Déterminants.

Antoine MOTEAU antoine.moteau@wanadoo.fr

Dans tout ce chapitre, le corps des scalaires, noté $\mathbb{K}$, est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Table des matières

Déterminants.

1 Déterminant d'une matrice carrée

1.1 Définition, développement selon une ligne ou une colonne

1.1.1 Définition récursive

Définition 1.1.1.

Soit $A = \left(a_{i,j}\right)_{i,j=1..n}$ appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Pour $n = 1$, A est réduite à un seul coefficient $a_{1,1}$, $\det(A) = a_{1,1}$
2. Pour $n > 1$, en fixant l'indice de colonne j,

$$\det(A) = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j}\, a_{i,j}\, \det\left(A_{i,j}\right)}_{\text{développement selon la colonne fixe } j}$$

où $A_{i,j}$ est la matrice carrée d'ordre $n-1$ déduite de A par suppression de la i-ième ligne et de la j-ième colonne.

On admet que $\det(A)$ **est indépendant de la colonne** j **utilisée.**

- $\det\left(A_{i,j}\right)$ est le (déterminant) mineur d'ordre (i,j)
- $(-1)^{i+j}\det\left(A_{i,j}\right)$ est le cofacteur d'ordre (i,j)

1.1.2 Développement selon une ligne ou une colonne

Théorème 1.1.1. : Développement selon une colonne fixée. *(Admis, cf. définition.)*

Soit $n > 1$ *et* $A = \left(a_{i,j}\right)_{i,j=1..n}$ *appartenant à* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

$$\forall\, j = 1 \cdots n\,, \quad \det(A) = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j}\, a_{i,j}\, \det\left(A_{i,j}\right)}_{\text{développement selon la colonne fixe } j}$$

(le résultat est le même quelque soit la colonne choisie)

Théorème 1.1.2. : Développement selon une ligne fixée. *(Admis)*

Soit $n > 1$ *et* $A = \left(a_{i,j}\right)_{i,j=1..n}$ *appartenant à* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

$$\forall\, i = 1 \cdots n\,, \quad \det(A) = \underbrace{\sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j}\, a_{i,j}\, \det\left(A_{i,j}\right)}_{\text{développement selon la ligne fixe } i}$$

(le résultat est le même quelque soit la ligne choisie)

Théorème 1.1.3. : Transposée *(autre version du précédent)*

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\quad \det(A) = \det({}^tA)$.

Remarque. Pour un calcul "à la main", on a intérêt à choisir une "meilleure" colonne (ou une "meilleure" ligne) : colonne (ou ligne) sur laquelle il y a un maximum de coefficients nuls.

1.1.3 Coût des calculs

1. **Méthode brute, par application de la définition récursive**

Théorème 1.1.4. **(coût des calculs)**

L'utilisation de la définition "brute" (récursive), comme méthode de calcul, conduit à un coût de calcul prohibitif dès que la taille de la matrice est élevée (ide, supérieure à 3).

<u>*Preuve*</u>.

En ne comptant que les opérations les plus coûteuses en temps de calcul (les multiplications), en négligeant les autres opérations (additions, temps d'accès mémoire, etc ...), la méthode récursive brute utilise, dans le développement par rapport à une ligne ou colonne, n calculs de déterminants d'ordre $n-1$, à multiplier chacun par un coefficient de la matrice.
Si le nombre de multiplications utilisée pour le calcul d'un déterminant d'ordre n est noté $C(n)$, on aura : $C(n) > n \times C(n-1)$ et comme $C(2) = 2$, on a facilement $C(n) > n!$.

Exemple 1.1.3.1.

On vous permet d'utiliser un ordinateur effectuant $1000000000000000 = 10^{15}$ multiplications par seconde et dont le MTBF (temps moyen de bon fonctionnement entre deux pannes) est de 1000 ans (super machine !).
Combien faudra-t'il de temps (en ne comptant que les multiplications) pour calculer le déterminant d'une matrice d'ordre 30, avec un algorithme fondé sur la définition récursive ?

