Quadriques

Antoine MOTEAU antoine.moteau@wanadoo.fr

Table des matières

Quadriques.

L'espace affine euclidien de dimension 3, muni du repère orthonormal direct $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$, s'identifie à $\mathbb{R}^3$. On note $< | >$ le produit scalaire, $\| \ \|$ la norme associée et d la distance déduite.

1 Définition : Equation cartésienne (équation implicite)

Une quadrique $\mathcal{Q}$ est une surface définie, relativement à un repère orthonormal direct $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$, par une équation cartésienne (équation implicite) de la forme : $\big(M(x, y, z) \in \mathcal{Q} \Longleftrightarrow f(x, y, z) = 0\big)$ avec

$$f(x,y,z) = \underbrace{a\,x^2 + b\,y^2 + c\,z^2 + d\,x\,y + e\,x\,z + f\,y\,z}_{\text{partie quadratique}} + \underbrace{r\,x + s\,y + t\,z}_{\text{partie linéaire}} + \underbrace{\gamma}_{\text{constante}}$$

(la partie quadratique étant non nulle)

2 Quadrique à centre(s), centre(s)

D'après la formule de Taylor à l'ordre 2, pour un polynôme de 3 variables, de degré 2, on a :

$$\begin{aligned} f(x+h, y+k, z+\ell) &= f(x,y,z) + h\,\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) + k\,\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) + \ell\,\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) \\ &+ \frac{1}{2}\left[h^2\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z) + k^2\,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z) + \ell^2\,\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,z)\right. \\ &\left. +2\,h\,k\,\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(x,y,z) + 2\,h\,\ell\,\frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial x}(x,y,z) + 2\,k\,\ell\,\frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial y}(x,y,z)\right] + 0 \end{aligned}$$

Le point M, de coordonnées (x, y, z) est centre de symétrie

si et seulement si $\big(\forall\,(h,k,\ell),\ f(x+h, y+k, z+\ell) = 0 \Longleftrightarrow f(x-h, y-k, z-\ell) = 0\big)$

si et seulement si $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 0 \end{cases}$

- centre unique : ellipsoïde, cone, hyperboloïde à une ou deux nappes
- droite de centres : cylindre elliptique, cylindre hyperbolique, plans concourants, droite
- plan de centres : couple de plans parallèles ou confondus
- aucun centre : paraboloïde elliptique, paraboloïde hyperbolique, cylindre parabolique

(d'après la discussion sur la réduction algébrique réalisée ci-dessous)

3 Réduction algébrique de l'équation cartésienne générale

La réduction algébrique permet de déterminer l'équation réduite de la quadrique $\mathcal{Q}$ (en passant dans le repère orthonormé direct canoniquement associé à $\mathcal{Q}$).
On en déduit alors facilement l'identification et les éléments caractéristiques de $\mathcal{Q}$.

3.1 Ecriture matricielle canonique

$$f(x,y,z) = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} & \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z} \\ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} & \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z} \\ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z} & \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z} & \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r & s & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \gamma$$

$$= {}^tX\,S\,X + {}^tL\,X + \gamma$$

$$\text{avec } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad , \quad S = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} & \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z} \\ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} & \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z} \\ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z} & \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z} & \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{pmatrix} \quad , \quad L = \begin{pmatrix} r \\ s \\ t \end{pmatrix}$$

- S est la matrice symétrique et réelle associée à la partie quadratique de f
- L est la matrice colonne associée à la partie linéaire de f

3.2 Réduction de la matrice associée à la partie quadratique

Comme la matrice S est symétrique et réelle, elle peut s'écrire :

$$S = P\,D\,P^{-1} \quad \text{où} \quad \begin{cases} D = \begin{pmatrix} u & 0 & 0 \\ 0 & v & 0 \\ 0 & 0 & w \end{pmatrix} \text{ est une matrice diagonale} \\ \\ P \text{ est une matrice orthogonale et directe} \quad (P^{-1} = {}^tP \text{ et } \det(P) = +1) \end{cases}$$

Remarques.

- Le fait que $S = P\,D\,P^{-1}$ avec P orthogonale n'est pas automatique, il faut orthonormaliser une base de vecteurs propres pour avoir une telle propriété !
- Prendre P orthogonale et directe permet de changer de repère orthonormé sans déformations.

$$P = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \overrightarrow{I} & \overrightarrow{J} & \overrightarrow{K} \end{array} \\ \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \overrightarrow{i} \\ \overrightarrow{j} \\ \overrightarrow{k} \end{array}$$

P est la matrice de passage, de la base orthonormée canonique $\mathcal{B} = \left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$, à une base orthonormée directe $\mathcal{V} = \left(\overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}, \overrightarrow{K}\right)$ de vecteurs propres de S :

$$\begin{cases} \overrightarrow{I} \text{ est vecteur propre de } S \text{ associé à la valeur propre } u \\ \overrightarrow{J} \text{ est vecteur propre de } S \text{ associé à la valeur propre } v \\ \overrightarrow{K} \text{ est vecteur propre de } S \text{ associé à la valeur propre } w \end{cases}$$

3.3 Réduction des doubles produits : rotation du repère

Si le point M a pour coordonnées $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ dans le repère initial $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ et $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ dans le repère $\mathcal{R}' = (O, \overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}, \overrightarrow{K})$, on a :

$$X = P\,X' \quad \text{et} \quad {}^tX\,S\,X + {}^tL\,X + \gamma = {}^tX'\,D\,X' + {}^tL'\,X' + \gamma \quad \text{avec } L' = {}^tP\,L = \begin{pmatrix} r' \\ s' \\ t' \end{pmatrix}$$

Dans le repère $\mathcal{R}' = (O, \overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}, \overrightarrow{K})$, $\mathcal{Q}$ a pour équation :

$$u\,x'^2 + v\,y'^2 + w\,z'^2 + r'\,x' + s'\,y' + t'\,z' + \gamma = 0$$

Avantage : équation sans doubles produits $x'\,y'$, $x'\,z'$ ou $y'\,z'$.

Remarque.

- Si les trois valeurs propres sont égales et non nulles, $\mathcal{Q}$ est une sphère éventuellement vide ou réduite à un point.

- Si seulement deux valeurs propres sont égales et non nulles, $\mathcal{Q}$ est une surface de révolution d'axe dirigé par un vecteur propre associé à l'autre valeur propre.

3.4 Réduction de la partie linéaire : changement d'origine

L'équation obtenue dans le repère $\mathcal{R}' = (O, \overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}, \overrightarrow{K})$ s'écrit aussi :

$$\left(u\,x'^2 + r'\,x'\right) + \left(v\,y'^2 + s'\,y'\right) + \left(w\,z'^2 + t'\,z'\right) + \gamma = 0$$

- si $u \neq 0$, $\quad u\,x'^2 + r'\,x' = u\left[\left(x' + \dfrac{r'}{2\,u}\right)^2 - \left(\dfrac{r'}{2\,u}\right)^2\right]$ et on pose $x'' = x' + \dfrac{r'}{2\,u}$ (sinon x"=x')
- si $v \neq 0$, $\quad v\,y'^2 + s'\,y' = v\left[\left(y' + \dfrac{s'}{2\,v}\right)^2 - \left(\dfrac{s'}{2\,v}\right)^2\right]$ et on pose $y'' = y' + \dfrac{s'}{2\,v}$ (sinon y"=y')
- si $w \neq 0$, $\quad w\,z'^2 + t'\,z' = w\left[\left(z' + \dfrac{t'}{2\,w}\right)^2 - \left(\dfrac{t'}{2\,w}\right)^2\right]$ et on pose $z'' = z' + \dfrac{t'}{2\,w}$ (sinon z"=z')

On se place ainsi dans un repère $\mathcal{R}'' = (O'', \overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}, \overrightarrow{K})$, d'origine le point O'', où l'équation est plus simple.

