Fonctions de $\mathbb{R}^p$ vers $\mathbb{R}^n$, de classe $\mathcal{C}^1$

Antoine MOTEAU antoine.moteau@wanadoo.fr

Table des matières

Fonctions de $\mathbb{R}^p$ vers $\mathbb{R}^n$, de classe $\mathcal{C}^1$.

1 Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

1.1 Définition

Définition 1.1.1.

Soit f une fonction, définie sur l'ouvert Ω de $\mathbb{R}^p$, admettant des dérivées partielles en tout point de Ω.

f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω si toutes ses fonctions dérivées partielles sont continues sur Ω.

(il s'agit des dérivées partielles par rapport aux variables $x_1, x_2, \cdots, x_p$, c'est à dire uniquement selon les directions des axes)

Par exemple

- les fonctions polynômes de p variables sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^p$
- les fonctions rationnelles de p variables sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur leur ensemble de définition

1.2 Différentielle

Théorème 1.2.1.

Soit f une fonction définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^p$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

En tout point $a \in \mathcal{U}$, f admet une dérivée selon tout vecteur $\overrightarrow{h}$ et un développement limité à l'ordre 1 :

$$\Big(\exists\, \delta > 0 : \forall\, t \in]-\delta, \delta[,\ a + t\,\overrightarrow{h} \in U \text{ et } f\big(a + t\,\overrightarrow{h}\big) = f(a) + t\, D_{\overrightarrow{h}} f(a) + \overrightarrow{o}(t)\Big)$$

où, pour $\overrightarrow{h} = \sum_{i=1}^{p} h_i\, \overrightarrow{e_i}$, $\quad D_{\overrightarrow{h}} f(a) = \sum_{i=1}^{p} h_i\, \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$.

Preuve. Admis.

Définition 1.2.1.

Soit f une fonction de $\mathbb{R}^p$ vers $\mathbb{R}^n$, définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^p$.

- La différentielle de f en $a \in \mathcal{U}$ est l'application linéaire :

$$df_a : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^p & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ \overrightarrow{h} = \sum_{i=1}^{p} h_i\, e_i & \longmapsto & df_a\big(\overrightarrow{h}\big) = \sum_{i=1}^{p} h_i\, \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a) \end{array} \qquad \big(= D_{\overrightarrow{h}} f(a)\,\big)$$

- La différentielle de f est l'application :

$$df : \begin{array}{ccc} \mathcal{U} & \longrightarrow & \mathcal{L}\big(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n\big) \\ a & \longmapsto & df_a \end{array}$$

Définition 1.2.2. (gradient d'une fonction à valeurs réelles)

Soit f une fonction définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^p$ et **à valeurs dans** $\mathbb{R}$.

Le gradient de f en a, noté $\overrightarrow{grad}\, f(a)$, est l'unique vecteur de $\mathbb{R}^n$ tel que

$$\forall \overrightarrow{h} \in \mathbb{R}^p,\ D_{\overrightarrow{h}} f(a) =< \overrightarrow{grad}\, f(a) \,\big|\, \overrightarrow{h}\ >$$

$$\left(\overrightarrow{grad}\, f(a) = \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\, \overrightarrow{e_i}\right)$$

2 Ecriture usuelle de la différentielle d'une fonction en un point

On note $\left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \cdots, \overrightarrow{e_p}\right)$ la base canonique de l'ensemble de départ $\mathbb{R}^p$ et $\left(x_1, x_2, \cdots, x_p\right)$ les composantes du vecteur courant dans cette base (ou coordonnées du point courant dans le repère canonique).

Pour $i = 1 \cdots p$, soit e_i^* l'application **linéaire** de $\mathbb{R}^p$ vers $\mathbb{R}$, définie par :

$$\forall\, j = 1 \cdots p,\ e_i^*\left(\overrightarrow{e_j}\right) = \partial_{i,j}$$

Pour un vecteur $\overrightarrow{u} = \sum_{i=1}^{p} u_i\ \overrightarrow{e_i}$, on a $e_i^*\left(\overrightarrow{u}\right) = u_i$ et ainsi : $\overrightarrow{u} = \sum_{i=1}^{p} e_i^*(u)\ \overrightarrow{e_i}$

2.1 Développement de la différentielle en un point, par linéarité

$$\begin{aligned}
df_a\left(\overrightarrow{u}\right) &= df_a\left(\sum_{i=1}^{p} e_i^*\left(\overrightarrow{u}\right)\ \overrightarrow{e_i}\right) = \sum_{i=1}^{p} e_i^*\left(\overrightarrow{u}\right)\ df_a\left(\overrightarrow{e_i}\right) = \sum_{i=1}^{p} df_a\left(\overrightarrow{e_i}\right)\ e_i^*\left(\overrightarrow{u}\right)\\
&= \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\ e_i^*\left(\overrightarrow{u}\right) = \left[\sum_{i=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\ e_i^*\right]\left(\overrightarrow{u}\right)\\
df_a &= \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\ e_i^* \qquad \text{(en termes d'application)}
\end{aligned}$$

2.2 Interprétation différentielle de e_i^*

On note x_i la fonction : $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^p & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1, x_2, \cdots, x_p) & \longmapsto & x_i \end{array}\right.$

(il est fréquent et agréable de confondre le nom d'une fonction classique et l'expression du résultat de cette fonction appliquée au point courant. En général, cela allège l'écriture et facilite la compréhension, sans introduire trop de confusion.)

En reprenant ce qui précède, dans le cas de la fonction x_i, on a :

$$d(x_i)_a\left(\overrightarrow{u}\right) = \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial x_i}{\partial x_k}\left(a\right)\ e_k^*\left(\overrightarrow{u}\right) = e_i^*\left(\overrightarrow{u}\right) \quad \text{d'où} \quad d(x_i)_a = e_i^*$$

Comme cela est indépendant du point a, on oublie a et on écrit :

$$dx_i = e_i^* \quad \text{et} \quad dx_i\left(\overrightarrow{u}\right) = e_i^*\left(\overrightarrow{u}\right)$$

2.3 Ecriture définitive de la différentielle en un point

En cumulant les résultats précédents :

$$df_a = \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\ dx_i$$

$$df_a\left(\overrightarrow{u}\right) = \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\ dx_i\ \left(\overrightarrow{u}\right)$$

2.4 Les abus d'écriture ...

Les calculs destinées à fournir des valeurs numériques devraient utiliser l'écriture la plus détaillée :

$$df_a(\overrightarrow{u}) = \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \;\; dx_i\,(\overrightarrow{u})$$

comme cette écriture est lourde à manoeuvrer, bien souvent, on oublie $\overrightarrow{u}$ et on écrit

$$df_a = \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \;\; dx_i \qquad \text{où} \qquad \begin{cases} df_a \text{ et } dx_i \text{ sont abusivement} \\ \text{interprétés comme des valeurs} \end{cases}$$

Dans les applications, on fait de façon courante la confusion entre le résultat $(f(t))$ d'un calcul par une fonction f, en la valeur courante t, et le nom (f) du moyen de calcul (exemple $P = U\,I$). Ici, on réalise la confusion entre $dx_i(\overrightarrow{u}) = u_i$ et dx_i.