Les réponses du genre "il faut ... un certain temps" ne sont pas acceptées.

<u>**Pour information**</u> : On utilise de façon assez courante des matrices carrées d'ordre supérieur ou égal à 1000000 (modélisation de profils aérodynamiques, etc ...).

2. **Autres méthodes de calculs**
   - L'utilisation d'une <u>**variante du pivot de Gauss**</u> permet de réduire le coût de calcul à un $O(n^2)$ (voir réduction par le pivot de Gauss et déterminant des matrices diagonales).
   - Les "grosses" matrices sont souvent "creuses" (beaucoup de zéros) avec des zéros "bien placés", ce qui permet d'utiliser des méthodes particulières, adaptées à de telles matrices.
   - Déterminants d'ordre n, dont la valeur peut être établie par une formule de récurrence (voir exemples en fin de chapitre).

1.1.4 Cas particuliers élémentaires

1. <u>**Matrices diagonales**</u> :

   Le déterminant d'une matrice diagonale est égal au produit de ses termes diagonaux.

   En particulier,

$$\boxed{\det\Big((0)\Big) = 0 \ ; \quad \det(I_n) = 1}$$

2. <u>**Matrices triangulaires**</u> :

   Le déterminant d'une matrice triangulaire est égal au produit de ses termes diagonaux.

3. <u>**Matrices triangulaires par bloc**</u> :

$$\boxed{\text{Pour } A, B, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad \det\begin{pmatrix} A & B \\ (0) & D \end{pmatrix} = \det(A)\ \det(D)}$$

   Ce dernier résultat peut ensuite s'appliquer à A et D quand elles sont également triangulaires par bloc.

4. <u>**Matrices creuses**</u> :
   La plupart des "grosses" matrices rencontrées dans les applications sont des <u>**matrices creuses**</u> : matrices dont les coefficients sont nuls en dehors d'une bande diagonale principale.
   - soit on s'arrange pour ne pas avoir besoin de calculer leurs déterminants ...
   - on bien, comme il s'agit de "matrices creuses", elles sont "triangulaires par blocs" et le calcul de déterminant se fait à un coût réduit (<u>après identification des blocs</u>).

1.2 Combinaisons de lignes ou de colonnes

Puisque $\det(A) = \det({}^tA)$, les propriétés énoncées pour les colonnes sont également vraies pour les lignes.

Théorème 1.2.1.

Si on échange deux colonnes d'une matrice, le déterminant est changé en son opposé.

Si on échange deux lignes d'une matrice, le déterminant est changé en son opposé.

Admis (ou démonstration par récurrence à partir du développement selon la première colonne)

Théorème 1.2.2.

Si deux colonnes sont égales, le déterminant est nul.

Si deux lignes sont égales, le déterminant est nul.

Conséquence immédiate du précédent.

Théorème 1.2.3.

Si on multiplie <u>une seule</u> colonne par un nombre λ, le déterminant est multiplié par λ .

Si on multiplie <u>une seule</u> ligne par un nombre λ, le déterminant est multiplié par λ .

Conséquence immédiate de la définition, en prenant le développement selon cette colonne (ou ligne).

Théorème 1.2.4.

Si une colonne est nulle, le déterminant est nul.

Si une ligne est nulle, le déterminant est nul.

Conséquence immédiate de la définition (ou du précédent).

Théorème 1.2.5.

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, $$\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$$

ide, $\begin{cases} \text{si on multiplie } \underline{\text{toutes}} \text{ les colonnes par } \lambda, \text{ le déterminant est multiplié par } \lambda^n . \\ \text{si on multiplie } \underline{\text{toutes}} \text{ les lignes par } \lambda, \text{ le déterminant est multiplié par } \lambda^n . \end{cases}$

Conséquence immédiate de la multiplication d'une seule ligne ou colonne par λ

Théorème 1.2.6.

Si on ajoute ou retranche une colonne à une <u>autre</u>, le déterminant est inchangé.

Si on ajoute ou retranche une ligne à une <u>autre</u>, le déterminant est inchangé.