Lorsque u ou v ou w est nul, on fera ultérieurement encore un changement d'origine, destiné à simplifier plus complètement l'équation ...

Remarque. On procède parfois dans un autre ordre :

1. Changement d'origine :
   - choix de l'origine au centre : ellipsoïde, hyperboloïde à une ou deux nappes
   - choix de l'origine à un centre : cylindre elliptique, cylindre hyperbolique, couples de plans
   - choix de l'origine au sommet : paraboloïde elliptique, paraboloïde hyperbolique
   - ...

   (à condition de savoir identifier la quadrique et calculer les coordonnées de la nouvelle origine)
2. Rotation du repère : choix d'axes de repère dirigés par les vecteurs propres de la matrice A. (repère orthonormé direct, centré en W, dont un des axes est l'axe focal).

3.4.1 Valeurs propres toutes non nulles et de même signe

On se place dans le repère $\mathcal{R}'' = \left(O'', \overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}, \overrightarrow{K}\right)$ d'origine le point $O'' = O - \dfrac{r'}{2\,u}\,\overrightarrow{I} - \dfrac{s'}{2\,v}\,\overrightarrow{J} - \dfrac{t'}{2\,w}\,\overrightarrow{K}$.
L'équation de $\mathcal{Q}$ dans $\mathcal{R}''$, $u\,x''^2 + v\,y''^2 + w\,z''^2 + \gamma'' = 0$, se met sous forme canonique :

Dans le repère $\mathcal{R}''$, $\mathcal{Q}$ a pour équation : $\dfrac{x''^2}{A^2} + \dfrac{y''^2}{B^2} + \dfrac{z''^2}{C^2} - \varepsilon = 0$ avec $A > 0, B > 0, C > 0$.

- si $\varepsilon = 0$, $\mathcal{Q}$ est l'ensemble réduit à O''
- si $\varepsilon = -1$, $\mathcal{Q}$ est l'ensemble vide
- si $\varepsilon = +1$ $\mathcal{Q}$ est un ellipsoïde

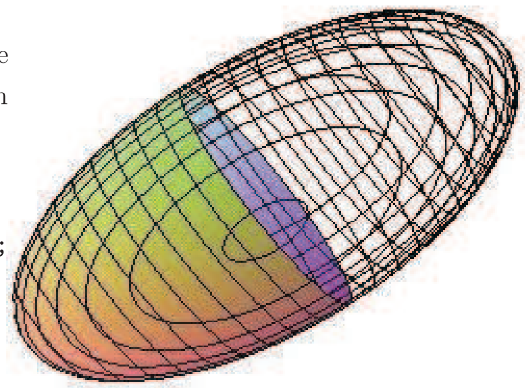
$\mathcal{Q}$ admet $\left\{\begin{array}{l}\text{les plans de coordonnées de } \mathcal{R}'' \text{ comme plans de symétrie,}\\ \text{les axes de } \mathcal{R}'' \text{ comme axes de symétrie,}\\ \text{l'origine de } \mathcal{R}'' \text{ comme centre de symétrie.}\end{array}\right.$

Lorsque $\varepsilon = +1$,

- si les trois valeurs propres sont égales, $\mathcal{Q}$ est une sphère de centre O'' et de rayon $A = B = C$
- si deux valeurs propres sont égales, $\mathcal{Q}$ est de révolution, autour de l'axe passant par O'' et dirigé par un vecteur propre associé à l'autre valeur propre.

Exemple 3.4.1.1. Paramètres d'une quadrique à centre unique

Dans ce cas, on fait la translation de repère avant la rotation



```
> restart: with(plots): with(linalg):
> f := (x,y,z) -> x^2-x*y+y^2+3*z^2-2*x+3*y-1;
Identification graphique rapide
> implicitplot3d(f(x,y,z),x=-3..3,y=-4..1,z=-2..2);
Recherche du centre W
> s:=solve({seq(D[i](f)(x,y,z),i=1..3)},{x,y,z}):
> W:=subs(s,[x,y,z]);     # ICI, un seul centre

COMMUN AUX QUADRIQUES A CENTRE UNIQUE :
1. Changement d'origine: Repère R1 d'origine W, translaté de R. Equation dans R1 :
> f1 := unapply( expand( f( x+W[1], y+W[2],z+W[3]) ), (x,y,z) );

2. Rotation du repère : R2, d'origine le centre W, d'axes // aux axes de la quadrique
a) Matrice S, associée à la partie quadratique, dans le repère R1
> S := matrix( 3,3, (i,j )-> D[i,j](f)(x,y,z)/2);
a') après réduction au centre, il n'y a plus de partie linéaire
b) Réduction de S
> Ep := [eigenvects(S)]:                     # ICI, 3 valeurs propres <> 0
> Delta := diag( seq(z[1] $ z[2], z=Ep ));
> Evon := map( normalize, GramSchmidt( [seq( op(op(3,z)), z=Ep)] )):
> P := transpose( matrix(Evon));
> if det(P) < 0 then P := evalm(-P) fi:      # Orthogonale et directe
c) Equation dans le repère R2 (déduit de R1 par rotation de matrice P) :
 > f2 := unapply( evalm( [x,y,z] &* Delta &* [x,y,z] ) + 0 + f1(0,0,0),(x,y,z));

3. Equation quasi réduite (à l'ordre et au signe près) dans R2. Paramètres A,B,C
> if f2(0,0,0) <> 0 then f2r := -f2(x,y,z)/f2(0,0,0) else f2r := f2(x,y,z) fi:
> A := 1/sqrt( abs(coeff(f2r,x,2))):   B := 1/sqrt( abs(coeff(f2r,y,2))):
> C := 1/sqrt( abs(coeff(f2r,z,2))):  # diviseurs non nuls

4. Formules de retour de R2 à R :  X -W = X1  et  X1 =  P X2
    Coordonnées dans R2 du point de coordonnées (x,y) dans R :
> H := evalm( P^(-1) &* ([x,y,z] - W));
Vérification   (retrouver l'équation initiale dans R)
> expand(f2( H[1], H[2],H[3] )) - f(x,y,z);      # = 0 attendu
```

3.4.2 Valeurs propres toutes non nulles et non de même signe

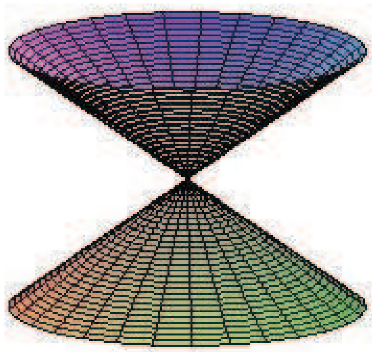
L'ordre d'énumération des valeurs propres est choisi tel que u et v soient de même signe.
On se place dans le repère $\mathcal{R}'' = \left(O'', \overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}, \overrightarrow{K}\right)$ d'origine le point $O'' = O - \dfrac{r'}{2\,u}\overrightarrow{I} - \dfrac{s'}{2\,v}\overrightarrow{J} - \dfrac{t'}{2\,w}\overrightarrow{K}$.
L'équation de $\mathcal{Q}$ dans $\mathcal{R}''$, $u\,x''^2 + v\,y''^2 + w\,z''^2 + \gamma'' = 0$, se met sous forme canonique :

Dans le repère $\mathcal{R}''$, $\mathcal{Q}$ a pour équation : $\dfrac{x''^2}{A^2} + \dfrac{y''^2}{B^2} - \dfrac{z''^2}{C^2} - \varepsilon = 0$ avec $A > 0, B > 0, C > 0$.

