Espaces euclidiens

Antoine MOTEAU antoine.moteau@wanadoo.fr

Table des matières

Espaces euclidiens.

1 Introduction

Les espaces vectoriels euclidiens sont les espaces vectoriels préhilbertiens réels, de dimension finis.

Par conséquent, on retrouve toutes les notations et toutes les propriétés relatives aux préhilbertiens (réels) :

- Produit scalaire
- Inégalité de Cauchy-schwarz
- Inégalité de Minkowsky (triangulaire)
- norme euclidienne
- Relations de polarisation
- Orthogonalité
- Familles orthogonales
- Procédé d'orthonormalistion de Schmidt
- Théorème de projection orthogonale
- ...

complétées par des propriétés spécifiques liées à la dimension finie :

- Base orthonormales
- Décomposition sur une base orthonormale
- Supplémentaire orthogonal d'un sous ev
- ...

On s'attachera ici au développement de propriétés spécifiques, à des notations particulières.

2 Base orthornormales

2.1 Existence et construction

1. Un espace vectoriel euclidien admet des bases orthonormales.
2. Une base orthonormale peut être construire
   - à l'aide du procédé de Schmidt appliqué à une base ordinaire (ce qui est assez lourd)
   - selon des méthodes directes dans le cas de certains produits scalaires.

2.2 Exemples

Exemple 2.2.0.1. Polynômes de Lagrange relatifs à $n+1$ réels distincts $a_0, \cdots, a_n$.

$\mathbb{R}_n[X]$ est muni du produit scalaire : $\phi : (P, Q) \longmapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(a_k)\, Q(a_k)$

- Pour $i = 0 \cdots n$, le i-ième polynôme de Lagrange, relatif aux points $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n$, est le polynôme L_i, défini par :

$$L_i(X) = \frac{\displaystyle\prod_{\substack{0 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq i}} (X - a_j)}{\displaystyle\prod_{\substack{0 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq i}} (a_i - a_j)}$$

- La famille $\Big(L_0, L_1, L_2, \cdots, L_n\Big)$ est une base ϕ-orthonormale de $\mathbb{R}_n[X]$:
  - $\forall\, i = 0 \cdots n\,,\ \forall\, j = 0 \cdots n\,,\ L_i(a_j) = \delta_{i,j}$ (symbole de Krönecker) ;
  - et on en déduit que $\Big(L_0, L_1, L_2, \cdots, L_n\Big)$ est une famillle ϕ-orthogonale (de $n+1$ vecteurs).
- On peut aussi vérifier le caractère générateur de la famille $\Big(L_0, L_1, L_2, \cdots, L_n\Big)$:

$$\text{Pour } P \in \mathbb{R}_n[X]\ ,\ P(X) = \sum_{i=0}^{n} P(a_i)\, L_i(X).$$

- Etant donnée une fonction f, définie sur un intervalle contenant $a_0, a_1, \cdots, a_n$, le polynôme $P = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} f(a_i)\, L_i$ est le polynôme de degré au plus n qui coïncide avec f sur $\{a_0, a_1, \cdots, a_n\}$.

P est le polynôme d'interpolation de Lagrange de f, relativement aux $n+1$ points $a_0, a_1, \cdots, a_n$.

Exemple 2.2.0.2. Polynômes de Tchebychev.

$R_n[X]$ est muni du produit scalaire : $\psi : (P,Q) \longmapsto \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_{-1}^{1} \dfrac{P(t)\,Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt,$

- Pour $k = 0 \cdots n$, le k-ième polynôme de Tchebychev est défini par :

$$T_k(X) = \cos\big(k\ \arccos(X)\big) \qquad (\text{lorsque } X \in [-1,1])$$

- Les polynômes de Tchebychev sont aussi définis par la récurrence linéaire double :

$$\begin{cases} T_0(X) = 1 \text{ et } T_1(X) = X \\ \forall\, k > 0,\ T_{k+1}(X) = 2\,X\,T_k(X) - T_{k-1}(X) \end{cases}$$

La famille $\left(\dfrac{T_0}{\sqrt{2}}, T_1, T_2, \cdots, T_n\right)$ est une base ψ-orthonormale de $\mathbb{R}_n[X]$.

2.3 Décomposition dans une base orthonormale, produit scalaire

Soit $\big(E, <\,|\,>\big)$ un espace euclidien de base orthonormale $\big(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \cdots, \vec{e_n}\big)$.

