Intégrales dépendant d'un paramètre

Antoine MOTEAU antoine.moteau@wanadoo.fr

Table des matières

1 Fonctions intégrables sur un intervalle quelconque **2**
1.1 Définition . . . 2
1.2 Propriétés . . . 3
1.3 Changement de variables . . . 3

2 Intégrales dont l'intégrande dépends d'un paramètre **4**
2.1 Continuité par rapport au paramètre . . . 4
2.2 Dérivation par rapport au paramètre . . . 7

3 Paramètre dans l'intégrande et dans les bornes de l'intégrale **10**
3.1 Décomposition du problème . . . 10
3.2 Cas où l'on peut transformer simplement . . . 10

4 Exemple de calcul d'une intégrale dépendant d'un paramètre **10**

Intégrales dépendant d'un paramètre.

1 Fonctions intégrables sur un intervalle quelconque

1.1 Définition

Définition 1.1.1.

Une fonction f, continue par morceaux sur un intervalle I, qui n'est pas forcément un segment, est intégrable sur I si elle vérifie l'une des deux conditions équivalentes suivantes :

- f admet sur I une intégrale absolument convergente ;
- il existe un réel $M > 0$ tel que pour tout segment J inclus dans I, on ait : $\displaystyle\int_J |f(t)|\,dt \leqslant M$.

Remarque. Une fonction continue par morceaux sur un segment I est intégrable sur I.

Si I est un intervalle quelconque, pour f intégrable sur I, on appelle intégrale de f sur I et on note $\displaystyle\int_I f$

- si I est un segment ($I = [a,b]$), l'intégrale définie de f sur I, avec $\displaystyle\int_I f = \int_{[a,b]} f = \int_{]a,b[} f$
- si I n'est pas un segment, l'intégrale impropre de f sur I.

Exemples 1.1.0.1.

1. (a) Fonction non intégrable sur $]\,0,+\infty\,[$: $\boxed{f : x \longmapsto \dfrac{\sin x}{x} \text{ n'est pas intégrable sur }]\,0,+\infty\,[.}$

   L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ est

   - (semi-)convergente (prolongement par continuité en 0 et IPP entre 1 et X),
   - non absolument convergente (admis pour l'instant).

   (b) Fonction intégrable sur $]\,0,+\infty\,[$: $f : x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}\,(1+x^2)}$ est intégrable sur $]\,0,+\infty\,[$:

   l'intégrale, généralisée en 0 et en $+\infty$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}\,(1+x^2)}\,dx$ est absolument convergente.

$$\int_{]0,+\infty[} f = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}\,(1+x^2)}\,dx = \ldots = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}$$

2. (a) Fonction non intégrable sur $]\,0,1\,]$: $\boxed{f : x \longmapsto \dfrac{1}{x}\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) \text{ n'est pas intégrable sur }]\,0,1\,].}$

   L'intégrale, généralisée en 0, $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x}\sin\left(\frac{1}{x}\right)dx$ est

   - (semi-)convergente (IPP entre X et 0),
   - non absolument convergente. (admis pour l'instant).

   (b) Fonction intégrable sur $]\,0,1\,]$: $f : x \longmapsto \ln(x)$ est intégrable sur $]\,0,1\,]$:
   $\displaystyle\int_0^1 \ln(x)\,dx$ est absolument convergente (et $\displaystyle\int_{]0,1]} f = \int_0^1 \ln(x) = \ldots = -1$).

1.2 Propriétés

Théorème 1.2.1. *(linéarité)*

Soient f et g des fonctions intégrables sur l'intervalle I (quelconque).
Pour λ et μ réels ou complexes, $\lambda\, f + \mu\, g$ est intégrable sur I et $\displaystyle\int_I \lambda\, f + \mu\, g = \lambda \int_I f + \mu \int_I g$.

<u>*Preuve*</u>. simple extension du résultat vu pour les intégrales définies ou pour les intégrales généralisées.

Théorème 1.2.2. *(Relation de Chasles)*

Soit f une fonction intégrable sur l'intervalle I et sur l'intervalle J (quelconques).
Si $I \cup J$ est intervalle et si $I \cap J$ est vide ou réduit à un point, f est intégrable sur $I \bigcup J$ et

$$\int_{I \bigcup J} f = \int_I f + \int_J f.$$

<u>*Preuve*</u>. simple extension du résultat vu pour les intégrales définies ou pour les intégrales généralisées.