- si $\varepsilon = 0$, $\mathcal{Q}$ est un cône elliptique
- si $\varepsilon = -1$, $\mathcal{Q}$ est un hyperboloïde à deux nappes
- si $\varepsilon = +1$ $\mathcal{Q}$ est un hyperboloïde à une nappe

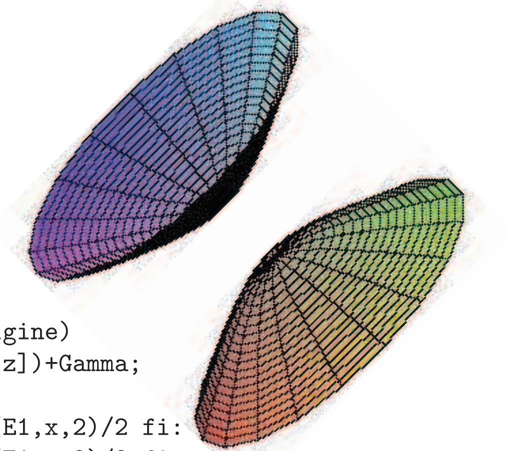
$\mathcal{Q}$ admet $\begin{cases} \text{les plans de coordonnées de } \mathcal{R}'' \text{ comme plans de symétrie,} \\ \text{les axes de } \mathcal{R}'' \text{ comme axes de symétrie,} \\ \text{l'origine de } \mathcal{R}'' \text{ comme centre de symétrie.} \end{cases}$

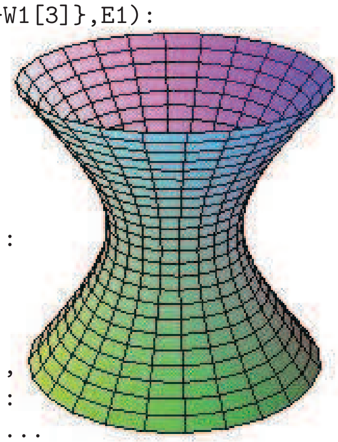
Si les deux valeurs propres u et v sont égales, $\mathcal{Q}$ est de révolution autour de l'axe $O''z''$.

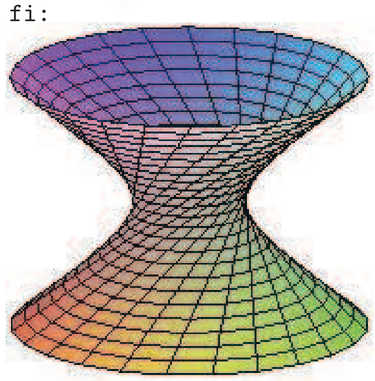


Exemple 3.4.2.1. Equation réduite d'une quadrique à centre

```
> f := (x,y,z) -> x^2-x*y+y^2+3*z^2-2*x+3*y-1;
COMMUN A TOUTES LES QUADRIQUES :
> S := matrix( 3,3, (i,j) -> D[i,j](f)(x,y,z)/2);
> L := [seq(D[i](f)(0,0,0), i=1..3)]: Gamma := f(0,0,0);
Réduction de S
> Ep := [eigenvects(S)];  valp := [eigenvals(S)];
Valeurs propres de même signe en tête, 0 en dernier :
> Sp := select( u -> op(1,u) > 0, Ep);
> Sp := sort( Sp, (u,v) -> evalb(op(1,u) < op(1,v)));
> Sn := select( u -> op(1,u) < 0, Ep);
> Sn := sort( Sn, (u,v) -> evalb(op(1,u) > op(1,v)));
> S0 := select( u -> op(1,u) = 0, Ep);
> sn := nops(select( u -> u < 0, valp));
> if sn = 2 then Ep := [op(Sn),op(Sp),op(S0)]
  else Ep := [op(Sp),op(Sn),op(S0)] fi:
> Delta := diag( seq(z[1] $ z[2], z=Ep ));
> Ev := [seq( op(op(3,z)), z=Ep)]:
> P := augment(op(map(normalize,GramSchmidt(Ev)))):
> if det(P) < 0 then P := evalm(-P) fi;  # Directe

Repère R1 (rotation) puis repère R2 (changement d'origine)
> E1:=evalm([x,y,z] &*Delta &*[x,y,z] +L &* P &*[x,y,z])+Gamma;
> W1 := [0,0,0]:
> if coeff(E1,x,2)<>0 then W1[1]:=-coeff(E1,x)/coeff(E1,x,2)/2 fi:
> if coeff(E1,y,2)<>0 then W1[2]:=-coeff(E1,y)/coeff(E1,y,2)/2 fi:
> if coeff(E1,z,2)<>0 then W1[3]:=-coeff(E1,z)/coeff(E1,z,2)/2 fi:
> E2 := subs({x=x+W1[1],y=y+W1[2],z=z+W1[3]},E1):
> E2 := sort(expand(E2), [x,y,z]);
> if coeff(E2,x,2)<0 then E2:=-E2 fi:

Equation réduite canonique (dans R2) :
> f2 := unapply(E2, (x,y,z)):
> if f2(0,0,0) <> 0
  then E2 := f2(x,y,z) /abs(f2(0,0,0)):
       f2 := unapply(E2, (x,y,z)) fi:

FIN : QUADRIQUES A CENTRE, CYLINDRES
        (ELLIPTIQUES ET HYPERBOLIQUES),
      PLANS CONCOURANTS OU PARALLELES :
> f2(x,y,z); # à identifier en détail ...
```







3.4.3 Zéro valeur propre simple et les deux autres valeurs propres de même signe

On choisi un ordre d'énumération des valeurs propres tel que les deux premières (u et v) soient non nulles.
On se place dans le repère $\mathcal{R}'' = \left(O'', \overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}, \overrightarrow{K}\right)$ d'origine le point $O'' = O - \dfrac{r'}{2\,u}\,\overrightarrow{I} - \dfrac{s'}{2\,v}\,\overrightarrow{J}$.
Dans le repère $\mathcal{R}''$, $\mathcal{Q}$ a pour équation : $u\,x''^2 + v\,y''^2 + t'\,z'' + \gamma'' = 0$.

1. Si $t' = 0$, l'équation de $\mathcal{Q}$ dans $\mathcal{R}''$ se met sous forme canonique :

Dans le repère $\mathcal{R}''$, $\mathcal{Q}$ a pour équation : $\dfrac{x''^2}{A^2} + \dfrac{y''^2}{B^2} - \varepsilon = 0$ avec $A > 0, B > 0$.

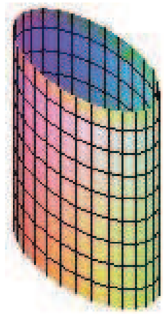
- si $\varepsilon = 0$, $\mathcal{Q}$ est l'axe $O''z''$
- si $\varepsilon = -1$, $\mathcal{Q}$ est l'ensemble vide
- si $\varepsilon = +1$ $\mathcal{Q}$ est un cylindre elliptique, de génératrices parallèles à $O''z''$

$\mathcal{Q}$ admet $\begin{cases} \text{les plans de coordonnées de } \mathcal{R}'' \text{ comme plans de symétrie,} \\ \text{les axes de } \mathcal{R}'' \text{ comme axes de symétrie,} \\ \text{tous les plans orthogonaux à } O''z'' \text{ comme plans de symétrie,} \\ \text{tous les points de l'axe } O''z'' \text{ comme centres de symétrie.} \end{cases}$

Si les deux valeurs propres u et v sont égales, $\mathcal{Q}$ est de révolution autour de l'axe $O''z''$.

