l'expression du terme général v_n des suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que
$\begin{cases} (n^2+n)\,v_{n+2} + (2\,n^2+4\,n)\,v_{n+1} + (2\,n^2+6\,n+4)\,v_n = 0 \\ v_1 = 1; v_2 = -8 \end{cases}$

Indic : c'est une relation linéaire, mais elle n'est pas à coefficient constant.On se ramène à une équation à coefficients constants en posant $v_n = n\,u_n$.

10.4 Suites réelles adjacentes

---

a) **Exercice 10-4-66 :** Exemple élémentaire.
Étudier la convergence des <u>deux</u> suites $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $\left(v_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n!}$$

---

b) **Exercice 10-4-67 :** Exemple moyen.

Montrer la convergence de la suite $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$.

On pourra étudier les deux suites extraites :

$$\begin{cases} \big(u_{2\,n}\big) & \text{(somme sur tous les indices jusqu'à } 2\,n) \\ \big(u_{2\,n+1}\big) & \text{(somme sur tous les indices jusqu'à } 2\,n+1) \end{cases}$$

(on peut montrer que $\lim u_n = -\ln 2$).

---

c) **Exercice 10-4-68 :** Exemple plus élaboré : suites arithmético-géomériques.
Étudier la convergence des deux suites $\big(u_n\big)$ et $\big(v_n\big)$ définies par :

$$\begin{cases} u_0 = 1\ ; v_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \sqrt{u_n\, v_n} \end{cases}$$

Indic : on pourra commencer par montrer que $0 \leqslant v_{n+1} \leqslant u_{n+1}$ (à partir de $n = 0$).

10.5 Suites définies implicitement

Suites définies implicitement (dont le terme général est solution d'une équation)

---

a) **Exercice 10-5-69 :** Extrait d'oral concours.
Prouver que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un et un seul réel strictement positif, que l'on notera x_n, solution de l'équation $f_n(x) = 3$ où $f_n(x) = x^n + x$.
Établir la convergence de la suite de terme général x_n ; (indic : examiner $f_{n+1}(x_n)$)
puis, notant ℓ la limite de cette suite, donner un équivalent *simple* de $x_n - \ell$ lorsque n tend vers l'infini.

---

b) **Exercice 10-5-70 :** ...

10.6 Autres exemples ...

---

a) **Exercice 10-6-71 :** Prouver que la suite $\big(u_n\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2}$ converge vers $\dfrac{\pi}{4}$.

---

b) **Exercice 10-6-72 :** ...

---

11 Courbes paramétrées, Courbes en polaire

11.1 Exemple élémentaire de courbe paramétrée, avec branches infinies

---

Exercice 11-1-73 :
Étudier et représenter graphiquement la courbe $\mathcal{C}$, d'équations paramétriques :

$$\begin{cases} x = \dfrac{t^2+2}{t} \\ y = \dfrac{t^2+t+1}{t} \end{cases}$$

On précisera soigneusement les deux droites asymptotes.
Puis justifier que $\mathcal{C}$ est une hyperbole, dont on donnera une équation cartésienne et dont on précisera

- le centre,
- les axes (par leurs équations cartésiennes).

11.2 Exemple élémentaire de courbe en polaire, sans branche infinie

---

Exercice 11-2-74 : Soit la courbe $\mathcal{C}$, d'équation polaire : $\rho = \dfrac{\sin\dfrac{\theta}{3}}{4+\cos^6\theta}$.

- Préciser la période de ρ et vérifier que $\mathcal{C}$ admet une symétrie que l'on précisera.
- Donner un graphe approximatif (mais convenable) de la courbe $\mathcal{C}$.
- Déterminer la tangente à $\mathcal{C}$ en O.
- Préciser les tangentes à $\mathcal{C}$ au point double, ainsi que l'angle formé par ces tangentes.
- Utiliser ce qui précède pour obtenir un meilleur graphe de la courbe $\mathcal{C}$.

11.3 Exemple élémentaire de courbe en polaire, avec branche infinie

---

Exercice 11-3-75 : Soit la courbe $\mathcal{C}$, d'équation polaire : $\rho = \dfrac{\sin^2\theta}{(2\cos(\theta)-1)\,(\cos(\theta)+2)}$.

- Préciser la période de ρ et vérifier que $\mathcal{C}$ admet une symétrie que l'on précisera.
- Déterminer la tangente à $\mathcal{C}$ en O, et au point d'angle polaire $\dfrac{\pi}{2}$.
- Montrer que $\mathcal{C}$ admet une (des) asymptote(s) que l'on précisera.
- Donner un graphe approximatif (mais convenable) de la courbe $\mathcal{C}$.