Théorème 1.2.3. *(Inégalités)*

Pour des fonctions f et g intégrables sur l'intervalle I (quelconque),

$$\text{si} \quad f \leqslant g \quad \text{alors} \quad \int_I f \leqslant \int_I g \quad , \qquad \text{et, en particulier,} \quad \left|\int_I f\right| \leqslant \int_I |f| \; .$$

<u>*Preuve*</u>. simple extension de résultats vus pour les intégrales définies ou pour les intégrales généralisées.

1.3 Changement de variables

Théorème 1.3.1.

Etant données une fonction f intégrable sur l'intervalle I (quelconque) et une bijection φ d'un intervalle J sur I, de classe $\mathcal{C}^1$ sur I,

$$\int_I f = \int_J (f \circ \varphi) \times |\varphi'| \qquad \left(= \int_{x \in J} f\big(\varphi(x)\big) \times |\varphi'(x)|\; dx \right) \qquad (\varphi \text{ est monotone}) \; .$$

<u>*Preuve*</u>. Admis (extension du changement de variable dans un intégrale définie).

Exemple 1.3.0.1. Calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{1+x^2}\,dx$. On vérifie que $f : x \longmapsto \dfrac{\sqrt{x}}{1+x^2}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$:
f est définie continue positive sur $[\,0, +\infty[$ et, pour $x > 0$, $0 \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{1}{x^{3/2}}$, avec $\displaystyle\int_{17}^{+\infty} \frac{1}{x^{3/2}}\,dx$ convergente.

On pose $u = \sqrt{x}$ et on introduit la fonction $\varphi : u \longmapsto x = u^2$.

- φ est une bijection croissante de classe $\mathcal{C}^1$ de $J = [\,0, +\infty[$ sur $I = [\,0, +\infty[$
- $\displaystyle\int_{x=0}^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{1+x^2}\,dx = \int_{u=0}^{+\infty} \frac{2\,u^2}{1+u^4}\,du = \int_{u=0}^{+\infty} \left(-\frac{1}{2}\,\frac{u\,\sqrt{2}}{u^2 + u\,\sqrt{2} + 1} + \frac{1}{2}\,\frac{u\,\sqrt{2}}{u^2 - u\,\sqrt{2} + 1} \right) du = \cdots$
  (calcul usuel, entre 0 et X, puis passage à la limite quand X tends vers $+\infty$).

Exemple 1.3.0.2. Calcul de $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}\,dx$. On vérifie que $f : x \longmapsto \dfrac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}$ est intégrable sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$:
f est définie, continue et positive sur $\left[0, +\dfrac{\pi}{2}\right[$ et $f(x) \underset{\pi/2}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{\pi}{2} - x}}$.

On pose $u = \cos x$, en faisant le changement de variable $\varphi : u \longmapsto x = \arccos x$.
φ est $\mathcal{C}^1$, bijective décroissante de $]\,0, 1]$ sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, d'où :

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}\,dx = \int_{u=1}^{0} \frac{\sqrt{1-u^2}}{\sqrt{u}}\,\frac{-1}{\sqrt{1-u^2}}\,du = \int_{u=0}^{1} \frac{\sqrt{1-u^2}}{\sqrt{u}}\,\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,du = \int_{u=0}^{1} \frac{du}{\sqrt{u}} = 2.$$

2 Intégrales dont l'intégrande dépends d'un paramètre

2.1 Continuité par rapport au paramètre

Théorème 2.1.1.

Soient I et J des intervalles de $\mathbb{R}$.

Pour $x \in I$, on pose $g(x) = \int_J f(x,t)\,dt$ $\quad \begin{cases} x \in I \text{ étant le paramètre} \\ t \in J \text{ étant la variable d'intégration.} \end{cases}$

où $f : (x,t) \longmapsto f(x,t)$ est une fonction à valeurs réelles ou complexes définie sur $I \times J$.

Si

1. *f est continue sur $I \times J$.*
2. *il existe une fonction positive φ, continue par morceaux et intégrable sur J, telle que*

$$\forall\,(x,t) \in I \times J,\ \big|f(x,t)\big| \leqslant \varphi(t) \qquad \textbf{(hypothèse de domination uniforme)}$$

alors $g(x)$ est défini pour tout $x \in I$ et la fonction $g : x \longmapsto g(x)$ est continue sur I.