Exemple 3.4.3.1. Equation réduite d'un cylindre elliptique

```
> f := (x,y,z) -> ...;
démarche commune : rotation (R1), translation (R2)
...
identification d'un cylindre elliptique
d'après les coefficients de l'équation réduite dans R2
```



2. Si $t' \neq 0$, on se place dans le repère $\mathcal{R}''' = \left(O''', \overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}, \overrightarrow{K}\right)$ d'origine le point $O''' = O'' - \dfrac{\gamma'''}{t'}\,\overrightarrow{K}$.
L'équation de $\mathcal{Q}$ dans $\mathcal{R}'''$, $u\,x'''^2 + v\,y'''^2 + t'\,z''' = 0$, se met sous forme canonique :

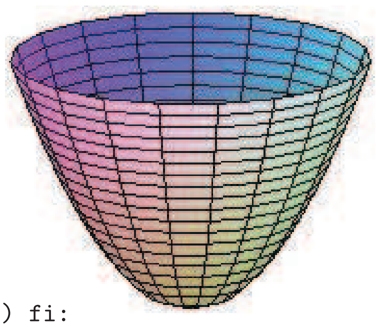
Dans le repère $\mathcal{R}'''$, $\mathcal{Q}$ a pour équation : $\dfrac{x'''^2}{A^2} + \dfrac{y'''^2}{B^2} - \varepsilon\,z''' = 0$ avec $A > 0\,,\ B > 0\,,\ \varepsilon = \pm 1$.

$\mathcal{Q}$ est un paraboloïde elliptique.

$\mathcal{Q}$ admet $\begin{cases} \text{les plans } x'''O'''z''' \text{ et } y'''O'''z''' \text{ comme plans de symétrie,} \\ \text{l'axe } O'''z''' \text{ comme axe de symétrie,} \end{cases}$

Si les deux valeurs propres u et v sont égales, $\mathcal{Q}$ est de révolution autour de l'axe $O'''z'''$.

Exemple 3.4.3.2. Equation réduite d'un paraboloïde elliptique



```
> f := (x,y,z) -> ...;
1. démarche commune : rotation (R1), translation (R2)
......
Identification d'un paraboloïde elliptique
d'après les coefficients de l'équation réduite dans R2
2. il faut continuer pour avoir le repère R3 :
> W2 := [0,0,0]:
> if coeff(E2,z) <> 0 then W2[3] := -f2(0,0,0)/coeff(E2,z) fi:
> E3 := subs({x=x+W2[1],y=y+W2[2],z=z+W2[3]},E2):
> E3 := sort(expand(E3), [x,y,z]);
Equation réduite canonique dans R3 :
> f3 := unapply(E3, (x,y,z)):
```

3.4.4 Zéro valeur propre simple et les deux autres valeurs propres de signe opposé

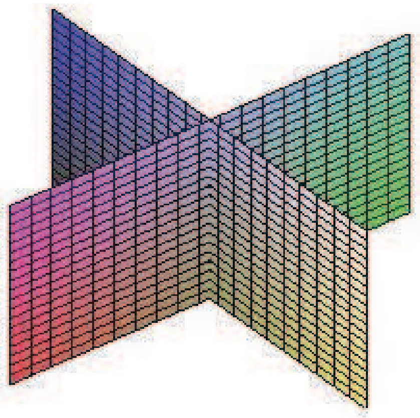
On choisi un ordre d'énumération des valeurs propres tel que les deux premières (u et v) soient non nulles.
On se place dans le repère $\mathcal{R}'' = \left(O'', \overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}, \overrightarrow{K}\right)$ d'origine le point $O'' = O - \dfrac{r'}{2\,u}\,\overrightarrow{I} - \dfrac{s'}{2\,v}\,\overrightarrow{J}$.
Dans le repère $\mathcal{R}''$, $\mathcal{Q}$ a pour équation : $u\,x''^2 + v\,y''^2 + t'\,z'' + \gamma'' = 0$.

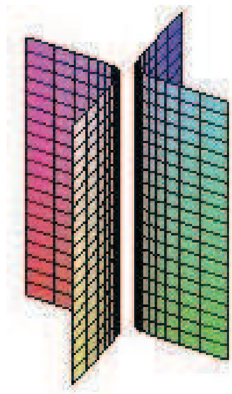
1. Si $t' = 0$, l'équation de $\mathcal{Q}$ dans $\mathcal{R}''$ se met sous forme canonique :

Dans le repère $\mathcal{R}''$, $\mathcal{Q}$ a pour équation : $\dfrac{x''^2}{A^2} - \dfrac{y''^2}{B^2} - \varepsilon = 0$ avec $A > 0, B > 0$.

- si $\varepsilon = 0$, $\mathcal{Q}$ est la réunion des deux plans concourants : $B\,x'' + A\,y'' = 0$, $B\,x'' - A\,y'' = 0$
- si $\varepsilon = \pm 1$ $\mathcal{Q}$ est un cylindre hyperbolique, de génératrices parallèles à $O''z''$

$\mathcal{Q}$ admet $\begin{cases} \text{les plans de coordonnées de } \mathcal{R}'' \text{ comme plans de symétrie,} \\ \text{les axes de } \mathcal{R}'' \text{ comme axes de symétrie,} \\ \text{tous les plans orthogonaux à } O''z'' \text{ comme plans de symétrie,} \\ \text{tous les points de l'axe } O''z'' \text{ comme centres de symétrie.} \end{cases}$





Exemple 3.4.4.1. Equation réduite : plans concourants, cylindre hyperbolique

```
> f := (x,y,z) -> ...;
démarche commune : rotation (R1), translation (R2)
...
```

2. Si $t' \neq 0$, on se place dans le repère $\mathcal{R}''' = \left(O''', \overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}, \overrightarrow{K}\right)$ d'origine le point $O''' = O'' - \dfrac{\gamma'''}{t'}\,\overrightarrow{K}$.
L'équation de $\mathcal{Q}$ dans $\mathcal{R}'''$, $u\,x'''^2 + v\,y'''^2 + t'\,z''' = 0$, se met sous forme canonique :

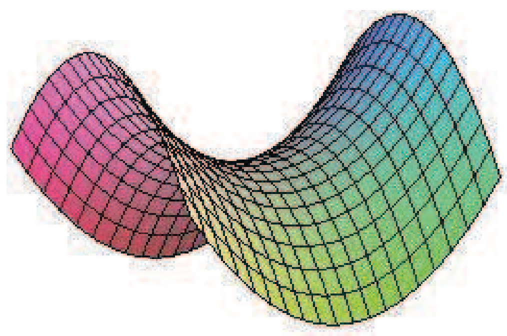
Dans le repère $\mathcal{R}'''$, $\mathcal{Q}$ a pour équation : $\dfrac{x'''^2}{A^2} - \dfrac{y'''^2}{B^2} - \varepsilon\,z''' = 0$ avec $A > 0\,,\ B > 0\,,\ \varepsilon = \pm 1$.

$\mathcal{Q}$ est un paraboloïde hyperbolique

$\mathcal{Q}$ admet $\begin{cases} \text{les plans } x'''O'''z''' \text{ et } y'''O'''z''' \text{ comme plans de symétrie,} \\ \text{l'axe } O'''z''' \text{ comme axe de symétrie,} \end{cases}$

Exemple 3.4.4.2. Equation réduite d'un paraboloïde hyperbolique

```
> f := (x,y,z) -> ...;
1. démarche commune :
   rotation (R1), translation (R2)
  ...
2. Repère R3 : même démarche que
   pour le paraboloïde elliptique
...
```



3.4.5 Zéro valeur propre double

On choisi un ordre d'énumération des valeurs propres tel que la première (u) soit non nulle.

On se place dans le repère $\mathcal{R}'' = \left(O'', \overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}, \overrightarrow{K}\right)$ d'origine le point $O'' = O - \dfrac{r'}{2\,u}\,\overrightarrow{I}$.

Dans le repère $\mathcal{R}''$, $\mathcal{Q}$ a pour équation : $u\,x''^2 + s'\,y'' + t'\,z'' + \gamma'' = 0$.

