Droites et plans affines

Antoine MOTEAU antoine.moteau@wanadoo.fr

Table des matières

1 Droites dans le plan affine euclidien 2
1.1 Projection orthogonale d'un point M sur une droite . . . 2
1.1.1 Droite définie par un point et un vecteur directeur . . . 2
1.1.2 Droite définie par un point et un vecteur normal . . . 2
1.1.3 Droite définie par une équation cartésienne . . . 2
1.1.4 Autres . . . 2
1.2 Distance d'un point à une droite . . . 3
1.2.1 Droite définie par un point et un vecteur directeur . . . 3
1.2.2 Droite définie par un point et un vecteur normal . . . 3
1.2.3 Droite définie par une équation cartésienne . . . 3
1.2.4 Autres . . . 3
1.3 Faisceau de droites . . . 3
1.3.1 Définition . . . 3
1.3.2 Equation d'une droite d'un faisceau, base d'un faisceau de droites . . . 3
1.3.3 Utilisation simplifiée d'un faisceau de droites . . . 3
1.4 Droites passant par un point et tangentes à une conique . . . 4

2 Plans dans l'espace affine euclidien de dimension 3 5
2.1 Projection orthogonale d'un point M sur un plan . . . 5
2.1.1 Plan défini par un point et un vecteur normal . . . 5
2.1.2 Plan défini par un point et deux vecteurs directeurs orthogonaux . . . 5
2.1.3 Plan défini par un point et deux vecteurs directeurs quelconques . . . 5
2.1.4 Plan défini par une équation cartésienne . . . 5
2.1.5 Autres . . . 5
2.2 Distance d'un point à un plan . . . 6
2.2.1 Plan défini par un point et deux vecteurs directeurs . . . 6
2.2.2 Plan défini par un point et un vecteur normal . . . 6
2.2.3 Plan défini par une équation cartésienne . . . 6
2.3 Faisceau de plans . . . 6
2.3.1 Définition . . . 6
2.3.2 Equation d'un plan, base d'un faisceau de plans . . . 6
2.3.3 Utilisation simplifiée d'un faisceau de plans . . . 6

3 Droites dans l'espace affine euclidien de dimension 3 7
3.1 Projection orthogonale d'un point sur une droite . . . 7
3.1.1 Droite définie par un point et un vecteur directeur . . . 7
3.1.2 Droite définie par les équations cartésiennes de deux plans . . . 7
3.2 Distance d'un point à une droite . . . 7
3.2.1 Droite définie par un point et un vecteur directeur . . . 7
3.3 Droites coplanaires . . . 7
3.3.1 Droites définies par un point et un vecteur directeur . . . 7
3.4 Perpendiculaire commune à deux droites non parallèles . . . 7
3.4.1 Droites définies par un point et un vecteur directeur . . . 7
3.5 Distance de deux droites . . . 7
3.5.1 Droites définies par un point et un vecteur directeur . . . 7
3.6 Droites passant par un point et tangentes à une quadrique . . . 8
3.7 Droites de direction donnée et tangentes à une quadrique . . . 8

Droites et plans en géométrie affine euclidienne de dimension 2 ou 3.

L'espace affine réel $\mathcal{E}$, de dimension 2 (ou 3), est muni du repère canonique $\mathcal{R}_c = \left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j} \left(, \overrightarrow{k}\right)\right)$, orthonormal direct, d'axes Ox, Oy (, Oz).

1 Droites dans le plan affine euclidien

Une droite $\mathcal{D}$, de l'espace affine de dimension 2, "hyperplan" de cet espace, est caractérisée à l'aide :

- de deux points distincts A et B
- d'un point A et un vecteur directeur $\overrightarrow{v} = b\,\overrightarrow{i} - a\,\overrightarrow{j}$
- d'un point A et un vecteur normal $\overrightarrow{n} = a\,\overrightarrow{i} + b\,\overrightarrow{j}$
- d'une équation cartésienne : $a\,x + b\,y + c = 0$ $\left(\det_{\mathcal{C}}(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{v}) = 0 \text{ ou } < \overrightarrow{AM} \mid \overrightarrow{n} >= 0\right)$
- d'équations paramétriques : $M = A + \lambda \overrightarrow{v}$
- ou comme élément d'un faisceau de droites concourantes (voir ci-dessous) :

$$\mathcal{D} = \lambda\,\mathcal{D}_1 + \mu\,\mathcal{D}_1 \quad \text{d'équation} \quad \lambda\left(L_1(x,y) - \alpha\right) + \mu\left(L_2(x,y) - \beta\right) = 0$$

