# Espaces préhilbertiens réels

Antoine MOTEAU antoine.moteau@wanadoo.fr

## Table des matières

# Espaces Préhilbertiens réels.

Les espaces vectoriels sur le corps $\mathbb{R}$, considérés ici, ne sont pas nécessairement de dimension finie.

## 1 Produit scalaire dans un $\mathbb{R}$ ev $\mathbb{E}$

### 1.1 Formes bilinéaires symétriques sur un $\mathbb{R}$ ev

**Définition 1.1.1.**

Une forme bilinéaire symétrique sur le $\mathbb{R}$ ev $\mathbb{E}$ est une application $\phi$ de $\mathbb{E}\times\mathbb{E}$ vers $\mathbb{R}$ vérifiant les propriétés :

$$\begin{cases} \forall\, u,v,w \in \mathbb{E},\ \forall\,\lambda \in \mathbb{R},\ \ \phi(u,\lambda\, v+w) = \lambda\,\phi(u,v)+\phi(u,w) & \text{linéarité à droite} \\ \forall\,(u,v)\in\mathbb{E}^2,\ \ \phi(v,u)=\phi(u,v) & \text{propriété de symétrie} \end{cases}$$

On en déduit immédiatement la propriété de **linéarité à gauche** :

$$\forall\, u,v,w \in \mathbb{E},\ \forall\,\lambda \in \mathbb{R},\ \ \phi(\lambda\, u+w,v) = \lambda\,\phi(u,v)+\phi(w,v)$$

### 1.2 Produit scalaire, espaces préhilbertiens

**Définition 1.2.1.**

On appelle produit scalaire sur le $\mathbb{R}$ ev $\mathbb{E}$, toute forme bilinéaire symétrique qui est "définie" et positive :

$$\begin{cases} \forall\, u\in\mathbb{E},\ \ \phi(u,u)\geqslant 0 & \text{(positive)} \\ \forall\, u\in\mathbb{E},\ \ \phi(u,u)=0 \Longrightarrow u=0 & \text{("définie", avec un sens très particulier, ici, pour ce mot)} \end{cases}$$

**Définition 1.2.2.**

Lorsque $\phi$ est un produit scalaire sur le $\mathbb{R}$ espace vectoriel $E$, le couple $\big(\mathbb{E}\,,\,\phi\big)$ est un espace préhilbertien réel.

### 1.3 Exemples de produits scalaires et de préhilbertiens

1. Dans l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre $n$, à coefficients réels, muni de ses opérations $(+,\cdot)$, usuelles, le produit scalaire usuel $\phi$ est défini par :

$$\phi(A,B) = \mathrm{tr}\big({}^tA\times B\big)$$

- Symétrique : d'après les propriétés $\mathrm{tr}\big({}^tM\big)=\mathrm{tr}(M)$ et ${}^t\big(U\,V\big)={}^tV\,{}^tU$.
- Bilinéaire : d'après la linéarité de la transposition, de la trace et la bilinéarité du produit.
- Positive : Si $A=\big(a_{i,j}\big)_{i,j=1\cdots n}$, alors $\phi(A,A)=\mathrm{tr}\big({}^tA\times A\big)=\ldots=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{i,j}^2\geqslant 0$
- Définie : Si $A=\big(a_{i,j}\big)_{i,j=1\cdots n}$, alors $\phi(A,A)=\mathrm{tr}\big({}^tA\times A\big)=\ldots=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{i,j}^2$ .

  Lorsque $\phi(A,A)=0$, tous les $a_{i,j}$ sont nuls et $A=(0)$.

*Remarque.* Le plus souvent

- les caractères "symétrique", "bilinéaire" sont faciles à prouver (ils résultent de propriétés générales),
- les caractères "positif" et surtout "défini" sont plus délicats à prouver.

