Nappes paramétrées

Antoine MOTEAU antoine.moteau@wanadoo.fr

Table des matières

Nappes paramétrées.

L'espace affine euclidien est muni de son repère canonique orthonormal direct $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$.

Définition 0.0.1. Ouverts connexes dans $\mathbb{R}^n$

Un ouvert $\mathcal{O}$, non vide, est connexe si et seulement si

il n'existe pas d'ouverts $\mathcal{O}_1$ et $\mathcal{O}_2$ non vides disjoints tels que $\mathcal{O} = \mathcal{O}_1 \bigcup \mathcal{O}_2$

(intuitivement, il s'agit d'un ouvert en "un seul morceau").

1 Généralités sur les nappes paramétrées, de $E = \mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{F} = \mathbb{R}^3$

1.1 Définition

Soit Ω un ouvert connexe (en un seul morceau) de $\mathbb{R}^2$ et une application

$$\left(\begin{array}{llll} f: & \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (u,v) & \longmapsto & \overrightarrow{OM}(u,v) = f(u,v) \quad = x(u,v)\,\overrightarrow{i} + y(u,v)\,\overrightarrow{j} + z(u,v)\,\overrightarrow{k} \\ & & & \left(\text{ ou } M(u,v) = O + f(u,v)\right) \end{array}\right)$$

L'ensemble des points images d'un élément $(u,v) \in \Omega$ est une surface (nappe) paramétrée par la fonction f.

Remarque. En éliminant les paramètres u et v entre les équations $X = x(u,v), Y = y(u,v), Z = z(u,v)$, on obtient une équation cartésienne de la surface, sous la forme d'une relation liant les coordonnées (X,Y,Z) d'un point de la surface (dite **"équation cartésienne implicite"**).

Appellations usuelles :

- On réserve le mot "nappe" au cas des surfaces définies par un paramétrage de classe $\mathcal{C}^0$ sur un ouvert connexe (il s'agit de surfaces "en un seul morceau").
- Le mot "surface" est plutôt associé aux surfaces définies par une équation cartésiennes implicite (et il peut s'agir de surfaces en plusieurs morceaux disjoints).

1.2 Objectifs

- Représentation graphique en 3D, particularités (sommets, vallées . . .)
- Plans tangents, étude locale
- Intersection de deux nappes ...
- Arcs tracés sur une nappe . . . , coupes planes, représentation maillée

2 Représentation graphique

- On peut déterminer les intersections avec des plans parallèles à un plan de coordonnées et cumuler les projections de ces intersections sur le plan de coordonnées.
  Par exemple, on obtient ainsi les "cartes d'état-major", avec les **lignes de niveau**.
- En perspective
  - avec un ombrage
  - par un maillage (arcs tracés sur le support, à intervalles réguliers)
  - avec suppression des parties cachées (vue d'un point)

3 Arcs tracés sur une nappe paramétrée

Soit (Σ) une nappe paramétrée, de classe $\mathcal{C}^n$, $n \geqslant 1$, de paramétrage :

$$(u, v) \longmapsto M(u, v), \quad \text{défini et de classe } \mathcal{C}^n \text{ sur un ouvert connexe } \mathcal{U} \text{ de } \mathbb{R}^2$$

Définition 3.0.1.

Soit $t \longmapsto \big(u(t), v(t)\big)$ une application de classe $\mathcal{C}^n$ d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ vers $\mathcal{U}$.

L'arc spatial $(\Gamma) : t \longmapsto M\big(u(t), v(t)\big)$ est un arc paramétré de classe $\mathcal{C}^n$ sur I, dont le support est inclus dans le support de la nappe (Σ).

On dit que (Γ) est un arc tracé sur la nappe (Σ).