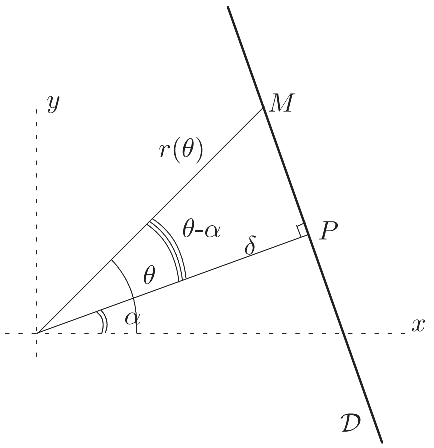
Une droite, <u>qui ne passe pas par 0</u>, peut aussi être caractérisée par :

- la projection orthogonale P de O sur la droite :

$$\overrightarrow{OP} = \delta\left(\cos\alpha\,\overrightarrow{i} + \sin\alpha\,\overrightarrow{j}\right) = \delta\,\overrightarrow{u}_\alpha$$

- une équation polaire :

$$r = \frac{\delta}{\cos(\theta - \alpha)} \quad , \theta \in \left]\alpha - \frac{\pi}{2}, \alpha + \frac{\pi}{2}\right[$$



1.1 Projection orthogonale d'un point M sur une droite

1.1.1 Droite définie par un point et un vecteur directeur

$$\boxed{H_M = p(M) = A + \frac{< \overrightarrow{AM} \mid \overrightarrow{v} >}{\|\overrightarrow{v}\|^2}\,\overrightarrow{v}}$$

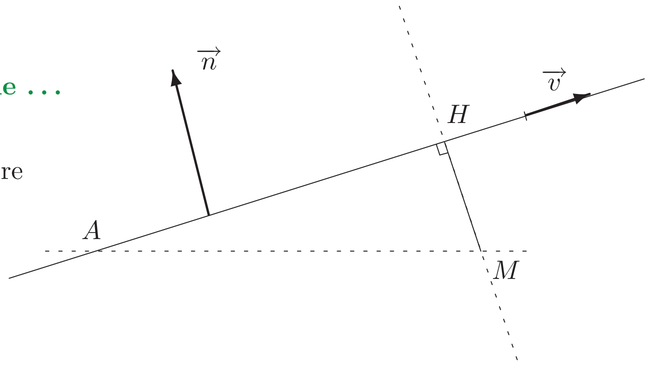
$$\overrightarrow{AM} = \underbrace{\overrightarrow{AH}} + \underbrace{\overrightarrow{HM}}$$
$$= \frac{< \overrightarrow{AM} \mid \overrightarrow{v} >}{\|\overrightarrow{v}\|^2}\,\overrightarrow{v} + \frac{< \overrightarrow{AM} \mid \overrightarrow{n} >}{\|\overrightarrow{n}\|^2}\,\overrightarrow{n}$$

1.1.2 Droite définie par un point et un vecteur normal

$$\boxed{H_M = p(M) = M - \frac{< \overrightarrow{AM} \mid \overrightarrow{n} >}{\|\overrightarrow{n}\|^2}\,\overrightarrow{n}}$$

1.1.3 Droite définie par une équation cartésienne ...

- revenir à l'une des situations précédentes,
- ou chercher l'intersection avec la perpendiculaire menée depuis M.



1.1.4 Autres ...

- revenir à l'une des situations précédentes,
-

1.2 Distance d'un point à une droite

1.2.1 Droite définie par un point et un vecteur directeur ...

...

1.2.2 Droite définie par un point et un vecteur normal

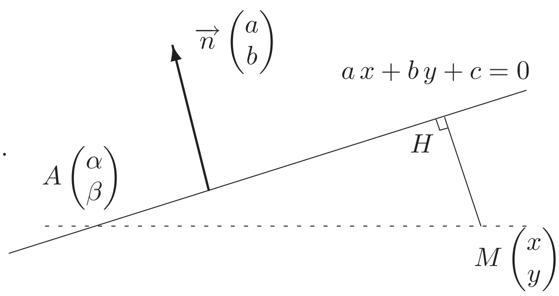
$$\boxed{d(M,\mathcal{D}) = \frac{\left|< \overrightarrow{AM} \,|\, \overrightarrow{n} >\right|}{\|\overrightarrow{n}\|}}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AM} &= \underbrace{\overrightarrow{AH}} + \underbrace{\overrightarrow{HM}} \\ &= \overrightarrow{AH} + \frac{< \overrightarrow{AM} \,|\, \overrightarrow{n} >}{\|\overrightarrow{n}\|^2}\,\overrightarrow{n} \end{aligned}$$

1.2.3 Droite définie par une équation cartésienne

$$\boxed{d(M,\mathcal{D}) = \frac{|a\,x + b\,y + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}}$$

$$d(M,\mathcal{D}) = \frac{\left|\left\langle \begin{pmatrix} x-\alpha \\ y-\alpha \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right\rangle\right|}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad \text{avec } a\,\alpha + b\,\beta + c = 0.$$



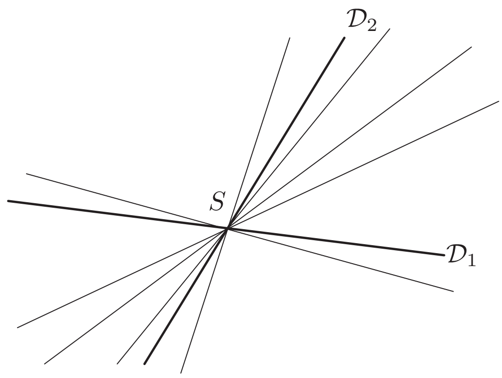
1.2.4 Autres ...