2. Dans $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, $\cdots$, $\mathbb{R}^n$ , muni de la base canonique, en notant $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ et $y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$,
   - le produit scalaire canonique (usuel) est défini par : $\phi(x,y)=\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k\,y_k$
   - $\psi$, défini par : $\psi(x,y)=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k+1)\,x_k\,y_k$ est aussi un PS sur $\mathbb{R}^n$
   - Cependant $\psi'$ défini par : $\psi'(x,y)=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k-1)\,x_k\,y_k$ n'est pas un PS sur $\mathbb{R}^n$. **Pourquoi ?**
3. Dans $\mathbb{R}_n[X]$, en considérant $n+1$ réels distincts fixés $a_0,a_1,a_2,\cdots,a_n$,
   - $\phi$ , définie par : $\phi(P,Q)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(a_k)\,Q(a_k)$, est un produit scalaire.
   - $\psi$ , définie par : $\psi(P,Q)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} P(a_k)\,Q(a_k)$, n'est pas un produit scalaire. **Pourquoi ?**
4. Dans $\mathbb{E}=\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ (avec $-\infty<a<b<+\infty$).
   - l'application $\phi$, définie par : $\phi(f,\,g)=\displaystyle\int_a^b f(t)\,g(t)\,dt$ , est un produit scalaire,
     - Symétrique : d'après la commutativité du produit.
     - Bilinéaire : d'après la linéarité de l'intégrale et la bilinéarité du produit.
     - Positive : d'après le théorème sur l'intégrale d'une fonction positive.
     - Définie : d'après le théorème de "l'intégrale nulle" (fonction continue et positive d'intégrale nulle).
   - l'application $\psi$, définie par : $\psi$ défini par $\psi(f,\,g)=\displaystyle\int_a^b |t|^2\ f(t)\,g(t)\,dt$ est un produit scalaire.
   - Cependant $\psi'$, défini par $\psi'(f,\,g)=\displaystyle\int_{-1}^{1} t\ f(t)\,g(t)\,dt$, n'est pas un PS sur $\mathcal{C}^0([-1,1],\mathbb{R})$. **Pourquoi ?**
5. Dans l'espace de Dirichlet, $\mathcal{C}_T(\mathbb{R})$, des applications de de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, $T$-périodiques, continues par morceaux et égales à leurs régularisées, le produit scalaire usuel $\phi$ est défini par :

$$\phi(f,\,g)=\frac{1}{T}\int_a^{a+T} f(t)\,g(t)\,dt$$

   (Revoir le cours sur les séries de FOURIER et en particulier le **théorème de Parseval**).

6. Les sous-espaces d'un préhilbertien sont des préhilbertiens (pour la restriction du produit scalaire).

# 2 Inégalités

## 2.1 Inégalité de Cauchy-Schwarz

**Théorème 2.1.1.** *(Inégalité de Cauchy-Schwarz)*

*Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{R}$ ev et $\phi$ un produit scalaire sur $\mathbb{E}$*

$$\forall\,(u,v)\in\mathbb{E}^2,\ \left|\,\phi(u,v)\,\right|^2 \leqslant \phi(u,u)\,\phi(v,v)$$

*Cas d'égalité :* $\forall\,(u,v)\in\mathbb{E}^2,\ |\phi(u,v)|^2 = \phi(u,u)\,\phi(v,v) \Longleftrightarrow (u,v)$ *est liée*

*Remarques.*

1. L'inégalité de Cauchy-Schwarz est vraie même si $\phi$ est bilinéaire symétrique positive non "définie"
2. Le cas d'égalité IMPOSE que $\phi$ soit "définie"

*Preuve.* démonstration de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, pour $(u,v)\in\mathbb{E}^2$ :

$$\forall\,r\in\mathbb{R},\ 0\leqslant \phi(u+r\,v,u+r\,v) = r^2\,\phi(v,v)+2\,r\,\phi(u,v)+\phi(u,u) = H(r)$$

1. Inégalité :
   - si $\phi(v,v)\neq 0$, alors $H(r)$ est un trinôme du second degré en $r$, à coefficients réels, qui ne change pas de signe lorsque $r$ décrit $\mathbb{R}$. Son discriminant $\Delta = 4\,|\phi(u,v)|^2 - 4\,\phi(v,v)\,\phi(u,u)$ ne peut être que négatif ou nul, d'où le résultat.
   - si $\phi(v,v)=0$, alors $v=0$ et $\phi(u,v)=0$ et on a le résultat, avec égalité.
2. Cas d'égalité,
   - si $\phi(v,v)=0$ alors $v=0$ et $(u,v)$ est liée
   - si $\phi(v,v)\neq 0$, $H(r)$ est un trinôme de degré 2 en $r$, de discriminant nul, qui possède une racine réelle double $a$. En prenant $r=a$, $\phi(u+a\,v,u+a\,v)=0$ d'où $u+a\,v=0$, ce qui prouve la dépendance de $u$ et $v$.