- Pour $\vec{u} \in E$, $\quad \vec{u} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} < \vec{e_i}\,|\,\vec{u} > \vec{e_i}$

- Pour $\vec{u}, \vec{v} \in E$, $\quad < \vec{u}\,|\,\vec{v} >= \displaystyle\sum_{i=1}^{n} < \vec{e_i}\,|\,\vec{u} >< \vec{e_i}\,|\,\vec{v} >$

ide, si $\vec{u} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} u_i\,\vec{e_i}$ et $\vec{v} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} v_i\,\vec{e_i}$ alors $< \vec{u}\,|\,\vec{v} >= \displaystyle\sum_{i=1}^{n} u_i\,v_i$

c'est une redite du cours préhilbertien ... et on peut détailler la deuxième partie :

$$\begin{aligned}
< \vec{u}\,|\,\vec{v} > &=< \sum_{i=1}^{n} u_i\,\vec{e_i} \Big| \sum_{i=1}^{n} v_i\,\vec{e_i} >=< \sum_{i=1}^{n} u_i\,\vec{e_i} \Big| \sum_{j=1}^{n} v_j\,\vec{e_j} > \qquad (\text{différencier les indices}) \\
&= \sum_{j=1}^{n}\left(v_j < \sum_{i=1}^{n} u_i\,\vec{e_i} \Big| \vec{e_j} >\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(v_j \sum_{i=1}^{n}\left(u_i < \vec{e_i} \Big| \vec{e_j} >\right)\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n}\left(v_j \sum_{i=1}^{n} u_i\,\delta_{i,j}\right) = \sum_{j=1}^{n}(v_j\,u_j) = \sum_{i=1}^{n} u_i\,v_i
\end{aligned}$$

3 Supplémentaire orthogonal

Théorème 3.0.1.

Pour F, sous espace vectoriel de l'espace euclidien $(E, <\,|\,>)$,

le supplémentaire orthogonal de F est le sous-espace vectoriel

$$F^\perp = \{v \in E\ :\forall\, u \in F,\ < u\,|\,v >= 0\} \qquad (\textit{parfois noté } F^o)$$

et on a :

$$E = F \oplus F^\perp \quad ; \quad \dim E = \dim F + \dim F^\perp \quad ; \quad \left(F^\perp\right)^\perp = F$$

Seule nouveauté par rapport aux préhilbertiens : $E = F \oplus F^\perp$, $\dim F^\perp$ et la relation $\left(F^\perp\right)^\perp = F$.

Preuve. On a déjà vu que $F \cap F^\perp = \{0\}$ et que $v - p_F(v) \in F^\perp$. Il reste à montrer que $E = F + F^\perp$.

1. Pour $v \in E$, on a $v = p_F(v) + \big(v - p_F(v)\big)$, $v \in F + F^\perp$. Cela prouve que $E = F + F^\perp$.
2. $\dim E = \dim F + \dim F^\perp$ est la conséquence immédiate de $E = F \oplus F^\perp$.
3. On montre que $F \subset \left(F^\perp\right)^\perp$ et, comme $\dim F = \dim\left(\left(F^\perp\right)^\perp\right)$, on a l'égalité.

4 Equations cartésiennes d'un sous-espace vectoriel

4.1 Equation cartésienne d'un hyperplan

$(E, <\,|\,>)$ est un espace euclidien de base orthonormale $\mathcal{C} = \left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \cdots, \overrightarrow{e_n}\right)$.

Soit F un hyperplan dont l'orthogonal est engendré par le vecteur non nul $\overrightarrow{w} = \sum_{k=1}^{n} a_k\, \overrightarrow{e_k}$.

Relativement à la base orthonormale $\mathcal{C}$, F a pour équation cartésienne :

$$\sum_{k=1}^{n} x_k\, \overrightarrow{e_k} \in F \iff \sum_{k=1}^{n} a_k\, x_k = 0$$

Egalement, F est le noyau de la forme linéaire :

$$\varphi_{\overrightarrow{w}} : \begin{cases} E & \longrightarrow \quad \mathbb{R} \\ \overrightarrow{v} = \sum_{k=1}^{n} x_k\, \overrightarrow{e_k} & \longmapsto \quad < \overrightarrow{w} \mid \overrightarrow{v} >= \sum_{k=1}^{n} a_k\, x_k \end{cases}$$

F est de dimension $n-1$, donc $F^\perp$ est de dimension 1.

$$\overrightarrow{v} = \sum_{k=1}^{n} x_k\, \overrightarrow{e_k} \in F \iff \forall\, u \in F^\perp,\ < \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{v} >= 0 \qquad (\text{ et } \overrightarrow{u} \in F^\perp \iff \exists\, \lambda : \overrightarrow{u} = \lambda\, \overrightarrow{w})$$

$$\iff < \overrightarrow{w} \mid \overrightarrow{v} >= 0 \iff \sum_{k=1}^{n} a_k\, x_k = 0$$

4.2 Equations cartésiennes d'un sous-espace de dimension p

Un sous espace F de dimension p est l'intersection de $n-p$ hyperplans indépendants $H_1, H_2, \cdots H_{n-1}$.
Si chaque hyperplan H_k est le noyau de la forme linéaire ϕ_k, F est défini par les $n-p$ relations :

$$\overrightarrow{v} \in F \iff \forall\, k = 1 \cdots n-p,\ \phi_k(\overrightarrow{v}) = 0$$

Soit $(E, <\,|\,>)$ un espace euclidien de dimension n, muni de la base orthonormale $\mathcal{C} = \left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \cdots, \overrightarrow{e_n}\right)$ et F un sous espace de dimension p, intersection de $n-p$ hyperplans indépendants $H_1, H_2, \cdots H_{n-1}$.
Pour $k = 1 \cdots n-p$, soit $\overrightarrow{w_k}$ un vecteur non nul de $H_k^\perp$.