- revenir à l'une des situations précédentes,
-

1.3 Faisceau de droites

1.3.1 Définition

Etant donné un point S, l'ensemble des droites passant par S est le faisceau de droites de sommet S.



1.3.2 Equation d'une droite d'un faisceau, base d'un faisceau de droites

Soient $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ deux droites distinctes du faisceau de sommet S, d'équations cartésiennes respectives :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_1 : &\quad L_1(x,y) - \alpha = 0 \\ \mathcal{D}_2 : &\quad L_2(x,y) - \beta = 0 \end{aligned} \quad \text{(où } L_1 \text{ et } L_2 \text{ sont des formes linéaires indépendantes).}$$

Toute droite $\mathcal{D}$ du faisceau de sommet S, a une équation cartésienne de la forme

$$\lambda\,\big(L_1(x,y) - \alpha\big) + \mu\,\big(L_2(x,y) - \beta\big) = 0 \qquad \text{(qui dépends de deux paramètres } \lambda \text{ et } \mu\text{)}$$

et se note $\mathcal{D} = \lambda\,\mathcal{D}_1 + \mu\,\mathcal{D}_2$.

Remarque. On dit que les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ constituent une "base" du faisceau de droites de sommet S.

1.3.3 Utilisation simplifiée d'un faisceau de droites

Les droites du faisceau de droites de base $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$, qui sont distinctes de $\mathcal{D}_1$, ont pour équation cartésienne

$$\gamma\,\big(L_1(x,y) - \alpha\big) + \big(L_2(x,y) - \beta\big) = 0$$

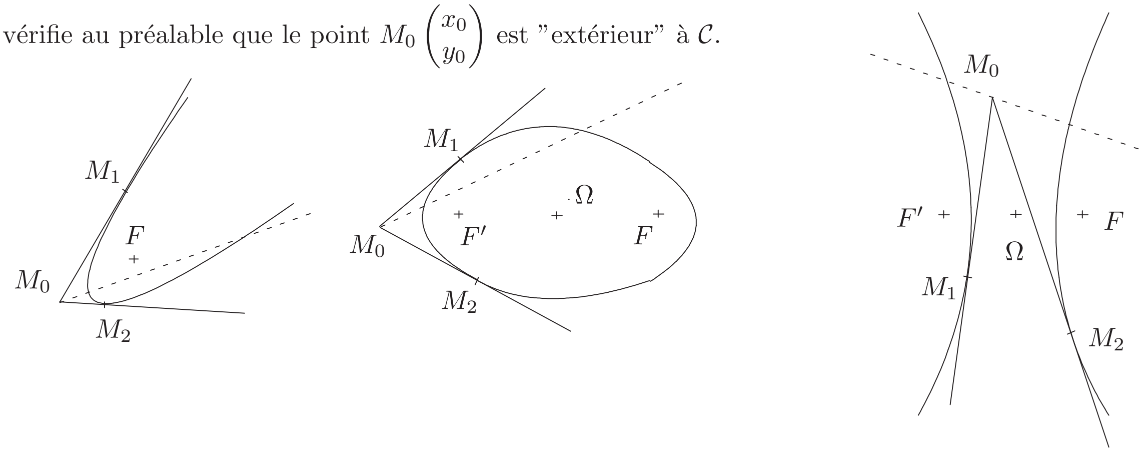
ce qui permet de n'introduire qu'un seul paramètre ($\gamma = \dfrac{\lambda}{\mu}$), si on accepte de se priver de la droite $\mathcal{D}_1$.

1.4 Droites passant par un point et tangentes à une conique

La conique $\mathcal{C}$ est donnée par une équation cartésienne $f(x,y)=0$, de la forme :

$$f(x,y) = a\,x^2 + b\,y^2 + c\,x\,y + \alpha\,x + \beta\,y + \gamma = 0$$

et on vérifie au préalable que le point $M_0\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}$ est "extérieur" à $\mathcal{C}$.



Méthode 1. Points de contacts (recherche des points M de $\mathcal{C}$ en lesquels la tangente à $\mathcal{C}$ passe par M_0) :

$$M(x,y) \text{ tel que } \begin{cases} M \in \mathcal{C} & \text{soit } f(x,y) = 0 \\ \overrightarrow{M_0\,M} \perp \overrightarrow{grad}(f)_M) & \text{soit } (x-x_0)\,\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) + (y-y_0)\,\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases}$$

On obtient deux points de contact, M_1 et M_2, d'où les droites cherchées (M_0, M_1) et (M_0, M_1).