Preuve. L'existence de $g(x)$, pour $x \in I$, provient des théorèmes de majoration. Continuité : admis.

Remarques.

1. **Cas où I et J sont des segments :**

L'hypothèse de majoration uniforme est facilement vérifiée dans le cas où

$$\begin{cases} I \text{ et } J \text{ sont des segments,} \\ \text{et } f \text{ est } \textbf{continue} \text{ (globalement) sur } I \times J, \end{cases}$$

puisque la fonction f, continue sur le fermé borné $I \times J$, est bornée sur $I \times J$.

Il suffit alors de prendre, pour obtenir une majoration uniforme sur $I \times J$, la fonction φ constante sur J, égale à $\max\limits_{(x,t)\in I\times J} |f(x,t)|)$, fonction qui est naturellement intégrable sur le segment J.

2. **Restriction (temporaire) de l'intervalle du paramètre** :

Si l'hypothèse de domination n'est pas vérifiée sur $I \times J$, on pourra restreindre l'ensemble décrit par le paramètre x, en limitant x à un intervalle K (en général un segment) strictement inclus dans I, de façon à réaliser une majoration uniforme pour $(x,t) \in K \times J$ (voir dans les exemples ci-dessous).
Attention, l'intervalle J d'intégration reste inchangé.

Exemple 2.1.0.3. La fonction $g : x \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t\,x)}{1+t^2}\,dt$, est définie et continue sur $\mathbb{R}$:

1. L'intégrande est continu sur $I \times J = \mathbb{R} \times [\,0, +\infty\,[$.
2. L'hypothèse de domination absolue et uniforme est vérifiée sur $I \times J$:

$$\forall\,(x,t) \in I \times J,\ \left|\frac{\sin(t\,x)}{1+t^2}\right| \leqslant \frac{1}{1+t^2} = \varphi(t)$$

avec φ indépendante de x, continue par morceaux et intégrable sur $J = [\,0, +\infty[\,$.

3. Toutes les hypothèses du théorème étant vérifiées sur $I \times J$, cela permet de conclure.

Exemple 2.1.0.4. La fonction $g : x \longmapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+x\,t)}{1+t^2}\,dt$, est définie et continue sur $[\,0,+\infty\,[$:

1. L'intégrande, $f : (x,t) \longmapsto \dfrac{\ln(1+x\,t)}{1+t^2}$ est une fonction continue sur $I \times J = [\,0,+\infty\,[\times[\,0,1\,]$.
2. Recherche d'une domination absolue et uniforme, par une fonction intégrable indépendante de x :

   Pour (x,t) de $I \times J$, $|f(x,t)| \leqslant \dfrac{x\,t}{1+t^2} \leqslant \dfrac{x}{2}$ $\left\{\begin{array}{l}\text{majoration intégrable sur } J, \text{ à } x \text{ fixé dans } I,\\ \text{mais } \underline{\text{non indépendante de } x} \text{ : échec !}\end{array}\right.$

   Remarques.
   - Pour $x \in I$, fixé, on a un majorant intégrable sur J, ce qui prouve au moins l'existence de $g(x)$ pour $x \in I$, mais pas la continuité de g sur I.
   - On a obtenu la meilleure majoration, puisque $\displaystyle\sup_{t\in[0,1]} \frac{t}{1+t^2} = \frac{1}{2}$.
3. Restriction : domination absolue et uniforme sur un intervalle inclus strictement dans I :
   Pour tout $A > 0$, considérons le segment $K = [\,0,A\,]$.

   Pour (x,t) de $K \times J$, $|f(x,t)| \leqslant \dfrac{x\,t}{1+t^2} \leqslant x \leqslant A = \varphi(t)$ majoration indépendante de $x \in K$.