   **réciproquement**, si $u$ et $v$ sont liés, on a $\begin{cases} u=\lambda\,v\\ \text{ou}\\ v=\lambda\,u\end{cases}$ et, dans les deux cas, on obtient l'égalité.

## 2.2 Inégalité de Minkowsky (ou inégalité triangulaire)

**Théorème 2.2.1.** *Inégalité de Minkowsky*

*Soit $E$ un $\mathbb{R}$ ev et $\phi$ un produit scalaire sur $E$*

$$\forall\,(u,v)\in E^2,\ \sqrt{\phi(u+v,u+v)}\leqslant\sqrt{\phi(u,u)}+\sqrt{\phi(v,v)}$$

*Preuve.* démonstration de l'inégalité de MinKowski, par développement de $\phi(u+v,u+v)$ :

$$\begin{aligned}0\leqslant\phi(u+v,u+v) &= \phi(u,u)+\phi(u,v)+\phi(v,u)+\phi(v,v)\\ &= \phi(u,u)+\phi(u,v)+\phi(u,v)+\phi(v,v)\\ &= \phi(u,u)+2\,\phi(u,v)+\phi(v,v)\\ &= \left(\sqrt{\phi(u,u)}+\sqrt{\phi(v,v)}\right)^2+2\left(\phi(u,v)-\sqrt{\phi(u,u)}\sqrt{\phi(v,v)}\right)\end{aligned}$$

Or, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $|\phi(u,v)|\leqslant\sqrt{\phi(u,u)}\sqrt{\phi(v,v)}$ et on en déduit que $0\leqslant\phi(u+v,u+v)\leqslant\left(\sqrt{\phi(u,u)}+\sqrt{\phi(v,v)}\right)^2$, d'où le résultat.

### 2.3 EXERCICES (exemples classiques)

1. Soit $S_2$ l'ensemble des suites $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels (ou applications $f : n \longmapsto f(n) = f_n$, de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{R}$), telles que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} |f_n|^2$ converge.
   (a) Montrer que $S_2$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{R})$ (pour ses lois usuelles).
   indication : travailler d'abord sur les sommes partielles d'ordre $N$.
   (b) Montrer que $\phi : \begin{cases} S_2 \times S_2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (f,g) & \longmapsto & \phi(f,g) & = \sum_{n=0}^{+\infty} f(n)\,g(n) \end{cases}$ est un produit scalaire sur $S_2$.
2. Soit $L_2$ l'ensemble des applications définies, continues sur $[0,+\infty[$ , telles que l'intégrale $\int_0^{+\infty} |f(t)|^2\,dt$ converge.
   (a) Montrer que $L_2$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}([0,+\infty[,\mathbb{R})$ (pour ses lois usuelles).
   indication : travailler d'abord sur les intégrales de 0 à $X$.
   (b) Montrer que $\phi : \begin{cases} L_2 \times L_2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (f,g) & \longmapsto & \phi(f,g) & = \int_0^{+\infty} f(t)\,g(t)\,dt \end{cases}$ est un produit scalaire sur $L_2$.

# 3 Norme associée au produit scalaire d'un $\mathbb{R}$ ev

## 3.1 Définition

### Définition 3.1.1.

Soit $E$ un $\mathbb{R}$ ev et $\psi$ un produit scalaire sur $E$.

L'application $\| \, \|_\phi : \begin{array}{ccccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ u & \longmapsto & \|u\|_\phi & = \sqrt{\phi(u,u)} \end{array}$ est une norme sur $E$.

$\| \, \|_\phi$ est la norme préhilbertienne associée au produit scalaire $\phi$.