Remarque. On fera souvent les confusions $M \equiv M(t) \equiv M\big(u(t), v(t)\big)$ ..., levées par le contexte :

$$\frac{d\overrightarrow{M}}{dt} \;;\; \frac{\partial \overrightarrow{M}}{\partial u} \;;\; \frac{\partial \overrightarrow{M}}{\partial v} \qquad \text{ont des sens clairement distincts.}$$

Théorème 3.0.1. *Tangente à un arc tracé sur la nappe*

En tout point <u>régulier</u>, $M(t)$, de l'arc (Γ) tracé sur (Σ), la tangente en $M(t)$ a pour vecteur directeur :

$$\frac{d\overrightarrow{M}}{dt}(t) = \frac{\partial \overrightarrow{M}}{\partial u}\big(u(t), v(t)\big)\,\frac{d\,u}{dt}(t) + \frac{\partial \overrightarrow{M}}{\partial v}\big(u(t), v(t)\big)\,\frac{d\,v}{dt}(t) \qquad \left(\neq \overrightarrow{0}\right)$$

Si les vecteurs $\dfrac{\partial \overrightarrow{M}}{\partial u}(u, v)$ et $\dfrac{\partial \overrightarrow{M}}{\partial v}(u, v)$ sont libres, tout arc de classe $\mathcal{C}^1$, tracé sur (Σ), passant par $M(u, v)$ aura en ce point une tangente contenue dans le plan $\left(M(u, v)\,,\, \dfrac{\partial \overrightarrow{M}}{\partial u}(u, v)\,,\, \dfrac{\partial \overrightarrow{M}}{\partial v}(u, v)\right)$

4 Plan tangent à une nappe en un point, vecteur normal

Soit (Σ) une nappe paramétrée, de classe $\mathcal{C}^n$, $n \geqslant 1$, de paramétrage :

$$(u, v) \longmapsto M(u, v), \quad \text{défini et de classe } \mathcal{C}^n \text{ sur un ouvert connexe } \mathcal{U} \text{ de } \mathbb{R}^2$$

Définition 4.0.2.

Un point M de (Σ), de paramètres (u, v) est **régulier** si la famille $\left(\dfrac{\partial \overrightarrow{M}}{\partial u}(u, v)\,,\, \dfrac{\partial \overrightarrow{M}}{\partial v}(u, v)\right)$ est libre.

Si ces deux vecteurs sont liés, M est un **point non régulier**.
Si ces vecteurs sont <u>tous les deux nuls</u>, M est un **point critique**.

Définition 4.0.3.

Le plan tangent à (Σ), en un point $M(u, v)$ **régulier**, est le plan $\left(M(u, v)\,,\, \dfrac{\partial \overrightarrow{M}}{\partial u}(u, v)\,,\, \dfrac{\partial \overrightarrow{M}}{\partial v}(u, v)\right)$.

La nappe (Σ) a pour vecteur normal <u>unitaire</u>, en un point $M(u, v)$ **régulier**, le vecteur

$$\overrightarrow{n}(u, v) = \frac{\dfrac{\partial \overrightarrow{M}}{\partial u} \wedge \dfrac{\partial \overrightarrow{M}}{\partial v}}{\left\| \dfrac{\partial \overrightarrow{M}}{\partial u} \wedge \dfrac{\partial \overrightarrow{M}}{\partial v} \right\|_2}$$

(on a choisi un des deux vecteurs unitaires orthogonaux au plan tangent à (Σ) en $M(u, v)$).

Remarque. Le choix d'un vecteur normal unitaire (parmi les deux possibles) définit l'orientation du plan tangent.

Rappel : Equation cartésienne, dans un repère orthonormal direct, d'un plan (P) de $\mathbb{R}^3$,

- passant par le point A et dirigé par les vecteurs $\overrightarrow{U}$ et $\overrightarrow{V}$:

$$\begin{array}{lll} m(x,y,z) \in (P) & \textbf{ssi} & \left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{U}, \overrightarrow{V}\right) \text{ est une famille liée} \\ & \textbf{ssi} & det_{\mathcal{C}}\left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{U}, \overrightarrow{V}\right) = 0 \qquad \textbf{ssi} \cdots \quad a\,x + b\,y + c\,z + d = 0 \end{array}$$