   La fonction majorante φ, constante, est continue par morceaux, intégrable sur $J = [\,0,1\,]$.
   Toutes les hypothèses du théorème étant vérifiées sur $K \times J$, on peut alors conclure :

   g est définie, continue sur $K = [\,0,A\,]$ (conclusion partielle, restreinte).
4. Conclusion définitive (levée de la restriction) :

   $\boxed{g \text{ étant continue sur tout segment } [\,0,A\,] \text{ avec } A > 0,\ g \text{ est continue sur } [\,0,+\infty\,[\,.}$

Exemple 2.1.0.5. La fonction $g : x \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x\,t)}{1+t^2}\,dt$, est définie et continue sur $[\,0,+\infty\,[$:

1. L'intégrande, $f : (x,t) \longmapsto \dfrac{\ln(1+x\,t)}{1+t^2}$ est continu sur $I \times J = [\,0,+\infty\,[\times[\,0,+\infty\,[$.
2. Recherche d'une domination absolue et uniforme, par une fonction intégrable indépendant de x :

   $\boxed{\text{on garde } 1+t^2 \text{ au dénominateur, pour ne pas introduire de problème en } t = 0\,!}$

   - Pour (x,t) de $I \times J$, $|f(x,t)| \leqslant \dfrac{x\,t}{1+t^2}$ $\left\{\text{majoration non intégrable sur } J \text{ : échec !}\right.$
   - Pour (x,t) de $I \times J$, $|f(x,t)| \leqslant \dfrac{\sqrt{x}\,\sqrt{t}}{1+t^2}$ $\left\{\begin{array}{l}\text{majoration intégrable sur } J, \text{ à } x \text{ fixé dans } I,\\ \text{mais } \underline{\text{non indépendante de } x} \text{ : échec !}\end{array}\right.$

   Remarque. Cette dernière majoration prouve seulement que g est définie sur I.
3. Restriction : domination absolue et uniforme sur un intervalle inclus strictement dans I :
   Pour tout $A > 0$, considérons le segment $K = [\,0,A\,]$.

   Pour (x,t) de $K \times J$, $|f(x,t)| \leqslant \dfrac{\sqrt{x}\,\sqrt{t}}{1+t^2} \leqslant \sqrt{A}\,\dfrac{\sqrt{t}}{1+t^2} = \varphi(t)$ majoration indépendante de x.

   La fonction majorante φ, indépendante de x, est continue par morceaux sur J, intégrable sur J.
   Toutes les hypothèses du théorème sont vérifiées sur $K \times J$, ce qui permet d'affirmer que

   g est définie, continue sur $K = [\,0,A\,]$ (conclusion partielle, restreinte).
4. Conclusion définitive (levée de la restriction) :

   $\boxed{g \text{ étant continue sur tout segment } [\,0,A\,] \text{ avec } A > 0,\ g \text{ est continue sur } [\,0,+\infty\,[\,.}$

Exemple 2.1.0.6. La fonction $g : x \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t\,x)}{t^2}\,dt$, est définie et continue sur $\mathbb{R}$:

Ici, il est prévisible que l'on n'aura pas une majoration uniforme simple, même en restreignant le domaine du paramètre, par une fonction intégrable sur $J =]\,0, +\infty[$ et on étudie (séparément) les deux fonctions :

$$g_1 : x \longmapsto \int_0^1 \frac{\sin^2(t\,x)}{t^2}\,dt \quad \text{et} \quad g_2 : x \longmapsto \int_1^{+\infty} \frac{\sin^2(t\,x)}{t^2}\,dt$$

1. Pour g_1 :
   - L'intégrande est continu sur $\mathbb{R}\times]\,0, 1\,]$,
   - $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \forall\, t \in]\,0, 1\,],\ \left|\dfrac{\sin^2(t\,x)}{t^2}\right| \leqslant \dfrac{x^2\,t^2}{t^2} = x^2 \begin{cases} \text{majoration intégrable sur }]\,0, 1\,], \text{ à } x \text{ fixé dans } \mathbb{R}, \\ \text{mais } \underline{\text{non indépendante de } x} \text{ : échec !} \end{cases}$
   - Restriction : Soit $A > 0$. On limite le paramètre x au segment $K = [\,-A, A\,]$.

     $\forall\, x \in K,\ \forall\, t \in]\,0, 1\,],\ \left|\dfrac{\sin^2(t\,x)}{t^2}\right| \leqslant \dfrac{x^2\,t^2}{t^2} \leqslant A^2 \begin{cases} \text{majoration } \underline{\text{indépendante de } x \in K} \\ \text{et intégrable sur }]\,0, 1\,] \end{cases}$

   Pour g_1, toutes les hypothèses du théorème sont validées sur $K = [\,-A, A\,]\times]\,0, 1\,]$, donc

   g_1 est définie et continue sur $K = [\,-A, A\,]$.