*Preuve*. Il faut montrer que $\| \, \|_\phi$ possède les **quatre** propriétés des normes, qui sont :

$$\begin{cases} \forall\, u \in E, \ \ \|u\| \geqslant 0 \\ \forall\, u \in E, \ \ \|u\| = 0 \Rightarrow u = 0 \\ \forall\, u \in E, \ \ ,\forall \lambda \in \mathbb{K}, \ \ \|\lambda\, u\| = |\lambda| \ \ \|u\| \\ \forall\, u, v \in E, \ \ \|u+v\| \leqslant \|u\| + \|v\| \end{cases}$$

## 3.2 Inégalités de Cauchy-Schwarz et de Minkowski (autre écriture)

$$\forall\, u, v \in E, \ \left|\phi(u,v)\right| \leqslant \|u\|_\phi \ \|v\|_\phi$$

$$\forall\, u, v \in E, \ \|u+v\|_\phi \leqslant \|u\|_\phi + \|v\|_\phi$$

## 3.3 Expression du produit scalaire en fonction de la norme associée

### Théorème 3.3.1. (relations de polarisation)

*Soit $\phi$ une forme bilinéaire symétrique positive sur le $\mathbb{R}$ ev $\mathbb{E}$.*
*Si $\| \, \|$ est l'application définie sur $E$ par $\|u\| = \sqrt{\phi(u,u)}$, alors*

$$\begin{cases} \phi(u,v) = \dfrac{1}{4}\left[\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2\right] \\ \phi(u,v) = \dfrac{1}{2}\left[\|u+v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2\right] \quad \textit{conséquence de } \ \|u+v\|^2 \ = \|u\|^2 + 2\,\phi(u,v) + \|v\|^2 \end{cases}$$

*Preuve*. Simple vérification. Remarque : le caractère "défini" n'est pas utile ici.

# 4 Orthogonalité

On se place dans un $\mathbb{R}$ ev $E$, préhilbertien, de produit scalaire $\phi$ et on notera souvent $< u \,|\, v >= \phi(u, v)$.
*Remarque.* Les autres notations courantes sont $< u, v >$ ou $(u \,|\, v)$ ou $u \cdot v$, mais on évitera $(u, v)$ qui peut prêter à confusion !

## 4.1 Orthogonalité de deux vecteurs

### Définition 4.1.1.

Deux vecteurs $u$ et $v$ sont $\phi$-orthogonaux si $\phi(u, v) = 0$.
On écrira $u \perp v$ lorsque $u$ et $v$ sont orthogonaux (au sens de $\phi$).

### Théorème 4.1.1. de PYTHAGORE

$$\forall\, u, v \in E,\ u \perp v \Longrightarrow \|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$$

*Preuve.* (immédiat)

**Exemple 4.1.0.1.** On se place dans $E = \mathbb{R}_3[X]$, muni du PS $\phi$ défini par $\phi(P, Q) = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)\, Q(t)\, dt$.

- Les polynômes $X^2$ et $X^3$ sont orthogonaux (pour $\phi$) et on en déduit que
$$\|X^2 + X^3\|_\phi^2 = \|X^2\|_\phi^2 + \|X^3\|_\phi^2$$
- $X^2$ et $X^3$ ne sont pas orthogonaux pour le PS $\psi$ défini par $\psi(P, Q) = \displaystyle\sum_{k=0}^{3} P(k)\, Q(k)$.

## 4.2 Sous-espaces vectoriels orthogonaux

### Définition 4.2.1.

Deux sous-espaces vectoriels de $E$, $F_1$ et $F_2$, sont orthogonaux (pour $\phi$) si et seulement si
$$\forall\, (u, v) \in F_1 \times F_2,\ \phi(u, v) = 0\,.$$

## 4.3 Orthogonal d'un sous-espace vectoriel

### Théorème 4.3.1.

*Soit $F$ un sous-espace vectoriel de $E$ et $F^\perp = \Big\{ u \in E \,\Big|\, \forall\, v \in F,\ \phi(u, v) = 0 \Big\}$.*

- *$F^\perp$ est un sous-espace vectoriel de $E$.*
- *$F$ et $F^\perp$ sont des sous-espaces vectoriels orthogonaux.*
- *$F \cap F^\perp = \{0\}$.*

*$F^\perp$ (également noté $F^\circ$) est le sous-espace orthogonal à $F$.*

*Preuve.*

1. $F^\perp$ est non vide ($0 \in F^\perp$), stable par $+$ et . (multiplication externe)
2. par définition.
3. Si $u \in F \cap F^\perp$, alors $\phi(u, u) = 0$ d'où $u = 0$.

