

Arcs paramétrés en dimension 2 ou 3

Rectification.

Repère de Frenet.

Antoine MOTEAU antoine.moteau@wanadoo.fr

Table des matières

1	Tangente en un point d'un arc plan ou spatial, de classe \mathcal{C}^k, $k \geq 1$	2
1.1	Tangente en un point $M(t_0)$ régulier	2
1.2	Tangente en un point $M(t_0)$ singulier	2
2	Arcs de classe \mathcal{C}^k, étude locale	3
2.1	Etude locale d'un arc plan	4
2.2	Etude locale d'un arc spatial	4
2.2.1	Plans tangents	4
2.2.2	Plan normal	4
2.2.3	Plan osculateur	4
3	Etude d'un arc en vue de sa représentation graphique	5
3.1	Etude des arcs plans (résumé succinct de Sup)	5
3.1.1	Arcs définis par une représentation cartésienne fonctionnelle $y = y(x)$ ou $x = x(y)$	5
3.1.2	Arcs définis par une représentation cartésienne paramétrée $x = x(t), y = y(t)$	5
3.1.3	Arcs définis par une représentation polaire $r = r(\theta)$	6
3.1.4	Arcs définis par une représentation polaire paramétrée $r = r(t), \theta = \theta(t)$	7
3.1.5	Arcs définis par une représentation polaire réciproque $\theta = \theta(r)$	7
3.2	Etude d'un arc paramétré spatial	7
4	Rectification d'un arc : longueur, abscisse curviligne	8
4.1	Longueur d'un arc de classe \mathcal{C}^0	8
4.1.1	Ligne polygonale inscrite sur l'arc	8
4.1.2	Arc rectifiable	8
4.1.3	Propriétés de la longueur	8
4.2	Longueur d'un arc de classe \mathcal{C}^1 . Abscisse curviligne	8
4.3	Longueur et abscisse curviligne d'un arc de classe \mathcal{C}^0 et seulement \mathcal{C}^1 par morceaux	9
5	Paramétrage d'un arc de classe \mathcal{C}^1, par l'abscisse curviligne	10
6	Repère mobile de Frenet d'un arc plan	11
6.1	Vecteur unitaire tangent en un point régulier	11
6.2	Vecteur unitaire normal, courbure en un point birégulier	11
6.3	Centre de courbure en un point birégulier	12
6.4	Repère mobile de Frenet en un point birégulier	12
7	Calculs de la courbure en un point birégulier d'un arc plan	13
7.1	Calcul du rayon de courbure à l'aide de l'angle α	13
7.2	Expression générale de la courbure	13
7.3	Expressions particulières de la courbure	13
7.4	Rayon de courbure en un point origine de l'abscisse curviligne	14

Arcs paramétrés du plan ou de l'espace.

On considère ici les courbes (ou arcs) du plan et de l'espace, définie par une représentation paramétrique

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \text{ (ou } \mathbb{R}^3) \\ t &\longmapsto \overrightarrow{OM}(t) = f(t) \quad \left(\text{ou } t \longmapsto M(t) = O + f(t) \right) \end{aligned}$$

- Pour un arc spatial, la représentation est

$$\text{cartésienne paramétrée : } t \longmapsto \overrightarrow{OM}(t) = x(t) \vec{i} + y(t) \vec{j} + z(t) \vec{k}.$$

- Dans le cas d'un arc plan, cette représentation peut-être :

$$\text{cartésienne paramétrée : } t \longmapsto \overrightarrow{OM}(t) = x(t) \vec{i} + y(t) \vec{j}$$

$$\text{cartésienne fonctionnelle : } x \longmapsto \overrightarrow{OM}(x) = x \vec{i} + y(x) \vec{j}$$

$$\text{polaire : } \theta \longmapsto \overrightarrow{OM}(\theta) = r(\theta) \vec{u}(\theta)$$

$$\text{polaire paramétrée : } t \longmapsto \overrightarrow{OM}(t) = r(t) \vec{u}(\theta(t)) \quad \text{avec } \vec{u}(\alpha) = \cos \alpha \vec{i} + \sin \alpha \vec{j}$$

$$\text{ou même polaire inversée : } r \longmapsto \overrightarrow{OM}(r) = r \vec{u}(\theta(r))$$



1 Tangente en un point d'un arc plan ou spatial, de classe \mathcal{C}^k , $k \geq 1$

Au voisinage de t_0 , on a $M(t) = M(t_0) + (t - t_0) \frac{d\vec{M}}{dt}(t_0) + \vec{o}(t - t_0)$.

Définition 1.0.1.

Un point $M(t_0)$ tel que

- $\frac{d\vec{M}}{dt}(t_0) \neq \vec{0}$ est dit **régulier**. (si $\frac{d\vec{M}}{dt}(t_0) \neq \vec{0}$ et $\frac{d^2\vec{M}}{dt^2}(t_0) \neq \vec{0}$, $M(t_0)$ est dit **bi-régulier**)
- $\frac{d\vec{M}}{dt}(t_0) = \vec{0}$ est dit **singulier** ou **stationnaire**

1.1 Tangente en un point $M(t_0)$ régulier

$$\frac{M(t) - M(t_0)}{t - t_0} \xrightarrow{t \rightarrow t_0} \frac{d\vec{M}}{dt}(t_0) \neq \vec{0}.$$

La tangente à l'arc en un point régulier de paramètre t_0 est dirigée par le vecteur $\frac{d\vec{M}}{dt}(t_0)$.

1.2 Tangente en un point $M(t_0)$ singulier

Le vecteur $\frac{d\vec{M}}{dt}(t_0)$ est nul et ne peut pas être interprété comme un vecteur directeur.

Si l'arc est de classe \mathcal{C}^k , avec k assez grand, et s'il existe un plus petit entier p tel que $\frac{d^p\vec{M}}{dt^p}(t_0) \neq \vec{0}$, la formule de Taylor à l'ordre p en t_0 s'écrit :

$$M(t) = M(t_0) + 0 + \frac{(t - t_0)^p}{p!} \frac{d^p\vec{M}}{dt^p}(t_0) + \vec{o}((t - t_0)^p)$$

Dans ce cas, $\frac{M(t) - M(t_0)}{(t - t_0)^p} \xrightarrow{t \rightarrow t_0} \frac{d^p\vec{M}}{dt^p}(t_0) \neq \vec{0}$.