   Comme cela est vrai pour tout $A > 0$, on en déduit que g_1 est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

2. Pour g_2 :
   - L'intégrande est continu sur $\mathbb{R}\times]\,1, +\infty\,[$,
   - $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \forall\, t \in]\,1, +\infty\,[,\ \left|\dfrac{\sin^2(t\,x)}{t^2}\right| \leqslant \dfrac{1}{t^2} \begin{cases} \text{majoration } \underline{\text{indépendante de } x \in \mathbb{R}} \\ \text{et intégrable sur }]\,1, +\infty\,[\end{cases}$

   Pour g_2, toutes les hypothèses du théorème sont validées sur $\mathbb{R}\times]\,1, +\infty\,[$, sans restriction, donc

   g_2 est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

3. Conclusion : g, somme de deux fonctions définies et continues sur $\mathbb{R}$, est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

Exemple 2.1.0.7. La fonction $g : x \longmapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{t\,x} - 1}{t}\,dt$, est définie et continue sur $\mathbb{R}$:

- L'intégrande est une fonction continue sur $\mathbb{R}\times]\,0, 1\,]$.
- Soit $A > 0$. On restreint x à l'intervalle $K =]-\infty, A\,]$.

$$\forall\,(x, t) \in K\times]\,0, 1\,],\ \left|\frac{e^{t\,x} - 1}{t}\right| \leqslant \frac{e^{A\,t} - 1}{t} = \varphi(t) \begin{cases} \text{majoration } \underline{\text{indépendante de } x \in K} \\ \text{et intégrable sur }]\,0, 1\,] \end{cases}$$

(la fonction φ admet un prolongement continu sur $[0, 1]$).

Toutes les hypothèses du théorème sont validées sur $K =]-\infty, A\,]\times]\,0, 1\,]$, donc

g est définie et continue sur $K =]-\infty, A\,]$.

Comme cela est vrai pour tout $A > 0$, on en déduit que g est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

2.2 Dérivation par rapport au paramètre

Théorème 2.2.1. *(Formule de Liebniz)*

Soient I et J des intervalles de $\mathbb{R}$.

Pour $x \in I$, on pose $g(x) = \displaystyle\int_J f(x,t)\,dt$ $\quad \left\{\begin{array}{l} x \in I \text{ étant le paramètre} \\ t \in J \text{ étant la variable d'intégration.}\end{array}\right.$

où $f : (x,t) \longmapsto f(x,t)$ est une fonction à valeurs réelles ou complexes définie sur $I \times J$.

Si

1. *f satisfait aux hypothèses du théorème de continuité, à savoir :*
   - *f est continue sur $I \times J$,*
   - *il existe une fonction positive φ, continue par morceaux et intégrable sur J, telle que*

$$\forall\,(x,t) \in I \times J,\ \left|f(x,t)\right| \leqslant \varphi(t) \qquad \textbf{(hypothèse de domination uniforme)}$$

2. *f admet une fonction dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ satisfaisant aux mêmes hypothèses, à savoir :*
   - *$\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est définie, continue sur $I \times J$,*
   - *il existe une fonction positive ψ, continue par morceaux et intégrable sur J, telle que*

$$\forall\,(x,t) \in I \times J,\ \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \psi(t) \qquad \textbf{(hypothèse de domination uniforme)}$$

alors la fonction g définie sur I par la relation $g(x) = \displaystyle\int_J f(x,t)\,dt$ est définie, de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et

$$\text{pour tout } x \in I,\ g'(x) = \int_J \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt.$$

Extension à la dérivation à l'ordre k.

Si, pour tout $i = 0 \cdots k$,

- *$\dfrac{\partial^i f}{\partial x^i}$ est définie, continue sur $I \times J$,*
- *il existe une fonction positive ψ_i, continue par morceaux et intégrable sur J, telle que*

$$\forall\,(x,t) \in I \times J,\ \left|\frac{\partial^i f}{\partial x^i}(x,t)\right| \leqslant \psi_i(t) \qquad \textbf{(hypothèse de domination uniforme)}$$

alors la fonction g définie sur I par la relation $g(x) = \displaystyle\int_J f(x,t)\,dt$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I et

$$\text{pour tout } x \in I,\ g^{(k)}(x) = \int_J \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\,dt.$$

Preuve. Admis.