- F est défini, relativement à la base $\mathcal{C}$, par le système (minimal) des $n-p$ équations cartésiennes :

$$\overrightarrow{v} \in F \iff \forall\, k = 1 \cdots n-p,\ < \overrightarrow{w_k} \mid \overrightarrow{v} >= 0 \qquad (\text{système de rang } n-p)$$

- La famille $\left(\overrightarrow{w_k}\right)_{k=1\cdots n-p}$ est une base de $F^\perp$

Remarque. Si un sous espace de dimension p est défini par plus de $n-p$ équations cartésiennes, cela signifie qu'il y a des équations superflues (redondantes).

Exemple 4.2.0.3. Dans $\mathbb{R}^3$, muni de sa base canonique $\mathcal{C} = \left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ (orthonormale),

Soit F le sous espace, d'équations cartésiennes relativement à $\mathcal{C}$: $\left(x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j} + z\,\overrightarrow{k} \in F \iff\right)$

$$\begin{cases} x + 2\,y + 3\,z = 0 \\ x - 2\,y + \ z = 0 \end{cases}$$

(avec deux équations, moi y a pas besoin être grand sorcier pour voir si elles sont dépendantes ou non)

- F est de dimension $3-2=1$
- $\dim F^\perp = 2$, $F^\perp$ a pour base $\left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}\right)$ et $F^\perp = Vect(\overrightarrow{i} + 2\,\overrightarrow{j} + 3\,\overrightarrow{k}\,,\ \overrightarrow{i} - 2\,\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k})$.
- Puisque $\dim F = 1$, on pourra trouver une base de F avec le produit vectoriel (voir ci-dessous)

4.3 D'un sous-espace à son orthogonal et réciproquement

Soit F un sous-espace de l'espace euclidien $(E, <\ |\ >)$.

- F est défini par le système des q équations cartésiennes : $\overrightarrow{v} \in F \Longleftrightarrow \forall k = 1 \cdots q,\ < \overrightarrow{w_k} \,|\, \overrightarrow{v} >= 0$ si et seulement si la famille $\left(\overrightarrow{w_k}\right)_{k=1\cdots q}$ est une famille génératrice de $F^{\perp}$.

  (et F est de dimension $n-q$ si et seulement si la famille $\left(\overrightarrow{w_k}\right)_{k=1\cdots q}$ est libre).

- $F^{\perp}$ est défini par le système des p équations cartésiennes : $\overrightarrow{w} \in F^{\perp} \Longleftrightarrow \forall k = 1 \cdots p,\ < \overrightarrow{v_k} \,|\, \overrightarrow{v} >= 0$ si et seulement si la famille $\left(\overrightarrow{v_k}\right)_{k=1\cdots p}$ est une famille génératrice de F.

  (et $F^{\perp}$ est de dimension $n-p$ si et seulement si la famille $\left(\overrightarrow{v_k}\right)_{k=1\cdots p}$ est libre).

Puisque $\left(F^{\perp}\right)^{\perp} = F$, la deuxième partie est une redite de la première.

Exemple 4.3.0.4. Dans $\mathbb{R}^4$, muni de sa base canonique $\mathcal{C} = \left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}, \overrightarrow{\ell}\right)$ (orthonormale),

Soit F le sous-espace, de système d'équations cartésiennes relativement à $\mathcal{C}$:

$$(1) \quad \left\{\begin{array}{rrrrl} x & +2\,y & +2\,z & -t & =0 \\ x & -3\,y & -z & +t & =0 \\ x & -13\,y & -7\,z & +5\,t & =0 \end{array}\right.$$

(avec trois équations, toi y en a être grand sorcier si tu vois qu'elles sont dépendantes ou non)

1. la famille $\left(\begin{pmatrix}1\\2\\2\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-3\\-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-13\\-7\\5\end{pmatrix}\right)$ est génératrice de $F^{\perp}$ (moyennement intéressant).
2. en résolvant le système (1), on trouve : $\dim F = 2$ et $F = Vect\left(\begin{pmatrix}1\\2\\0\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\4\end{pmatrix}\right)$
3. donc, $\dim F^{\perp} = 4-2 = 2$ et $F^{\perp}$ a pour système (minimal) d'équation cartésiennes :
   $$(2) \quad \left\{\begin{array}{rrrrl} x & +2\,y & & +5\,t & =0 \\ & y & +z & +4\,t & =0 \end{array}\right.$$
4. du système (2), on déduit directement que la famille $\left(\begin{pmatrix}1\\2\\0\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\4\end{pmatrix}\right)$ est génératrice de F
5. en résolvant le système (2), on trouve : $\dim F^{\perp} = 2$ et $F^{\perp} = Vect\left(\begin{pmatrix}3\\-4\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-1\\1\\0\end{pmatrix}\right)$
6. donc, $\dim F = 4-2 = 2$ et F a pour système (minimal) d'équation cartésiennes :
   $$(3) \quad \left\{\begin{array}{rrrrl} 3\,x & -4\,y & & +t & =0 \\ 2\,x & -y & +z & & =0 \end{array}\right.$$