Le vecteur $\overrightarrow{u}$ est un vecteur dont chaque composante u_i est interprétée en général comme un accroissement faible (noté Δx_i) de la i-ième variable x_i à partir du point a.
Comme $dx_i(\overrightarrow{u}) = u_i = \Delta x_i$, on confond souvent dx_i avec Δx_i.

Comme la dernière écriture est encore jugée lourde, on oublie même a et on écrit :

$$df = \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_i} \, dx_i$$

Ici, $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ représente (est confondu avec) la valeur $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ au point courant a où l'on pratique les calculs.

Si cette dernière écriture abrégée permet de mener simplement certains calculs, **il faut savoir revenir à la deuxième écriture** (voire à la première) dès qu'il y a risque de confusions.

Par exemple, dans le calcul de P par la formule $P = U\,I$, où P dépends de U et I, on n'écrit pas $P(U, I) = U\,I$, mais $P = U\,I$.
Cependant, cette écriture peut prêter à confusion :

les formules $P = U\,I$ et $P = R\,I^2$ correspondent pas du tout au même mode de calcul et, si on ne prends pas de précautions :

- avec le P de $P = U\,I$, on obtient $\dfrac{\partial P}{\partial I} = U$,
- avec le P de $P = R\,I^2$, on obtient $\dfrac{\partial P}{\partial I} = 2\,R\,I = 2\,U$,

2.5 Cas particuliers, exemples

Fonctions numériques d'une seule variable (de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$) :

On établit ici le lien entre les notations df, f', $\dfrac{\partial f}{\partial t}$ et $\dfrac{df}{dt}$.

Pour une fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, dérivable en t, on a $f(t+u) = f(t) + u\,f'(t) + o(u)$ et, en comparant avec la définition de $d\,f$ donnée ci-dessus, cela donne

$$d\,f_t(u) = u \times f'(t) \qquad \text{et} \qquad d\,f_t(1) = f'(t)$$

Comme (1) est la base canonique de $\mathbb{R}$, on a aussi : $\quad d\,f_t(1) = \dfrac{\partial f}{\partial t}(t)$

- Pour la fonction $t : t \longmapsto t$, on a :

$$\forall\, t \in \mathbb{R},\ \forall\, x \in \mathbb{R},\ \forall\, u \in \mathbb{R},\ \ d\,t_x(u) = u\, d\,t_x(1) = u\, t'(x) = u \times 1 = u$$

Comme le résultat ne dépends pas de x, on omet x et on écrit : $d\,t_x(u) = d\,t(u) = u$

- pour une fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, de la variable t :

$$\begin{aligned}
d\,f_t(1) &= \frac{\partial\, f}{\partial\, t}(t) = f'(t)\\
d\,f_t(u) &= d\,f_t(u \times 1) = u \times d\,f_t(1) = u\,\frac{\partial\, f}{\partial\, t}(t) = f'(t) \times u \qquad (\text{ avec } d\,t(u) = u)\\
&= f'(t)\ d\,t(u) = \Big(f'(t)\ d\,t\Big)(u)
\end{aligned}$$

On a donc, en termes d'applications, $d\,f_t = f'(t)\ d\,t$ et finalement :

$$\frac{d\,f_t}{d\,t} = f'(t) = \frac{\partial\, f}{\partial\, t}(t)$$

Ce qui justifie (presque) l'écriture $\dfrac{d\,f}{d\,t}$ à la place de $\dfrac{\partial\, f}{\partial\, t}$ dans le cas d'une fonction numérique d'une seule variable réelle t.

Fonctions vectorielle d'une seule variable (de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}^n$) :

$$\begin{cases} f: & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2\\ & t \longmapsto \begin{pmatrix} x(t)\\ y(t)\end{pmatrix} = x(t)\,\overrightarrow{i} + y(t)\,\overrightarrow{j}\end{cases}$$

$$d\,f_t(1) = \frac{\partial\, f}{\partial\, t}(t) = \frac{\partial\, x}{\partial\, t}(t)\,\overrightarrow{i} + \frac{\partial\, y}{\partial\, t}(t)\,\overrightarrow{j} = x'(t)\,\overrightarrow{i} + y'(t)\,\overrightarrow{j} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial\, x}{\partial\, t}(t)\\[2ex] \dfrac{\partial\, y}{\partial\, t}(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'(t)\\ y'(t)\end{pmatrix} = f'(t)$$

$$d\,f_t(u) = d\,f_t(u \times 1) = u \times d\,f_t(1) = u\,\frac{\partial\, f}{\partial\, t}(t) = f'(t) \times u = f'(t)\ d\,t(u) = \Big(f'(t)\ d\,t\Big)(u)$$

On a donc, en termes d'applications, $d\,f_t = f'(t)\ d\,t$ et finalement : $\dfrac{d\,f_t}{d\,t} = f'(t) = \dfrac{\partial\, f}{\partial\, t}(t)$

Ce qui justifie (presque) l'écriture $\dfrac{d\,f}{d\,t}$ à la place de $\dfrac{\partial\, f}{\partial\, t}$ dans le cas d'une fonction vectorielle d'un seule variable réelle t .