Remarques.

1. Comme précédemment, dans le cas où I et J sont des segments, si f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $I \times J$, les hypothèses de majoration uniforme sont automatiquement vérifiées.
2. Comme précédemment, si les hypothèses de domination ne sont pas vérifiées sur $I \times J$, on pourra se restreindre (temporairement) à un sous-intervalle de I. (voir exemple ci-dessous).
   Attention, l'intervalle d'intégration reste inchangé.

Exemple 2.2.0.8.

La fonction $g : x \longmapsto g(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x\,t)}{1+t^2}\,dt$, est

- définie, continue sur $[\,0,+\infty\,[$ (restriction temporaire de x à $[\,0,A\,]$, avec $A>0$, déjà vu),
- de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]\,0,+\infty[$ (0 exclus : restriction temporaire de x à $[\,a,+\infty[$ avec $a>0$)

On note $f : (x,t) \longmapsto \dfrac{\ln(1+x\,t)}{1+t^2}$, l'intégrande.

1. f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I\times J = [\,0,+\infty\,[\times[\,0,+\infty\,[$ et $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \dfrac{t}{(1+t^2)\,(1+x\,t)}$.
2. $\displaystyle\sup_{x\geqslant 0}\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| = \frac{t}{1+t^2}$, et $t\longmapsto \dfrac{t}{1+t^2}$ est non intégrable sur $]\,0,+\infty\,[$.
3. Restriction du domaine du paramètre x :
   Soient a et A tels que $0<a<A$. On restreint x l'intervalle $K=[\,a,A\,]$.
   $$\forall\,(x,t)\in K\times J, \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \frac{t}{(1+t^2)\,(1+a\,t)},$$
   et la fonction $t\longmapsto \dfrac{t}{(1+t^2)\,(1+a\,t)}$ est intégrable sur $]\,0,+\infty\,[$.
   Les hypothèses du théorème sont donc vérifiés sur $[\,a,A\,]\times]\,0,+\infty\,[$ et on en déduit que
   $$g \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } [\,a,A\,] \text{ et } \forall\,x\in[\,a,A\,],\ g'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t}{(1+t^2)\,(1+x\,t)}\,dt$$
   (en fait, on pouvait se passer de A et travailler sur $[\,a,+\infty[$).
4. Conclusion (levée de la restriction) : g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur tout $[\,a,A\,]$ avec $0<a<A$, donc :
   $$\boxed{g \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur }]\,0,+\infty\,[\quad (\,0\ \underline{\textbf{exclus}}\,) \quad \text{et } \forall\,x>0,\ g'(x) = \int_0^{+\infty}\frac{t}{(1+t^2)\,(1+x\,t)}\,dt.}$$

Remarque. On en déduit aisément que

$$\boxed{\forall\,x\geqslant 0,\ \int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x\,t)}{1+t^2}\,dt = \frac{\pi}{4}\,\ln(1+x^2) - \int_0^x \frac{\ln(u)}{1+u^2}\,du.}$$

(pour information, cela ne pouvait pas se montrer à l'aide d'une intégration par parties)

Exemple 2.2.0.9.

La fonction $g : x \longmapsto g(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+x\,t)}{1+t^2}\,dt$, est

- définie, continue sur $[\,0,+\infty\,[$ (déjà vu),
- de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\,0,+\infty[$.

Mêmes calculs que précédemment, mais en plus simple puisque l'intégrale est non généralisée.
Il n'y a pas besoin de restreindre le paramètre x : la dérivée partielle par rapport à x de l'intégrande, en $(x,t)\in[\,0,+\infty[\times[\,0,1\,]$, est majorée en module par $\varphi_1(t) = \dfrac{t}{t^2+1}$, avec φ_1 continue sur le segment $[\,0,1\,]$, donc intégrable sur $[\,0,1\,]$.

$$\boxed{g \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } [\,0,+\infty\,[\quad \text{et } \forall\,x\geqslant 0,\ g'(x) = \int_0^1 \frac{t}{(1+t^2)\,(1+x\,t)}\,dt.}$$

puis on en déduit aisément que :

$$\boxed{\forall\,x\geqslant 0,\ \int_0^1 \frac{\ln(1+x\,t)}{1+t^2}\,dt = \frac{\ln 2}{2}\,\arctan x + \frac{\pi}{8}\,\ln(1+x^2) - \int_0^x \frac{\ln(1+u)}{1+u^2}\,dt.}$$

(pour information, cela ne pouvait pas se montrer à l'aide d'une intégration par parties)

Exemple 2.2.0.10.