Exemple 4.3.0.5. Dans $\mathbb{R}^4$, muni de sa base canonique $\mathcal{C} = \left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}, \overrightarrow{\ell}\right)$ (orthonormale),

Soit G le sev engendré par la famille $\left(\begin{pmatrix}1\\3\\-1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\9\\-7\\11\end{pmatrix}\right)$

$G^{\perp}$ a pour système d'équation cartésiennes : $\quad (1) \left\{\begin{array}{rrrrl} x & +3\,y & -z & +2\,t & =0 \\ 2\,x & +y & +z & -t & =0 \\ -x & +9\,y & -7\,z & +11\,t & =0 \end{array}\right.$

En résolvant ce système, on trouve : $\dim G^{\perp} = 2$ et $G^{\perp} = Vect\left(\begin{pmatrix}1\\0\\-5\\-3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-5\\-4\end{pmatrix}\right)$.

$\dim G = 4-2 = 2$ et G a pour système (minimal) d'équation cartésiennes : $\quad (2) \left\{\begin{array}{rrrrl} x & & -5\,z & -3\,t & =0 \\ & y & -5\,z & -4\,t & =0 \end{array}\right.$

5 Changement de base, orientation

5.1 Ecriture matricielle du produit scalaire

Théorème 5.1.1.

Soit $(E, <\,|\,>)$ un espace euclidien de dimension n, de base $\mathcal{B} = \left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \cdots, \overrightarrow{e_n}\right)$ quelconque.

La matrice associée au produit scalaire $<\,|\,>$, relativement à la base $\mathcal{B}$, est la matrice

$$A = \left(<\overrightarrow{e_i}\,|\,\overrightarrow{e_j}>\right)_{i,j=1\cdots n} \qquad \text{(par définition).}$$

- *A est symétrique et régulière (ide, inversible)*
- *Pour $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, de matrice colonne de composantes U et V relativement à $\mathcal{B}$,*

$$<\overrightarrow{u}\,|\,\overrightarrow{v}> = {}^tU\,A\,V$$

- *si $\mathcal{B}$ est orthonormale, alors A est la matrice identité.*

Preuve.

- La symétrie de A provient de la symétrie du produit scalaire.
  La régularité de A sera une conséquence du théorème de changement de base énoncé ci-dessous.
- Ecriture $<\overrightarrow{u}\,|\,\overrightarrow{v}> = {}^tU\,A\,V$: pour $\overrightarrow{u} = \sum_{i=1}^{n} u_i\,\overrightarrow{e_i}$ et $\overrightarrow{v} = \sum_{i=1}^{n} v_i\,\overrightarrow{e_i}$,

$$<\overrightarrow{u}\,|\,\overrightarrow{v}> = <\sum_{i=1}^{n} u_i\,\overrightarrow{e_i}\,\Big|\,\sum_{i=1}^{n} v_i\,\overrightarrow{e_i}> = <\sum_{i=1}^{n} u_i\,\overrightarrow{e_i}\,\Big|\,\sum_{j=1}^{n} v_j\,\overrightarrow{e_j}> \qquad \text{(différencier les indices)}$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\left(v_j <\sum_{i=1}^{n} u_i\,\overrightarrow{e_i}\,\Big|\,\overrightarrow{e_j}>\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(v_j \sum_{i=1}^{n}\left(u_i <\overrightarrow{e_i}\,\Big|\,\overrightarrow{e_j}>\right)\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} u_i\left(\sum_{j=1}^{n} <\overrightarrow{e_i}\,\Big|\,\overrightarrow{e_j}> v_j\right) = \left(u_1, u_2, \cdots, u_n\right)\begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} <\overrightarrow{e_1}\,\Big|\,\overrightarrow{e_j}> v_j \\ \sum_{j=1}^{n} <\overrightarrow{e_2}\,\Big|\,\overrightarrow{e_j}> v_j \\ \cdots \\ \sum_{j=1}^{n} <\overrightarrow{e_n}\,\Big|\,\overrightarrow{e_j}> v_j \end{pmatrix} = {}^tU\,A\,V$$

- Le cas où $\mathcal{B}$ est orthonormale est immmédiat.

Théorème 5.1.2. *(effet d'un changement de base sur la matrice associée à un produit scalaire)*

Soit $(E, <\,|\,>)$ un espace euclidien de dimension n.

Si $\begin{cases} A \text{ est la matrice associée à } <\,|\,> \text{ relativement à la base } \mathcal{E} = \left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \cdots, \overrightarrow{e_n}\right) \\ B \text{ est la matrice associée à } <\,|\,> \text{ relativement à la base } \mathcal{F} = \left(\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \cdots, \overrightarrow{f_n}\right) \\ P \text{ est la matrice de passage de } \mathcal{E} \text{ à } \mathcal{F} \end{cases}$

alors $B = {}^tP\,A\,P$

Preuve.