<u>Preuve</u>. Soit $n > 1$ et $A = \left(a_{i,j}\right)_{i,j=1..n}$ appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Pour j fixé et $k \neq j$, soit B la matrice déduite de A par ajout de la colonne k à la colonne j.
En calculant $\det(B)$ par développement selon la j-ième colonne, on a :

$$\det(B) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j}\ (a_{i,j} + a_{i,k})\ \det\left(A_{i,j}\right) = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j}\, a_{i,j}\ \det\left(A_{i,j}\right)}_{\det(A)} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j}\, a_{i,k}\ \det\left(A_{i,j}\right)}_{\det(C)}$$

où C est déduite de A en remplacement la colonne d'indice j par la colonne d'indice k.
La matrice C ayant deux colonnes identiques, son déterminant est nul et $\det(B) = \det(A)$.

Théorème 1.2.7. (Généralisation)

Si on ajoute ou retranche à une colonne une combinaison linéaire des <u>autres</u>, le déterminant est inchangé.

Si on ajoute ou retranche à une ligne une combinaison linéaire des <u>autres</u>, le déterminant est inchangé.

Utilisation et généralisation des théorèmes précédents.

1.3 Notation usuelle

On écrit souvent, pour une matrice $A = \left(a_{i,j}\right)_{i,j=1..n}$, $\det A = \left|a_{i,j}\right|_{i,j=1..n}$.
Par exemple :

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & -1 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & -1 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix}$$

Attention : ne pas confondre ces "doubles barres" | | avec la notion de valeur absolue (ou module) !

Dans la formule de changement de variables pour les intégrales doubles :

$$\iint_{\Phi(D)} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_D (f\circ\Phi)(u,v)\,\Big|DJ_\Phi(u,v)\Big|\,du\,dv$$

(où $(x,y) = \Phi(u,v)$ et $DJ_\Phi(u,v)$ est le déterminant Jacobien de Φ en (u,v))

Si par exemple on a $x = u\,v$ et $y = \dfrac{u}{v}$, avec $u > 0$ et $v > 0$,

$$DJ_\Phi(u,v) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} v & u \\ \dfrac{1}{v} & \dfrac{-u}{v^2} \end{vmatrix} = -\frac{2u}{v} \qquad \textit{et} \qquad \Big|DJ_\Phi(u,v)\Big| = \frac{2u}{v}$$

1.4 Calculs pratiques

1.4.1 Matrices d'ordre faible (2, 3, 4, voire 5)

- On choisira de développer suivant une ligne ou une colonne ayant beaucoup de 0.
- **Il est recommandé d'améliorer le processus de calcul** :
  A l'aide de manipulations élémentaires légales, sur les lignes ou colonnes, on construit une matrice différente, mais de même déterminant, possédant une ligne ou une colonne sur laquelle il y a un maximum de zéros.

1.4.2 Algorithme du Pivot de Gauss (acceptable jusqu'à n = 30)

Transformation pas à pas d'une matrice $n \times n$, visant à obtenir une matrice triangulaire (par exemple supérieure) de même déterminant :

A chaque étape i, i allant de 1 à $n-1$, à l'aide de manipulations qui laissent invariant le déterminant, on annule les coefficients situés au dessous de la diagonale, dans la colonne i.

La méthode du pivot maximal utilisant des échanges de lignes (ou de colonnes), il faudra penser à changer le signe du déterminant (contenu dans la variable nommée det) au fur et à mesure de ces échanges :

- Initialement, on pose : det $= 1$
- Si on échange deux lignes ou deux colonnes, on actualise par l'instruction : det $\longleftarrow -$det
- Ajouter une ligne (ou λ fois une ligne) à une autre ne change rien
- Si on multiplie une ligne par k ($k \neq 0$), on actualise par l'instruction : det $\longleftarrow$ det $/k$
  (on a remplacé par une matrice dont le déterminant est k fois celui cherché)
- En fin de réduction, le résultat est le produit de det par le produit des coefficients diagonaux de la matrice triangulaire obtenue.