Méthode 2. Equations paramétriques (recherche d'un vecteur directeur d'une tangente à $\mathcal{C}$, issue de M_0) :

On cherche une droite $\mathcal{D}$, passant par M_0 et tangente à $\mathcal{C}$, de vecteur directeur inconnu $\overrightarrow{v} = \alpha\,\overrightarrow{i} + \beta\,\overrightarrow{j}$

1. On exprime qu'un point $M = M_0 + \lambda\,\overrightarrow{v}$, de la droite $\mathcal{D}$, appartient également à $\mathcal{C}$, ce qui donne une équation du second degré en λ, dont les coefficients sont des expressions de α et β.
2. Le fait que la droite $\mathcal{D}$ soit tangente à $\mathcal{C}$ se traduit par l'existence d'une seule valeur de λ solution de cette équation ou encore par le fait que le discriminant de l'équation soit nul, ce qui donne une relation (de degré 2) entre α et β.
3. Il ne reste plus qu'à imposer une contrainte sur les pararamètres α et β, par exemple

$$\begin{cases} \alpha = 1 & \text{si on ne veut pas obtenir une droite parallèle à } Oy \\ \beta = 1 & \text{si on ne veut pas obtenir une droite parallèle à } Ox \\ \alpha^2 + \beta^2 = 1 & \text{si on veut un cas très général} \end{cases}$$

pour en déduire deux couples (α, β) et ainsi les deux droites cherchées.

Méthode 3. Equations cartésiennes (à l'aide d'un faisceau de droites de sommet M_0) :

Soient deux droites distinctes $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ passant par M_0, d'équations respectives

$$\begin{array}{ll} \mathcal{D}_1 : L_1(x,y) - \alpha = 0 & \text{par exemple } x - x_0 = 0 \\ \mathcal{D}_2 : L_2(x,y) - \beta = 0 & \text{par exemple } y - y_0 = 0 \end{array}$$

On cherche λ et μ tels que $\mathcal{D} = \lambda\,\mathcal{D}_1 + \mu\,\mathcal{D}_2$ soit tangente à $\mathcal{C}$, c'est à dire rencontre $\mathcal{C}$ en un point double.

1. L'élimination de x (ou de y) dans le système $\begin{cases} \lambda\left(P_1(x,y) - \alpha\right) + \mu\left(P_2(x,y) - \beta\right) = 0 \\ f(x,y) = 0 \end{cases}$ conduit à une équation du second degré en y (ou x) dont les coefficients sont fonctions de λ et μ.
2. Cette équation devant avoir une racine double, en exprimant que son discriminant est nul, on obtient une relation (de degré 2) entre λ et μ.
3. En imposant une contrainte à λ et μ (par exemple $\lambda + \mu = 1$), on en déduit deux couples (λ, μ), donc les deux droites cherchées.

2 Plans dans l'espace affine euclidien de dimension 3

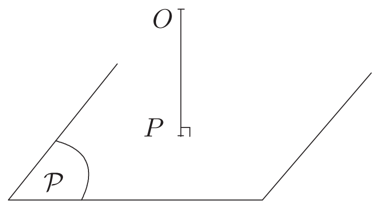
Un plan $\mathcal{P}$, de l'espace affine de dimension 3, "hyperplan" de cet espace, est caractérisé à l'aide :

- de trois points non alignés A, B et C
- d'un point A et deux vecteurs directeurs $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$
- d'un point A et un vecteur normal $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{v_1} \wedge \overrightarrow{v_2} = a\,\overrightarrow{i} + b\,\overrightarrow{j} + c\,\overrightarrow{k}$
- d'une équation cartésienne : $a\,x+b\,y+c\,z+d=0$ $\quad \left(\det_{\mathcal{C}}(\overrightarrow{A\,M}, \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}) = 0 \text{ ou } <\overrightarrow{A\,M} \mid \overrightarrow{n}> = 0\right)$
- d'équations paramétriques : $M = A + \lambda\overrightarrow{v_1} + \mu\overrightarrow{v_2}$
- ou comme élément d'un faisceau de plans concourants (voir ci-dessous) :

$$\mathcal{P} = \lambda\,\mathcal{P}_1 + \mu\,\mathcal{P}_2 \qquad \text{d'équation} \quad \lambda\left(L_1(x,y,z)-\alpha\right) + \mu\left(L_2(x,y,z)-\beta\right) = 0$$

Un plan, qui ne passe pas par 0, peut aussi être caractérisée par :