Fonctions vectorielles de plusieurs variables (de $\mathbb{R}^p$ vers $\mathbb{R}^n$) :

$$\begin{cases} f: & \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3\\ & a = (u,v) \longmapsto \begin{pmatrix} x(u,v)\\ y(u,v)\\ z(u,v)\end{pmatrix} = x(u,v)\,\overrightarrow{i} + y(u,v)\,\overrightarrow{j} + z(u,v)\,\overrightarrow{k}\end{cases}$$

$$\begin{aligned}
&df_a(\alpha\,\overrightarrow{e_1} + \beta\,\overrightarrow{e_2}) = \alpha\, df_a(\overrightarrow{e_1}) + \beta\, df_a(\overrightarrow{e_2}) = \alpha\,\frac{\partial\, f}{\partial\, u}(a) + \beta\,\frac{\partial\, f}{\partial\, v}(a)\\
&= \alpha\left[\frac{\partial\, x}{\partial\, u}(u,v)\,\overrightarrow{i} + \frac{\partial\, y}{\partial\, u}(u,v)\,\overrightarrow{j} + \frac{\partial\, z}{\partial\, u}(u,v)\,\overrightarrow{k}\right] + \beta\left[\frac{\partial\, x}{\partial\, v}(u,v)\,\overrightarrow{i} + \frac{\partial\, y}{\partial\, v}(u,v)\,\overrightarrow{j} + \frac{\partial\, z}{\partial\, v}(u,v)\,\overrightarrow{k}\right]\\
&= \alpha\begin{pmatrix} \dfrac{\partial\, x}{\partial\, u}(u,v)\\[2ex] \dfrac{\partial\, y}{\partial\, u}(u,v)\\[2ex] \dfrac{\partial\, z}{\partial\, u}(u,v)\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} \dfrac{\partial\, x}{\partial\, v}(u,v)\\[2ex] \dfrac{\partial\, y}{\partial\, v}(u,v)\\[2ex] \dfrac{\partial\, z}{\partial\, v}(u,v)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial\, x}{\partial\, u}(u,v) & \dfrac{\partial\, x}{\partial\, v}(u,v)\\[2ex] \dfrac{\partial\, y}{\partial\, u}(u,v) & \dfrac{\partial\, y}{\partial\, v}(u,v)\\[2ex] \dfrac{\partial\, z}{\partial\, u}(u,v) & \dfrac{\partial\, z}{\partial\, v}(u,v)\end{pmatrix}\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Produit matriciel
$(3 \times 2) \times (2 \times 1)$

3 Matrice Jacobienne, Jacobien (déterminant Jacobien)

Définition 3.0.1.

Soit f une fonction de $\mathbb{R}^p$ vers $\mathbb{R}^n$, définie et de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage d'un point a de $\mathbb{R}^p$.

- La matrice jacobienne de f au point a est la matrice de df_a, différentielle de f au point a, relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}^n$.
- Lorsque $n=p$, le (déterminant) Jacobien de f en a est le déterminant de df_a.

On notera (de façon non universelle) $\begin{cases} J_f(a) \text{ la matrice jacobienne de } f \text{ en } a \\ DJ_f(a) \text{ le (déterminant) Jacobien de } f \text{ en } a \text{ (lorsque } n=p). \end{cases}$

Exemple 3.0.0.1.

1. **Fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$:** $\begin{cases} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & f(t) \end{cases}$

   $df_a = f'(a)\,da \quad ; \quad df_a(h) = f'(a)\,h \quad ; \quad df_a(1) = f'(a)$ et (1) est la base canonique de $\mathbb{R}$.

   $$J_(a) = \big(f'(a)\big) \qquad (\text{ matrice } 1\times 1) \qquad \text{et} \qquad DJ_f(a) = f'(a)$$

2. **Fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}^2$:** $\begin{cases} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & t & \longmapsto & \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \end{cases} = x(t)\,\overrightarrow{i} + y(t)\,\overrightarrow{j}$

   $d\,f_t = f'(t)\,dt \quad ; \quad d\,f_t(1) = f'(t) = x'(t)\,\overrightarrow{i} + y'(t)\,\overrightarrow{j} \qquad$ d'où $J_f(t) = \begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} \qquad (\text{ matrice } 2\times 1)$

3. **Fonction de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$:** $\begin{cases} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & f(x,y) \end{cases}$

   $$d\,f_{(x,y)}\left(\overrightarrow{u}\right) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,dx\left(\overrightarrow{u}\right) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dy\left(\overrightarrow{u}\right)$$

   $\begin{cases} d\,f_{(x,y)}\left(\overrightarrow{i}\right) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) \\ d\,f_{(x,y)}\left(\overrightarrow{j}\right) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{cases}$ d'où $J_f(x,y) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) & \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{bmatrix} \qquad (\text{ matrice } 1\times 2)$

4. **Fonction de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}^3$:** $\begin{cases} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (u,v) & \longmapsto & \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix} \end{cases} = x(u,v))\,\overrightarrow{i} + y(u,v)\,\overrightarrow{j} + +z(u,v)\,\overrightarrow{k}$

   $d\,f_{(u,v)}\left(\overrightarrow{w}\right) = \dfrac{\partial f}{\partial u}(u,v)\,du\left(\overrightarrow{w}\right) + \dfrac{\partial f}{\partial v}(u,v)\,dv\left(\overrightarrow{w}\right) \qquad$ et $\begin{cases} d\,f_{(u,v)}\left(\overrightarrow{e_1}\right) = \dfrac{\partial f}{\partial u}(u,v) \\ d\,f_{(u,v)}\left(\overrightarrow{e_2}\right) = \dfrac{\partial f}{\partial v}(u,v) \end{cases}$

   $\begin{cases} d\,f_{(u,v)}\left(\overrightarrow{e_1}\right) = \dfrac{\partial x}{\partial u}(u,v)\,\overrightarrow{i} + \dfrac{\partial y}{\partial u}(u,v)\,\overrightarrow{j} + \dfrac{\partial z}{\partial u}(u,v)\,\overrightarrow{k} \\ d\,f_{(u,v)}\left(\overrightarrow{e_2}\right) = \dfrac{\partial x}{\partial v}(u,v)\,\overrightarrow{i} + \dfrac{\partial y}{\partial v}(u,v)\,\overrightarrow{j} + \dfrac{\partial z}{\partial v}(u,v)\,\overrightarrow{k} \end{cases}$ d'où $J_f(u,v) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u}(u,v) & \dfrac{\partial x}{\partial v}(u,v) \\ \dfrac{\partial y}{\partial u}(u,v) & \dfrac{\partial y}{\partial v}(u,v) \\ \dfrac{\partial z}{\partial u}(u,v) & \dfrac{\partial z}{\partial v}(u,v) \end{bmatrix}$