Remarque. Il est recommandé d'utiliser le pivot de Gauss maximal en ligne et même mieux : le pivot de Gauss maximal en ligne et colonne, ce qui réduit les erreurs d'arrondi lors des calculs approchés :

A chaque étape i, par échange avec une des colonnes ou une des lignes restantes (d'indice $> i$), on s'arrange pour que le pivot (coefficient d'indice (i,i)) soit de module le plus grand possible.

1.4.3 Pour n supérieur à 30 , ...

Il faut utiliser d'autres méthodes, sachant que les grandes matrices sont en général creuses, les valeurs non nulles étant plutôt proches de la diagonale ...

1.5 Propriétés algébriques

$\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est muni des opérations usuelles $\begin{cases} + & \text{addition interne} \\ \boldsymbol{.} & \text{multiplication externe par un élément de } \mathbb{K} \\ \times & \text{multiplication interne (produit matriciel)} \end{cases}$

- $\left(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \boldsymbol{.}\right)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n^2, isomorphe à $\mathcal{L}\left(\mathbb{K}^n\right)$.
- Le produit matriciel $(\times)$ est bilinaire, **non commutatif**.

Théorème 1.5.1.

Rien pour l'addition des matrices !

Il suffit de le constater sur quelques exemples.

Théorème 1.5.2. (Produit par un scalaire)

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *et* $\lambda \in \mathbb{K}$, $\quad \det(\lambda\, A) = \lambda^n \det(A)$

(déjà énoncé)

Théorème 1.5.3. (Produit de deux matrices)

Pour $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\quad \det(A \times B) = \det(A)\ \det(B)$

Admis

Remarque. On a $\det(A \times B) = \det(B \times A)$ bien que, en général $A \times B \neq B \times A$.

Exemple 1.5.0.1. Trouver deux matrices réelles A et B, carrées d'ordre 3, telles $A \times B \neq B \times A$.

Théorème 1.5.4. (Inverse)

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,

- A *est inversible si et seulement si* $\det(A) \neq 0$
- *Si* A *est inversible alors* $\det\left(A^{-1}\right) = \dfrac{1}{\det(A)}$

A est inversible ssi il existe B telle que $A \times B = B \times A = I_n$ et on a vu que $\det(I_n) = 1$

Théorème 1.5.5. (Transposée)

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\quad \det({}^tA) = \det(A)$

(déjà énoncé)

1.6 Matrices semblables

Définition 1.6.1.

$A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont semblables si elles représentent un même endomorphisme dans deux bases différentes (ide, s'il existe $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $A = P\,B\,P^{-1}$)

Formule $A = P\,B\,P^{-1}$: voir détail ci-dessous (définition du déterminant d'un endomorphisme.)

Théorème 1.6.1.

Deux matrices semblables ont le même déterminant.

Conséquence des théorèmes précédents : $\det\left(P\,B\,P^{-1}\right) = \det\left(P\right)\ \det\left(B\right)\ \det\left(P^{-1}\right) = \det\left(B\right)$.

Exemple 1.6.0.2. Trouver deux matrices réelles, carrées d'ordre 3, non semblables et de même déterminant.

2 Déterminant d'une famille de vecteurs, relativement à une base

E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, de dimension finie n.

2.1 Définition

Définition 2.1.1.

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \cdots, e_n)$ une base de E.

Le *déterminant relativement à la base* $\mathcal{B}$, d'une famille $\mathcal{F} = (f_1, f_2, \cdots, f_n)$ de n vecteurs :

$$\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = \det_{\mathcal{B}}(f_1, f_2, \cdots, f_n)$$

est le déterminant de la matrice des composantes de la famille $\mathcal{F}$ relativement à la base $\mathcal{B}$.

2.2 Propriétés

Théorème 2.2.1.

Soit $\mathcal{B}$ une base de E. L' application

$$\begin{array}{rlcl} \det_{\mathcal{B}} : & E^n & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & \left(f_i\right)_{i=1\cdots n} & \longmapsto & \det_{\mathcal{B}}(f_1, f_2, \cdots, f_n) \end{array}$$

est une forme n-linéaire alternée sur E telle que $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = 1$.