11.4 Courbe unicursale

Exercice 11-4-76 : Soit $\mathcal{C}$ la courbe d'équation $x^2\,y^2 - y^3 - x^4 - x^2\,y = 0$.

- Vérifier qu'une droite variable passant par l'origine coupe $\mathcal{C}$ en au plus un point autre que l'origine.
- En déduire une représentation paramétrique de $\mathcal{C}$ sous la forme : $\begin{cases} x = f(t) \\ y = t\,f(t) \end{cases}$
- Montrer que $\mathcal{C}$ présente une symétrie que l'on précisera.
- Étudier les branches infinies de $\mathcal{C}$.
- Préciser la tangente à $\mathcal{C}$ aux points $(0,0)$ et $\left(\dfrac{10}{3}, \dfrac{20}{3}\right)$.
- Représenter graphiquement $\mathcal{C}$.

11.5 Coniques en polaire

Exercice 11-5-77 : Soit $\mathcal{C}$ la courbe d'équation polaire $r = \dfrac{4}{2+\sqrt{2}\cos\left(\theta - \dfrac{\pi}{4}\right)}$.

- Quelle est la nature de $\mathcal{C}$?
- Que peut-on dire de ses axes de symétrie ?
- Représenter graphiquement $\mathcal{C}$, avec précision et peu de calculs.

---

12 Quelques éléments d'algèbre linéaire

12.1 Base des espaces vectoriels élémentaires

Exercice 12-1-78 : Sans aucun calcul !

- R^n est l'ensemble des n-uplets de la forme $\big(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n\big)$ avec $x_1 \in \mathbb{R}$, $x_2 \in \mathbb{R}$, ..., $x_n \in \mathbb{R}$.
  R^n, muni de l'addition interne et de la multiplication externe est un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{R}$.
  - Exprimer la base canonique de R^5.
  - Donner une autre base de R^5, qui ne comprend aucun des vecteurs de la base canonique.
  - Le cas $\mathbb{R}^n$ comprends aussi le cas $\mathbb{R}$ (avec $n = 1$). Donner une base de $\mathbb{R}$.
- $R_n[X]$ est l'ensemble des polynômes de degré au plus n à coefficients dans $\mathbb{R}$.
  $R^n[X]$, muni de l'addition des polynômes et de la multiplication d'un polynôme par un scalaire (un réel) est un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{R}$.
  - Quel est le nombre maximal de coefficients pour un polynôme de degré au plus n ? Quelle est la dimension de $R_n[X]$?
  - Exprimer la base canonique de $R_5[X]$.
  - Donner une autre base de $R_5[X]$, qui ne comprend aucun des vecteurs de la base canonique.
- $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices carrées d'ordre n (à n lignes et n colonnes) à coefficients réels.
  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, muni de l'addition des matrices et de la multiplication d'une matrice par un scalaire (un réel) est un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{R}$.
  - Combien une matrice carrée d'ordre n a-t'elle de coefficients ? Quelle est la dimension de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?
  - Exprimer la base canonique de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.
  - Donner une autre base de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, qui ne comprend aucun des vecteurs de la base canonique.
- Donner un exemple (simple) d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ qui n'est pas de dimension finie.
  (et prouver qu'il n'est pas de dimension finie !)

12.2 Famille libre, génératrice, base

Dans un espace vectoriel de dimension finie,

- Une base est une famille libre de taille maximale (la dimension de l'espace).
- Une base est une famille génératrice de taille minimale (la dimension de l'espace).

Quand on connait la dimension et qu'une famille a le bon nombre d'éléments, pour montrer qu'il s'agit d'une base, il suffit de montrer, soit la liberté, soit le caractère générateur.

Il y a parfois des techniques plus aisées que la simple application (lourde) de la définition, par exemple, l'utilisation de déterminants.

Exercice 12-2-79 : Le tout sans calculs !

- Soit dans $\mathbb{R}_6[X]$ la famille $\mathcal{F} = (1 + X, X + X^2, X + X^3, X + X^4, X + X^5)$.
  - Pourquoi (sans calculs) $\mathcal{F}$ est-elle une famille libre ?
  - Pourquoi (sans calculs) $\mathcal{F}$ n'est-elle pas une base de $\mathbb{R}_6[X]$?
  - Proposer (sans calculs) des polynômes qui permettent de compléter $\mathcal{F}$ en une base de $\mathbb{R}_6[X]$.
- Donner une base de $\mathbb{R}_6[X]$ constituée par des polynômes qui soient tous de même degré.