La tangente à l'arc en un point singulier de paramètre t_0 est dirigée par le vecteur $\frac{d^p\vec{M}}{dt^p}(t_0)$.
(où p est le premier entier > 0 tel que $\frac{d^p\vec{M}}{dt^p}(t_0) \neq \vec{0}$)

2 Arcs de classe \mathcal{C}^k , étude locale

Définition 2.0.1. (Entiers caractéristiques)

En un point $M(t_0)$,

- le premier entier caractéristique est le plus petit entier $p > 0$ tel que $\overrightarrow{M^{(p)}(t_0)} \neq \vec{0}$
- le deuxième entier caractéristique est le plus petit entier $q > p$ tel que la famille $\left(\overrightarrow{M^{(p)}(t_0)}, \overrightarrow{M^{(q)}(t_0)}\right)$ soit libre.

Remarque. les entiers caractéristiques p et q pourraient ne pas exister ...

Remarque.

- Dans le cas d'un arc plan, on n'a que deux entiers caractéristiques p et q ($0 < p < q$), tels que

$$\left(\overrightarrow{M^{(p)}(t_0)}, \overrightarrow{M^{(q)}(t_0)}\right) \text{ est une base de } \mathbb{R}^2.$$

- Dans le cas d'un arc spatial, on pourrait introduire un troisième entier caractéristique r , avec $0 < p < q < r$, tel que

$$\left(\overrightarrow{M^{(p)}(t_0)}, \overrightarrow{M^{(q)}(t_0)}, \overrightarrow{M^{(r)}(t_0)}\right) \text{ est une base de } \mathbb{R}^3.$$

Dans tous ces cas, la tangente en $M(t_0)$ est dirigée par $\overrightarrow{M^{(p)}(t_0)}$ et les vecteurs $\overrightarrow{M^{(q)}(t_0)}$ (et $\overrightarrow{M^{(r)}(t_0)}$) sont utilisés pour préciser, localement, l'allure de la courbe.

Détail, dans le cas d'un arc plan :

$$M(t) = M(t_0) + (t - t_0)^p \left[\frac{1}{p!} \overrightarrow{M^{(p)}(t_0)} + \underbrace{\sum_{i=p+1}^{q-1} (t - t_0)^{i-p} \frac{1}{i!} \overrightarrow{M^{(i)}(t_0)}}_{\mathcal{E}_1(t - t_0) \overrightarrow{M^{(p)}(t_0)}} \right] + (t - t_0)^q \frac{1}{q!} \overrightarrow{M^{(q)}(t_0)}$$

$$+ (t - t_0)^q \overrightarrow{\mathcal{E}(t - t_0)} \quad \text{avec} \quad \lim_{t \rightarrow t_0} \mathcal{E}_1(t - t_0) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow t_0} \overrightarrow{\mathcal{E}(t - t_0)} = \vec{0}$$

$\overrightarrow{\mathcal{E}(t - t_0)}$ se partage en ses deux composantes sur $\overrightarrow{M^{(p)}(t_0)}$ et $\overrightarrow{M^{(q)}(t_0)}$:

$$\overrightarrow{\mathcal{E}(t - t_0)} = \mathcal{E}_2(t - t_0) \overrightarrow{M^{(p)}(t_0)} + \mathcal{E}_3(t - t_0) \overrightarrow{M^{(q)}(t_0)} \quad \text{où} \quad \begin{cases} \lim_{t \rightarrow t_0} \mathcal{E}_2(t - t_0) = 0 \\ \lim_{t \rightarrow t_0} \mathcal{E}_3(t - t_0) = 0 \end{cases}$$

$$\text{Ainsi } M(t) = M(t_0) + (t - t_0)^p \left[\frac{1}{p!} + \mathcal{E}_1(t - t_0) + (t - t_0)^{q-p} \mathcal{E}_2(t - t_0) \right] \underbrace{\overrightarrow{M^{(p)}(t_0)}}_{\text{vecteur tangent}}$$

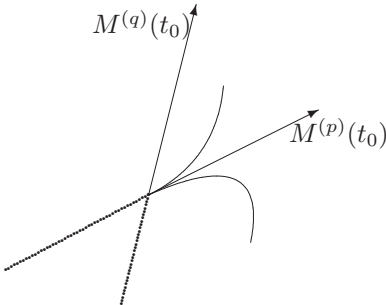
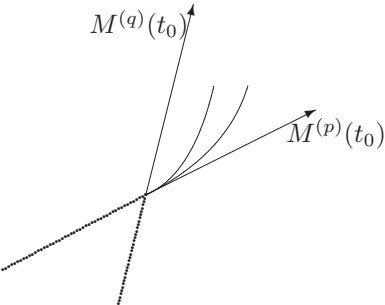
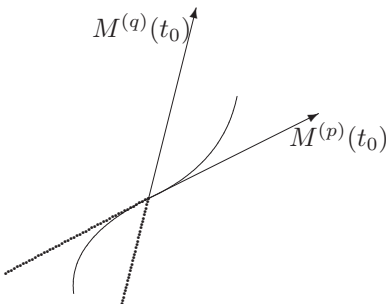
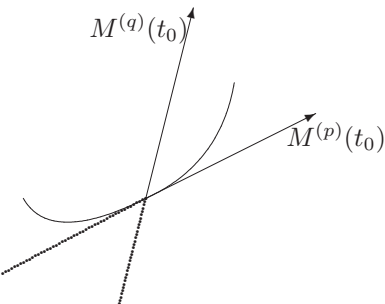
$$+ (t - t_0)^q \left[\frac{1}{q!} + \mathcal{E}_3(t - t_0) \right] \underbrace{\overrightarrow{M^{(q)}(t_0)}}_{\text{vecteur de position}}$$

Détail, dans le cas d'un arc spatial : non traité (inusité).