- la projection orthogonale P de O sur le plan :
-



2.1 Projection orthogonale d'un point M sur un plan

2.1.1 Plan défini par un point et un vecteur normal

$$\boxed{H_M = p(M) = M - \frac{<\overrightarrow{A\,M} \mid \overrightarrow{n}>}{\|\overrightarrow{n}\|^2}\,\overrightarrow{n}}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{A\,M} &= \underbrace{\quad\overrightarrow{A\,H}\quad} + \underbrace{\quad\overrightarrow{H\,M}\quad}\\ &= \quad\overrightarrow{A\,H} \quad + \frac{<\overrightarrow{A\,M} \mid \overrightarrow{n}>}{\|\overrightarrow{n}\|^2}\,\overrightarrow{n}\end{aligned}$$

2.1.2 Plan défini par un point et deux vecteurs directeurs orthogonaux

$$\boxed{H_M = p(M) = A + \frac{<\overrightarrow{A\,M} \mid \overrightarrow{v_1}>}{\|\overrightarrow{v_1}\|^2}\,\overrightarrow{v_1} + \frac{<\overrightarrow{A\,M} \mid \overrightarrow{v_2}>}{\|\overrightarrow{v_2}\|^2}\,\overrightarrow{v_2}}$$

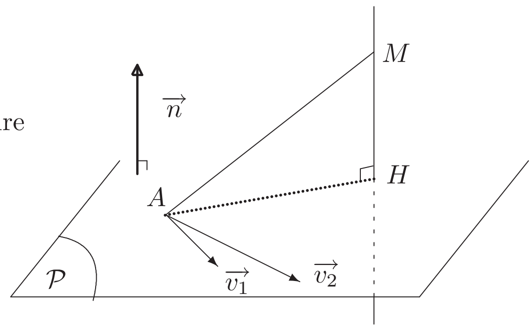
$$\overrightarrow{A\,M} = \underbrace{\frac{<\overrightarrow{A\,M} \mid \overrightarrow{v_1}>}{\|\overrightarrow{v_1}\|^2}\,\overrightarrow{v_1} + \frac{<\overrightarrow{A\,M} \mid \overrightarrow{v_2}>}{\|\overrightarrow{v_2}\|^2}\,\overrightarrow{v_2}}_{\overrightarrow{A\,H}} + \underbrace{\frac{<\overrightarrow{A\,M} \mid \overrightarrow{n}>}{\|\overrightarrow{n}\|^2}\,\overrightarrow{n}}_{\overrightarrow{H\,M}} \qquad \text{si } \overrightarrow{v_1} \perp \overrightarrow{v_2} \text{ et } \overrightarrow{n} = \overrightarrow{v_1} \wedge \overrightarrow{v_2}$$

2.1.3 Plan défini par un point et deux vecteurs directeurs quelconques

- revenir à la situation utilisant le vecteur normal $\overrightarrow{v_1} \wedge \overrightarrow{v_2}$.

2.1.4 Plan défini par une équation cartésienne ...

- revenir à l'une des situations précédentes,
- ou chercher l'intersection avec la droite perpendiculaire menée depuis M.



2.1.5 Autres ...

- revenir à l'une des situations précédentes,
-

2.2 Distance d'un point à un plan

2.2.1 Plan défini par un point et deux vecteurs directeurs ...

...

2.2.2 Plan défini par un point et un vecteur normal

$$\boxed{d(M,\mathcal{P}) = \frac{\left|<\overrightarrow{AM}\,|\,\overrightarrow{n}>\right|}{\|\overrightarrow{n}\|}}$$

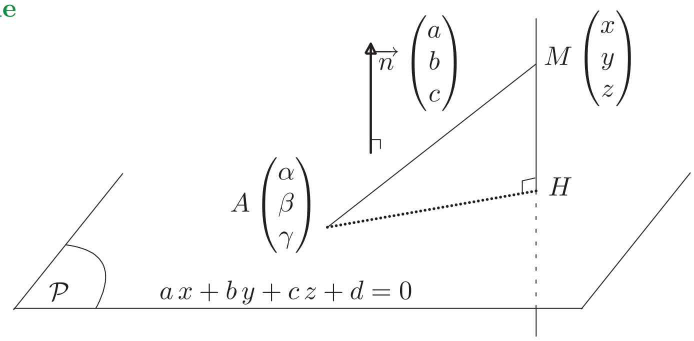
$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM} &= \underbrace{\overrightarrow{AH}} + \underbrace{\overrightarrow{HM}}\\ &= \overrightarrow{AH} + \frac{<\overrightarrow{AM}\,|\,\overrightarrow{n}>}{\|\overrightarrow{n}\|^2}\,\overrightarrow{n}\end{aligned}$$

2.2.3 Plan défini par une équation cartésienne

$$\boxed{d(M,\mathcal{P}) = \frac{a\,x+b\,y+c\,z+d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}$$