5. **Fonction de $\mathbb{R}^p$ vers $\mathbb{R}^n$:**

$$\left\{\begin{array}{llll} f: & \mathbb{R}^p & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & a=(x_1,x_2,\cdots,x_p)=\displaystyle\sum_{j=1}^{p} x_i\ \overrightarrow{e_i} & \longmapsto & \begin{pmatrix} f_1(a)\\ f_2(a)\\ \vdots \\ f_n(a)\end{pmatrix} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} f_i(a)\ \overrightarrow{w_i}\end{array}\right.$$

$$df_a\left(\overrightarrow{e_j}\right)=\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial f_1}{\partial x_j}(a)\\[2mm] \dfrac{\partial f_2}{\partial x_j}(a)\\ \vdots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_j}(a)\end{pmatrix}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\ \overrightarrow{w_i}$$

$$J_f(a)=\left.\begin{array}{c}\begin{bmatrix}\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_j}(a) & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_p}(a)\\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & \cdots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_j}(a) & \cdots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_p}(a)\\ \vdots & \vdots & \ddots & & & \\ \dfrac{\partial f_i}{\partial x_1}(a) & \dfrac{\partial f_i}{\partial x_2}(a) & \cdots & \dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) & \cdots & \dfrac{\partial f_i}{\partial x_p}(a)\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1}(a) & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_2}(a) & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_j}(a) & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_p}(a)\end{bmatrix}\\ \underbrace{\begin{array}{cccccc}\uparrow & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow\\ x_1 & x_2 & \cdots & x_j & \cdots & x_p\end{array}}_{\text{variables, } x_j \text{ en colonne } j}\end{array}\begin{array}{c}\longleftarrow f_1\\[6mm] \longleftarrow f_2\\[4mm] \vdots\\[4mm] \longleftarrow f_i\\[4mm] \vdots\\[4mm] \longleftarrow f_n\\[16mm]\end{array}\right\}$$

4 Calcul différentiel

Théorème 4.0.1.

$\mathcal{C}^1\Big(\Omega,\ \mathbb{R}^n\Big)$, ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert Ω de $\mathbb{R}^p$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, muni des opérations usuelles $+$ et $\cdot$, est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel.

Preuve. Sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^0\big(\Omega,\ \mathbb{R}^n\big)$.

Théorème 4.0.2. *Composition*

Soit g une fonction de $\mathbb{R}^p$ vers $\mathbb{R}^n$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U et f une fonction de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}^q$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert V tel que $g(U) \subset V$.

$f \circ g$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U et $\quad \forall\ a \in U,\ d(f \circ g)_a = df_{g(a)} \circ dg_a$

$$\Bigg(\forall\ a \in U,\ \forall\ \overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^n,\ d(f\circ g)_a\Big(\overrightarrow{u}\Big) = \Big(df_{g(a)} \circ dg_a\Big)\Big(\overrightarrow{u}\Big) = df_{g(a)}\Big(dg_a(\overrightarrow{u})\Big)\Bigg)$$

Preuve. Admis. Remarque : pour des fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, on retrouve $(f\circ g)'(x) = f'\big(g(x)\big) \times g'(x)$.

Théorème 4.0.3. *(formules opératoire usuelles)*

Pour f, g, fonctions de $\mathbb{R}^p$ vers $\mathbb{R}^n$, h fonction de $\mathbb{R}^p$ vers $\mathbb{R}$, toutes de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert Ω, et λ réel,

$$\boxed{f+g\ ;\ \lambda\cdot f\ ;\ h\cdot f\ ;\ <g\,|\,f>\ ;\ \|f\|_2^2\ ;\ g\wedge f\ (\text{si } n=3) \text{ sont de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \Omega \text{ et,}}$$

$$\boxed{d(f+g) = df + dg} \qquad \begin{cases} d(f+g)_a & = df_a + dg_a \\ d(f+g)_a\big(\overrightarrow{u}\big) & = df_a\big(\overrightarrow{u}\big) + dg_a\big(\overrightarrow{u}\big) \end{cases}$$

$$\boxed{d(\lambda\cdot f) = \lambda\cdot df} \qquad \begin{cases} d(\lambda\cdot f)_a & = \lambda\cdot df_a \\ d(\lambda\cdot f)_a\big(\overrightarrow{u}\big) & = \lambda\cdot df_a\big(\overrightarrow{u}\big) \end{cases}$$

$$\boxed{d(h\cdot f) = dh\cdot f + h\cdot df}$$

$$\begin{cases} d(h\cdot f)_a & = dh_a\cdot f(a) + h(a)\cdot df_a \\ d(h\cdot f)_a\big(\overrightarrow{u}\big) & = dh_a\big(\overrightarrow{u}\big)\cdot f(a) + h(a)\cdot df_a\big(\overrightarrow{u}\big) \end{cases}$$

$$\boxed{d(<g\,|\,f>) = <dg\,|\,f> + <g\,|\,df>}$$

$$\begin{cases} d(<g\,|\,f>)_a & = <dg_a\,|\,f(a)> + <g(a)\,|\,df_a> \\ d(<g\,|\,f>)_a\big(\overrightarrow{u}\big) & = <dg_a\big(\overrightarrow{u}\big)\,|\,f(a)> + <g(a)\,|\,df_a\big(\overrightarrow{u}\big)> \end{cases}$$

$$\boxed{d\Big(\ \|f\|_2^2\ \Big) = 2\ <df\,|\,f>} \qquad \begin{cases} d\Big(\ \|f\|_2^2\ \Big)_a & = 2\ <df_a\,|\,f(a)> \\ d\Big(\ \|f\|_2^2\ \Big)_a\big(\overrightarrow{u}\big) & = 2\ <df_a\big(\overrightarrow{u}\big)\,|\,f(a)> \end{cases}$$

$$\boxed{d(g\wedge f) = dg\wedge f + g\wedge df} \qquad (\text{si } n=3)$$

$$\begin{cases} d(g\wedge f)_a & = dg_a\wedge f(a) + g(a)\wedge df_a \\ d(g\wedge f)_a\big(\overrightarrow{u}\big) & = dg_a\big(\overrightarrow{u}\big)\wedge f(a) + g(a)\wedge df_a\big(\overrightarrow{u}\big) \end{cases}$$

Preuve. Admis.