1. Si $s' \neq 0$ ou $t' \neq 0$, on change encore de repère (réduction de $s'\,y'' + t'\,z'' + \gamma''$) :
   (a) rotation d'axe $O''x''$:

   Soit $\overrightarrow{U}$, vecteur unitaire normal de la droite d'équations $\begin{cases} s'\,y'' + t'\,z'' + \gamma'' = 0 \\ x'' = 0 \end{cases}$ et $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{I} \wedge \overrightarrow{U}$.

   Dans le repère $\mathcal{R}''' = \left(O'', \overrightarrow{I}, \overrightarrow{U}, \overrightarrow{V}\right)$, $\mathcal{Q}$ a pour équation : $u\,x'''^2 + \alpha\,y''' + \beta = 0$, avec $\alpha \neq 0$

   (b) changement d'origine :

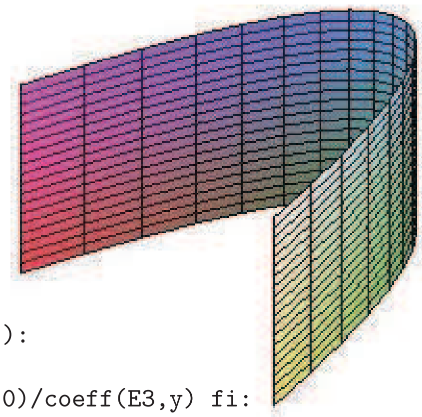
   On se place dans le repère $\mathcal{R}'''' = \left(O'''', \overrightarrow{I}, \overrightarrow{U}, \overrightarrow{V}\right)$ d'origine le point $O'''' = O'' - \dfrac{\beta}{\alpha}\,\overrightarrow{U}$.

Dans le repère $\mathcal{R}''''$, $\mathcal{Q}$ a pour équation : $x''''^2 - 2\,p\,y'''' = 0$ avec $p \neq 0$.

$\mathcal{Q}$ est un cylindre parabolique, de génératrices parallèles à $O''''z''''$

$\mathcal{Q}$ admet $\begin{cases} \text{le plan } x''''O''''z'''' \text{ comme plan de symétrie,} \\ \text{tous les plans orthogonaux à } O''''z'''' \text{ comme plans de symétrie,} \end{cases}$

Exemple 3.4.5.1. Equation réduite : cylindre parabolique



```
> f := (x,y,z) -> ...;
1. démarche commune : rotation (R1), translation (R2)
2. rotation complémentaire : repère R3
> U := normalize([0, coeff(E2,y), coeff(E2,z)]);
> if norm(U,2)= 0 then U := [0,1,0] fi:
> P2 := augment([1,0,0],U,crossprod([1,0,0], U));
> M := evalm(P2 &* [x,y,z]);  # Coordonnées dans R3
Equation dans R3
> E3 := f2(M[1],M[2],M[3]);  f3 := unapply(E3, (x,y,z)):
3. translation complémentaire : repère R4
> W3:=[0,0,0]: if coeff(E3,y)<>0 then W3[2]:=- f3(0,0,0)/coeff(E3,y) fi:
> E4 := expand(f3(x+W3[1], y+W3[2], z+W3[3]));  # Equation dans R4
```

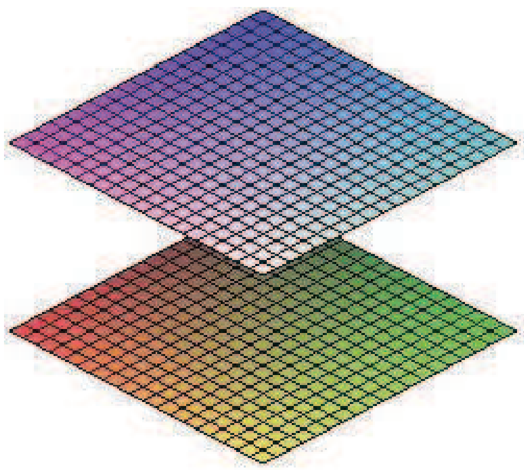
2. Si $s' = 0$ et $t' = 0$,

Dans le repère $\mathcal{R}''$, $\mathcal{Q}$ a pour équation : $x''^2 - \delta = 0$

- si $\delta < 0$, $\mathcal{Q}$ est l'ensemble vide
- si $\delta = 0$, $\mathcal{Q}$ est le plan d'équation $x'' = 0$ (double)
- si $\delta > 0$, $\mathcal{Q}$ est la réunion des deux plans parallèles $x'' = \sqrt{\delta}$ et $x'' = -\sqrt{\delta}$

Exemple 3.4.5.2. Equation réduite : plans

```
> f := (x,y,z) -> ...;
démarche commune :
rotation (R1), translation (R2)
...
```



4 Représentation paramétrique d'une quadrique (exemples)

On évitera les paramétrages qui découpent une quadrique à une nappe en plusieurs nappes. Par exemple, décomposer un H1 (à une nappe), d'équation réduite $\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}-\frac{z^2}{c^2}-1=0$, en la réunion de deux nappes d'équations respectives $z=C\sqrt{\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}-1}$ et $z=-C\sqrt{\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}-1}$ doit être considéré comme un <u>mauvais choix</u> (abus de racines carrées, conduisant à une discussion artificielle inutile).

4.1 Paramétrage d'un ellipsoïde

De $\frac{x''^2}{A^2}+\frac{y''^2}{B^2}+\frac{z''^2}{C^2}-1=0$, équation réduite dans $\mathcal{R}''$, on déduit un paramètrage dans $\mathcal{R}''$:

$$\begin{cases} x''=A\,\sin\phi\,\cos\theta \\ y''=B\,\sin\phi\,\sin\theta \\ z''=C\,\cos\phi \end{cases},\quad \begin{cases} \theta\in[0,2\,\pi[\\ \phi\in[0,\pi] \end{cases}$$

A l'aide des formules de changement de repère, on en déduit une représentation paramétrique dans le repère $\mathcal{R}$ initial : avec une rotation de matrice P (repère $\mathcal{R}'$) suivie de la translation au centre O'' (repère $\mathcal{R}''$), les formules sont successivement : $X:=P\,X'$ et $X'=X''+O''$.

Exemple 4.1.0.3. Représentation paramétrique d'un ellipsoïde (après identification)

```
f := (x,y,z) -> . . .
démarche commune: rotation (R1), translation (R2), identification ...
> A:=1/sqrt(abs(coeff(E2,x,2))): B:=1/sqrt(abs(coeff(E2,y,2))):
> C:=1/sqrt(abs(coeff(E2,z,2))):
> M2:=[A*sin(phi)*cos(theta),B*sin(phi)*sin(theta),C*cos(phi)]: # paramétrage dans R2
> M := evalm( P &* (M2+W1));      # paramétrage dans R
```

4.2 Paramétrage d'un cône elliptique

De $\frac{x''^2}{A^2}+\frac{y''^2}{B^2}-\frac{z''^2}{C^2}=0$, équation réduite dans $\mathcal{R}''$, on déduit un paramètrage dans $\mathcal{R}''$:

$$\begin{cases} x''=A\,|u|\,\cos\theta \\ y''=B\,|u|\,\sin\theta \\ z''=C\,u \end{cases},\quad \begin{cases} \theta\in[0,2\,\pi[\\ u\in\mathbb{R} \end{cases}$$

De même que précédement, on en déduit une représentation paramétrique dans le repère $\mathcal{R}$ initial.