2.1 Etude locale d'un arc plan

Pour t voisin de t_0 ,

- la composante de $\overrightarrow{M(t_0)M(t)} = M(t) - M(t_0)$ sur $\overrightarrow{M^{(p)}(t_0)}$ est du signe de $(t - t_0)^p$
- la composante de $\overrightarrow{M(t_0)M(t)} = M(t) - M(t_0)$ sur $\overrightarrow{M^{(q)}(t_0)}$ est du signe de $(t - t_0)^q$

	q impair	q pair
p pair	Point de rebroussement de première espèce 	Point de rebroussement de deuxième espèce 
p impair	Point d'inflexion 	Point à allure ordinaire 

2.2 Etude locale d'un arc spatial

2.2.1 Plans tangents

Tout plan contenant la tangente en un point est qualifié de plan tangent en ce point

Remarque. Il y a donc une infinité de plans tangents en un point ...

2.2.2 Plan normal

Le plan orthogonal à la tangente en un point est dit plan normal à l'arc en ce point.

Si on note $\mathcal{P}_n(t_0)$ le plan normal en $M(t_0)$,

$$m(x, y, z) \in \mathcal{P}_n(t_0) \text{ ssi } \langle \overrightarrow{M(t_0)m} \mid \overrightarrow{M^{(p)}(t_0)} \rangle = 0.$$

2.2.3 Plan osculateur

Le plan osculateur en $M(t_0)$ est le plan passant par $M(t_0)$ et dirigé par les vecteurs $\overrightarrow{M^{(p)}(t_0)}$ et $\overrightarrow{M^{(q)}(t_0)}$.

Remarque. Le plan osculateur en $M(t_0)$ est un plan tangent en $M(t_0)$ et on pourrait le qualifier de "meilleur plan tangent" en $M(t_0)$.

Si on note $\mathcal{P}_O(t_0)$ le plan osculateur en $M(t_0)$,

$$m(x, y, z) \in \mathcal{P}_O(t_0) \text{ ssi } \det_C \left(\overrightarrow{M(t_0)m}, \overrightarrow{M^{(p)}(t_0)}, \overrightarrow{M^{(q)}(t_0)} \right) = 0.$$

3 Etude d'un arc en vue de sa représentation graphique

3.1 Etude des arcs plans (résumé succinct de Sup)

Objectif : $\left\{ \begin{array}{l} \text{obtenir une représentation graphique } \underline{\text{convenable}} \text{ de l'arc, } \underline{\text{avec très peu de points}}, \\ \text{déceler et préciser certaines particularités} \dots \end{array} \right.$

On commencera toujours par étudier

- soigneusement l'ensemble de définition (ce qui évite des incohérences)
- la possibilité de **réduire l'ensemble d'étude** (ce qui évite de faire plusieurs fois un même travail !)

Les tableaux de variations, de signes doivent être limités aux valeurs essentielles : uniquement celles où il y a changement de variation, de signe. Les autres valeurs, si besoin, seront mise à part, dans un tableau de valeurs complémentaire.

3.1.1 Arcs définis par une représentation cartésienne fonctionnelle $y = y(x)$ ou $x = x(y)$

- Tableau de variation net
- Branches infinies. Par exemple, si $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = \infty$, étude de $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y(x)}{x}$:
 - si $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y(x)}{x} = \infty$, branche "parabolique" dans la direction Oy
 - si $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y(x)}{x} = 0$, branche "parabolique" dans la direction Ox
 - si $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y(x)}{x} = a \in \mathbb{R}$, branche infinie dans la direction d'équation $y = ax$, à préciser :
 - si $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) - ax = b \in \mathbb{R}$, asymptote rectiligne d'équation $y = ax + b$
et, si besoin, on peut étudier les positions relatives de la courbe et de cette asymptote, soit globalement, soit au voisinage de l'infini.
 - si $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) - ax = \infty$, branche "parabolique" dans la direction d'équation $y = ax$.
 - sinon, ...
- Graphe obligatoire, avec très peu de points et une ou deux tangentes.
- Compléments (si besoin) : points d'inflexion, concavité, ...

3.1.2 Arcs définis par une représentation cartésienne paramétrée $x = x(t), y = y(t)$

- Le tableau des variations conjointes fait apparaître les points singuliers, les branches infinies.
- Etude locale des **points singuliers** (ce qui permet d'affiner le graphe).
- Etude des **branches infinies** (ce qui donne les tendances du graphes à la limite du cadre de tracé).

Par exemple, si $\lim_{t \rightarrow \alpha} x(t) = \infty$ et $\lim_{t \rightarrow \alpha} y(t) = \infty$, étude de $\lim_{t \rightarrow \alpha} \frac{y(t)}{x(t)}$:

- si $\lim_{t \rightarrow \alpha} \frac{y(t)}{x(t)} = \infty$, branche "parabolique" dans la direction Oy
- si $\lim_{t \rightarrow \alpha} \frac{y(t)}{x(t)} = 0$, branche "parabolique" dans la direction Ox
- si $\lim_{t \rightarrow \alpha} \frac{y(t)}{x(t)} = a \in \mathbb{R}$, branche infinie dans la direction d'équation $y = ax$, à préciser :
 - si $\lim_{t \rightarrow \alpha} y(t) - ax(t) = b \in \mathbb{R}$, asymptote rectiligne d'équation $y = ax + b$
et, si besoin, on peut étudier les positions relatives de la courbe et de cette asymptote, soit globalement, soit au voisinage de $t = \alpha$.
 - si $\lim_{t \rightarrow \alpha} y(t) - ax(t) = \infty$, branche "parabolique" dans la direction d'équation $y = ax$.
 - sinon, ...
- Graphe obligatoire, avec très peu de points et une ou deux tangentes.
- Compléments éventuels :
 - points d'inflexion non singuliers ($p = 1$ et q impair),
 - concavité (voir courbure, changement de signe de la courbure),
 - points multiples (correspondant à plusieurs valeurs du paramètre) :
résoudre $\begin{cases} x(t_1) = x(t_2) \\ y(t_1) = y(t_2) \end{cases}$ avec $t_1 \neq t_2$...