- Forme : ici, application à valeur dans $\mathbb{K}$
- n-linéaire : en "bloquant" toutes les variables, sauf une, on obtient une application linéaire
- alternée : si on échange deux vecteurs, le résultat est changé en son opposé.

Preuve. Conséquence immédiate des propriétés vues pour les déterminants de matrice et,

la matrice des composantes de $\mathcal{B}$ dans elle-même étant la matrice identité, on a $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = 1$.

Théorème 2.2.2. Changement de base

Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ des bases de E et $\mathcal{F}$ une famille de n vecteurs de E.

$$\det_{\mathcal{B}}\left(\mathcal{F}\right) = \det_{\mathcal{B}}\left(\mathcal{B}'\right) \times \det_{\mathcal{B}'}\left(\mathcal{F}\right)$$

Preuve. La formule provient du déterminant d'un produit de matrices. Soient

- P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$,
  - P est la matrice des composantes des vecteurs de $\mathcal{B}'$ exprimés dans la base $\mathcal{B}$
  - P est la matrice de l'identité de E, muni de $\mathcal{B}'$, vers E muni de $\mathcal{B}$
- M la matrice des composantes des vecteurs de $\mathcal{F}$ exprimés dans la base $\mathcal{B}$,
- M' la matrice des composantes des vecteurs de $\mathcal{F}$ exprimés dans la base $\mathcal{B}'$,

D'après la formule matricielle d'un changement de base, $M = P\,M'$, d'où $\det M = \det P\ \det M'$.

Théorème 2.2.3. Caractérisation des bases

Une famille de n vecteurs est une base de E si et seulement si son déterminant, relativement à une base quelconque, est non nul.

Preuve. Conséquence de la caractérisation des matrices inversibles.

2.3 Calcul pratique

En dehors de l'utilisation de certains aspects théoriques, le calcul de $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$ se ramènera toujours au calcul du déterminant de la matrice associée à la famille $\mathcal{F}$ relativement à la base $\mathcal{B}$.

3 Déterminant d'un endomorphisme

E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, de dimension finie n.

3.1 Définition

Définition 3.1.1.

Soit f un endomorphisme d'un K-ev E.
Quelque soient les bases $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \cdots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, \cdots, e'_n)$ de E,

$$\det_{\mathcal{B}}(f(e_1), f(e_2), \cdots, f(e_n)) = \det_{\mathcal{B}'}(f(e'_1), f(e'_2), \cdots, f(e'_n))$$

Le *déterminant* de l'endomorphisme f est défini par

$$\det\Big(f\Big) = \det_{\mathcal{B}}(f(e_1), f(e_2), \cdots, f(e_n))$$

où $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \cdots, e_n)$ est une base quelconque de E.

Remarque. C'est aussi le déterminant de la matrice associée à l'endomorphisme f, dans une base quelconque.

Preuve. (de l'indépendance du choix de la base)

L'égalité des formules provient du théorème sur les matrices semblables :

- Soit P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$,
  - P est la matrice des composantes des vecteurs de $\mathcal{B}'$ exprimés dans la base $\mathcal{B}$
  - P est la matrice de l'identité de E, muni de $\mathcal{B}'$, vers E muni de $\mathcal{B}$
- M la matrice associée à l'endomorphisme f, dans la base $\mathcal{B}$,
- M' la matrice associée à l'endomorphisme f, dans la base $\mathcal{B}'$,

Les matrices M et M' sont semblables, liées par la formule $M = P\,M'\,P^{-1}$.
On a donc $\det M = \det P\ \det M'\ \det P^{-1} = \det M'$.

3.2 Propriétés

Théorème 3.2.1.

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, f et g des endomorphismes de E et λ un scalaire.