En notant U (V) la matrice colonne des composantes de $\overrightarrow{u}$ (de $\overrightarrow{v}$) dans $\mathcal{E}$ et U' (V') la matrice colonne des composantes de $\overrightarrow{u}$ (de $\overrightarrow{v}$) dans $\mathcal{F}$, on a $U = P\,U'$ et $V = P\,V'$.
Alors ${}^tU'\,B\,V' = <\overrightarrow{u}\,|\,\overrightarrow{v}> = {}^tU\,A\,V = {}^t\left(P\,U'\right)A\left(P\,V'\right) = {}^tU'\left({}^tP\,A\,P\right)V'$ et comme cette relation est vraie quelque soient U' et V', on en déduit que $B = {}^tP\,A\,P$.
Conséquence : en prenant $\mathcal{F}$ est orthonormée, on a $B = I$ d'où $1 = \det\left({}^tP\,A\,P\right) = (\det(P))^2 \det A$, ce qui prouve que A est inversible (fin de preuve du théorème précédent).

Théorème 5.1.3. *(produit scalaire défini par la matrice associée dans une base donnée)*

Soit $(E, <\,|\,>)$ *un espace vectoriel de dimension* n*, muni d'une base* $\mathcal{B} = \left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \cdots, \overrightarrow{e_n}\right)$.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

L'application $\phi : \begin{cases} E \times E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) & \longmapsto & {}^tU\,A\,V \end{cases}$

(où U *et* V *sont les matrices colonnes des composantes de* $\overrightarrow{u}$ *et* $\overrightarrow{v}$ *dans* $\mathcal{B}$*)*

est un produit scalaire dans E *<u>si et seulement si</u>* A *est symétrique, définie positive, c'est à dire :*

- A *est symétrique*
- *les valeurs propres de* A *sont strictement positives*

<u>Preuve</u>.

- Symétrique est une condition nécessaire
- On verra plus tard que les matrices symétriques réelles sont diagonalisables dans $\mathbb{R}$.

5.2 Changement de base orthonormale

Théorème 5.2.1.

Soit $(E, <\,|\,>)$ *un espace euclidien de dimension* n.

Si P *est la matrice de passage d'une base orthonormale* $\mathcal{B}_1$ *à une autre base orthonormale* $\mathcal{B}_2$*, alors*

- ${}^tP = P^{-1}$ *(*P *est une matrice orthogonale)*
- $\det P = +1$ *ou* $\det P = -1$

- *Les colonnes de* P*, interprétées comme des vecteurs de* $\mathbb{R}^n$*, forment une base orthonormale de* $\mathbb{R}^n$ *pour son produit scalaire canonique*
- *Les lignes de* P*, interprétées comme des vecteurs de* $\mathbb{R}^n$*, forment une base orthonormale de* $\mathbb{R}^n$ *pour son produit scalaire canonique*

<u>Preuve</u>.

- Soit A_1 la matrice associée au produit scalaire dans la base $\mathcal{B}_1$ et A_2 la matrice associée au produit scalaire dans la base $\mathcal{B}_2$. On vient de voir que $A_2 = {}^tP\,A_1\,P$ (théorème de changement de base). Or $A_1 = A_2 = I_n$ et on en déduit que ${}^tP\,P = I_n$.
- $\det {}^tP = \det P$, d'où $1 = \det(I) = \det\left({}^tP\,P\right) = \left(\det P\right)^2 = 1$ et $\det P \in \mathbb{R}$.
- La deuxième partie vient de l'identification de E à $\mathbb{R}^n$ et de l'interprétation des produits matriciels ${}^tP\,P = I$ et $P\,{}^tP = I$.

5.3 Orientation

Définition 5.3.1.

Soit $(E, <\,|\,>)$ un espace euclidien de dimension n.

- Deux bases orthonormales $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ sont de même orientation si le déterminant de la matrice de passage de l'une à l'autre a pour déterminant $+1$.

  La relation "de même orientation", qui est une relation d'équivalence dans l'ensemble des bases orthonormales de E, partage cet ensemble en deux classes.

- Orienter E, c'est choisir une des deux classes (dite "directe") dont les éléments seront qualifiés de "bases orthonormales directes" et ne travailler qu'avec des bases de la classe directe.

  De façon courante, le choix s'effectue en définissant la base orthonormale la plus naturelle comme directe.

6 Produit vectoriel (en dimension 3)

Définition 6.0.2.

Soit $(E, <\mid>)$ un espace euclidien orienté de dimension 3.
Le produit vectoriel de deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ de E est l'unique vecteur $\overrightarrow{w}$ tel que :
quelque soit la base $\mathcal{B}$ orthonormale directe, quelque soit $\overrightarrow{e} \in E$, $\det_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{e}) =< \overrightarrow{w} \mid \overrightarrow{e} >$.

- Le produit vectoriel de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est noté $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$.
- Si $\mathcal{B} = (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ est une base orthonormale directe,

$$\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \det_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{i})\ \overrightarrow{i} + \det_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{j})\ \overrightarrow{j} + \det_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{k})\ \overrightarrow{k}$$

$\det_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{e})$ est aussi appelé produit mixte des vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{e}$, pris dans cet ordre,
avec la notation : $\det_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{e}) = \left[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{e}\right]$.