La fonction $g : x \longmapsto g(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x^2\,t)}{1+t^2}\,dt$, est

- définie, continue sur $[\,0,+\infty\,[$ et même définie et continue sur $\mathbb{R}$, paire,
- de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]\,0,+\infty[$ (0 exclus !) (et même de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$).

Si g est définie sur $[\,0,+\infty\,[$, alors elle est définie sur $\mathbb{R}$ et paire. On se limite donc à $x \geqslant 0$.

On note $f : (x,t) \longmapsto \dfrac{\ln(1+x^2\,t)}{1+t^2}$, $I = [\,0,+\infty\,[$ et $J = [\,0,+\infty\,[$.

1. f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I \times J$, et $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \dfrac{2\,x\,t}{(1+x\,t)\,(1+t^2)}$.
2. - $\forall\,(x,t) \in I \times J,\ |f(x,y)| \leqslant \dfrac{x\,\sqrt{t}}{1+t^2}$, majoration non uniforme,
   - $\forall\,(x,t) \in I \times J,\ \left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \dfrac{2\,x\,t}{1+t^2}$, majoration non intégrable sur $J =]\,0,+\infty\,[$.
3. Il faut alors restreindre le domaine du paramètre x, **en une des extrémités ou aux deux** :
   Soit $a > 0$ et $A > a$.
   $$\forall\,(x,t) \in [\,0,A\,]\times]\,0,+\infty\,[,\ \ |f(x,y)| \leqslant \frac{A\,\sqrt{t}}{1+t^2} = \varphi(t),$$
   $$\forall\,(x,t) \in [\,a,A\,]\times]\,0,+\infty\,[,\ \ \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \frac{2\,A\,t}{(1+a\,t)\,(1+t^2)} = \psi(t)$$
   - La fonction φ est indépendante de $x \in [\,0,A\,]$, intégrable sur $]\,0,+\infty\,[$, donc toutes les hypothèses du théorème de continuité sont vérifiées sur $[\,0,A\,]\times]\,0,+\infty\,[$.
   - La fonction ψ est indépendante de $x \in [\,a,A\,]$, intégrable sur $J =]\,0,+\infty\,[$, donc toutes les hypothèses du théorème de dérivation sont vérifiées sur $[\,a,A\,]\times]\,0,+\infty\,[$.

   et on peut conclure (conclusion partielle, restreinte), que g est :
   - continue sur $[\,0,A\,]$,
   - de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\,a,A\,]$, et, $\forall\,x \in [\,a,A\,],\ g'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt$.
4. Conclusion définitive (levée partielle des restrictions) :

$$\boxed{g \text{ est continue sur } \mathbb{R}, \text{ de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}^* \ \ (0 \text{ exclus}) \text{ et } \forall\,x \neq 0,\ g'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt.}$$

Exemple 2.2.0.11.

Montrer que la fonction $g : x \longmapsto g(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(tx)}{t^2}\,e^{-t}\,dt$, est définie, $\mathcal{C}^0$, $\mathcal{C}^1$, $\mathcal{C}^2$, $\ldots$ $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

On pourra se restreindre (temporairement) à des intervalles $[-A,+A]$ (avec $0 < A$).

Complément : montrer que $\forall\,x \in \mathbb{R},\ \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t\,x)}{t^2}\,e^{-t}\,dt = x\,\arctan(2\,x) - \frac{1}{4}\ln(1+4\,x^2)$.

Exemple 2.2.0.12.

Montrer que la fonction $g : x \longmapsto \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos\big(x\,\sin t\big)\,dt$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et, pour $k \in \mathbb{N}$, donner l'expression de $g^{(k)}(x)$ à l'aide d'une intégrale.

Calculer en particulier, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $g^{(k)}(0)$ (on distinguera selon que k est pair ou impair).