Théorème 4.0.4. *(complément)*

$f_1, f_2, \cdots f_n$ étant n fonctions de $\mathbb{R}^p$ vers $\mathbb{R}^n$, toutes de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert Ω,

$\det_{\mathcal{C}}(f_1, f_2, \cdots, f_n)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω et

$$d\Big(\det_{\mathcal{C}}(f_1, f_2, \cdots, f_n)\Big) = \sum_{k=1}^{n} \det_{\mathcal{C}}(f_1, \cdots, f_{k-1}, df_k, f_{k+1}, \cdots, f_n)$$

$$d\Big(\det_{\mathcal{C}}(f_1, f_2, \cdots f_p)\Big)_a = \sum_{k=1}^{n} \det_{\mathcal{C}}\big(f_1(a), \cdots, f_{k-1}(a), (df_k)_a, f_{k+1}(a), \cdots, f_n(a)\big)$$

$$d\Big(\det_{\mathcal{C}}(f_1, f_2, \cdots f_n)\Big)_a(\overrightarrow{u}) = \sum_{k=1}^{n} \det_{\mathcal{C}}\big(f_1(a), \cdots, f_{k-1}(a), (df_k)_a(\overrightarrow{u}), f_{k+1}(a), \cdots, f_n(a)\big)$$

($\mathcal{C}$ étant une base quelconque de $\mathbb{R}^n$).

Quelques propriétés sur les matrices jacobiennes
(déduites des propriétés vues pour la différentielle en un point)

f, g étant des fonctions de $\mathbb{R}^p$ vers $\mathbb{R}^n$, λ un réel et h une fonction de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}^q$,

$$\begin{cases} d(f+g)_a = df_a + dg_a & \text{donne} \quad \boxed{J_{f+g}(a) = J_f(a) + J_g(a)} \\ d(\lambda f)_a = \lambda\, df_a & \text{donne} \quad \boxed{J_{\lambda f}(a) = \lambda \cdot J_f(a)} \\ d(h \circ g)_a = dh_{g(a)} \circ dg_a & \text{donne} \quad \boxed{J_{h\circ g}(a) = J_h\big(g(a)\big) \times J_g(a)} \end{cases}$$

Dans le cas particulier où $n = p$, $\boxed{DJ_{\lambda f}(a) = \lambda^n\, DJ_f(a)}$

Théorème 4.0.5. *Matrice Jacobienne de la réciproque*

Soit f est une fonction de $\mathbb{R}^p$ vers $\mathbb{R}^p$, qui réalise une bijection de $A \subset \mathbb{R}^p$ vers $B \subset \mathbb{R}^p$.

Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur A et si $DJ_f(a)$ est non nul pour tout $a \in A$,

alors f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^1$ sur B et, pour tout $b \in B$,

$$J_{f^{-1}}(b) = \Big(J_f\big(f^{-1}(b)\big)\Big)^{-1}$$

.

Preuve. Admis.

5 Composition et changement de variables

Composition de $g : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^n$ par $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^q$.

La première précaution est de bien préciser les objectifs et les notations :

- On a une fonction $\begin{cases} f : & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^q \\ & (x_1,x_2,\cdots,x_n) & \longmapsto & f(x_1,x_2,\cdots,x_n) \end{cases}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert Ω

  et on veut faire un changement de variables, en posant :

  $(x_1,x_2,\cdots,x_n) = g(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_p)$ où g est une fonction de $\mathbb{R}^p$ vers $\mathbb{R}^n$:

  $$\begin{cases} g : & \mathbb{R}^p & \longrightarrow & \mathbb{R}^n & \\ & (\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_p) & \longmapsto & (x_1,x_2,\cdots,x_n) & = g(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_p) \end{cases} \quad \begin{array}{c} \mathcal{C}^1 \text{ sur un ouvert } U \\ \text{tel que } g(U) \subset \Omega \end{array}$$

- On notera

$$\begin{cases} \text{départ :} & \begin{cases} \left(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\cdots,\overrightarrow{e_p}\right) & \text{la base canonique de } \mathbb{R}^p \\ \left(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_p\right) & \text{les variables dans } \mathbb{R}^p \quad \text{et } m = O + \displaystyle\sum_{j=1}^{p} \alpha_i\,\overrightarrow{e_j} \end{cases} \\ \text{intermédiaire :} & \begin{cases} \left(\overrightarrow{w_1},\overrightarrow{w_2},\cdots,\overrightarrow{w_n}\right) & \text{la base canonique de } \mathbb{R}^n \\ \left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right) & \text{les variables dans } \mathbb{R}^n \quad \text{et } M = O + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i\,\overrightarrow{w_i} = g(m) \end{cases} \end{cases}$$

La deuxième précaution est de bien organiser les confusions utiles :

Dans la pratique, on a tendance à confondre le nom de la fonction et le nom du résultat, ce qui conduirait à écrire : $f \equiv f(x_1,x_2,\cdots,x_n) = f\Big(g(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_p)\Big) = (f\circ g)\Big(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_p)\Big) \equiv f\circ g$
puis, par transitivité de la confusion, à confondre f et $f\circ g$ et ainsi à

$$\text{décrire sous le même nom } (f) \text{ le résultat obtenu } \begin{cases} \text{à partir de } (x_1,x_2,\cdots,x_n) \\ \text{à partir de } (\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_p) \end{cases}$$

Ce genre de confusion, qui permet d'alléger et de simplifier fortement l'écriture (dans le but de faciliter la compréhension) pourrait cependant conduire à des mauvaises interprétation.
On utilisera un **compromis**, quand cela est nécessaire, en notant :

- f la fonction (ou le résultat) obtenu à partir de $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$
- $\widetilde{f}$ la fonction (ou le résultat) obtenu à partir de $(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_p)$ (ide $\widetilde{f} = f\circ g$)