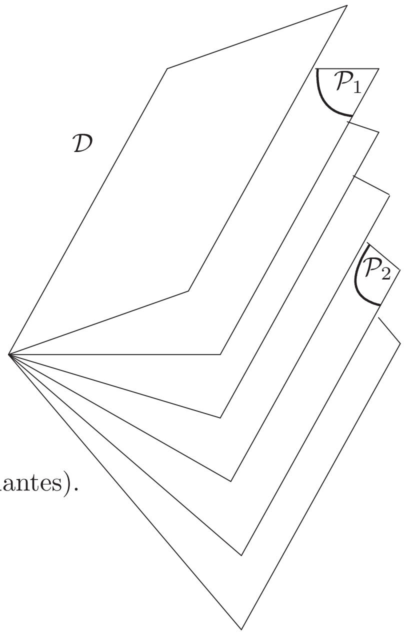
$$d(M,\mathcal{D}) = \frac{\left|\left\langle \begin{pmatrix} x-\alpha\\ y-\beta\\ z-\gamma\end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{pmatrix} a\\ b\\ c\end{pmatrix}\right\rangle\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

avec $a\,\alpha+b\,\beta+c\,\gamma+d=0$.



2.3 Faisceau de plans

2.3.1 Définition



Etant donné une droite $\mathcal{D}$, l'ensemble des plans qui contiennent $\mathcal{D}$ est le faisceau de plans d'arête $\mathcal{D}$.

2.3.2 Equation d'un plan, base d'un faisceau de plans

Soient $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ deux plans distincts du faisceau d'arête $\mathcal{D}$, d'équations cartésiennes respectives :

$$\begin{array}{ll}\mathcal{P}_1: & L_1(x,y)-\alpha=0\\ \mathcal{P}_2: & L_2(x,y)-\beta=0\end{array}$$ (où L_1 et L_2 sont des formes linéaires indépendantes).

Tout plan $\mathcal{P}$ du faisceau d'arête $\mathcal{D}$, a une équation cartésienne de la forme

$$\lambda\left(L_1(x,y,z)-\alpha\right)+\mu\left(L_2(x,y,z)-\beta\right)=0$$

et se note $\mathcal{P}=\lambda\,\mathcal{P}_1+\mu\,\mathcal{P}_2$.

Remarque. On dit que les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ constituent une base du faisceau de plans d'arête $\mathcal{D}$.

2.3.3 Utilisation simplifiée d'un faisceau de plans

Les plans du faisceau de plans de base $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$, qui sont distincts de $\mathcal{P}_1$, ont une équation cartésienne de la forme

$$\gamma\left(L_1(x,y,z)-\alpha\right)+\left(L_2(x,y,z)-\beta\right)=0$$

ce qui permet de n'introduire qu'un seul paramètre ($\gamma=\dfrac{\lambda}{\mu}$), si on accepte de se priver du plan $\mathcal{P}_1$.

3 Droites dans l'espace affine euclidien de dimension 3

Une droite, de l'espace affine de dimension 3, est l'intersection de deux hyperplans (plans), donc l'arête d'un faisceau de plans.
Une droite, de l'espace affine de dimension 3, est caractérisé à l'aide :

- de deux points distincts A et B
- d'un point A et un vecteur directeur $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB}$
- de deux équations cartésiennes indépendantes (arête d'un faisceau de plans)

$$\begin{cases} a_1\,x + b_1\,y + c_1\,z + d_1 = 0 & \text{plan } \mathcal{P}_1 \\ a_2\,x + b_2\,y + c_2\,z + d_2 = 0 & \text{plan } \mathcal{P}_2 \end{cases}$$

- d'équations paramétriques $M = A + \lambda\overrightarrow{v}$

3.1 Projection orthogonale d'un point sur une droite

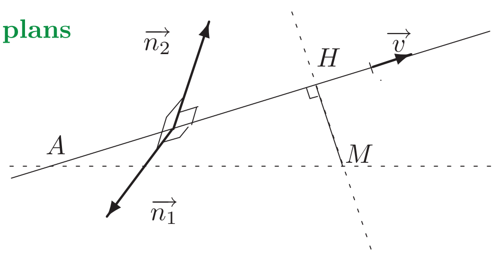
3.1.1 Droite définie par un point et un vecteur directeur

$$\boxed{p(M) = A + \frac{<\overrightarrow{AM}\,|\,\overrightarrow{v}>}{\|\overrightarrow{v}\|^2}\,\overrightarrow{v}}$$

$$\overrightarrow{AM} = \underbrace{\frac{<\overrightarrow{AM}\,|\,\overrightarrow{v}>}{\|\overrightarrow{v}\|^2}\,\overrightarrow{v}}_{\overrightarrow{AH}} + \underbrace{\frac{<\overrightarrow{AM}\,|\,\overrightarrow{n_1}>}{\|\overrightarrow{n_1}\|^2}\,\overrightarrow{n_1} + \frac{<\overrightarrow{AM}\,|\,\overrightarrow{n_2}>}{\|\overrightarrow{n_2}\|^2}\,\overrightarrow{n_2}}_{\overrightarrow{HM}}$$

3.1.2 Droite définie par les équations cartésiennes de deux plans

- plans perpendiculaires ...
- plans quelconques ...