Exemple 4.2.0.4. Représentation paramétrique d'un cône elliptique (après identification)

```
f := (x,y,z) -> . . .
démarche commune: rotation (R1), translation (R2), identification ... puis A, B, C et
> M2:=[A*abs(u)*cos(theta),B*abs(u)*sin(theta),C*u]: # paramétrage dans R2
> M := evalm( P &* (M2+W1));       # paramétrage dans R
```

4.3 Paramétrage d'un hyperboloïde à une nappe

4.3.1 Paramètrage trigonométrique (circulaire et hyperbolique) d'un H1

De $\frac{x''^2}{A^2}+\frac{y''^2}{B^2}-\frac{z''^2}{C^2}-1=0$, équation réduite dans $\mathcal{R}''$, on déduit un paramètrage dans $\mathcal{R}''$:

$$\begin{cases} x''=A\,\mathrm{ch}\,u\,\cos\theta \\ y''=B\,\mathrm{ch}\,u\,\sin\theta \\ z''=C\,\mathrm{sh}\,u \end{cases},\quad \begin{cases} \theta\in[0,2\,\pi[\\ u\in\mathbb{R} \end{cases}$$

De même que précédement, on en déduit une représentation paramétrique dans le repère $\mathcal{R}$ initial.

Exemple 4.3.1.1. Paramétrage trigonométrique d'un hyperboloïde à une nappe (après identification)

```
f := (x,y,z) -> . . .
démarche commune: rotation (R1), translation (R2), identification ... puis A, B, C et
> M2 := [A*cosh(u)*cos(theta),B*cosh(u)*sin(theta),C*sinh(u)]: # paramétrage dans R2
> M := evalm( P &* (M2+W1));       # paramétrage dans R
```

4.3.2 Paramètrage rectiligne d'un H1

Dans $\dfrac{x''^2}{A^2} + \dfrac{y''^2}{B^2} - \dfrac{z''^2}{C^2} - 1 = 0$, équation réduite dans $\mathcal{R}''$, on peut poser $\begin{cases} x'' = A\cos\theta + A\,h \\ y'' = B\sin\theta + B\,k \end{cases}$ et prendre $h = -\dfrac{z}{c}\sin\theta$ et $k = \dfrac{z}{c}\cos\theta$. En posant $\lambda = \dfrac{z}{C}$, on en déduit le paramétrage dans $\mathcal{R}''$:

$$\begin{cases} x'' = A\cos\theta & -\lambda\,A\sin\theta \\ y'' = B\sin\theta & +\lambda\,B\cos\theta \\ z'' = & +\lambda\,C \end{cases}, \begin{cases} \theta \in [0, 2\pi[\\ \lambda \in \mathbb{R} \end{cases} \qquad \text{(à } \theta \text{ constant, on a une droite)}$$

De même que précédement, on en déduit une représentation paramétrique dans le repère $\mathcal{R}$ initial.

Exemple 4.3.2.1. Paramétrage rectiligne d'un hyperboloïde à une nappe (après identification)

```
f := (x,y,z) -> . . .
démarche commune: rotation (R1), translation (R2), identification ...
> A:=1/sqrt(abs(coeff(E2,x,2))): B:=1/sqrt(abs(coeff(E2,y,2))):
> C:=1/sqrt(abs(coeff(E2,z,2))):
> M2 := [A*cos(theta)-u*A*sin(theta), B*sin(thteta)+u*B*cos(theta), u*C]: # dans R2
> M := evalm( P &* (M2+W1));       # paramétrage dans R
```

4.4 Paramétrage d'un demi-hyperboloïde à deux nappes

De $\dfrac{x''^2}{A^2} + \dfrac{y''^2}{B^2} - \dfrac{z''^2}{C^2} + 1 = 0$, équation réduite dans $\mathcal{R}''$, on déduit un paramètrage dans $\mathcal{R}''$:

$$\begin{cases} x'' = A\sqrt{u^2-1}\cos\theta \\ y'' = B\sqrt{u^2-1}\sin\theta \\ z'' = C\,u \end{cases}, \begin{cases} \theta \in [0, 2\pi[\\ u \in [1, +\infty[\text{ (nappe 1)} \quad \text{ou } u \in]-\infty, -1] \text{ (nappe 2)} \end{cases}$$

A l'aide des formules de changement de repère, on en déduit une représentation paramétrique dans le repère $\mathcal{R}$ initial : avec une rotation de matrice P (repère $\mathcal{R}'$) suivie de la translation au centre O'' (repère $\mathcal{R}''$), les formules sont successivement : $X := P\,X'$ et $X' = X'' + O''$.

Exemple 4.4.0.2. Paramétrage d'un demi-hyperboloïde à deux nappes (après identification)

```
f := (x,y,z) -> . . .
démarche commune: rotation (R1), translation (R2), identification ...
> A:=1/sqrt(abs(coeff(E2,x,2))): B:=1/sqrt(abs(coeff(E2,y,2))):
> C:=1/sqrt(abs(coeff(E2,z,2))):
> M2 := [A*sqrt(u^2-1)*cos(theta),B*sqrt(u^2-1)*sin(theta),C*u]: # paramétrage dans R2
> M := evalm( P &* (M2+W1));       # paramétrage dans R

> GH2a := plot3d([M[1],M[2],M[3]], theta=0..2*Pi, u=1..5,grid=[20,20]):
> GH2b := plot3d([M[1],M[2],M[3]], theta=0..2*Pi, u=1..5,grid=[20,20]):
> display( {GH2a,GH2b}, axes=none, tickmarks=[0,0,0] );
```

4.5 Paramétrage d'un cylindre elliptique

De $\dfrac{x''^2}{A^2} + \dfrac{y''^2}{B^2} - 1 = 0$, équation réduite dans $\mathcal{R}''$, on déduit un paramètrage dans $\mathcal{R}''$:

$$\begin{cases} x'' = A\cos\theta \\ y'' = B\sin\theta \\ z'' = u \end{cases}, \begin{cases} \theta \in [0, 2\pi[\\ u \in \mathbb{R} \end{cases}$$

A l'aide des formules de changement de repère, on en déduit une représentation paramétrique dans le repère $\mathcal{R}$ initial : avec une rotation de matrice P (repère $\mathcal{R}'$) suivie de la translation au centre O'' (repère $\mathcal{R}''$), les formules sont successivement : $X := P\,X'$ et $X' = X'' + O''$.

4.6 Paramétrage d'un paraboloïde elliptique

De $\dfrac{x'''^2}{A^2}+\dfrac{y'''^2}{B^2}-z'''=0$, équation réduite dans $\mathcal{R}'''$, on déduit comme paramètrage dans $\mathcal{R}'''$:

$$\begin{cases} x'''=A\,\sqrt{u}\,\cos\theta \\ y'''=B\,\sqrt{u}\,\sin\theta \\ z'''=u \end{cases},\begin{cases}\theta\in[0,2\,\pi[\\ u\in[0,+\infty[\end{cases}\quad \text{ou}\quad \begin{cases} x'''=u \\ y'''=v \\ z'''=\dfrac{u^2}{A^2}+\dfrac{v^2}{B^2} \end{cases},\left\{(u,v)\in\mathbb{R}^2\right.$$

A l'aide des formules de changement de repère, on en déduit une représentation paramétrique dans le repère $\mathcal{R}$ initial : avec une rotation de matrice P (repère $\mathcal{R}'$) suivie d'une première translation en O'' (repère $\mathcal{R}''$), puis d'une deuxième tranlation en O''' (repère $\mathcal{R}''$), les formules sont successivement : $X:=P\,X'$, $X'=X''+O''$ et $X''=X'''+O'''$.