Après ces précautions :

$$d\widetilde{f}_m\left(\overrightarrow{u}\right) = d(f\circ g)_m\left(\overrightarrow{u}\right) = df_{g(m}\circ dg_m\left(\overrightarrow{u}\right) \quad \text{et} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial \widetilde{f}}{\partial \alpha_j}(m) = d\widetilde{f}_m\left(\overrightarrow{e_j}\right) \quad ; \quad \dfrac{\partial g}{\partial \alpha_j}(m) = dg_m\left(\overrightarrow{e_j}\right) \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_k}(M) = df_M\left(\overrightarrow{w_k}\right) \quad \text{avec } M = g(m) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \widetilde{f}}{\partial \alpha_j}(m) &= \frac{\partial (f\circ g)}{\partial \alpha_j}(m) = d(f\circ g)_m\left(\overrightarrow{e_j}\right) = df_{g(m)}\circ dg_m\left(\overrightarrow{e_j}\right) = df_{g(m)}\left(dg_m\left(\overrightarrow{e_j}\right)\right) = df_{g(m)}\left(\frac{\partial g}{\partial \alpha_j}(m)\right) \\ &= df_{g(m)}\left(\sum_{k=1}^{p} \frac{\partial x_k}{\partial \alpha_j}(m)\,\overrightarrow{w_k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial x_k}{\partial \alpha_j}(m)\, df_{g(m}\left(\overrightarrow{w_k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial x_k}{\partial \alpha_j}(m)\,\frac{\partial f}{\partial x_k}\Big(g(m)\Big) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}\Big(g(m)\Big)\,\frac{\partial x_k}{\partial \alpha_j}(m) \qquad \text{(inversion usuelle dans l'écriture)} \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall\, j \in 1\cdots p, \quad \frac{\partial \widetilde{f}}{\partial \alpha_j} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}\,\frac{\partial x_k}{\partial \alpha_j} \quad , \text{ lorsque l'on omet les points d'application.}}$$

Remarque.
Si $f_1, f_2, \cdots, f_q$ sont les fonctions coordonnées de f, la formule $\forall\, j \in 1\cdots p,\ \dfrac{\partial \widetilde{f}}{\partial \alpha_j} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{\partial f}{\partial x_k}\,\dfrac{\partial x_k}{\partial \alpha_j}$ donne :

$$\forall\, i \in 1\cdots q,\ \forall\, j \in 1\cdots p,\ \frac{\partial \widetilde{f_i}}{\partial \alpha_j} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_k}\,\frac{\partial x_k}{\partial \alpha_j} \quad \text{avec} \begin{cases} \dfrac{\partial \widetilde{f_i}}{\partial \alpha_j} & \text{terme de la ligne } i \text{, colonne } j \text{ de } J\big(\,\widetilde{f}\,\big)_m \\[2ex] \dfrac{\partial f_i}{\partial x_k} & \text{terme de la ligne } i \text{, colonne } k \text{ de } J\big(f\big)_{g(m)} \\[2ex] \dfrac{\partial x_k}{\partial \alpha_j} & \text{terme de la ligne } k \text{, colonne } j \text{ de } J\big(g\big)_m \end{cases}$$

On reconnaît la formule du calcul du terme de la ligne i et de la colonne j dans le produit matriciel :

$$\Big(J_{\widetilde{f}}(m) = \Big) \qquad J_{f\circ g}(m) = J_f\big(g(m)\big) \times J_g(m)$$

<u>Du point de vue pratique :</u>

> On fait effectivement la confusion qui consiste à écrire f au lieu de $\widetilde{f}$ et l'écriture
>
> $$\Big(d\widetilde{f} =\Big) \qquad df = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}\,dx_k \qquad \underline{\textbf{se décline}} \text{ en :}$$
>
> - $\dfrac{\partial f}{\partial \alpha_j} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{\partial f}{\partial x_k}\,\dfrac{\partial x_k}{\partial \alpha_j}$ lorsque $\big(x_1, x_2, \cdots, x_n\big)$ est fonction de $\big(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p\big)$
> - $\dfrac{df}{dt} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{\partial f}{\partial x_k}\,\dfrac{dx_k}{dt}$ lorsque $\big(x_1, x_2, \cdots, x_n\big)$ est fonction de $t \in \mathbb{R}$

où, de façon plus détaillée,

- $$\frac{\partial f}{\partial \alpha_j}\big(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p\big) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}\big(x_1, x_2, \cdots, x_n\big)\,\frac{\partial x_k}{\partial \alpha_j}\big(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p\big)$$

  $$\text{où l'on sous-entend que} \begin{cases} \bullet & \text{chacun des } x_k \text{ est fonction de } (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p) \in \mathbb{R}^p \\[2ex] \bullet & \dfrac{\partial f}{\partial \alpha_j} \text{ est pris au sens de } \dfrac{\partial \widetilde{f}}{\partial \alpha_j} \end{cases}$$

- $$\frac{df}{dt}(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}\big(x_1, x_2, \cdots, x_n\big)\,\frac{dx_k}{dt}(t)$$

  $$\text{où l'on sous-entend que} \begin{cases} \bullet & \text{chacun des } x_k \text{ est fonction de } t \in \mathbb{R} \\[2ex] \bullet & \dfrac{df}{dt} \text{ est pris au sens de } \dfrac{d\widetilde{f}}{dt} \end{cases}$$

<u>et en termes d'opérateurs uniquement :</u>

$d\,\cdot = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{\partial\,\cdot}{\partial x_k}\,dx_k$	$\dfrac{\partial\,\cdot}{\partial \alpha_j} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{\partial\,\cdot}{\partial x_k}\,\dfrac{\partial x_k}{\partial \alpha_j}$	$\dfrac{d\,\cdot}{dt} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{\partial\,\cdot}{\partial x_k}\,\dfrac{dx_k}{dt}$

Exemple 5.0.0.2. Les changements de variables usuels

1. **Passage en coordonnées polaires** : soit $\begin{cases} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & f(x,y)\end{cases}$ de classe $\mathcal{C}^1$

   On pose $\begin{cases} x = r\ \cos\theta \\ \\ y = r\ \sin\theta \end{cases}$ avec $\begin{cases} r\in[0,+\infty[\\ \theta\in[0,2\pi[\end{cases}$, ce qui introduit $\begin{cases} g: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (r,\theta) & \longmapsto & \begin{pmatrix} x = r\ \cos\theta \\ \\ y = r\ \sin\theta\end{pmatrix}\end{cases}$

   g (non injective) est de classe $\mathcal{C}^1$ et $\widetilde{f} = f\circ g$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

   Remarques. $\begin{cases} \text{pour } r=0,\ \theta \text{ peut prendre n'importe quelle valeur} \\ g \text{ est une bijection entre }]0,+\infty[\times[0,2\pi[\text{ et } \mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\end{cases}$