3.1.3 Arcs définis par une représentation polaire $r = r(\theta)$

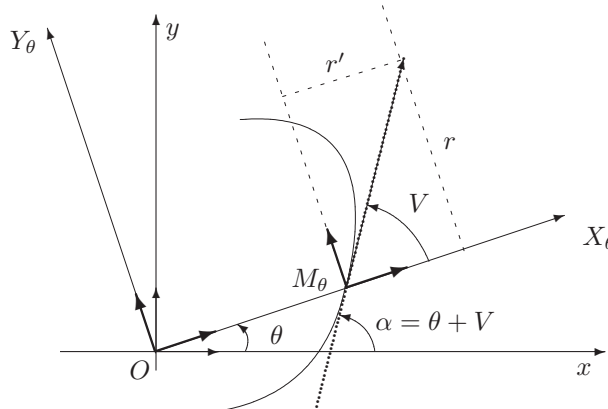
- Ensemble de définition
- Réduction de l'ensemble d'étude :
 - période (éventuelle) ... Etude sur une période T et **rotations d'angle T en QSP multiple de 2π**
 - anti-période (éventuelle) ...
 - parité : $r(\theta) = r(-\theta)$ (simulation avec une figure) d'où symétrie par rapport à ... et étude réduite à un demi-intervalle où $\theta \geq 0$
 - imparité : $r(\theta) = -r(-\theta)$ (simulation avec une figure) d'où symétrie par rapport à ... et étude réduite à un demi-intervalle où $\theta \geq 0$
 - autres, par exemple :
 - $r(\pi - \theta) = r(\theta)$ (simulation avec une figure) d'où symétrie par rapport à ... et étude réduite à un demi-intervalle où $\theta \leq \frac{\pi}{2}$
 - $r(\alpha + \theta) = r(\alpha - \theta)$ (simulation avec une figure) d'où symétrie par rapport à ... et étude réduite à un demi-intervalle où $\theta \leq \alpha$
 - $r(\alpha + \theta) = -r(\alpha - \theta)$ (simulation avec une figure) d'où symétrie par rapport à ... et étude réduite à un demi-intervalle où $\theta \leq \alpha$
 - ...
- Tableau du signe de r (on peut se passer des variations, souvent compliquées).
- Tableau de quelques valeurs, avec pente de la tangente dans le repère local :

En notant $\vec{u} = \vec{u}(\theta) = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}$, $\vec{v} = \vec{v}(\theta) = \frac{d\vec{u}}{d\theta} = \vec{u}(\theta + \pi/2)$, on a :

$$\overrightarrow{OM} = r \vec{u} \quad \text{et} \quad \frac{d\overrightarrow{OM}}{d\theta} = r' \vec{u} + r \vec{v}.$$

Si V est l'angle formé par la tangente en M avec l'axe mobile $OX(\theta)$,

$$\tan(V) = \frac{r}{r'}.$$

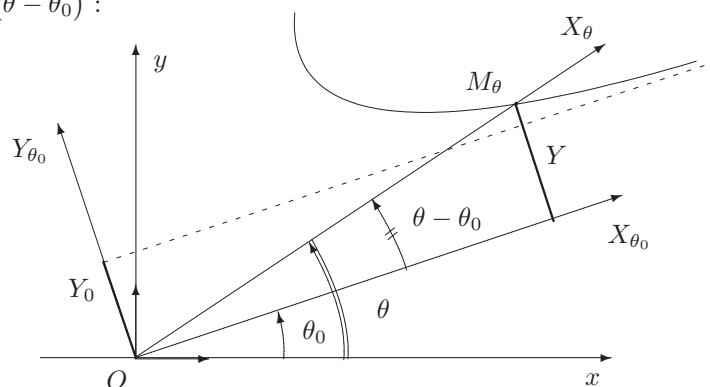


- Branches infinies :
 - branche infinie "spirale" : $\lim_{\theta \rightarrow \infty} r(\theta) = \infty$,
 - branche infinie "cercle" : $\lim_{\theta \rightarrow \infty} r(\theta) = a \in \mathbb{R}$,
 - branche infinie selon la direction d'angle polaire $\theta_0 \in \mathbb{R}$: $\lim_{\theta \rightarrow \theta_0} r(\theta) = \infty$.

On étudie alors la quantité $Y = r(\theta) \sin(\theta - \theta_0)$:

- $\lim_{\theta \rightarrow \theta_0} r(\theta) \sin(\theta - \theta_0) = Y_0 \in \mathbb{R}$:
asymptote d'équation $Y = Y_0$, dans le repère d'angle polaire θ_0 .
- $\lim_{\theta \rightarrow \theta_0} r(\theta) \sin(\theta - \theta_0) = \infty$:
branche "parabolique", dans la direction d'angle polaire θ_0 .
- sinon ...

Remarque. On posera $h = \theta - \theta_0$ et on développera $Y = r(\theta_0 + h) \sin(h)$ à l'aide d'un DL quand h tends vers 0 ...



- Graphe **obligatoire**, avec **très peu de points** et une ou deux tangentes.
- Compléments : point multiple, ...

3.1.4 Arcs définis par une représentation polaire paramétrée $r = r(t), \theta = \theta(t)$

- Tableau des variations conjointes de r et de θ .
- Tableau de quelques valeurs, avec pente de la tangente dans le repère local :

$$\overrightarrow{OM(t)} = r(t) \vec{u}(\theta(t)) \quad \text{et} \quad \frac{d\overrightarrow{OM(t)}}{dt} = r'(t) \vec{u}(\theta(t)) + r(t) \theta'(t) \vec{v}(\theta(t)) \quad \text{d'où} \quad \boxed{\tan V = \frac{r(t) \theta'(t)}{r'(t)}}.$$

$$\text{On peut écrire aussi : } \tan V = \frac{r(t)}{\frac{dr(t)}{d\theta}} = \frac{r(t)}{\frac{dr(t)}{dt} \frac{dt}{d\theta}} = \frac{r(t) \theta'(t)}{r'(t)}$$

- Branches infinies :

- branche infinie "spirale" : $\begin{cases} \lim_{t \rightarrow \alpha} \theta(t) = \infty \\ \lim_{t \rightarrow \alpha} r(t) = \infty \end{cases}$

- branche infinie "cercle" : $\begin{cases} \lim_{t \rightarrow \alpha} \theta(t) = \infty \\ \lim_{t \rightarrow \alpha} r(t) = a \in \mathbb{R} \end{cases}$

- branche infinie selon la direction d'angle polaire $\theta_0 \in \mathbb{R}$: $\begin{cases} \lim_{t \rightarrow \alpha} \theta(t) = \theta_0 \in \mathbb{R} \\ \lim_{t \rightarrow \alpha} r(t) = \infty \end{cases}$

On étudie alors la quantité $Y = r(t) \sin(\theta(t) - \theta_0)$:

- $\lim_{t \rightarrow \alpha} r(t) \sin(\theta(t) - \theta_0) = Y_0 \in \mathbb{R}$:

droite asymptote d'équation $Y = Y_0$, dans le repère d'angle polaire θ_0 .