4.7 Paramétrage d'un demi cylindre hyperbolique

De $\dfrac{x''^2}{A^2}-\dfrac{y''^2}{B^2}-1=0$, équation réduite dans $\mathcal{R}''$, on déduit comme paramètrage dans $\mathcal{R}''$:

$$\begin{cases} x''=A\,\mathrm{ch}\,t \quad \text{ou } x''=-A\,\mathrm{ch}\,t \\ y''=B\,\mathrm{sh}\,t \\ z''=u \end{cases},\begin{cases} t\in\mathbb{R} \\ u\in\mathbb{R}\end{cases}$$

A l'aide des formules de changement de repère, on en déduit une représentation paramétrique dans le repère $\mathcal{R}$ initial : avec une rotation de matrice P (repère $\mathcal{R}'$) suivie de la translation au centre O'' (repère $\mathcal{R}''$), les formules sont successivement : $X:=P\,X'$ et $X'=X''+O''$.

4.8 Paramétrage d'un paraboloïde hyperbolique

De $\dfrac{x'''^2}{A^2}-\dfrac{y'''^2}{B^2}-z'''=0$, équation réduite dans $\mathcal{R}'''$, on déduit comme paramètrage dans $\mathcal{R}'''$:

$$\begin{cases} x'''=A\,\sqrt{u}\,\mathrm{ch}\,t \\ y'''=B\,\sqrt{u}\,\mathrm{sh}\,t \\ z'''=u \end{cases},\begin{cases} t\in\mathbb{R}\\ u\in[0,+\infty[\end{cases}\quad \text{ou}\quad \begin{cases} x'''=u \\ y'''=v \\ z'''=\dfrac{u^2}{A^2}-\dfrac{v^2}{B^2} \end{cases},(u,v)\in\mathbb{R}^2$$

et l'on peut même obtenir un paramétrage rectiligne, en posant $\dfrac{x'''}{A}-\dfrac{y'''}{B}=u$ et $\dfrac{x'''}{A}+\dfrac{y'''}{B}=v$:

$$\begin{cases} x=\dfrac{A\,v}{2}+\quad u\times\dfrac{A}{2} \\ y=\dfrac{B\,v}{2}+\quad u\times\dfrac{-B}{2} \\ z=\quad\quad u\times v \end{cases},(u,v)\in\mathbb{R}^2$$

A l'aide des formules de changement de repère, on en déduit une représentation paramétrique dans le repère $\mathcal{R}$ initial : avec une rotation de matrice P (repère $\mathcal{R}'$) suivie d'une première translation en O'' (repère $\mathcal{R}''$), puis d'une deuxième tranlation en O''' (repère $\mathcal{R}''$), les formules sont successivement : $X:=P\,X'$, $X'=X''+O''$ et $X''=X'''+O'''$.

4.9 Paramétrage d'un cylindre parabolique

De $x''''^2-2\,p\,y''''=0$, équation réduite dans $\mathcal{R}''''$, on déduit comme paramètrage dans $\mathcal{R}''''$:

$$\begin{cases} x''''=t \\ y''''=\dfrac{t^2}{2\,p} \\ z''''=u \end{cases},\begin{cases} t\in\mathbb{R} \\ u\in\mathbb{R}\end{cases}$$

A l'aide des formules de changement de repère, on en déduit une représentation paramétrique dans le repère $\mathcal{R}$ initial : avec une rotation de matrice P (repère $\mathcal{R}'$) suivie d'une première translation en O'' (repère $\mathcal{R}''$), d'une rotation de matrice Q (repère $\mathcal{R}'''$) puis d'une deuxième tranlation en O'''' (repère $\mathcal{R}''''$), les formules sont successivement : $X:=P\,X'$, $X'=X''+O''$, $X''=Q\,X'''$ et $X'''=X''''+O''''$.

5 Eléments tangents (quadrique non dégénérée)

5.1 Plan tangent en un point

Le plan tangent à $\mathcal{Q}$, en un point $M(x,y,z)$ de $\mathcal{Q}$, est orthogonal au gradient de f en $M(x,y,z)$.

Le plan tangent P_{M_0}, au point $M_0\,(x_0,y_0,z_0)$ de $\mathcal{Q}$, a pour équation cartésienne :

$$m\,(x,y,z) \in P_{M_0} \quad \Longleftrightarrow \quad < \overrightarrow{M_0\,m} \mid \overrightarrow{grad}\,f(x_0,y_0,z_0) >= 0$$

Remarque. Si $\mathcal{Q}$ est une sphère, le plan tangent à $\mathcal{Q}$ en M_0 est orthogonale au rayon aboutissant en M_0.

Exemple 5.1.0.3. Equation cartésienne du plan tangent en un point M_0 :

```
> f := (x,y) -> x^2+2*y^2-z^2-2*x*y+x*z-2*x+3*y-2;        # nature ?
> M0 := [3,1,0];                               # M0 appartient à Q
> f(op(M0));                                   # vérification de l'appartenance
> Vn := [seq(D[i](f)(op(M0)), i=1..3];         # vecteur normal à Q en M0
> eq := dotprod( [x,y,z]-M0, Vn, 'orthogonal');
```

5.2 Points où le plan tangent a une direction donnée

Les points $M(x,y,y)$ de la quadrique $\mathcal{Q}$, en lequels $\mathcal{Q}$ admet un plan tangent dirigé par les vecteurs indépendants $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, sont les solutions du système :

$$\begin{cases} < \overrightarrow{grad}\,f(x,y,z) \mid \overrightarrow{u} > = 0 \\ < \overrightarrow{grad}\,f(x,y,z) \mid \overrightarrow{v} > = 0 \\ f(x,y,z) = 0 \end{cases}$$

- Pour un ellipsoïde, il y a toujours deux solutions
- Pour un hyperboloïde, il y a 0 ou 2 solutions
- Pour un paraboloïde, il y a 0 ou 1 solution
- ...

Exemple 5.2.0.4. Points d'un ellipsoïde où le plan tangent est de direction donnée.

Soit l'ellipsoïde $\mathcal{E}$, d'équation $x^2 - x\,y + y^2 + 3\,z^2 - 2\,x + 3\,y - 1 = 0$.
Déterminer les deux points de $\mathcal{E}$ où le plan tangent à $\mathcal{E}$ est dirigé par $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{i} + 2\,\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}$.

```
> f := (x,y,z) -> x^2-x*y+y^2+3*z^2-2*x+3*y-1;
> U := [1,2,0]; V := [0,1,-1];  # direction du plan
1.Equations traduisant l'orthogonalité du plan avec le gradient
> grad := [seq(D[i](f)(x,ynz), i=1..3)]:
> Eq1 := dotprod(grad,U,'orthogonal');
> Eq2 := dotprod(grad,V,'orthogonal');
2. Résolution du système (0, 1 ou 2 points, selon les quadriques et les vecteurs)
> Eq0 := f(x,y,z):               # ne pas oublier que l'on cherche un point de Q !
> s := solve( {Eq0, Eq1,Eq2}, {x,y}):
> s1 := allvalues(s):
> M1 := subs(s1[1], [x,y] ); M2 := subs(s1[2], [x,y] );
```

5.3 Plan tangent contenant une droite donnée

Soit $\mathcal{Q}$ une quadrique (non dégénérée) et une droite $\mathcal{D}$ ne recontrant pas $\mathcal{Q}$.
Un plan $\mathcal{P}$ contenant $\mathcal{D}$ est tangent à $\mathcal{Q}$ si et seulement si il existe $M(x,y,z) \in \mathcal{P}$ tel que $M(x,y,z) \in \mathcal{Q}$ et le plan tangent à $\mathcal{Q}$, en $M(x,y,z)$, contient $\mathcal{D}$.

> Soit $\mathcal{D}$ une droite dirigée par le vecteur $\overrightarrow{v}$ et passant par le point M_0.
> Un plan tangent à $\mathcal{Q}$, en $M(x,y,z)$, contient $\mathcal{D}$ si et seulement si
>
> $$\begin{cases} f(x,y,z) = 0 \\ < \overrightarrow{grad}\, f(x,y,z) \mid \overrightarrow{M_0\, M(x,y,z)} > = 0 \\ < \overrightarrow{grad}\, f(x,y,z) \mid \overrightarrow{v} > = 0 \end{cases}$$

Remarque. Un tel système aura 0, 1 ou 2 solutions, suivant les cas : nature de la quadrique, position particulière de la droite ...