## 4.4 Famille orthogonale, Famille orthonormale

### Définition 4.4.1.

Une famille non vide, finie ou infinie, de vecteurs de $E$ est dite orthogonale

si ses vecteurs sont $\begin{cases} \text{tous non nuls} \\ \text{et} \\ \text{orthogonaux deux à deux.} \end{cases}$

Si, de plus, les vecteurs sont tous de norme 1, la famille est dite orthonormale.

### Théorème 4.4.1.

*Toute famille orthogonale est libre*

*Preuve*. Soit $(\overrightarrow{e_i})_{i\in I}$ une famille non vide de vecteurs de $E$, orthogonale.

Prenons une combinaison linéaire des éléments de cette famille, et supposons qu'elle est nulle.
Les vecteurs intervenant dans cette combinaison linéaire sont indicés par un sous-ensemble $J$, fini et non vide, de $I$, et on peut écrire cette combinaison linéaire nulle sous la forme : $\sum_{j\in J} \alpha_j \overrightarrow{e_j} = 0$.

$\forall\, k \in J,\ < \overrightarrow{e_k} \mid \sum_{j\in J} \alpha_j \overrightarrow{e_j} >= \sum_{j\in J} \alpha_j < \overrightarrow{e_k} \mid \overrightarrow{e_j} >= \alpha_k < \overrightarrow{e_k} \mid \overrightarrow{e_k} >$ or $< \overrightarrow{e_k} \mid \overrightarrow{e_k} > \neq 0$ puisque $\overrightarrow{e_k} \neq \overrightarrow{0}$

On en déduit immédiatement que $\forall\, k \in J,\ \alpha_k = 0$.
Ainsi, toute combinaison linéaire nulle a fatalement ses coefficients nuls, ce qui prouve la liberté.

**Exemple 4.4.0.2.**

1. Dans $\mathcal{C}_T$, muni de son produit scalaire usuel, la famille $\left(t \longmapsto \sin\left(n\,\dfrac{2\pi}{T}\,t\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est orthogonale.
2. Dans $\mathbb{R}^n$, muni du produit scalaire canonique, la base canonique est orthonormale.
3. Dans $\mathbb{R}_n[X]$, avec $n+1$ réels distincts fixés $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n$, on définit le produit scalaire $\phi$ :

$$\phi(P,Q) = \sum_{k=0}^{n} P(a_k)\,Q(a_k)$$

Pour $i = 0\cdots n$, le $i$-ième polynôme de Lagrange, relatif aux points $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n$, est défini par :

$$L_i(X) = \frac{\displaystyle\prod_{\substack{0\leqslant j\leqslant n\\ j\neq i}} (X - a_j)}{\displaystyle\prod_{\substack{0\leqslant j\leqslant n\\ j\neq i}} (a_i - a_j)}$$

Les polynômes de Lagrange, relatifs aux points $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n$, forment une famille $\phi$-orthonormale : on vérifie que $L_i(a_j) = \delta_{i,j}$ et on en déduit que $\phi(L_i, L_j) = \delta_{i,j}$ $\left(\text{rappel : } \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}\right)$.

## 4.5 Expression d'une combinaison linéaire d'une famille orthogonale

Soit $(\overrightarrow{e_i})_{i\in I}$ une famille orthogonale et $J$ une partie finie de $I$.

$$\forall\, \overrightarrow{u} \in Vect\left(\overrightarrow{e_j}\,,\ j\in J\right),\qquad \overrightarrow{u} = \sum_{j\in J} \frac{< \overrightarrow{e_j} \mid \overrightarrow{u} >}{< \overrightarrow{e_j} \mid \overrightarrow{e_j} >}\,\overrightarrow{e_j}$$

*Preuve*. On prends $\overrightarrow{u} = \sum_{k\in J} u_j\,\overrightarrow{e_k}$ . En utilisant la linéarité à droite, on a :

$\forall\, j \in J,\ < \overrightarrow{e_j} \mid \overrightarrow{u} >=< \overrightarrow{e_j} \mid \sum_{k\in J} u_k\,\overrightarrow{e_k} >= \sum_{k\in J} u_k < \overrightarrow{e_j} \mid \overrightarrow{e_k} >= u_j < \overrightarrow{e_j} \mid \overrightarrow{e_j} >$, d'où $u_j$.