   (a) Pour $(r,\theta)\in]0,+\infty[\times]0,2\pi[$ (ouvert), $g(r,\theta)=(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\mathbb{R}_+\vec{i}$ (ouvert).

   $$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\widetilde{f}}{\partial r} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial\widetilde{f}}{\partial\theta} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\theta}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\theta}\end{aligned}\right\}\ \text{s'écrit sous forme matricielle : } \begin{bmatrix}\dfrac{\partial\widetilde{f}}{\partial r} & \dfrac{\partial\widetilde{f}}{\partial\theta}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial\theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial\theta}\end{bmatrix}$$

   $$J_g(r,\theta)=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial\theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial\theta}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta\end{bmatrix} \quad \text{et } DJ_g(r,\theta)=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial\theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial\theta}\end{vmatrix} = r$$

   (b) **Réciproquement** , avec $(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\mathbb{R}_+\vec{i}$, $(r,\theta)=g^{-1}(x,y)$ est défini par :

   $$r=\sqrt{x^2+y^2}\in]0,+\infty[\quad \text{et} \quad \theta\in]0,2\pi[\text{ avec } \begin{cases}\cos\theta = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \sin\theta = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\end{cases}$$

   $$\text{par exemple, } \frac{\partial\cos\theta}{\partial x}\begin{cases} = \dfrac{y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} \\ \\ = \dfrac{d\cos\theta}{d\theta}\dfrac{\partial\theta}{\partial x} = -\sin\theta\,\dfrac{\partial\theta}{\partial x}\end{cases} \quad \text{d'où} \quad \frac{\partial\theta}{\partial x} = \frac{-y}{x^2+y^2} \quad \text{etc} \ldots$$

   $$J_{g^{-1}}(x,y)=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial r}{\partial x} & \dfrac{\partial r}{\partial y} \\ \dfrac{\partial\theta}{\partial x} & \dfrac{\partial\theta}{\partial y}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \dfrac{-y}{x^2+y^2} & \dfrac{x}{x^2+y^2}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta \\ \dfrac{-\sin\theta}{r} & \dfrac{\cos\theta}{r}\end{bmatrix}$$

   $$DJ_{g^{-1}}(x,y)=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{1}{r}$$

   (c) **On constate que :** $\begin{cases} J_{g^{-1}}(x,y)\times J_g(r,\theta) = I_d = J_{id}(r,\theta) \\ DJ_{g^{-1}}(x,y) = \dfrac{1}{DJ_g(r,\theta)}\end{cases}$

   ATTENTION ! $\boxed{\dfrac{\partial r}{\partial x} = \dfrac{\partial x}{\partial r} \quad (=\cos\theta)}$

   malgré une apparence fractionnaire, les dérivées partielles n'ont pas un comportement de fractions ! $\dfrac{\partial r}{\partial x}$ **n'a que le sens** "$\dfrac{\partial}{\partial x}$ *appliqué à la fonction* r" **.**

   $\dfrac{\partial}{\partial x}$ **est une entité indissociable signifiant littéralement** "*dérivation partielle par rapport à la variable qui est désignée communément par le nom* x **.**

2. **Passage en coordonnées sphériques** : soit $\begin{cases} f: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y,z) & \longmapsto & f(x,y,z) \end{cases}$ de classe $\mathcal{C}^1$

On pose $\begin{cases} x = r\ \sin\theta\cos\phi \\ y = r\ \sin\theta\sin\phi \\ z = r\ \cos\theta \end{cases}$ avec $\begin{cases} r\in[0,+\infty[\\ \theta\in[0,\pi] \\ \phi\in[0,2\pi] \end{cases}$, $\boxed{\textit{FIGURE OBLIGATOIRE}}$

ce qui introduit $\begin{cases} g: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (r,\theta,\phi) & \longmapsto & \begin{pmatrix} x = r\ \sin\theta\cos\phi \\ y = r\ \sin\theta\sin\phi \\ z = r\ \cos\theta \end{pmatrix} \end{cases}$ (non injective), de classe $\mathcal{C}^1$.

$\widetilde{f} = f\circ g$ est de classe $\mathcal{C}^1$
etc ...

- Calculer la matrice jacobienne de g ...
- Calculer le déterminant jacobien de g ...
- Lorsque l'on se restreint aux domaines où g est bijective (ce qui revient à exclure l'axe Oz, à imposer $r>0$, $\theta\in]0,\pi[$ et $\phi\in[0,2\,\pi[$) , calculer la matrice jacobienne de g^{-1}

3. **Passage en coordonnées cylindriques** : soit $\begin{cases} f: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y,z) & \longmapsto & f(x,y,z) \end{cases}$ de classe $\mathcal{C}^1$

On pose $\begin{cases} x = r\ \cos\phi \\ y = r\ \sin\phi \\ z = z \end{cases}$ avec $\begin{cases} r\in[0,+\infty[\\ \phi\in[0,2\pi] \\ z\in\mathbb{R} \end{cases}$, $\boxed{\textit{FIGURE OBLIGATOIRE}}$

etc ...

6 Equations aux dérivées partielles à l'ordre 1. Exemples

6.1 Exemple 1.

Déterminer les fonctions de $\Omega = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, **de classe $\mathcal{C}^1$ sur** Ω, vérifiant l'équation :

$$(E): \quad 2\,x\,\frac{\partial f}{\partial x} - y\,(1+y^2)\,\frac{\partial f}{\partial y} = x$$

Indication : effectuer un changement de variables, en posant $x = \dfrac{u^2+v^2}{2}$ et $y = \dfrac{u}{v}$, avec $u > 0$ en vue d'obtenir une équation plus simple selon les variables u et v.

En principe, on devrait noter :

$$\begin{cases} f(x,y) \text{ le résultat du calcul à partir des variables } x \text{ et } y \\ \widetilde{f}(u,v) \text{ le résultat du calcul à partir des variables } u \text{ et } v \end{cases} \qquad \left(\text{avec} \quad \widetilde{f}(u,v) = f\left(\frac{u^2+v^2}{2}, \frac{u}{v}\right)\right)$$

mais on fait souvent les confusions : $f \equiv f(x,y) \equiv \widetilde{f}(u,v) \equiv \widetilde{f}$

<u>**Première étape**</u> **:** transformer les dérivées partielles de f, selon x et y, en expressions ne dépendant que des dérivées partielles de f selon u et v :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial \widetilde{f}}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial \widetilde{f}}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\partial \widetilde{f}}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial \widetilde{f}}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial y} \end{cases}$$

et pour cela, il faut exprimer les dérivées partielles du changement de variables : $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial v}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial v}{\partial y}$ en fonction de (u,v) ou de (x,y) (temporairement on acceptera une expression mixte en u,v,x,y).