- passant par le point A et orthogonal au vecteur $\overrightarrow{W}$ (non nul mais pas forcément unitaire) :

$$\begin{array}{lll} m(x,y,z) \in (P) & \textbf{ssi} & \overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{W} \\ & \textbf{ssi} & < \overrightarrow{AM} \,\middle|\, \overrightarrow{W} >= 0 \qquad \textbf{ssi} \cdots \quad a\,x + b\,y + c\,z + d = 0 \end{array}$$

5 Orientation d'une nappe

Soit (Σ) une nappe paramétrée, de classe $\mathcal{C}^n$, $n \geqslant 1$, de paramétrage :

$$(u,v) \longmapsto M(u,v), \quad \text{défini et de classe } \mathcal{C}^n \text{ sur un ouvert connexe } \mathcal{U} \text{ de } \mathbb{R}^2.$$

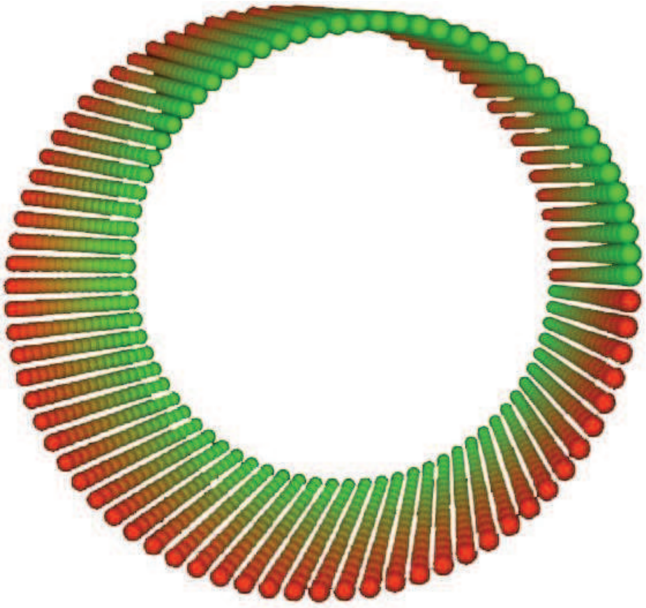
Si on choisit d'appliquer la formule $\overrightarrow{n}(u,v) = \dfrac{\dfrac{\partial \overrightarrow{M}}{\partial u} \wedge \dfrac{\partial \overrightarrow{M}}{\partial v}}{\left\| \dfrac{\partial \overrightarrow{M}}{\partial u} \wedge \dfrac{\partial \overrightarrow{M}}{\partial v} \right\|_2}$, dans l'ordre (u,v) des paramètres, qui donne l'un des deux vecteurs unitaires orthogonaux au plan tangent à (Σ) en $M(u,v)$)), pour calculer le vecteur normal unitaire en un point régulier, on dit que ce choix **oriente localement la nappe**.

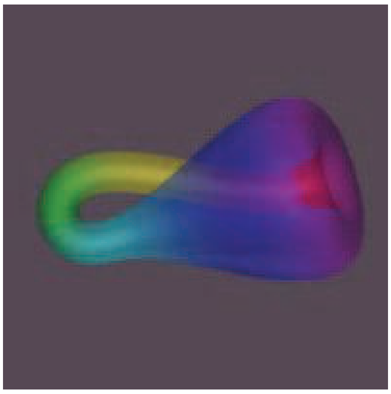
Pour une nappe de classe $\mathcal{C}^1$ dont tous les points sont réguliers,

- Si, pour tout point ayant plusieurs valeurs de paramètres possibles, on obtient (avec la même formule) toujours le même vecteur normal unitaire, la nappe est dite (globalement) **orientable**.

  Il existe deux orientations possibles pour une surface orientable, selon que l'on choisit la formule énoncée ci-dessus ou son opposée.

- S'il existe des points ayant plusieurs valeurs de paramètres possibles, pour lesquels on obtient (avec la même formule) des vecteurs normaux unitaires différents (donc opposés) selon les valeurs des paramètres, la surface est dite **non orientable**.
  C'est le cas, par exemple, du "ruban de Mobius", des "bouteilles de Klein" ... qui sont non orientables.