Remarque. Justificatifs :

- $\overrightarrow{e} \longmapsto \det_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{e})$ est une forme linéaire, qui s'écrit $\overrightarrow{e} \longmapsto < \overrightarrow{w} \mid \overrightarrow{e} >$ avec $\overrightarrow{w}$ unique.
- L'indépendance du choix de la base directe vient de la formule de changement de base directe :

$$\det_{\mathcal{F}}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{e}) = \det_{\mathcal{F}}(\mathcal{B})\ \det_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{e}) \quad \text{où} \quad \det_{\mathcal{F}}(\mathcal{B}) = +1$$

- Avec $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$, comme $\overrightarrow{w} =< \overrightarrow{w} \mid \overrightarrow{i} > \overrightarrow{i} + < \overrightarrow{w} \mid \overrightarrow{j} > \overrightarrow{j} + < \overrightarrow{w} \mid \overrightarrow{k} > \overrightarrow{k}$, on a ...

Théorème 6.0.1. *(propriétés)*

- *Bilinéarité du produit vectoriel* $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \longmapsto \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$.
- *Orthogonalité :* $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} \perp \overrightarrow{u}$ *et* $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} \perp \overrightarrow{v}$.
- $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{e}] =< \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} \mid \overrightarrow{e} >$.
- *Formule du double produit vectoriel :* $\overrightarrow{u} \wedge (\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w}) = \left(< \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{w} >\right) \overrightarrow{v} - \left(< \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{v} >\right) \overrightarrow{w}$.

Preuve.

- $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \longmapsto \det_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{i})\ \overrightarrow{i} + \det_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{j})\ \overrightarrow{j} + \det_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{k})\ \overrightarrow{k}$ est bilinéaire.
- $< \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} \mid \overrightarrow{u} >= \det_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}) = 0$ et de même pour $\overrightarrow{v}$.
- $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{e}] = \det_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{e}) =< \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{e} >$ par définition.
- par le calcul ... (et c'est un peu lourd)

Exemple 6.0.0.6. Dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $\mathcal{C} = (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ orthonormale. directe

1. $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} -2/3 \\ 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$ sont deux vecteurs orthogonaux et de norme 1.
   $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ -2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$ et $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ est une base orthonormale directe de $\mathbb{R}^3$.
2. Soit $F = Vect(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ avec $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.
   $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$ est une base de $F^{\perp}$ et F a pour équation cartésienne $5\,x - 3\,y - z = 0$.
   (par contre $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ n'est pas une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$)

7 Symétries orthogonales, projecteurs orthogonaux

7.1 Expression générale

Théorème 7.1.1.

Soit F un sous espace vectoriel non réduit à $\{0\}$de l'espace euclidien $(E, <\,|\,>)$.

On prend $\begin{cases} (\overrightarrow{f_i})_{i=1\cdots p} & \text{une base } \underline{\text{orthonormale}} \text{ de } F \\ (\overrightarrow{f_i})_{i=p+1\cdots n} & \text{une base } \underline{\text{orthonormale}} \text{ de } F^\perp. \end{cases}$

- *Tout vecteur $\overrightarrow{u}$ s'écrit de façon unique sous la forme*

$$\overrightarrow{u} = p_F(\overrightarrow{u}) + q_F(\overrightarrow{u}) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} p_F(\overrightarrow{u}) \in F \\ q_F(\overrightarrow{u}) \in F^\perp \end{cases}$$

- *L'application linéaire* $p_F : \begin{cases} E & \longrightarrow & E \\ \overrightarrow{u} & \longmapsto & p_F(\overrightarrow{u}) \end{cases} \quad \left(= \sum_{k=1}^{p} < \overrightarrow{u} \,|\, \overrightarrow{f_k} > \overrightarrow{f_k}\right)$

  est le projecteur orthogonal sur F.

- *L'application linéaire* $q_F : \begin{cases} E & \longrightarrow & E \\ \overrightarrow{u} & \longmapsto & q_F(\overrightarrow{u}) \end{cases} \quad \left(= \overrightarrow{u} - p_F(\overrightarrow{u}) = \sum_{k=p+1}^{n} < \overrightarrow{u} \,|\, \overrightarrow{f_k} > \overrightarrow{f_k}\right)$

  est le projecteur orthogonal sur $F^\perp$ $\quad (q_F = p_{F^\perp})$

- $s_F : \begin{cases} E & \longrightarrow & E \\ \overrightarrow{u} & \longmapsto & p_F(\overrightarrow{u}) - q_F(\overrightarrow{u}) \end{cases}$

  est la symétrie orthogonale par rapport à F.