# 5 Procédé d'orthonormalisation de Schmidt

## 5.1 Théorème

### Théorème 5.1.1. (d'orthonormalisation de Schmidt)

*Soit $(E, <\,|\,>)$ un espace préhilbertien, non réduit à $\{0\}$.*

*Etant donné une famille libre $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \cdots, \overrightarrow{e_p})$ de $p$ vecteurs de $E$, il existe une famille orthonormale $(\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \cdots, \overrightarrow{f_p})$ de $p$ vecteurs de $E$ telle que :*

$$\forall\, q = 1 \cdots p,\ Vect\big(\overrightarrow{f_1}, \cdots, \overrightarrow{f_q}\big) = Vect\big(\overrightarrow{e_1}, \cdots, \overrightarrow{e_q}\big)$$

*Preuve*. Par récurrence limité sur $q \in [\![1, p]\!]$

Soit l'hypothèse de récurrence $\mathcal{H}(q)$ : $\left( q > p \text{ ou } \exists\,(f_1, \cdots, f_q) \text{ avec } \begin{cases} (f_1, \cdots, f_q) \text{ orthonormale} \\ \text{et} \\ Vect(f_1, \cdots, f_q) = Vect(e_1, \cdots, e_q) \end{cases} \right)$

1. Pour $q = 1$, on prend $f_1 = \dfrac{e_1}{\|e_1\|}$ et $\mathcal{H}(1)$ est vraie.
2. Supposons la propriété vraie jusqu'à $q \geqslant 1$.
   - Si $q + 1 > p$ alors $\mathcal{H}(q+1)$ est vraie.
   - Si $q + 1 \leqslant p$ :
     Soit $(f_1, \cdots, f_q)$ une famille orthonormale telle que $Vect\big(f_1, \cdots, f_q\big) = Vect\big(e_1, \cdots, e_q\big)$.

     $$\boxed{\text{Soit un vecteur} \quad z = e_{q+1} + \sum_{k=1}^{q} \alpha_k\, f_k\ .}$$

     - Comme $e_{q+1} \notin Vect\big(e_1, \cdots, e_q\big) = Vect\big(f_1, \cdots, f_q\big)$, $z$ est indépendant de $(f_1, \cdots, f_q)$ et la famille $(f_1, \cdots, f_q, z)$ est une base de $Vect\big(f_1, \cdots, f_q, z\big) = Vect\big(e_1, \cdots, e_q, e_{q+1}\big)$.
     - On cherche à déterminer les coefficients $\alpha_k$ pour que $z$ soit orthogonal à chaque vecteur $f_1, \cdots, f_q$ :
       Soit $i$ compris entre 1 et $q$.

       $$\begin{aligned} < f_i \,|\, z > &= < f_i \,|\, \left( e_{q+1} + \sum_{k=1}^{q} \alpha_k\, f_k \right) > = < f_i \,|\, e_{q+1} > + \sum_{k=1}^{q} \alpha_k < f_i \,|\, f_k > \\ &= < f_i \,|\, e_{q+1} > + \alpha_i \qquad \big(\text{la famille } (f_k)_{k=1\cdots q} \text{ étant orthonormale}\big) \end{aligned}$$

       et en prenant $\alpha_i = - < f_i \,|\, e_{q+1} >$, on aura $< f_i \,|\, z > = 0$.

       Ainsi, le vecteur $z = e_{q+1} - \displaystyle\sum_{k=1}^{q} < f_k \,|\, e_{q+1} > f_k$ est non nul et orthogonal à chaque vecteur $f_1, \cdots, f_q$.
     - En posant $f_{q+1} = \dfrac{z}{\|z\|}$, la famille $(f_1, \cdots, f_q, f_{q+1})$ est une famille orthornormale telle que $Vect\big(f_1, \cdots, f_q, f_{q+1}\big) = Vect\big(e_1, \cdots, e_q, e_{q+1}\big)$, ce qui prouve la propriété au rang $q + 1$.
3. **Résumé** : la propriété est vraie au rang 1 et, si elle est vraie au rang $q \geqslant 1$, alors elle est vraie au rang $q + 1$. On peut alors conclure qu'elle est vraie pour tout $q \geqslant 1$.