3 Paramètre dans l'intégrande et dans les bornes de l'intégrale

3.1 Décomposition du problème

Soit $g : x \longmapsto g(x) = \displaystyle\int_{a(x)}^{b(x)} f(x,t)\,dt$, avec $\begin{cases} a \text{ et } b \text{ de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur l'intervalle } I, \text{ à valeurs dans l'intervalle } J \\ f \text{ de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } I \times J. \end{cases}$

On **"dédouble" le paramètre** x en considérant, pour c fixé, $c \in J$, la fonction de deux variables x et y :

$$H : (x,y) \longmapsto \int_c^y f(x,t)\,dt \qquad \text{et on a : } g(x) = H\big(x, b(x)\big) - H\big(x, a(x)\big)$$

Si on se place dans un segment quelconque K inclus dans I, les fonctions a et b étant continues sur I, donc bornées sur K, on est amené à travailler également dans un segment K' inclus dans J.

- H admet une dérivée partielle, par rapport à x, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $K \times K'$ (application du théorème de dérivation sous le signe intégral, avec un intervalle d'intégration qui est un segment)
- H admet une dérivée partielle, par rapport à y, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $K \times K'$ (théorème sur les intégrales fonction de la borne supérieure)

donc H est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $K \times K'$ et comme $g(x) = H\big(x, b(x)\big) - H\big(x, a(x)\big)$, g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur K.

De la différentielle $dH_{(x,y)} = \dfrac{\partial H}{\partial x}(x,y)\,dx + \dfrac{\partial H}{\partial y}(x,y)\,dy$, on déduit :

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{\partial H}{\partial x}\big(x, b(x)\big) + \frac{\partial H}{\partial y}\big(x, b(x)\big)\frac{db}{dx}(x) - \frac{\partial H}{\partial x}\big(x, a(x)\big) - \frac{\partial H}{\partial y}\big(x, a(x)\big)\frac{da}{dx}(x) \\ &= \frac{\partial H}{\partial x}\big(x, b(x)\big) + \frac{\partial H}{\partial y}\big(x, b(x)\big)\, b'(x) - \frac{\partial H}{\partial x}\big(x, a(x)\big) - \frac{\partial H}{\partial y}\big(x, a(x)\big)\, a'(x) \\ &= \int_c^{b(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt + f\big(x, b(x)\big)\, b'(x) - \int_c^{a(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt - f\big(x, a(x)\big)\, a'(x) \end{aligned}$$

$$\boxed{g'(x) = f\big(x, b(x)\big)\, b'(x) - f\big(x, a(x)\big)\, a'(x) + \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt\,.}$$

Exemple 3.1.0.13. Pour $x > 0$, calculer $\dfrac{d}{dx}\left(\displaystyle\int_x^{x^2} \ln(1 + x\,t)\,dt\right)$ ...

3.2 Cas où l'on peut transformer simplement

Exemple 3.2.0.14.

- g définie par $g(x) = \displaystyle\int_0^x (x-t)\,e^{-t}\,dt$. On a : $g(x) = x\displaystyle\int_0^x e^{-t}\,dt - \int_0^x t\,e^{-t}\,dt$
- g définie par $g(x) = \displaystyle\int_0^x e^{x-t} f(t)\,dt$. On a : $g(x) = e^x \displaystyle\int_0^x e^{-t} f(t)\,dt$

4 Exemple de calcul d'une intégrale dépendant d'un paramètre

Exemple 4.0.0.15. Calcul explicite, pour $x \in \mathbb{R}$, de $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x \cos u}{u^2 + x^2}\,du$.

1. En se limitant à l'intervalle $]0, +\infty[$, vérifier que
   - f est de classe $\mathbb{C}^2$ sur tout segment $[a, A]$ (avec $0 < a < A < +\infty[$), donc sur $]0, +\infty[$
   - f est solution, sur $]0, +\infty[$, de l'équation différentielle $y'' - y = 0$
     (on remarquera que : $\Delta\left(\dfrac{x}{u^2+x^2}\right) = \dfrac{\partial^2}{\partial u^2}\left(\dfrac{x}{u^2+x^2}\right) + \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\dfrac{x}{u^2+x^2}\right) = 0$)
   - f est bornée sur $]0, +\infty[$ et $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} f(x) = \frac{\pi}{2}$ $\left(\text{remarquer que } \dfrac{\pi}{2} = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{u^2+x^2}\,du\right)$
2. En déduire une expression simple de $f(x)$, pour $x \geqslant 0$, puis pour $x \in \mathbb{R}$.

< $\mathcal{FIN}$ >