- $s_{F^\perp} : \begin{cases} E & \longrightarrow & E \\ \overrightarrow{u} & \longmapsto & -p_F(\overrightarrow{u}) + q_F(\overrightarrow{u}) = -s_F(\overrightarrow{u}) \end{cases}$

  est la symétrie orthogonale par rapport à $F^\perp$ $\quad (s_{F^\perp} = -s_F)$

$$p_F + q_F = id_E \;\; ; \;\; p_F - q_F = s_F \;\; ; \;\; p_F = \frac{id_E + s_F}{2} \;\; ; \;\; q_F = \frac{id_E - s_F}{2}$$

$$s_F = id_E - 2\,q_F \;\; ; \;\; s_F = 2\,p_F - id_E$$

$$p_F{}^2 = p_F \quad ; \quad s_F{}^2 = id_E \quad \text{et aussi} \ldots \quad q_F{}^2 = q_F \quad ; \quad (-s_F)^2 = id_E$$

- *F est*
  - *le sous espace propre de p_F associé à la valeur propre 1*
  - *le sous espace propre de s_F associé à la valeur propre 1*
  - *etc ...*
- *$F^\perp$ est*
  - *le sous espace propre de p_F associé à la valeur propre 0*
  - *le sous espace propre de s_F associé à la valeur propre -1*
  - *etc ...*

Tout ça c'est bien connu, mais ça fait pas de mal de le redire ...

A agrémenter par une figure en dimension 3, avec un plan et sa droite orthogonale !

7.2 Cas des droites et hyperplans

$(E, < | >)$ est un espace euclidien de dimension n.

Soit $\begin{cases} \mathcal{D} \text{ une droite de } E\text{, dirigée par } \overrightarrow{u} \text{ orthogonal à l'hyperplan } \mathcal{P} \\ \text{ou} \\ \mathcal{P} \text{ un hyperplan de } E\text{, de vecteur orthogonal } \overrightarrow{u} \text{ directeur de la droite } \mathcal{D} \end{cases}$

En prenant $\left(\overrightarrow{u_2} \cdots, \overrightarrow{u_n}\right)$ comme base orthonormale de $\mathcal{P}$, $\left(\dfrac{\overrightarrow{u}}{\|\overrightarrow{u}\|}, \overrightarrow{u_2} \cdots, \overrightarrow{u_n}\right)$ est une base orthonormale de E et tout vecteur $\overrightarrow{v}$ de E s'écrit :

$$\overrightarrow{v} = \underbrace{\frac{< \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{v} >}{\|\overrightarrow{u}\|^2} \overrightarrow{u}}_{\text{élément de la droite } \mathcal{D} = \mathcal{P}^\perp} + \underbrace{\sum_{k=2}^{n} < \overrightarrow{u_i} \mid \overrightarrow{v} > \overrightarrow{u_i}}_{\text{élément de l'hyperplan } \mathcal{P} = \mathcal{D}^\perp}$$

On en déduit les expressions des projecteurs orthogonaux et des symétries orthogonales :

Projecteur orthogonal sur la droite $\mathcal{D}$ dirigée par $\overrightarrow{u}$	$p : \overrightarrow{v} \longmapsto \dfrac{< \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{v} >}{\|\overrightarrow{u}\|^2} \overrightarrow{u}$
Projecteur orthogonal sur l'hyperplan $\mathcal{P}$ orthogonal à $\overrightarrow{u}$:	$q : \overrightarrow{v} \longmapsto \overrightarrow{v} - \dfrac{< \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{v} >}{\|\overrightarrow{u}\|^2} \overrightarrow{u}$
Symétrie orthogonale par rapport à l'hyperplan $\mathcal{P}$ orthogonal à $\overrightarrow{u}$	$s : \overrightarrow{v} \longmapsto \overrightarrow{v} - 2\dfrac{< \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{v} >}{\|\overrightarrow{u}\|^2} \overrightarrow{u}$
Symétrie orthogonale par rapport à la droite $\mathcal{D}$ dirigée par $\overrightarrow{u}$	$s' : \overrightarrow{v} \longmapsto 2\dfrac{< \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{v} >}{\|\overrightarrow{u}\|^2} \overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}$

Exemple 7.2.0.7. $\mathbb{R}^2$ est muni de sa base orthonormale canonique directe $\mathcal{C} = \left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.

Soit $\mathcal{D}$ la droite d'équation $2\,x + y = 0$, de vecteur normal $\overrightarrow{n} = 2\,\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$.

Si s est la symétrie orthogonale par rapport à $\mathcal{D}$, la formule $s\left(\overrightarrow{v}\right) = \overrightarrow{v} - 2\dfrac{< \overrightarrow{n} \mid \overrightarrow{v} >}{\|\overrightarrow{n}\|^2} \overrightarrow{n}$ permet de calculer $s\left(\overrightarrow{i}\right)$ et $s\left(\overrightarrow{j}\right)$ en fonction de $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$. La matrice de s, relativement à la base $\mathcal{C}$, est :

$$S = \begin{array}{c} \begin{matrix} s\left(\overrightarrow{i}\right) & s\left(\overrightarrow{j}\right) \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} \overrightarrow{i} \\ \overrightarrow{j} \end{matrix}$$

Exemple 7.2.0.8. $\mathbb{R}^3$ est muni de sa base orthonormale canonique directe $\mathcal{C} = \left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$.

Soit $\mathcal{P}$ le plan d'équation $2\,x + y - z = 0$, de vecteur normal $\overrightarrow{n} = 2\,\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}$.