6 Exemples

6.1 Hyperboloïde de révolution à une nappe, d'axe Oz

$$\left\{\begin{array}{lll} x = R\,\cos\theta & -u\,\sin\alpha\,\sin\theta \\ y = R\,\sin\theta & +u\,\sin\alpha\,\cos\theta \\ z = & +u\,\sin\alpha \end{array}\right. \quad \left|\begin{array}{l} \text{paramétré par } u \in \mathbb{R} \text{ et } \theta \in [0, 2\,\pi[\\ \\ \text{dépendant des constantes } R > 0 \text{ et } \alpha \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[\end{array}\right.$$

- Vérifier que la normale à la surface rencontre toujours l'axe Oz.
- Donner une équation cartésienne (implicite) de cette surface.
- Identifier la coupe de la surface par chacun des plans de coordonnées.
- ...

6.2 Surface de Mobius, Ruban de Mobius

La surface de Mobius est la surface engendrée par une droite variable, dépendant du paramètre θ,

$$\left\{\begin{array}{l} \text{située dans le plan d'équation } x\,\sin\theta - y\,\cos\theta = 0 \ , \\ \text{rencontrant le cercle d'équations } z = 0 \text{ et } x^2 + y^2 = R^2 \ , \\ \text{et faisant l'angle } \dfrac{\theta}{2} \text{ avec l'axe } Oz \ . \end{array}\right.$$

On vérifie que la surface de Mobius a pour représentation paramétrique :

$$\left\{\begin{array}{lll} x = R\,\cos\theta & +u\,\cos\dfrac{\theta}{2}\,\cos\theta \\ y = R\,\sin\theta & +u\,\cos\dfrac{\theta}{2}\,\sin\theta \\ z = & +u\,\sin\dfrac{\theta}{2} \end{array}\right. \quad \left|\begin{array}{l} \text{paramétré par } u \in \mathbb{R} \text{ et } \theta \in [0, 4\,\pi[\\ \\ \text{dépendant de la constante } R > 0 \end{array}\right.$$

Le ruban de Mobius de largeur $2\,a$ est la portion de surface obtenue lorsque l'on limite le paramètre u à l'intervalle $[-a, +a]$.

On fixe la formule de calcul du vecteur unitaire, $\vec{n}(u, \theta)$, en un point $M(u, \theta)$, (en prenant la formule énoncée dans la définition ci-dessus, dans l'ordre des paramètres u et θ).

- Comparer les points $M(u, \theta)$ et $M(-u, \theta + 2\pi)$.
- Comparer $\vec{n}(u, \theta)$ et $\vec{n}(-u, \theta + 2\pi)$. **Conclure**.

6.3 Paramétrage de quadriques

- Sans utiliser de racines carrées, donner une représentation paramétrique de l'ellipsoïde d'équation cartésienne implicite :
$$2\,x^2 + 3\,y^2 + 4\,z^2 = 8$$
- Sans utiliser de racines carrées, donner une représentation paramétrique de l'hyperboloïde à une nappe, d'équation cartésienne implicite :
$$2\,x^2 + 3\,y^2 - 4\,z^2 = 8$$
- Soit l'hyperboloïde à deux nappes, d'équation cartésienne implicite :
$$2\,x^2 + 3\,y^2 - 4\,z^2 = -8$$
Vérifier que cette surface est composée de deux morceaux (nappes) et, sans utiliser de racines carrées, donner un paramétrage de chacun des morceaux (nappes).
- Donner une représentation paramétrique du paraboloïde elliptique, d'équation cartésienne implicite :
$$2\,x^2 + 3\,y^2 - 4\,z = 8$$
- Donner une représentation paramétrique du paraboloïde hyperbolique, d'équation cartésienne implicite :
$$2\,x^2 + y - 4\,z^2 = 8$$

$< \mathcal{FIN} >$