- $\lim_{t \rightarrow \alpha} r(t) \sin(\theta(t) - \theta_0) = \infty$:

branche "parabolique", dans la direction d'angle polaire θ_0 .

- sinon ...

- Graphe **obligatoire**, avec très peu de points et une ou deux tangentes.
- Compléments ...

3.1.5 Arcs définis par une représentation polaire réciproque $\theta = \theta(r)$

Remarque. On peut considérer un tel arc comme un arc polaire paramétré : $\begin{cases} \theta = \theta(t) \\ r = t \end{cases}$

- Tableau des variations de θ en fonction de r et inversion morceau par morceau de ce tableau, pour obtenir plusieurs tableaux de variations de r en fonction de θ (la courbe sera la juxtaposition de plusieurs morceaux).
- Tableau de quelques valeurs, avec pente de la tangente dans le repère local : $\tan V = \frac{r(t)}{r'(t)} \theta'(t) = r \theta'(r)$.
- Branches infinies (voir arc polaire paramétré)
- Graphe **obligatoire**, avec peu de points, en précisant les points de jonction et la tangente (à gauche, à droite) en chaque point de jonction.
- Compléments ...

3.2 Etude d'un arc paramétré spatial

Ici, il est difficile d'obtenir une représentation graphique ...

On pourra commencer par

- représenter les projections orthogonales sur les plans de coordonnées,
- déceler certaines particularités ; points singuliers, points non biréguliers ;

puis, si on dispose de quelques talents artistiques, faire une représentation en perspective ... en cherchant une surface simple sur laquelle la courbe est tracée.

4 Rectification d'un arc : longueur, abscisse curviligne

On considère un arc admettant un paramétrage $\left(\begin{array}{ccc} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \text{ ou } \mathbb{R}^3 \\ t & \longmapsto & M(t) = f(t) \end{array} \right)$ de classe \mathcal{C}^k , avec $k \geq 0$, sur un intervalle fermé borné (ou segment) $I = [a, b]$.

4.1 Longueur d'un arc de classe \mathcal{C}^0

4.1.1 Ligne polygonale inscrite sur l'arc

Pour une subdivision $\sigma = (t_0, t_1, \dots, t_n)$ de l'intervalle $[a, b]$, comprenant $n + 1$ points et de pas $\rho(\sigma)$:

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n = b \quad \text{avec } \rho(\sigma) = \max_{i=0 \dots n-1} |t_{i+1} - t_i|$$

la ligne polygonale associée à la subdivision σ est la ligne brisée joignant les points successifs de l'arc :

$$M(t_0), M(t_1), \dots, M(t_n)$$

et on note $\ell(\sigma)$ la longueur de cette ligne : $\ell(\sigma) = \sum_{i=0}^{n-1} \left\| \overrightarrow{M(t_i) M(t_{i+1})} \right\|_2$.

4.1.2 Arc rectifiable

Définition 4.1.1.

Un arc de classe \mathcal{C}^0 sur $[a, b]$ est dit rectifiable si l'ensemble des $\ell(\sigma)$ est majoré.

La longueur d'un arc rectifiable est la borne supérieure des $\ell(\sigma)$.

Définition 4.1.2.

Un arc de classe \mathcal{C}^0 sur un intervalle I non fermé ou non borné est dit rectifiable si tout arc obtenu par la restriction du paramétrage à un intervalle fermé borné inclus dans I est rectifiable.

(mais il n'est pas toujours possible de définir une longueur de l'arc)

4.1.3 Propriétés de la longueur

Théorème 4.1.1. Additivité de la longueur

Soit (Γ) un arc de classe \mathcal{C}^0 sur l'intervalle $[a, b]$, de longueur $L(a, b)$.

Pour $c \in]a, b[$, si on note

- (Γ_1) le sous arc de (Γ) dont le paramètre est réduit à l'intervalle $[a, c]$
- (Γ_2) le sous arc de (Γ) dont le paramètre est réduit à l'intervalle $[c, b]$

Alors (Γ_1) et (Γ_2) sont des arcs de classe \mathcal{C}^0 , de longueurs respectives $L(a, c)$ et $L(c, b)$ vérifiant

$$L(a, b) = L(a, c) + L(c, b) \quad (\text{Formule de Chasles})$$

Preuve. Il suffit de considérer des subdivisions de $[a, c] \cup [c, b]$ comprenant le point c .

4.2 Longueur d'un arc de classe \mathcal{C}^1 . Abscisse curviligne

Théorème 4.2.1. Calcul de la longueur

Tout arc, de paramétrage $t \longmapsto \overrightarrow{OM}(t) = f(t)$ de classe \mathcal{C}^1 sur un segment $[a, b]$, est rectifiable et a pour longueur :

$$L = \int_a^b \left\| \frac{df}{dt}(t) \right\|_2 dt \quad \left(= \int_a^b \left\| \frac{d\vec{M}}{dt}(t) \right\|_2 dt \right)$$

Remarque. Ce théorème reste vrai pour un arc de classe \mathcal{C}^0 sur $[a, b]$ et seulement de classe \mathcal{C}^1 par morceaux (additivité de la longueur).

Définition 4.2.1.

Pour un arc, admettant le paramétrage $t \mapsto \overrightarrow{OM}(t) = f(t)$ de classe \mathcal{C}^1 sur l'intervalle I , et $t_0 \in I$, on appelle **abscisse curviligne, d'origine** $M(t_0) = f(t_0)$, la fonction :

$$\begin{cases} s : I \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad (\text{ou } \mathbb{R}^3) \\ t \longmapsto s(t) = \mathcal{E} \int_{t_0}^t \left\| \frac{d\overrightarrow{M}}{dt}(u) \right\|_2 du \quad \text{avec } \mathcal{E} = +1 \text{ ou } \mathcal{E} = -1 \end{cases}$$

Le choix de la valeur de \mathcal{E} permet de définir l'orientation (ou sens de parcours) de l'arc :

- avec $\mathcal{E} = +1$, on oriente l'arc dans le sens des t croissants,
- avec $\mathcal{E} = -1$, on oriente l'arc dans le sens des t décroissants.