Exercice 12-2-80 : Le tout sans calculs !

On se place dans $\mathbb{R}^6$, muni de la base $\mathcal{B} = \big(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\big)$ (par exemple, la base canonique).

- Pourquoi (sans calculs) la famille $\mathcal{F}_1 = \big(e_1, e_1 + e_2\ ,\ e_1 + e_2 + e_3\ ,\ e_1 + e_2 + e_3 + e_4\ ,\ e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5\ ,\ e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5 + e_6\big)$ est-elle une base de $\mathbb{R}^6$?
- Pourquoi (sans calculs) la famille $\mathcal{F}_2 = \big(e_1\ ,\ e_1 + e_2\ ,\ e_1 + 2\,e_2 + e_3\ ,\ e_1 + e_2 - e_3 + e_4\ ,\ e_1 + e_2 - 2\,e_3 + e_4 + 2\,e_5\ ,\ e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5 + e_6\ ,\ e_1 + e_4 + 2\,e_6\big)$ n'est-elle pas une base de $\mathbb{R}^6$?
- Pourquoi (sans calculs) la famille $\mathcal{F}_3 = \big(e_1\ ,\ e_1{+}e_2\ ,\ e_1{+}2\,e_2{+}e_3\ ,\ e_1{+}e_2{-}e_3{+}e_4\ ,\ e_1{+}e_2{-}2\,e_3{+}e_4{+}2\,e_6\big)$ n'est-elle pas une base de $\mathbb{R}^6$?

Exercice 12-2-81 : Avec des calculs ... mais modestes

On se place dans $\mathbb{R}^4$, muni de la base $\mathcal{B} = \big(e_1, e_2, e_3, e_4\big)$ (par exemple, la base canonique).

- Soit la famille $\mathcal{F}_1 = \big(e_1 + 2\,e_2 - 3\,e_4\ ,\ e_1 + e_2 + e_3\ ,\ e_1 - e_2 + e_3 + e_4\ ,\ e_1 + e_2 - e_3 + 2\,e_4\big)$.
  Montrer qu'elle est génératrice de $\mathbb{R}^4$.
- Soit la famille $\mathcal{F}_2 = \big((1,2,4,-3),(2,1,1,2),(-4,1,5,-12),(7,8,14,-5)\big)$.
  - Montrer que $\mathcal{F}_2$ est liée.
  - Quelle est le rang de $\mathcal{F}_2$?
  - Donner une base du sous-espace vectoriel engendré par $\mathcal{F}_2$.

12.3 Sous-espaces et équations cartésiennes

Dans $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ ou $\mathbb{R}^4$, muni de la base $\mathcal{B} = \left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\,(, \overrightarrow{k}\,(, \overrightarrow{\ell}\,))\right)$ (par exemple, la base canonique).

On utilise les appellations génériques : x pour les composantes sur $\overrightarrow{i}$, y pour les composantes sur $\overrightarrow{j}$, z pour les composantes sur $\overrightarrow{k}$, t pour les composantes sur $\overrightarrow{\ell}$.

12.3.1 Dans $\mathbb{R}^3$ (c'est trop facile)

Exercice 12-3-82 : On se place dans $\mathbb{R}^3$, muni de la base $\mathcal{B} = \big(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\big)$ (par exemple, la base canonique).

Soit F le sous-espace vectoriel d'équations cartésiennes $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + 2\,y - z = 0 \end{cases}$

- Quelle est la dimension de F ?
- Donner une base de F. En déduire des équations paramétriques pour F.
- Déterminer un supplémentaire G de F (on en donnera une base).
  Autrement dit, compléter la base de F en une base de R^3.
- Si on suppose la base $\mathcal{B}$ **orthonormée**, déterminer le supplémentaire orthogonal $F^{\perp}$ de F et en donner
  - une base, et des équations paramétriques ;
  - une équation cartésienne.

12.3.2 Dans $\mathbb{R}^4$ (c'est moins évident)

Exercice 12-3-83 : On se place dans $\mathbb{R}^4$, muni de la base $\mathcal{B} = \left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}, \overrightarrow{\ell}\right)$ (par exemple, la base canonique).