Exemple 5.3.0.5. Points d'un ellipsoïde où le plan tangent contient une droite donnée

```
> f := (x,y,z) -> x^2-x*y+y^2+3*z^2-2*x+3*y-1;   # ellipsoïde
> M0 := [1,1,1]; U := [1,-2,1];             # droite D : Point et Vecteur
On vérifie que la droite D = M0 + h U ne rencontre pas la quadrique :
> M := evalm(M0+h*U):
> discrim(expand(f(M[1],M[2],M[3])),h);              # doit être < 0
Système définissant les points de contact
> grd := [seq(D[i](f)(x,y,z), i=1..3)];
> eq0 := f(x,y,z):           # ne pas oublier que l'on cherche un point de Q !
> eq1 := dotprod( [x,y,z]-M0, grd, 'orthogonal');
> eq2 := dotprod( U, grd, 'orthogonal');
Résolution
> s := solve( {eq0, eq1, eq2}, {x,y,z});     s := allvalues( s );
> M1 := subs( s[1], [x,y,z]): M2 := subs( s[2], [x,y,z] );
```

5.4 Tangentes issues d'un point

Une droite, issue d'un point M_0 extérieur à la quadrique $\mathcal{Q}$, est tangente à $\mathcal{Q}$ si et seulement si elle coupe $\mathcal{Q}$ en un point (double).
Soit une droite $\mathcal{D}$ passant par M_0 et dirigée par un vecteur $\overrightarrow{v} = a\,\overrightarrow{i} + b\,\overrightarrow{j} + c\,\overrightarrow{k}$ non nul ($a^2+b^2+c^2 \neq 0$).

- La droite $\mathcal{D}$ coupe $\mathcal{Q}$ si et seulement si il existe $h \in \mathbb{R}$ tel que $f(M_0 + h\,\overrightarrow{v}) = 0$.
- L'expression $f(M_0 + h\,\overrightarrow{v})$ est un polynôme du second degé en h.
- La droite $\mathcal{D}$ est tangente à $\mathcal{Q}$ si est seulement si il existe un unique $h \in \mathbb{R}$ tel que $f(M_0 + h\,\overrightarrow{v}) = 0$
  si et seulement si le discriminant de $f(M_0 + h\,\overrightarrow{v})$, relatif à h, est nul.

Le discriminant $\Delta(a,b,c)$ de $f(M_0 + h\,\overrightarrow{v})$ est une expression quadratique (forme quadratique), des trois inconnues a, b et c, qui s'écrit matriciellement $\Delta(a,b,c) = {}^tX\,A\,X$ avec $\begin{cases} A \text{ matrice } \underline{\text{symétrique réelle}} \\ {}^t(X) = (a,b,c) \end{cases}$
D'après la réduction de A à la forme diagonale, la forme quadratique $\Delta(a,b,c)$ s'anulle uniquement pour $(a,b,c) = (0,0,0)$ si et seulement si les valeurs propres de A sont non nulles et de même signe.

> - Si les valeurs propres de A sont non nulles et de même signe, il n'existe pas de tangente à $\mathcal{Q}$ issues de M_0
> - Si les valeurs propres de A ne sont pas toutes non nulles ou ne sont pas de même signe, il existe des tangentes à $\mathcal{Q}$ issues de M_0.
>   - ces tangentes sont les droites issues de M_0 et dirigées par les vecteurs $\overrightarrow{v} = a\,\overrightarrow{i} + b\,\overrightarrow{j} + c\,\overrightarrow{k}$ où (a,b,c) sont les solutions de l'équation ${}^tX\,A\,X = 0$
>   - on peut imposer aux vecteurs $\overrightarrow{v}$ d'être unitaires ($a^2+b^2+c^2 = 1$), pour résoudre plus facilement l'équation ${}^tX\,A\,X = 0$.

Remarque. M_0 est sur la quadrique si et seulement si A admet 0 comme valeur propre double (l'ensemble des droites tangentes est alors contenu dans un plan, qui est le plan tangent à $\mathcal{Q}$ en M_0).

Exemple 5.4.0.6. Existence de tangentes à un ellipsoïde, issues d'un point

Au lieu de chercher les valeurs propres de la matrice A de l'expression quadratique $\Delta(a, b, c)$, on se contentera d'examiner les coefficients de son polynôme caractéristique !

```
> f := (x,y,z) -> x^2-x*y+y^2+3*z^2-2*x+3*y-1;    # ellipsoïde
> M0 := [1/2,-1,1]:
> M := evalm( M0+h*[a,b,c] );
> d := unapply(discrim(f(M[1],M[2],M[3]),h), (a,b,c));
> A := matrix( 3,3, (i,j) -> D[i,j](d)(a,b,c)/2 );
> H := charpoly(A, t);
On cherche si les valeurs propres sont non nulles et de même signe, à l'aide
des signes des coefficients du polynôme H  (coeff(H,t,3) = 1 avec Maple) :
> if coeff(H,t,0) < 0 then r := -1 else r := 1 fi:
> sp := nops( select( u -> u > 0, [seq( coeff(H,t,i)*(r)^(i+1), i=0..2)]));
> if sp = 3 then print(`pas de tangentes issues de `, M0)
  else  print(`il existe des tangentes issues de `, M0) fi:
```

6 Intérieur et extérieur (quadrique non dégénérée)

Définition 6.0.1.

Une quadrique non dégénérée, d'équation $f(x, y, z) = 0$, partage le plan en trois parties disjointes :

- La surface elle même, d'équation $f(x, y, z) = 0$)
- L'extérieur : partie de l'espace, limitée par la surface, ensemble des points d'où l'on peut mener une tangente à la quadrique
- l'intérieur : le reste de l'espace

Deux points M_1 et M_2 sont d'un même coté (intérieur ou extérieur) si et seulement si $f(M_1) \times f(M_2) > 0$.

1. **Utilisation du centre (ellipsoïde ou hyperboloïde)** :

Ellipsoïde :	le centre Ω est à l'intérieur un point M est extérieur à l'ellipsoïde ssi $f(M) \times f(\Omega) < 0$
Hyperboloïde :	le centre Ω est à l'extérieur un point M est extérieur à l'hyperbole ssi $f(M) \times f(\Omega) > 0$

Exemple 6.0.0.7. Dans le cas d'une quadrique déjà identifiée comme étant un ellipsoïde,

```
> f := (x,y,z) -> x^2-x*y+y^2+3*z^2-2*x+3*y-1;   # ellipsoïde
> W := subs(solve({seq(D[i](f(x,y,z), i=1..3)},{x,y,z}),[x,y,z] );  # centre
> M0 := [1,1,1];
> if f(op(M0)) * f(op(W)) < 0 then print(M0, ` est extérieur`) fi:
```

2. **Autre méthode (ellipsoïde, hyperboloïdes, paraboloïdes, cylindres)** :

Un point M est à l'intérieur de la quadrique $\mathcal{Q}$ si et seulement si il n'existe pas de plan(s) tangent(s) à $\mathcal{Q}$ qui soient issues de M

Un point M est à l'extérieur de la quadrique $\mathcal{Q}$ si et seulement si il existe une droite passant par ce point et qui coupe la quadrique en un point double (droite tangente).

ce sera surtout utile dans le cas des quadriques qui ne sont pas à centre(s), pour lesquelles on n'identifie pas facilement l'intérieur et l'extérieur ....

7 Etc ...

< $\mathcal{FIN}$ >