- $\det\Big(f \circ g\Big) = \det\Big(f\Big)\ \det\Big(g\Big)$ *(Rien pour l'addition !)*
- $\det\Big(\lambda f\Big) = \lambda^n\ \det\Big(f\Big)$

Preuve. Conséquence des propriétés des déterminants de matrices : $\mathcal{B}$ étant une base (quelconque) de E,

- $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f \circ g) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) \times \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(g)$
- $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\lambda f) = \lambda\,\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$

Théorème 3.2.2. : caractérisation des automorphismes

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et f un endomorphismes de E.

f est un automorphisme de E si et seulement si $\det\Big(f\Big) \neq 0$.

Preuve. Conséquence directe de la caractérisation des matrices inversibles ou de la caractérisation des bases.

3.3 Calcul pratique

En dehors de l'utilisation de certains aspects théoriques, pour un endomorphisme f, le calcul de $\det(f)$ se ramènera toujours au calcul du déterminant de la matrice associée à f relativement à une base $\mathcal{B}$.

4 Systèmes de Cramer, formules de Cramer

Un système de n équations à n inconnues, "linéaire, avec second membre", à coefficients dans le corps $\mathbb{K}$:

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccccc}
a_{1,1}\,x_1 & + & a_{1,2}\,x_2 & + & \cdots & + & a_{1,j}\,x_j & + & \cdots & + & a_{1,n-1}\,x_{n-1} & + & a_{1,n}\,x_n & = b_1 \\
a_{2,1}\,x_1 & + & a_{2,2}\,x_2 & + & \cdots & + & a_{2,j}\,x_j & + & \cdots & + & a_{2,n-1}\,x_{n-1} & + & a_{2,n}\,x_n & = b_2 \\
\cdots \\
a_{i,1}\,x_1 & + & a_{i,2}\,x_2 & + & \cdots & + & a_{i,j}\,x_j & + & \cdots & + & a_{i,n-1}\,x_{n-1} & + & a_{i,n}\,x_n & = b_i \\
\cdots \\
a_{n-1,1}\,x_1 & + & a_{n-1,2}\,x_2 & + & \cdots & + & a_{n-1,j}\,x_j & + & \cdots & + & a_{n-1,n-1}\,x_{n-1} & + & a_{n-1,n}\,x_n & = b_{n-1} \\
a_{n,1}\,x_1 & + & a_{n,2}\,x_2 & + & \cdots & + & a_{n,j}\,x_j & + & \cdots & + & a_{n,n-1}\,x_{n-1} & + & a_{n,n}\,x_n & = b_n
\end{array}\right.$$

peut s'écrire aussi sous la forme matricielle $A\,X = B$:

$$\begin{pmatrix}
a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\
a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,j} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2,n} \\
\cdots \\
a_{i,1} & a_{i,2} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,n-1} & a_{i,n} \\
\cdots \\
a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,j} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\
a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,j} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{n,n}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_i \\ \cdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_i \\ \cdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{pmatrix}$$

ou encore, dans $\mathbb{K}^n$ muni de sa base canonique $\mathcal{C} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \cdots, \overrightarrow{e_n})$, sous la forme vectorielle :

$$x_1 \; \overrightarrow{A_1} \quad + x_2 \; \overrightarrow{A_2} \quad + \cdots + x_j \; \overrightarrow{A_j} \quad + \cdots + x_{n-1} \; \overrightarrow{A_{n-1}} \quad + x_n \; \overrightarrow{A_n} \quad = \quad \overrightarrow{B}$$

ide,

$$x_1 \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ \cdots \\ a_{i,1} \\ \cdots \\ a_{n-1,1} \\ a_{n,1} \end{pmatrix}
+ x_2 \begin{pmatrix} a_{1,2} \\ a_{2,2} \\ \cdots \\ a_{i,2} \\ \cdots \\ a_{n-1,2} \\ a_{n,2} \end{pmatrix}
+ \cdots + x_j \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ a_{2,j} \\ \cdots \\ a_{i,j} \\ \cdots \\ a_{n-1,j} \\ a_{n,j} \end{pmatrix}
+ \cdots + x_{n-1} \begin{pmatrix} a_{1,n-1} \\ a_{2,n-1} \\ \cdots \\ a_{i,n-1} \\ \cdots \\ a_{n-1,n-1} \\ a_{n,n-1} \end{pmatrix}
+ x_n \begin{pmatrix} a_{1,n} \\ a_{2,n} \\ \cdots \\ a_{i,n} \\ \cdots \\ a_{n-1,n} \\ a_{n,n} \end{pmatrix}
= \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_i \\ \cdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{pmatrix}$$

Théorème 4.0.1.