Ainsi, $s(t)$ est la longueur algébrique du sous-arc restreint à l'intervalle d'extrémités t_0 et t .

Preuve. du théorème

1. **Rectifiable** : Pour toute subdivision $\sigma = (a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b)$ de l'intervalle $[a, b]$, on a :

$$\forall i = 0 \dots n-1, \overrightarrow{M(t_i) M(t_{i+1})} = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \frac{d\overrightarrow{M}}{dt}(u) du \quad \text{et on en déduit que :}$$

$$\begin{aligned} \ell(\sigma) &= \sum_{i=0}^{n-1} \left\| \overrightarrow{M(t_i) M(t_{i+1})} \right\|_2 = \sum_{i=0}^{n-1} \left\| \int_{t_i}^{t_{i+1}} \frac{d\overrightarrow{M}}{dt}(u) du \right\|_2 \\ &\leq \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left\| \frac{d\overrightarrow{M}}{dt}(u) \right\|_2 du = \int_a^b \left\| \frac{d\overrightarrow{M}}{dt}(u) \right\|_2 du \end{aligned}$$

Ce qui prouve que l'arc est rectifiable, de longueur inférieure à $\int_a^b \left\| \frac{d\overrightarrow{M}}{dt}(u) \right\|_2 du$

2. **Introduction de l'abscisse curviligne d'origine** $M(a)$:

Tout sous-arc de l'arc étant rectifiable, on appelle s la fonction de $[a, b]$ vers \mathbb{R} qui, à tout t de $[a, b]$ fait correspondre la longueur positive du sous-arc réduit à l'intervalle $[a, t]$.

Pour t et $h > 0$ tels que $t \in [a, b]$ et $t+h \in [a, b]$ on a :

$$\left\| \frac{\overrightarrow{M(t) M(t+h)}}{h} \right\|_2 \leq \frac{s(t+h) - s(t)}{h} \leq \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \left\| \frac{d\overrightarrow{M}}{dt}(u) \right\|_2 du$$

(longueur de la corde et majoration obtenue en 1. dans le cas $[t, t+h]$)

En passant à la limite lorsque $h \rightarrow 0$, on en déduit que :

$$s \text{ est dérivable à droite en tout } t \in [a, b[, \text{ avec } s'_d(t) = \left\| \frac{d\overrightarrow{M}}{dt}(t) \right\|_2$$

Par un raisonnement analogue, avec $t \in]a, b]$ et $h < 0$ tel que $t+h \in [a, b]$, on montre que

$$s \text{ est dérivable à gauche en tout } t \in]a, b], \text{ avec } s'_g(t) = \left\| \frac{d\overrightarrow{M}}{dt}(t) \right\|_2$$

Ainsi, s est de classe \mathcal{C}^1 par morceaux sur $[a, b]$, avec $s'(t) = \left\| \frac{d\overrightarrow{M}}{dt}(t) \right\|_2$, ce qui prouve que

$$s(t) = \int_a^t \left\| \frac{d\overrightarrow{M}}{dt}(u) \right\|_2 du \quad \text{et que la longueur de l'arc est : } s(b) = \int_a^b \left\| \frac{d\overrightarrow{M}}{dt}(u) \right\|_2 du$$

4.3 Longueur et abscisse curviligne d'un arc de classe \mathcal{C}^0 et seulement \mathcal{C}^1 par morceaux

Pour chaque morceau, on choisit une abscisse curviligne compatible avec celle du morceau précédent :

- d'origine égale à la fin du morceau précédent
- avec un choix d'orientation compatible

et, globalement, on cumule avec la longueur des morceaux précédents.

5 Paramétrage d'un arc de classe \mathcal{C}^1 , par l'abscisse curviligne

Soit un arc (Γ) , admettant le paramétrage $t \mapsto \overrightarrow{OM}(t) = f(t)$, de classe \mathcal{C}^k , $k \geq 1$, sur l'intervalle I et régulier sur cet intervalle.

Théorème 5.0.1.

Un point initial $M(a)$, avec $a \in I$, étant choisi, la fonction abscisse curviligne d'origine $M(a)$ est la fonction s , définie sur I par :

$$s(t) = + \int_a^t \left\| \frac{d\overrightarrow{M}}{dt}(u) \right\|_2 du$$

- s est une bijection de classe \mathcal{C}^k entre les intervalles I et $J = s(I)$ et sa réciproque s^{-1} est également de classe \mathcal{C}^k .

- La fonction
$$\begin{cases} g = f \circ s^{-1} : J = s(I) \longrightarrow F \subset \mathbb{R}^2 \text{ ou } \mathbb{R}^3 \\ u \longmapsto g(u) = f(s^{-1}(u)) \end{cases}$$

est un paramétrage de classe \mathcal{C}^k de l'arc (Γ) .

Comme $f = g \circ s$ avec s bijective de classe \mathcal{C}^1 et à réciproque également de classe \mathcal{C}^1 , ce paramétrage est dit paramétrage "admissible" de (Γ)

Preuve.

s est une fonction de classe \mathcal{C}^k sur I , strictement croissante.

D'après le théorème sur les fonctions réciproques (vu en sup), on en déduit que

- s est injective (donc bijective de I sur $J = s(I)$)
- sa fonction réciproque s^{-1} est continue sur J
- s^{-1} est dérivable sur J et, pour $u \in J$, $(s^{-1})'(u) = \frac{1}{s'(s^{-1}(u))}$
- s^{-1} est de classe \mathcal{C}^k sur J

Extension aux arcs de classe \mathcal{C}^0 et de classe \mathcal{C}^k par morceaux ou à point singuliers isolés.

La notion précédente s'étend en cumulant les abscisses curvilignes des morceaux d'arcs successifs de classe \mathcal{C}^k , jointifs, où les points singuliers éventuels sont situés aux extrémités des morceaux.