- Soit le sous-espace F, d'équations cartésiennes $\begin{cases} x+2\,y+z-t=0 \\ x+2\,y+2\,z-2\,t=0 \end{cases}$
  - Quelle est la dimension de F ?
  - Donner une base de F et en déduire des équations paramétriques de F.
  - Déterminer un supplémentaire G de F (on en donnera une base).
    Autrement dit, compléter la base de F en une base de R^4.
  - Déterminer un <u>autre</u> supplémentaire H de F, qui soit <u>aussi</u> supplémentaire de G.
    Autrement dit, on doit avoir $F \oplus G = F \oplus H = G \oplus H = \mathbb{R}^4$.
  - Pourrait-on avoir une question du même genre que la précédente, mais dans $\mathbb{R}^5$?

12.4 Systèmes d'équations linéaires

12.4.1 Pivot de Gauss en ligne, avec auto-paramétrage

Attention : **ce n'est pas vous qui décidez des variables qui jouent le rôle de paramètre.**

Les variables qui joueront le rôle de paramètre se découvrent et se déclarent **<u>toutes seules</u>** comme paramètre en cours de résolution (quand le pivot correspondant s'obstine à être nul).

$$\begin{cases} x+2\,y+5\,z=2 \\ x+y+4\,z=1 \\ 2\,x+3\,y+9\,z=3 \end{cases} \equiv \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 9 & 3 \end{array}\right] \end{array} \equiv \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & \boxed{-1} & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right] \end{array} \equiv \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{0} & 0 \end{array}\right] \end{array} \textbf{pivot nul}$$

$$\equiv \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x & y & z & & \alpha \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c|c} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow z=\alpha (\text{paramétrage}) \\ \leftarrow \text{équation repoussée} \end{array} \qquad \equiv \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x & y & z & & \alpha \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{\mathbf{0}} & 0 \end{array}\right] \end{array} \leftarrow \text{test de compatibilité}$$

$$\equiv \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{mise des pivots à 1, redressement et interprétation : } M = M_0 + \alpha\,\overrightarrow{v}.$$

L'équation à pivot nul est repoussée vers le bas et on insère la nouvelle équation $z=\alpha$ (de paramétrage).

Ensuite (cas général, avec plus d'équations et de variables) les coefficients du premier membre de l'équation repoussée s'annulent les uns après les autres. En <u>final</u>, si le second membre de l'équation repoussée

- est devenu nul, c'est qu'elle était initialement compatible avec les autres (et elle s'élimine) ;
- sinon, cette équation est incompatible avec les autres (et le système n'a pas de solutions).

Rem : dans l'exemple ci-dessus, au lieu de "descendre" seulement puis de "remonter" uniquement à la fin pour annuler les coefficients non diagonaux restants, on annule les coefficients "au-dessus" en même temps que les coefficients "en-dessous".

Exercice 12-4-84 : Résoudre les systèmes :

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ x+y-2\,z=3 \\ x+y+10\,z=4 \end{cases} ; \begin{cases} x+y+z+t=2 \\ x+y-2\,z-2\,t=3 \end{cases} ; \begin{cases} x+y+z+t=2 \\ x+y-2\,z-2\,t=3 \\ x+y+3\,z+t=5 \\ x+y-5\,z+2\,t=4 \end{cases} ; \begin{cases} 2\,x+y+z=2 \\ x+y+2\,z=2 \\ 4\,x+y-z=2 \\ -8\,x-3\,y-z=-6 \\ -x+y+4\,z=2 \\ 17\,x+10\,y+13\,z=20 \end{cases}$$

12.4.2 Inverse d'une matrice

Pour calculer P^{-1}, on résout le système $P\,X = Y$ en $X = P^{-1}\,Y$.

Par exemple, avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$, résoudre $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & u' & u'' \\ v & v' & v'' \\ w & w' & w'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

- résoudre $\begin{cases} x + z = a \\ y + z = b \\ 3\,x - 2\,y + 2\,z = c \end{cases}$ et aligner le résultat ainsi $\begin{cases} x = & u\,a & +u'\,b & +u''\,c \\ y = & v\,a & +v'\,b & +v''\,c \\ z = & w\,a & +w'\,b & +w''\,c \end{cases}$ $(X = P^{-1}Y)$
- ou, par le pivot de Gauss <u>en ligne uniquement</u>, transformer

$$\left[P\,\middle|\,I\right] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad \text{en} \quad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & u & u' & u'' \\ 0 & 1 & 0 & v & v' & v'' \\ 0 & 0 & 1 & w & w' & w'' \end{array}\right] = \left[I\,\middle|\,P^{-1}\right]$$

Si en cours de calcul on est amené à paramétrer, c'est que la matrice n'est pas inversible ! (et on abandonne).