- <u>Méthode 1</u> : à partir de l'expression de u et v en fonction de x et y :

  On obtient $\begin{cases} u = \sqrt{\dfrac{2\,x\,y^2}{1+y^2}} \\ v = \varepsilon\sqrt{\dfrac{2\,x}{1+y^2}} \quad \begin{cases} \varepsilon = 1 & \text{si } y > 0 \\ \varepsilon = -1 & \text{si } y < 0 \end{cases} \end{cases}$ et on en déduit $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial v}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial v}{\partial y}$ en fonction de x et y puis on exprime $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ en fonction de $\dfrac{\partial \widetilde{f}}{\partial u}(u,v)$, $\dfrac{\partial \widetilde{f}}{\partial v}(u,v)$ et de x et y ...

  On obtient alors

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial \widetilde{f}}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \widetilde{f}}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \dots \quad \text{(expression un peu lourde ici)} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial \widetilde{f}}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \widetilde{f}}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = \dots \quad \text{(expression un peu lourde ici)} \end{aligned}$$

- <u>Méthode 2</u> : à l'aide des matrices jacobiennes | sans chercher à exprimer u et v en fonction de x et y pour l'instant.

  $(u,v) \longmapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ a pour matrice jacobienne : $A = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} = u & \dfrac{\partial x}{\partial v} = v \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} = \dfrac{1}{v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} = \dfrac{-u}{v^2} \end{pmatrix}$

  $(x,y) \longmapsto \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ a pour matrice jacobienne : $B = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = A^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{u}{u^2+v^2} & \dfrac{v^3}{u^2+v^2} \\ \dfrac{v}{u^2+v^2} & \dfrac{-u\,v^2}{u^2+v^2} \end{pmatrix}$

  On obtient alors

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial \widetilde{f}}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \widetilde{f}}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial \widetilde{f}}{\partial u}\,\frac{u}{u^2+v^2} + \frac{\partial \widetilde{f}}{\partial v}\,\frac{v}{u^2+v^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial \widetilde{f}}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \widetilde{f}}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial \widetilde{f}}{\partial u}\,\frac{v^3}{u^2+v^2} + \frac{\partial \widetilde{f}}{\partial v}\,\frac{-u\,v^2}{u^2+v^2} \end{aligned}$$

Remarque. Dans cet exemple la méthode 1 est bien plus lourde que la méthode 2, mais il y a des cas où c'est plutôt le contraire ...

Deuxième étape : transformation de l'équation (E) (uniquement en les variables x et y) en une équation équivalente (E') (uniquement en les variables u et v), dans le domaine considéré :

En reportant les formules précédentes dans (E), après simplification, on obtient l'équation :

$$(E') : \quad \frac{\partial \widetilde{f}}{\partial v} = \frac{v}{2}$$

Il s'agit d'une équation simple (le changement de variable était pertinent), qui a pour solutions les fonctions de la forme : $\widetilde{f}(u,v) = \dfrac{v^2}{4} + h(u)$ (la constante d'intégration, par rapport à v, dépends de u)

Troisième étape : conclusion, dans les termes du problème | il faut exprimer u et v en fonction de x et y si cela n'a pas déjà été fait.

Ici, $u > 0$ et on peut écrire $h(u)$ sous la forme $k(u^2)$, ce qui simplifiera l'expression finale.

Finalement, les fonctions cherchées, solutions de (E) dans $\Omega = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, sont de la forme :

$$(x,y) \longmapsto f(x,y) = \frac{1}{4} \times \frac{2\,x}{1+y^2} + k\left(\frac{2\,x\,y^2}{1+y^2}\right)$$

avec k fonction, d'une seule variable, de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty,0[$ ou $]0,+\infty[$.

Remarque. Cela donne des solutions diverses ..., définies sur tout ou partie de Ω, par exemple :

$$(x,y) \longmapsto \frac{x}{2} \quad (\text{avec } k(z) = \frac{z}{4}) \quad ; \quad (x,y) \longmapsto \frac{x}{2\,(1+y^2)} + \tan\frac{2\,x\,y^2}{1+y^2} \quad ;$$

$$(x,y) \longmapsto \frac{x}{2} + \arcsin\frac{2\,x\,y^2}{1+y^2} \quad (\text{avec } k(z) = \frac{z}{4} + \arcsin z) \quad ; \quad (x,y) \longmapsto \frac{x}{2} + g\left(\frac{2\,x\,y^2}{1+y^2}\right) \qquad \text{etc} \ldots$$

6.2 Exemple 2.

Déterminer les fonctions de $\Omega = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ vers $\mathbb{R}$, **de classe $\mathcal{C}^1$ sur** Ω, vérifiant l'équation :

$$(E) : \quad x\,y\,\frac{\partial f}{\partial x} - y^2\,\frac{\partial f}{\partial y} = 2\,x$$

Indication : effectuer un changement de variables, en posant $u = \dfrac{x}{y}$ et $v = x\,y$ en vue d'obtenir une équation plus simple selon les variables u et v.

Première étape : préparation ...

- Méthode 1 (c'est, ici, le plus facile) :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial \widetilde{f}}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \widetilde{f}}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial \widetilde{f}}{\partial u}\,\frac{1}{y} + \frac{\partial \widetilde{f}}{\partial v}\,y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial \widetilde{f}}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \widetilde{f}}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial \widetilde{f}}{\partial u}\,\frac{-x}{y^2} + \frac{\partial \widetilde{f}}{\partial v}\,x$$

| On reste en expression "mixte", avec des coefficients en x et y. On repassera ultérieurement en u et v si le besoin s'en fait sentir.

- Méthode 2 : ...

Deuxième étape : équation simplifiée ...

En reportant dans l'équation (E), on obtient $2\,x\,\dfrac{\partial \widetilde{f}}{\partial u} = 2\,x$, soit (puisque $x > 0$), $\dfrac{\partial \widetilde{f}}{\partial u} = 1$, d'où ...

Troisième étape : conclusion, dans les termes du problème ...

$< \mathcal{FIN} >$