Notations et usages

Le point courant M de l'arc peut être considéré comme point de paramètre

- $t \in I$ et obtenu comme image de t par f et on le note alors $M(t)$
- $u = s(t) \in J = s(I)$ et obtenu comme image de $u = s(t)$ par g .
En faisant la confusion usuelle $u = s(t) \equiv s$, on notera ce point $M(s)$

s est alors considéré comme un paramètre décrivant l'intervalle J .

La fonction $\begin{pmatrix} J \longrightarrow \mathbb{R}^2 \text{ (ou } \mathbb{R}^3) \\ s \longmapsto M(s) \end{pmatrix}$ est (un autre) paramétrage de l'arc (Γ) .

- L'appellation du paramètre sous le nom "t" est réservée au paramètre initial.
 - L'appellation du paramètre "abscisse curviligne" est toujours faite sous le nom "s", qui est réservé à cet emploi.
- On pourra cependant utiliser comme alternative l'appellation (proche) "σ", en cas de besoin.

6 Repère mobile de Frenet d'un arc plan

Les notations	{	s	abscisse curviligne	(alternative σ)
		\vec{T}	vecteur tangent <u>unitaire</u>	(pour certains \vec{t})
		\vec{N}	vecteur normal <u>unitaire</u>	(pour certains \vec{n})
		γ	courbure	(pour certains c)
		R	rayon de courbure	

que l'on introduit ici, resteront toujours réservées exclusivement à cet usage.

Remarque. Pour un vecteur tangent non unitaire, un vecteur normal non unitaire, on utilisera les notations (provisoires) : \vec{V}_t et \vec{V}_n (V pour Vecteur, t pour tangent, n pour normal)

On considère dans la suite un arc plan, admettant le paramétrage $t \mapsto \overrightarrow{OM}(t) = f(t)$, de classe \mathcal{C}^k ($k \geq 1$), régulier sur l'intervalle I , d'abscisse curviligne s .

Pour un point M de l'arc, on note

- $M = M(t) = f(t)$ lorsque l'on considère que ce point s'obtient comme image de t par la fonction de paramétrage initial f
- $M = M(s)$ lorsque ce même point est repéré par son abscisse curviligne.
($M = M(t) = f(s^{-1}(u))$ où $u = s(t) \equiv s$)

6.1 Vecteur unitaire tangent en un point régulier

Définition 6.1.1.

Le vecteur $\vec{T} = \frac{d\vec{M}}{ds}(s(t))$ est le vecteur unitaire orienté dirigeant la tangente au point $M = M(t)$.

Remarque. \vec{T} est considéré comme fonction de s ou de t : $\vec{T} \equiv \vec{T}(t) = \vec{T}(s(t)) \equiv \vec{T}(s)$

Preuve. On montre que \vec{T} est tangent en $M(t)$ et unitaire (le reste découle d'un choix) :

- $\frac{d\vec{M}}{dt}(t) \neq \vec{0}$ est vecteur tangent en $M(t)$
- $\frac{d\vec{M}}{dt}(t) = \frac{d\vec{M}}{ds}(s(t)) \frac{ds}{dt}(t) = \frac{d\vec{M}}{ds}(s(t)) \times \mathcal{E} \left\| \frac{d\vec{M}}{dt}(t) \right\|_2$ ($\mathcal{E} = +1$ ou -1)

$$\frac{d\vec{M}}{ds}(s(t)) = \mathcal{E} \frac{\frac{d\vec{M}}{dt}(t)}{\left\| \frac{d\vec{M}}{dt}(t) \right\|_2} \text{ est bien tangent en } M(t) \text{ et unitaire}$$

6.2 Vecteur unitaire normal, courbure en un point birégulier

Définition 6.2.1.

Le vecteur normal unitaire au point birégulier $M(t)$ est le vecteur \vec{N} ,

- orthogonal au vecteur \vec{T} ,
- défini par : $\frac{d\vec{T}}{ds} = \gamma \vec{N} \quad \left(= \frac{1}{R} \vec{N} \right)$

où la **courbure algébrique** γ au point $M(t)$ est définie par $\gamma = \det_{\mathcal{C}} \left(\vec{T}, \frac{d\vec{T}}{ds} \right)$,

de façon à ce que la base locale (\vec{T}, \vec{N}) soit (orthonormée) directe.

$R = \frac{1}{\gamma}$ est le **rayon de courbure algébrique** au point $M(t)$

Remarques.

- \vec{N}, γ et R sont considérés comme fonction de s ou de t : $\vec{N} \equiv \vec{N}(t) = \vec{N}(s(t)) \equiv \vec{N}(s)$
- Il y avait deux choix possibles pour \vec{N} (de signes opposés) et on prend celui qui rend la base (\vec{T}, \vec{N}) (orthonormée) directe.

Preuve. On montre que $\frac{d\vec{T}}{ds}$ est non nul et orthogonal à \vec{T} (le reste découle d'un choix) :

- $\frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{d^2M}{ds^2} \neq \vec{0}$ puisque M est birégulier.
- on sait que $\|\vec{T}\|_2 = 1$ On a donc $1 = \langle \vec{T} | \vec{T} \rangle$ et, par dérivation ;
 $0 = \langle \frac{d\vec{T}}{ds} | \vec{T} \rangle + \langle \vec{T} | \frac{d\vec{T}}{ds} \rangle = 2 \langle \frac{d\vec{T}}{ds} | \vec{T} \rangle$, ce qui prouve l'orthogonalité.

6.3 Centre de courbure en un point birégulier

Définition 6.3.1.

Le point $K(t) = M(t) + R(t) \vec{N}(t)$ est le **centre de courbure** au point birégulier $M(t)$.
 Le cercle de centre $K(t)$ et de rayon $R(t)$ est le **cercle de courbure** en $M(t)$.

6.4 Repère mobile de Frenet en un point birégulier

Définition 6.4.1.

Le repère mobile de Frenet en $M(t)$ est le repère $(M(t), \vec{T}(t), \vec{N}(t))$
 (orthonormé direct, par définition)

Théorème 6.4.1. (Formules de Frenet)

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \gamma \vec{N} \qquad \frac{d\vec{N}}{ds} = -\gamma \vec{T}$$

ce qui peut se retenir à l'aide d'une écriture sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} \frac{d\vec{T}}{ds} \\ \frac{d\vec{N}}{ds} \end{pmatrix} = \frac{d}{ds} \begin{pmatrix} \vec{T} \\ \vec{N} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \gamma \\ -\gamma & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{T} \\ \vec{N} \end{pmatrix} \quad (\text{matrice antisymétrique})$$

et on remarque que $\gamma = \langle \vec{N} | \frac{d\vec{T}}{ds} \rangle$.