Exercice 12-4-85 : Calculer effectivement l'inverse de la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

12.5 Déterminant d'une matrice carrée

Par développement <u>signé</u> par rapport à une ligne fixée (ou à une colonne fixée).

Rem : on part avec le signe + en haut à gauche et, à chaque changement de ligne ou colonne, le signe change.

$$\begin{vmatrix} 4^+ & -2 & 5 \\ 3^- & -1 & -1 \\ -3^+ & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -2^- & 5 \\ 3 & -1^+ & -1 \\ -3 & 2^- & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -2 & 5 \\ 3 & -1 & -1 \\ -3^+ & 2^- & 1^+ \end{vmatrix} = +(-3)\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} - (2)\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + (1)\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}$$
$$= \ldots$$

Ici, on a calculé en développant par rapport à la dernière ligne.

Exercice 12-5-86 : Faire le même calcul, mais en développant par rapport à la dernière colonne.

12.6 Matrice d'une application linéaire

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} f(\overrightarrow{e_1}) & f(\overrightarrow{e_2}) & f(\overrightarrow{e_3}) \end{array} \leftarrow_{\downarrow} \textbf{marges de construction et d'interprétation} \\ M = & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \overrightarrow{e_1} \\ \overrightarrow{e_2} \\ \overrightarrow{e_3} \end{array} \end{array}$$

matrice M de l'endomorphisme f, relativement à la base $\mathcal{B} = \left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\right)$.

12.6.1 Calcul matriciel élémentaire ...

- Somme de 2 matrices (matrice de $f + g$).
- Produit d'une matrice par un scalaire (matrice de $\lambda\,f$).
- Produit de 2 matrices (matrice de $f \circ g$).
- Produit $M \times V$ avec M matrice carrée et V matrice colonne (calcul de $f\left(\overrightarrow{v}\right)$).
- $\boxed{\text{Formule du binôme de Newton = Problème !}}$

12.6.2 Construction de la matrice d'une application linéaire

Exercice 12-6-87 : On se place dans $\mathbb{R}^3$, muni de la base $\mathcal{B} = \left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ (par exemple, la base canonique).

Soient $\begin{cases} F \text{ le sous-espace vectoriel d'équation } x + y - 2\,z = 0, \\ G \text{ le sous-espace vectoriel d'équation } \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2\,x + y + 3\,z = 0 \end{cases} \end{cases}$

- Sans calculs, quelle est la nature et la dimension de F, de G ?
- Vérifier que F et G sont supplémentaires.
- Déterminer, relativement à $\mathcal{B}$, la matrice de la symétrie par rapport à F parallèlement à G.
  Il y a au moins deux méthodes, dont une rudimentaire.
- Sans (presque aucun) calcul supplémentaire, déterminer, relativement à $\mathcal{B}$, la matrice du projecteur sur F parallèlement à G.

12.7 Noyau, Image d'une application linéaire définie matriciellement

$\boxed{\textbf{Théorème du rang : } \dim\ker f + \operatorname{rg}\, f = \dim E}$. ($\operatorname{rg}\, f = \dim \operatorname{Im}\, f$).

Autre version : $\dim\ker f + \dim\operatorname{Im}\, f = \dim E$.

<u>**Attention**</u> **:** dans le cas d'un endomorphisme f de E, $\ker f$ et $\dim\operatorname{Im}\, f$ ne sont pas forcément supplémentaires dans E !

12.7.1 Noyau par résolution d'un système, par exemple avec le pivot de Gauss en lignes seules

$$\overrightarrow{V}(x, y, z, \ldots) \in \ker f \Longleftrightarrow f(\overrightarrow{V}) = (0) \Longleftrightarrow M\,V = (0) \Longleftrightarrow \begin{cases} .... = 0 \\ ... \\ ... = 0 \end{cases}$$

résolution du système, par le pivot de Gauss en lignes seules (par exemple) ...

Reprise du lien et conclusion :

$$\overrightarrow{V}(x, y, z, \ldots) \in \ker f \Longleftrightarrow \begin{cases} x = .. \\ y = ... \\ z = ... \\ ... \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ ... \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} ... \\ ... \\ ... \\ ... \end{pmatrix} + \cdots \qquad (\text{soit : } \overrightarrow{V} = \alpha_1\,\overrightarrow{V_1} + \cdots)$$

(équations paramétriques de $\ker f$ et/ou mise en évidence d'une base de $\ker f$).