3.2 Distance d'un point à une droite

3.2.1 Droite définie par un point et un vecteur directeur

$$\boxed{\left\|\overrightarrow{HM}\right\| = \frac{\left\|\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{v}\right\|}{\|\overrightarrow{v}\|}}$$

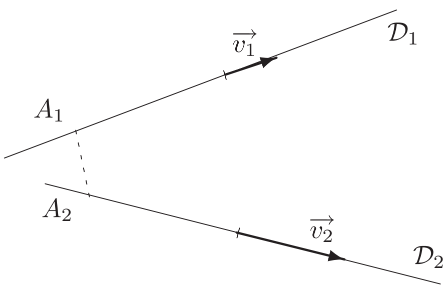
3.3 Droites coplanaires

3.3.1 Droites définies par un point et un vecteur directeur

$$\begin{cases} \mathcal{D}_1 \text{ passant par } A_1 \text{ et dirigée par } \overrightarrow{v_1} \\ \mathcal{D}_2 \text{ passant par } A_2 \text{ et dirigée par } \overrightarrow{v_2} \end{cases}$$

$\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont coplanaires si et seulement si

$$\det{}_{\mathcal{C}}\left(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{A_1A_2}\right) = 0$$



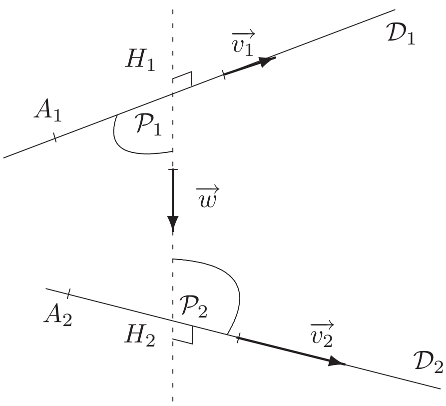
3.4 Perpendiculaire commune à deux droites non parallèles

3.4.1 Droites définies par un point et un vecteur directeur

$$\begin{cases} \mathcal{D}_1 \text{ passant par } A_1 \text{ et dirigée par } \overrightarrow{v_1} \\ \mathcal{D}_2 \text{ passant par } A_2 \text{ et dirigée par } \overrightarrow{v_2} \end{cases}$$

La perpendiculaire commune à $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ est la droite intersection des deux plans :

$$\begin{cases} \mathcal{P}_1 \text{ passant par } A_1 \text{ et dirigé par } \overrightarrow{v_1} \text{ et } \overrightarrow{v_1} \wedge \overrightarrow{v_2} \\ \mathcal{P}_2 \text{ passant par } A_2 \text{ et dirigé par } \overrightarrow{v_2} \text{ et } \overrightarrow{v_1} \wedge \overrightarrow{v_2} \end{cases}$$



3.5 Distance de deux droites

3.5.1 Droites définies par un point et un vecteur directeur

$$\boxed{d(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{A_1A_2}\right]\right|}{\|\overrightarrow{v_1} \wedge \overrightarrow{v_2}\|}}$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{H_1H_2} = \overrightarrow{H_1A_1} + \overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2H_2} \\ \left[\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{A_1A_2}\right] = <\overrightarrow{v_1} \wedge \overrightarrow{v_2}\,|\,\overrightarrow{A_1A_2}> \end{cases}$$

3.6 Droites passant par un point et tangentes à une quadrique

Ces droites sont les droites génératrices du cône qui intercepte sur la quadrique le contour apparent de la quadrique vu du point.

Exemple 3.6.0.1. Cône (Σ) dont les génératrices
$$\begin{cases} \text{passent par le point } S \text{ de coordonnées } (a,b,c)=(1,2,-1) \\ \text{sont tangentes à la quadrique (ellipsoïde) } (\Pi) \text{ d'équation } f(x,y,z)=0 \text{ où } f(x,y,z)=x^2+2\,y^2+z^2-1 \end{cases}$$

1. Méthode 1 (générale) : $M(x,y,z) \in (\Sigma)$ ssi $\quad \exists\,\lambda : \begin{cases} f\big(S+\lambda\,\overrightarrow{S\,M}\big)=0 \\ \overrightarrow{grad}\,f(S+\lambda\,\overrightarrow{S\,M}) \perp \overrightarrow{S\,M} \end{cases}$

$$\text{ssi } \exists\,\lambda : \begin{cases} \big(1+\lambda\,(x-1)\big)^2+2\,\big(2+\lambda\,(y-2)\big)^2+\big(-1+\lambda\,(z+1)\big)^2-1=0 \\ \big(1+\lambda\,(x-1)\big)\,(x-1)+\big(2+\lambda\,(y-2)\big)\,(y-2)+\big(-1+\lambda\,(z+1)\big)\,(z+1)=0 \end{cases}$$
$$\text{ssi } \exists\,\lambda : \begin{cases} (10-2\,x+x^2-8\,y+2\,y^2+2\,z+z^2)\,\lambda^2+(-20+2\,x-2\,z+8\,y)\,\lambda+9=0 \\ (-4\,y^2-2\,x^2-4\,z+4\,x+16\,y-20-2\,z^2)\,\lambda-2\,x+20-8\,y+2\,z=0 \end{cases}$$
$$\text{ssi } 4\,x^2+y^2+4\,z^2-4\,x\,y+x\,z+4\,y\,z+x+4\,y-z-5=0 \quad \text{(élimination (lourde) de } \lambda\text{).}$$