Un système de n équations à n inconnues, "linéaire", "avec second membre", à coefficients dans le corps $\mathbb{K}$, est de Cramer si et seulement si il admet une solution unique
(ide, si et seulement si sa matrice associée est inversible).

Les solutions d'un système de Cramer, $A\,X = B$, de matrice A, de second membre B (noté comme ci-dessus)

sont données par les formules de Cramer : $\quad \forall\, j = 1 \cdots n, \quad x_j = \dfrac{\det\Big(AB(j)\Big)}{\det\Big(A\Big)}$

où $AB(j)$ **est la matrice obtenue en remplaçant le j-ième colonne de A par B.**

<u>*Preuve*</u>. Avec les notations utilisées ci-dessus,

$$\begin{aligned}
\det\Big(AB(j)\Big) &= \det_{\mathcal{C}}\Big(\overrightarrow{A_1}, \overrightarrow{A_2}, \cdots, \overrightarrow{A_{j-1}}, \overrightarrow{B}, \overrightarrow{A_{j+1}}, \cdots, \overrightarrow{A_n}\Big) \\
&= \det_{\mathcal{C}}\Big(\overrightarrow{A_1}, \overrightarrow{A_2}, \cdots, \overrightarrow{A_{j-1}}, \Big(\sum_{k=1}^{n} x_k\,\overrightarrow{A_k}\Big), \overrightarrow{A_{j+1}}, \cdots, \overrightarrow{A_n}\Big) \\
&= \sum_{k=1}^{n} x_k \,\Big(\det_{\mathcal{C}}\Big(\overrightarrow{A_1}, \overrightarrow{A_2}, \cdots, \overrightarrow{A_{j-1}}, \overrightarrow{A_k}, \overrightarrow{A_{j+1}}, \cdots, \overrightarrow{A_n}\Big)\Big) \\
&= 0 + 0 + \cdots + 0 + x_j \,\det_{\mathcal{C}}\Big(\overrightarrow{A_1}, \overrightarrow{A_2}, \cdots, \overrightarrow{A_{j-1}}, \overrightarrow{A_j}, \overrightarrow{A_{j+1}}, \cdots \overrightarrow{A_n}\Big) + 0 + \cdots + 0 = x_j \,\det\Big(A\Big)
\end{aligned}$$

<u>Commentaire</u> : **Les formules de Cramer ne sont utilisables en pratique que pour $n = 2$ (n=3 à la rigueur) et trop coûteuse au delà.**

La résolution d'un système $n \times n$ par les formules de Cramer a un coût en $(n+1)!$ multiplications, contre un coût en n^2 multiplications pour la méthode du pivot de Gauss.

5 Déterminants récurrents (exemples)

On a vu que le calcul de déterminants de grande taille était très coûteux en pratique. Dans certains cas, on peut obtenir des formules directes, qui évitent ces calculs ...

5.1 Déterminant de Vandermonde

La matrice de Vandermonde associée à n scalaires $x_1, x_2, \cdots, x_n$ est la matrice

$$M(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_{n-1}, x_n) = \left(x_i^{j-1}\right)_{i,j=1\cdots n} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & \cdots & x_1^{j-1} & \cdots & x_1^{n-2} & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 & \cdots & x_2^{j-1} & \cdots & x_2^{n-2} & x_2^{n-1} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 & \cdots & x_3^{j-1} & \cdots & x_3^{n-2} & x_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_i & x_i^2 & x_i^3 & \cdots & x_i^{j-1} & \cdots & x_i^{n-2} & x_i^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{n-1} & x_{n-1}^2 & x_{n-1}^3 & \cdots & x_{n-1}^{j-1} & \cdots & x_{n-1}^{n-2} & x_{n-1}^{n-1} \\ 1 & x_n & x_n^2 & x_n^3 & \cdots & x_n^{j-1} & \cdots & x_n^{n-2} & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

et son déterminant (déterminant de Vandermonde associé aux n scalaires $x_1, x_2, \cdots, x_n$) est :

$$\boxed{\mathcal{V}(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_{n-1}, x_n) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \left(x_j - x_i\right)}$$

Remarque. On a illustré le problème dans un cas où $n \geqslant 8$, mais n peut prendre toutes valeurs à partir de 1.