### Théorème 5.1.2. *(Conséquence directe du théorème précédent)*

*Tout espace préhilbertien, non réduit à $\{0\}$, de dimension finie, admet une base orthonormale.*

## 5.2 Algorithme de Schmidt : construction d'une famille orthonormale

La démonstration du théorème de Schmidt fournit un procédé de construction d'une famille orthonormale, $(f_1, \cdots, f_p)$, base du sous-espace engendré par une famille libre $(e_1, \cdots, e_p)$ :

$$\begin{cases} \textbf{Initialisation :} \quad f_1 = \dfrac{e_1}{\|e_1\|} \\ \textbf{Boucle :} \quad \text{Pour } q \text{ variant de 2 à } p \text{ , faire : } \begin{cases} z \leftarrow e_q - \displaystyle\sum_{k=1}^{q-1} < f_k \,|\, e_q > f_k \\ f_q \leftarrow \dfrac{z}{\|z\|} \end{cases} \end{cases}$$

*Remarque.* On pourrait ne pas faire l'initialisation et commencer la boucle à $q = 1$ : $(\sum_{k=1}^{0} xxx = 0)$.

## 5.3 Exemples

On donne ici des exemples en Maple, mais il faut aussi savoir le faire "à la main" !

En **Maple**, la fonction **GramSchmidt** (de la librairie **linalg**) permet de construire, à partir d'une famille de vecteurs, une famille orthogonale (ou, par option, orthonormée) qui engendre le même sous-espace vectoriel,

mais cette fonction ne s'applique qu'aux vecteurs de $\mathbb{R}^n$, pour le produit scalaire canonique !

**Exemple 5.3.0.3.** Avec Maple, pour le produit salaire canonique de $\mathbb{R}^4$,

```
> restart: interface(warnlevel=0): with(linalg):
> e1 := vector([1,1,1,1]): e2 := vector([1,2,-1,1]): e3 := vector([2,1,0,1]):
> E := [e1,e2,e3];
> basis(E);                        # on vérifie que E est libre
> F := GramSchmidt(E);             # base seulement orhogonale de Vect(e1,e2,e3)
> F := GramSchmidt(E, normalized); # base orhonormée de Vect(e1,e2,e3)
```

**Exemple 5.3.0.4.** Avec Maple, pour le produit salaire $\left(\varphi : (P, Q) \longmapsto \int_{-1}^{1} P(t)\, Q(t)\, dt\right)$ de $\mathbb{R}_4[X]$.

On cherche ici à orthonormaliser, pour $\varphi$, la famille $(1, X, X^2, X^3, X^4)$, c'est à dire à construire une base $\varphi$-orthogonale de $\mathbb{R}_4[X]$.

*Remarque.* La notion de polynôme sera représentée ici par une expression de l'indéterminée $X$ (variable Maple), $X$ étant réservée à cet usage (pas d'affectation à $X$).

```
> restart:
> phi := (P,Q) -> int( P*Q, X=-1..1):   # variable X == indéterminée, non affectée !
> E := [1,X, X^2, X^3, X^4];            # base canonique de R_4[X]
> F := []:                              # procédé de Schmidt
  for q from 1 to nops(E)
  do z := E[q] - add( phi(F[k],E[q]) * F[k], k=1..q-1):
     F := [op(F), z / sqrt(phi(z,z))]:
  od:
> F;                                    # résultat
```

On trouve $\left[\dfrac{\sqrt{2}}{2}, X\dfrac{\sqrt{6}}{2}, (3X^2 - 1)\dfrac{\sqrt{10}}{4}, (5X^3 - 3X)\dfrac{\sqrt{14}}{4}, \dfrac{105\sqrt{2}}{16}\left(X^4 - \dfrac{6}{7}X^2 + \dfrac{3}{35}\right)\right]$