Si q est le projecteur orthogonal sur $\mathcal{P}$, la formule $q\left(\overrightarrow{v}\right) = \overrightarrow{v} - \dfrac{< \overrightarrow{n} \mid \overrightarrow{v} >}{\|\overrightarrow{n}\|^2} \overrightarrow{n}$ permet de calculer $q\left(\overrightarrow{i}\right)$, $q\left(\overrightarrow{j}\right)$ et $q\left(\overrightarrow{k}\right)$ en fonction de $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{k}$. La matrice de q, relativement à la base $\mathcal{C}$, est :

$$Q = \begin{array}{c} \begin{matrix} q\left(\overrightarrow{i}\right) & q\left(\overrightarrow{j}\right) & q\left(\overrightarrow{k}\right) \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} \overrightarrow{i} \\ \overrightarrow{j} \\ \overrightarrow{k} \end{matrix}$$

8 Matrices orthogonales, Groupes $O(n)$, $SO(n)$

Définition 8.0.1.

- $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite orthogonale si $\ {}^tA\,A = I_n$ (ide, ${}^tA = A^{-1}$)
- Une matrice orthogonale A est $\begin{cases} \text{directe} & \text{si } \det(A) = +1 \\ \text{indirecte} & \text{si } \det(A) = -1 \end{cases}$
- $\mathcal{O}_n$ est l'ensemble des matrices orthogonales d'ordre n .
- $\mathcal{SO}_n$ est l'ensemble des matrices orthogonales directes d'ordre n .

Théorème 8.0.1. *(propriétés)*

Dans l'ensemble de matrices réelles carrées d'ordre n,

- *Si A et B sont orthogonales alors $A\,B$ est orthogonale.*

- *Si A est orthogonale alors*
  - $\det A = +1$ *ou* $\det A = -1$ *(mais cela ne suffit pas !)*
  - *A est inversible*
  - $\boxed{\textit{les valeurs propres de } A \textit{ (réelles ou complexes) sont de module } 1 .}$

- *A est orthogonale si et seulement si elle vérifie une des propriétés :*
  - *A^{-1} est orthogonale*
  - *Les colonnes de A forment une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$*
  - *Les lignes de A forment une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$*
  - *A est la matrice de passage d'une base orthonormale à une autre base orthonormale*

- *$(\mathcal{O}_n, \times)$ est un groupe (non commutatif)*
- $\det$ *est un morphisme de groupe de $(\mathcal{O}_n, \times)$ vers $(\{-1, 1\}, \times)$*
- *$(\mathcal{SO}_n, \times)$ est un sous-groupe de $(\mathcal{O}_n, \times)$ (noyau de* $\det$*, non commutatif, sauf ...)*

Preuve. (on a déjà vu et démontré une partie de ces propriétés)

- ${}^t(A\,B) = {}^tB\,{}^tA = B^{-1}\,A^{-1} = (A\,B)^{-1}$.
- $1 = \det(I) = \det({}^tA\,A) = \det({}^tA)\,\det(A) = \det(A)\,\det(A) = (\det(A))^2$ et $\det(A) \in \mathbb{R}$.
- Valeurs propres : On se place dans $\mathbb{C}^n$, muni du produit scalaire canonique.

  Soit λ une valeur propre (complexe) de A et V un vecteur propre (complexe) associé.
  $A\,V = \lambda\,V$ d'où $\overline{A}\,\overline{V} = \overline{\lambda}\,\overline{V}$ et, ici, $A\,\overline{V} = \overline{\lambda}\,\overline{V}$ puisque A est réelle.
  Par transposition, ${}^t\overline{V}\,{}^tA = \overline{\lambda}\,{}^t\overline{V}$ puis ${}^t\overline{V}\,{}^tA\,A\,V = \overline{\lambda}\,\lambda\,{}^t\overline{V}\,V$.
  On a donc ${}^t\overline{V}\,V = \overline{\lambda}\,\lambda\,{}^t\overline{V}\,V$ ou encore $(1 - \overline{\lambda}\,\lambda)\,{}^t\overline{V}\,V = 0$, c'est à dire $(1 - |\lambda|^2)\,\|V\|^2 = 0$.
  Or $V \neq 0$ puisque V est vecteur propre. Donc $\|V\| \neq 0$, et on en déduit que $|\lambda| = 1$.
- $A^{-1} = {}^tA$ donc ${}^t(A^{-1}) = A = (A^{-1})^{-1}$.
- $\begin{cases} \text{Colonnes :} & \text{interprétation du produit matriciel } {}^tA\,A = I_n \\ \text{Lignes :} & \text{interprétation du produit matriciel } A\,{}^tA = I_n \end{cases}$
- Groupe $(\mathcal{O}_n, \times)$: non vide ($I_n \in \mathcal{O}_n$), stabilité par $\times$, stabilité par l'inverse (tout est déjà vu).
- Morphisme de groupe : $\det(A \times B) = \det(A) \times \det(B)$
- Sous-groupe $(\mathcal{SO}_n, \times)$: le noyau d'un morphisme de groupe est un groupe.

< FIN >