Rem : En cours de résolution du système, on établit aussi un système <u>réduit</u> d'équations cartésiennes.

Exercice 12-7-88 : On se place dans $\mathbb{R}^3$, muni de la base $\mathcal{B} = \left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ (par exemple, la base canonique).

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, de matrice relativement à $\mathcal{B}$ la matrice $M = \begin{pmatrix} -9 & 7 & 3 \\ -9 & 6 & 3 \\ -12 & 11 & 4 \end{pmatrix}$.

- Déterminer le noyau de f.
  En déduire que f n'est pas un automorphisme de $\mathbb{R}^3$ et en donner une base de $\ker f$.
- Donner <u>deux</u> équations cartésiennes indépendantes caractérisant $\ker f$.
- Quelle est la dimension de Im f ? En donner une base (sans calculs).
- Donner <u>une</u> équation cartésienne de $\operatorname{Im}\, f$.
- $\boxed{\text{Vérifier, que, dans cet exemple, } \ker f \text{ et } \operatorname{Im}\, f \text{ ne sont pas supplémentaires !}}$

12.7.2 Image par le pivot de Gauss en colonnes seules

$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\ \underbrace{\big(f(e_1)\,,\,f(e_2)\,,\,\cdots\,,\,f(e_n)\big)}_{\text{famille génératrice de } \mathrm{Im}(f)} = ...$

On extrait une base de $\mathrm{Im}(f)$ en réduisant cette famille génératrice par

$$\begin{cases} \text{bidouille sérieuse, dans les cas simples,} \\ \text{application } \underline{\text{du pivot de Gauss en colonnes exclusivement.}} \end{cases}$$

Par exemple :

$$\mathrm{Im}\ (f) = \mathrm{Vect}\ \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} f(\overrightarrow{e_1}) & f(\overrightarrow{e_2}) & f(\overrightarrow{e_3}) \end{array} & \leftarrow\downarrow \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 9 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \overrightarrow{e_1} \\ \overrightarrow{e_2} \\ \overrightarrow{e_3} \end{array} \end{array} \underbrace{= \mathrm{Vect} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \mathrm{Vect} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{Vect} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}}_{\text{Pivot de Gauss en colonne exclusivement}}$$

$$V \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{Im}\ f \Longleftrightarrow \exists\, \alpha, \beta :\ V = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Longleftrightarrow \begin{cases} x = \alpha \\ y = \alpha + \beta \\ z = 2\,\alpha + \beta \end{cases} \quad \text{(équations paramétriques)}$$

$$V \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{Im}\ f \Longleftrightarrow \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \text{ liée} \Longleftrightarrow \begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ y & 1 & 1 \\ z & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow -x - y + z = 0 \quad \text{(équation cartésienne)}$$

Exercice 12-7-89 : On se place dans $\mathbb{R}^4$, muni de la base $\mathcal{B} = \big(\overrightarrow{i}\,, \overrightarrow{j}\,, \overrightarrow{k}\,, \overrightarrow{\ell}\,\big)$ (par exemple, la base canonique).

Soit $F = \mathrm{Vect}\big(\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \overrightarrow{f_3}, \overrightarrow{f_4}, \overrightarrow{f_2}\big)$ avec $\begin{cases} \overrightarrow{f_1} = \overrightarrow{i} + 2\,\overrightarrow{j} + 3\,, \overrightarrow{k} + 2\,\overrightarrow{\ell} \\ \overrightarrow{f_2} = 2\,\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + 2,\, \overrightarrow{k} + \overrightarrow{\ell} \\ \overrightarrow{f_3} = -\,\overrightarrow{i} + 4\,\overrightarrow{j} + 5,\, \overrightarrow{k} + 4\,\overrightarrow{\ell} \\ \overrightarrow{f_4} = -9\,\overrightarrow{i} - 3\,\overrightarrow{j} - 7,\, \overrightarrow{k} - 3\,\overrightarrow{\ell} \\ \overrightarrow{f_5} = 8\,\overrightarrow{i} + 7\,\overrightarrow{j} + 12,\, \overrightarrow{k} + 7\,\overrightarrow{\ell} \end{cases}$

- A l'aide du pivot de Gaus <u>en colonnes uniquement</u>, déterminer la dimension de F et en donner une base <u>échelonnée</u> selon la base $\mathcal{B}$.