Preuve. On suppose que les x_i sont distincts (sinon le déterminant est nul et la formule est valide).

Soit P_n le polynôme de l'indéterminée X, défini par : $P_n(X) = \mathcal{V}(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_{n-1}, X)$

1. En développant $\mathcal{V}(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_{n-1}, X)$ selon la dernière ligne, on constate que P_n est un polynôme de degré au plus $n-1$.
2. $P_n(X)$ s'annule pour $X = x_1$, $X = x_2$, $\ldots$, $X = x_{n-1}$ (dans chaque cas on a un déterminant dont deux lignes sont égales).
   P_n est donc un polynôme de degré $n-1$ (exactement), admettant les $n-1$ zéros distincts $x_1, x_2, x_3, \cdots x_{n-1}$, ce qui prouve que P_n est de la forme :
   $$P_n(X) = c_{n-1} \prod_{i=1}^{n-1} (X - x_i) \qquad (\text{avec } c_{n-1} \neq 0)$$
3. Le développement de $\mathcal{V}(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_{n-1}, X)$ selon la dernière ligne, montre que $c_{n-1} = \mathcal{V}(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_{n-1})$ (coefficient de X^n, cofacteur d'ordre (n, n)).
   On a donc $P(X) = \mathcal{V}(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_{n-1}) \displaystyle\prod_{i=1}^{n-1} (X - x_i)$. En particulier, avec $X = x_n$,
   $$\mathcal{V}(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_{n-1}, x_n) = \mathcal{V}(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_{n-1}) \prod_{1 \leqslant i < n} (x_n - x_i)$$
4. Cette dernière formule est le "moteur" d'une démonstration par récurrence de la proposition annoncée pour la valeur de $\mathcal{V}(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n)$. Il ne reste plus qu'à
   - Initialiser : $\mathcal{V}(x_1) = 1$ (cas spécial), $\mathcal{V}(x_1, x_2) = x_2 - x_1$
   - Montrer que la proposition est héréditaire à partir de $n = 2$
   - Conclure

5.2 Autres exemples

Exemple 5.2.0.3. Pour le calcul du déterminant d'ordre n, défini à partir de $n = 1$, selon le modèle

$$I_n(a) = \begin{vmatrix} \mathrm{a} & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \mathrm{a} & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \mathrm{a} & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \mathrm{a} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \mathrm{a} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \mathrm{a} \end{vmatrix}$$

on pourra établir une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 vérifiée par la suite $\Big(I_n(a)\Big)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
La résolution de cette relation de récurrence, de la forme $I_{n+2}(a) = \lambda\, I_{n+1}(a) + \mu\, I_n(a)$ permet d'exprimer directement $I_n(a)$ en fonction de n.
Par exemple, calculer $I_{2000}(1)$.

Exemple 5.2.0.4. $$\det\left(\left(\binom{i+j}{i}\right)_{i,j=1\cdots n}\right) = n+1$$

Exemple 5.2.0.5. Calculer le déterminant de $A = \Big(a_{i,j}\Big)_{i,j=1\cdots n}$ avec $\begin{cases} a_{i,i} & = 1+x^2 \\ a_{i,i+1} & = a_{i,i-1} = x \\ a_{i,j} & = 0 \text{ sinon} \end{cases}$

puis, montrer que, pour x tel que $|x| < 1$, ce déterminant admet une limite lorsque n tends vers $+\infty$ et préciser cette limite.

$< \quad \mathcal{FIN} \quad >$