**Exemple 5.3.0.5.** Construire une base orthonormale de

1. $\mathbb{R}_4[X]$, pour le produit scalaire défini par $< P \,|\, Q >= \displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)\, Q(t)\, e^{-t}\, dt$
2. $\mathbb{R}_4[X]$, pour le produit scalaire défini par $< P \,|\, Q >= \displaystyle\sum_{k=0}^{4} P(k)\, Q(k)$
3. $\mathbb{R}_4[X]$, pour le produit scalaire défini par $< P \,|\, Q >= \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{P(t)\, Q(t)}{\sqrt{1 - t^2}}\, dt$

# 6 Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie

## 6.1 Projection orthogonale, distance et meilleure approximation

### Définition 6.1.1.

Soit $\left(\mathbb{E}\,, <\ |\ >\right)$ un espace préhilbertien réel et $\|\ \|$ la norme associe à $<\ |\ >$.

Soit $F$ un sous-espace de $E$, de dimension finie, non réduit à $\{0\}$ et de base orthonormale $(f_1, \cdots, f_q)$.

La projection orthogonale d'un vecteur $v$ de $E$ sur $F$ est le vecteur $p_F(v) = \sum_{j=1}^{q} < f_j \ |\ v > f_j$ .

### Théorème 6.1.1. (d'orthogonalité et de meilleure approximation)

*Soit $\left(\mathbb{E}\,, <\ |\ >\right)$ un espace préhilbertien réel et $\|\ \|$ la norme associe à $<\ |\ >$.*

*Soit $F$ un sous-espace de $E$, de dimension finie, non réduit à $\{0\}$.*

*Pour un vecteur $v$ de $E$,*

- *$p_F(v)$ est la meilleure approximation de $v$ par un élément de $F$, au sens : $\|v - p_F(v)\| = \inf_{f\in F} \|v - f\|$*
- *$v - p_F(v) \in F^{\perp}$.*

*$d(v, F) = \|v - p_F(v)\|$ est la distance de $v$ au sous-espace vectoriel $F$.*

*Preuve.*

1. admis.
2. Soit $(f_1, \cdots, f_q)$ une base orthonormale de $F$. Pour $v \in E$, posons $u = p_F(v) = \sum_{j=1}^{q} < f_j \ |\ v > f_j$.

   Comme $u = \sum_{j=1}^{q} < f_j \ |\ u > f_j$, on a $\left(\forall j = 1 \cdots q,\ < f_j \ |\ v >=< f_j \ |\ u >\right)$.

   On en déduit que $\left(\forall j = 1 \cdots q,\ < f_j \ |\ v - u >= 0\right)$, ce qui prouve que $v - u \in F^{\perp}$.

## 6.2 Exemples (exercices)

**Exemple 6.2.0.6. Approximation polynomiale des moindres carrés :**

Dans $E = \mathcal{C}\left([a, b], \mathbb{R}\right)$, muni du produit scalaire $\phi$ défini par $\phi(f, g) = \int_a^b f(t)\, g(t)\, dt$,
la projection $\phi$-orthogonale d'une fonction $f$ sur le sous-espace $\mathbb{R}_n[X]$ est la fonction polynôme $P$, de degré au plus $n$, qui minimise la quantité : $\int_a^b |f(t) - P(t)|^2\ dt$

1. Calculer $\inf_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3} \int_0^{\pi} \left(a\,x^2 + b\,x + c - \sin(x)\right)^2 dx$
2. Calculer $\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^{1} x^2 \left(\ln(x) - a\,x + b\right)^2 dx$

*Remarque.*

- l'interprétation en terme de projection $\phi$-orthogonale d'une certaine fonction, sur un sous-espace (à préciser) permet d'affirmer l'existence d'un minimum.
- ensuite, pour le calcul, on peut
  - calculer la projection $\phi$-orthogonale avec le produit scalaire $\phi$, ce qui est un peu lourd : il faut déterminer une base $\phi$-orthonormée du sous-espace sur lequel on projette, puis calculer les composantes de la projection orthogonale ...
  - ou changer radicalement de point de vue (on cherche un extrémum) ..., avec un calcul léger !

---

< $\mathcal{FIN}$ >