  On pourra même, avec un retour arrière, donner une base de F où les vecteurs ont un maximum de composantes nulles sur $\mathcal{B}$.

- **<u>Théorème de la base incomplète</u>** : | Version normale ...
  | Version spéciale : vecteurs de compléments extraits d'une base donnée.

  Utiliser ce qui précède pour construire, **<u>sans presque de calculs</u>**, <u>un</u> supplémentaire G de F, que l'on caractérisera par une base (que l'on peut extraire de la base $\mathcal{B}$.).

  Rem : A partir de la base <u>échelonnée</u> selon $\mathcal{B}$ trouvée pour F, sous forme matricielle, il suffit de "rallonger la sauce" ... par des vecteurs extraits de la base $\mathcal{B}$.

- Donner des équations <u>paramétriques</u> de F : 4 équations paramétriques $\begin{cases} x = ... \\ y = ... \\ z = ... \\ t = ... \end{cases}$, avec, ici, 2 paramètres α et β, par simple interprétation des calculs précédents.

- En éliminant les 2 paramètres entre les 4 équations paramétriques de F, donner $4 - 2 = 2$ équations <u>cartésiennes</u> (indépendantes) pour F.

12.8 Formules de changement de base, de repère

L'espace $\mathbb{R}^3$ est muni $\begin{cases} \text{de sa base initiale } \mathcal{B} = \left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right) ; \\ \text{de son repère initial } \mathcal{R} = \left(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right). \end{cases}$

On définit $\begin{cases} \text{une nouvelle base } \mathcal{N} = \left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\right) ; \\ \text{un nouveau repère } \mathcal{U} = \left(\Omega; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\right) ; \end{cases}$ en se donnant

- les composantes de $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ dans la base $\mathcal{B}$: $\begin{cases} \overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{i} + 3\,\overrightarrow{k} \\ \overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{j} - 2\,\overrightarrow{k} \\ \overrightarrow{e_3} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + 2\,\overrightarrow{k} \end{cases}$
- les coordonnées de Ω dans le repère $\mathcal{R}$: $\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$: $\overrightarrow{O\,\Omega} = 4\,\overrightarrow{i} + 5\,\overrightarrow{j} + 6\,\overrightarrow{k}$

1. **Matrice de passage**, de la base initiale $\mathcal{B} = \left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ à la base nouvelle $\mathcal{N} = \left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\right)$.

$$P = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_2} & \overrightarrow{e_3} \end{array} \ \leftarrow\downarrow \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \overrightarrow{i} \\ \overrightarrow{j} \\ \overrightarrow{k} \end{array} \end{array}$$

marges : composantes des vecteurs de $\mathcal{N}$ selon $\mathcal{B}$

$$P = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} id(\overrightarrow{e_1}) & id(\overrightarrow{e_2}) & id(\overrightarrow{e_3}) \end{array} \ \leftarrow\downarrow \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \overrightarrow{i} \\ \overrightarrow{j} \\ \overrightarrow{k} \end{array} \end{array}$$

(c'est la matrice la plus facile à obtenir avec les données fournies).

2. **Formules de changement de base** : $\boxed{V_{\mathcal{B}} = P \times V_{\mathcal{N}}}$ $\begin{cases} \text{\underline{anciennes} composantes en} \\ \text{fonction des nouvelles.} \end{cases}$

$$\begin{aligned} V &= x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j} + z\,\overrightarrow{k} = X\,\overrightarrow{e_1} + Y\,\overrightarrow{e_2} + Z\,\overrightarrow{e_3} \\ &= \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = X \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + Y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + Z \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\,X + 0\,Y + 1\,Z \\ 0\,X + 1\,Y + 1\,Z \\ 3\,X - 2\,Y + 2\,Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_{\mathcal{N}} \end{aligned}$$

3. **Formules de changement de repère** : $\boxed{M_{\mathcal{R}} = \Omega_{\mathcal{R}} + P \times M_{\mathcal{U}}}$.

$$\left(\overrightarrow{\Omega\,M}\right)_{\mathcal{B}} = P \times \left(\overrightarrow{\Omega\,M}\right)_{\mathcal{N}} \quad \text{d'où } M_{\mathcal{R}} - \Omega_{\mathcal{R}} = P \times M_{\mathcal{U}} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\mathcal{R}} - \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Y \end{pmatrix}_{\mathcal{U}}$$

Rem : On vérifie que pour X, Y, Z nuls, $M_{\mathcal{R}}$ est confondu avec $\Omega_{\mathcal{R}}$ (égalité dans le repère $\mathcal{R}$).