2. Méthode 2 (particulière). **C'est plus simple si on utilise le fait que** (Π) **est une quadrique** :

$M(x,y,z) \in (\Sigma)$ ssi la droite $\big(S,\overrightarrow{S\,M}\big)$ coupe (Π) en un point double.
ssi $\exists\,\lambda : S+\lambda\,\overrightarrow{S\,M}$ est un point double de (Π).
ssi l'équation en λ, $f\big(a+\lambda\,(x-a),b+\lambda\,(y-b),c+\lambda\,(z-c)\big)=0$ a une racine double.

L'équation $f\big(a+\lambda\,(x-a),b+\lambda\,(y-b),c+\lambda\,(z-c)\big)=0$ est une équation du second degré en λ :
$$(10-2\,x+x^2-8\,y+2\,y^2+2\,z+z^2)\,\lambda^2+(-20+2\,x-2\,z+8\,y)\,\lambda+9=0$$
de discriminant réduit $\Delta'=-32\,x^2-8\,x+32\,x\,y-8\,x\,z-32\,y-32\,z\,y+40+8\,z-8\,y^2-32\,z^2$.
On en déduit que : $\quad M(x,y,z) \in (\Sigma)$ ssi $4\,x^2+y^2+4\,z^2-4\,x\,y+x\,z+4\,y\,z+x+4\,y-z-5=0$.

3.7 Droites de direction donnée et tangentes à une quadrique

Ces droites sont les droites génératrices du cylindre qui intercepte sur la quadrique le contour apparent de la quadrique vu selon la direction.

Exemple 3.7.0.2. Cylindre (Σ) dont les génératrices
$$\begin{cases} \text{sont dirigées par } \overrightarrow{V}=\overrightarrow{i}+2\,\overrightarrow{j}-\overrightarrow{k} \\ \text{sont tangentes à la quadrique (ellipsoïde) } (\Pi) \text{ d'équation } f(x,y,z)=0 \text{ où } f(x,y,z)=x^2+2\,y^2+z^2-1 \end{cases}$$

1. Méthode 1 (générale) :

$$M(x,y,z) \in (\Sigma) \text{ ssi } \exists\,\lambda : \begin{cases} f\big(M+\lambda\,\overrightarrow{V}\big)=0 \\ \overrightarrow{grad}\,f(M+\lambda\,\overrightarrow{V}) \perp \overrightarrow{V} \end{cases}$$
$$\text{ssi } \exists\,\lambda : \begin{cases} 10\,\lambda^2+2\,\lambda\,(x+4\,y-z)+x^2+2\,y^2+z^2-1=0 \\ 2\,(x+\lambda)+8\,(y+2\,\lambda)-2\,(z-\lambda)=0 \end{cases}$$
$$\text{ssi } \exists\,\lambda : \begin{cases} 10\,\lambda^2+2\,\lambda\,(x+4\,y-z)+x^2+2\,y^2+z^2-1=0 \\ \lambda=-\dfrac{x+4\,y-z}{10} \end{cases}$$
$$\text{ssi } (x+4\,y-z)^2-10\,(x^2+2\,y^2+z^2-1)=0 \quad \text{(élimination (simple) de } \lambda\text{).}$$

2. Méthode 2 (particulière). **On utilise le fait que** (Π) **est une quadrique** :

$M(x,y,z) \in (\Sigma)$ ssi la droite $\big(M,\overrightarrow{V}\big)$ coupe (Π) en un point double.
ssi $\exists\,\lambda : M+\lambda\,\overrightarrow{V}$ est un point double de (Π).
ssi l'équation en λ, $f(x+\lambda,y+2\,\lambda,z-\lambda)=0$ a une racine double.

L'équation $f(x+\lambda,y+2\,\lambda,z-\lambda)=0$ est une équation du second degré en λ :
$$10\,\lambda^2+2\,\lambda\,(x+4\,y-z)+x^2+2\,y^2+z^2-1=0$$
dont le discriminant réduit est $\Delta'=(x+4\,y-z)^2-10\,(x^2+2\,y^2+z^2-1)$.
On en déduit que : $\quad M(x,y,z) \in (\Sigma)$ ssi $(x+4\,y-z)^2-10\,(x^2+2\,y^2+z^2-1)=0$.

< $\mathcal{FIN}$ >