Exercice 12-8-90 :

On se place dans $\mathbb{R}^2$, muni du repère orthonormé direct $\mathcal{R} = \left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.

Soit $\mathcal{C}$ la conique d'équation cartésienne : $x^2 + 6\,x\,y + y^2 + 4\,x - 4\,y - 6 = 0$.

A partir de cette équation, à cause du produit $x\,y$, il n'est pas immédiat d'obtenir des informations sur la nature et les paramètres de $\mathcal{C}$. On verra ultérieurement, par un calcul approprié (d'algèbre linéaire !), que l'on peut prouver que $\mathcal{C}$ est une hyperbole et déterminer :

- le centre de $\mathcal{C}$: $\Omega = (1, -1)$,
- des vecteurs directeurs des axes de $\mathcal{C}$: $\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}$.

On se place donc dans un nouveau repère, orthonormé direct (pour ne pas avoir de déformation ni de perturbation angulaire lors du changement de repère), d'origine Ω et ayant comme axes ceux de $\mathcal{C}$, où $\mathcal{C}$ aura une équation beaucoup plus simple (sans double produit et sans partie linéaire).

On prend le repère $\mathcal{R}' = \left(\Omega, \overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}\right)$, avec $\begin{cases} \overrightarrow{I} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\,\overrightarrow{i} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\,\overrightarrow{j} \\ \overrightarrow{J} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\,\overrightarrow{i} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\,\overrightarrow{j} \end{cases}$

repère orthonormé direct
d'origine le centre de $\mathcal{C}$
dont les axes coincident avec ceux de $\mathcal{C}$.

1. Donner la matrice P, de passage de la base $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ à la base $\left(\overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}\right)$.
2. Justifier que P est une matrice orthogonale directe. Comment obtient-on P^{-1} sans calculs ?
3. Établir les formules de changement de repère, exprimant les coordonnées (x, y), dans $\mathcal{R}$, d'un point m en fonction des coordonnées (X, Y), dans $\mathcal{R}'$, de ce même point m.
4. En déduire l'équation de $\mathcal{C}$ dans le repère $\mathcal{R}'$ (équation réduite, de la forme $\alpha X^2 + \beta Y^2 = \gamma$).
   Calculer alors l'exentricité e de $\mathcal{C}$ (on rappelle que $a < b$ et que, pour une hyperbole, $e > 1$).

12.9 Influence d'un changement de base sur la matrice d'un endomorphisme

Construction du diagramme, par étapes ...

1. Flèches horizontales et interprétations.
2. Matrice de l'identité et flèche verticale associée.
3. Flèche de retour et interprétation.
4. Lecture : petit tour = grand tour (avec composition de droite à gauche).

Exercice 12-9-91 : Matrice d'une rotation vectorielle en dimension 3.

L'espace $\mathbb{R}^3$ est muni de la $\mathcal{B} = \left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ orthonormée et directe.

Soit r la rotation vectorielle dont l'axe est dirigé (orienté) par $2\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$ et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.

On se propose de construire la matrice R associée à r dans la base $\mathcal{B}$.

- On sait que dans une "bonne base", r a pour matrice une matrice R' assez simple.
  Qu'entends-t-on par "bonne base" ?
- Construire une "bonne base" pour r et donner la matrice R' associée à r dans cette base.
- Quelle est la relation qui lie R et R'.
- Calculer R.

Exercice 12-9-92 : Matrice d'une symétrie, d'un projecteur, en dimension 4.

L'espace $\mathbb{R}^4$ est muni de la $\mathcal{B} = \left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}, \overrightarrow{\ell}\right)$.

Soit F le sous-espace vectoriel d'équations cartésiennes $\begin{cases} \ldots \\ \ldots \end{cases}$

Soit G le sous-espace vectoriel d'équations cartésiennes $\begin{cases} \ldots \\ \ldots \end{cases}$

1. Donner une base de F et une base de G.
2. Vérifier que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$.
3. Par la technique du changement de base, déterminer, relativement à $\mathcal{B}$, la matrice S de la symétrie par rapport à F parallèlement à G.
4. Déterminer aussi, relativement à $\mathcal{B}$, la matrice H du projecteur sur F parallèlement à G.

---

13 Produits scalaires, espaces euclidiens, bases orthonormées, etc ...

< $\mathcal{FIN}$ > .