Preuve. 1^{ière} par définition, 2^{ème} à partir des propriétés : $\|\vec{N}\|_2 = 1$ et $\vec{N} \perp \vec{T}$ (voir cours de Sup).

Remarque. **réduction des calculs**

- On obtient facilement le vecteur \vec{T} par dérivation et normalisation.
- Dans le plan, le vecteur \vec{N} se déduit de \vec{T} sans calculs! , par "basculée signée" :

$$\text{si } \vec{T} = a \vec{i} + b \vec{j} \text{ alors } \vec{N} = -b \vec{i} + a \vec{j} \quad \text{puisque} \quad \begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix} = a^2 + b^2 = \|\vec{T}\|_2^2 = +1$$

7 Calculs de la courbure en un point birégulier d'un arc plan

7.1 Calcul du rayon de courbure à l'aide de l'angle α

On pose $\alpha = \text{angle}(\vec{i}, \vec{T})$, fonction de s ou de t , bijective, de classe \mathcal{C}^k .

$$\vec{T} = \cos(\alpha(s)) \vec{i} + \sin(\alpha(s)) \vec{j} \quad \text{puisque } \|\vec{T}\|_2 = 1$$

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \underbrace{\left[-\sin(\alpha(s)) \vec{i} + \cos(\alpha(s)) \vec{j} \right]}_{\substack{\text{vecteur unitaire déduit de } \vec{T} \\ \text{par rotation de } +\frac{\pi}{2}}} \frac{d\alpha}{ds} = \vec{N} \frac{d\alpha}{ds}$$

ce qui prouve que $\gamma = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{d\alpha}{dt} \frac{dt}{ds}$ relation simple et utile ...

ou encore que

$R = \frac{ds}{d\alpha}$	←	Longueur	→	Longueur <u>signée</u>
	←	Radian (sans dimension)		

Remarque. $\frac{ds}{dt}$ est connu et on obtient facilement $\frac{d\alpha}{dt}$, dans les situations suivantes :

- En paramétrique : $\tan(\alpha) = \frac{y'}{x'}$ d'où $(1 + \tan^2(\alpha)) \frac{d\alpha}{dt} = \left(\frac{y'}{x'}\right)'$ et on déduit $\frac{d\alpha}{dt} = \dots$.
- En polaire simple : $\alpha = \theta + V$ avec $\tan(V) = \frac{r}{r'}$.
Par dérivation, $(1 + \tan^2(V)) \frac{dV}{d\theta} = \left(\frac{r}{r'}\right)'$ d'où $\frac{dV}{d\theta} = \dots$ et on déduit $\frac{d\alpha}{d\theta} = 1 + \frac{dV}{d\theta} = \dots$.

7.2 Expression générale de la courbure

$\gamma = \det_c \left(\vec{T}, \frac{d\vec{T}}{ds} \right)$	$\gamma = \frac{\det_c \left(\frac{d\vec{M}}{dt}, \frac{d^2\vec{M}}{dt^2} \right)}{\left\ \frac{d\vec{M}}{dt} \right\ _2^3}$
---	--

Preuve. (de la deuxième formule, la première étant un cas particulier de la deuxième)

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \frac{d\vec{M}}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{ds}{dt} \vec{T} = \left\| \frac{d\vec{M}}{dt} \right\|_2 \vec{T} \quad \text{puis} \quad \frac{d^2\vec{M}}{dt^2} = \frac{d^2s}{dt^2} \vec{T} + \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 \frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{d^2s}{dt^2} \vec{T} + \left\| \frac{d\vec{M}}{dt} \right\|_2^2 \gamma \vec{N}$$

$$\text{d'où, } \det_c \left(\frac{d\vec{M}}{dt}, \frac{d^2\vec{M}}{dt^2} \right) = 0 + \left\| \frac{d\vec{M}}{dt} \right\|_2^3 \gamma \det_c(\vec{T}, \vec{N}) = \left\| \frac{d\vec{M}}{dt} \right\|_2^3 \gamma.$$

7.3 Expressions particulières de la courbure

Courbe paramétrée : $M(t) = O + x(t) \vec{i} + y(t) \vec{j}$

$$\gamma = \frac{x' y'' - x'' y'}{(\sqrt{x'^2 + y'^2})^3}$$

Courbe fonctionnelle : $M(x) = O + x \vec{i} + y(x) \vec{j}$
 $M(x) = O + x(y) \vec{i} + y \vec{j}$

cas particulier du précédent avec $x = t$.
cas particulier du précédent avec $y = t$.

Courbe polaire paramétrée : $M(t) = O + r(t) \overrightarrow{u(\theta(t))}$

$$\gamma = \frac{r^2 \theta'^3 + r r' \theta'' - r r'' \theta' + 2 r'^2 \theta'}{\left(\sqrt{r'^2 + r^2 \theta'^2}\right)^3}$$

En notant $\overrightarrow{u}(\theta) = \cos(\theta) \overrightarrow{i} + \sin(\theta) \overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{v}(\theta) = -\sin(\theta) \overrightarrow{i} + \cos(\theta) \overrightarrow{j} = \overrightarrow{u}\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$, on a :

$$\frac{d\overrightarrow{M}}{dt} = r' \overrightarrow{u} + r \theta' \overrightarrow{v} \quad \text{et} \quad \frac{d^2\overrightarrow{M}}{dt^2} = (r'' - r \theta'^2) \overrightarrow{u} + (2 r' \theta' + r \theta'') \overrightarrow{v} \dots$$

Courbe polaire usuelle : $M(\theta) = O + r(\theta) \overrightarrow{u(\theta)}$

$$\gamma = \frac{r^2 - r r'' + 2 r'^2}{\left(\sqrt{r'^2 + r^2}\right)^3}$$

7.4 Rayon de courbure en un point origine de l'abscisse curviligne

Lorsque l'on paramètre par une abscisse curviligne s d'origine M_0 , on a :

$$M(s) = M_0 + (s - 0) \frac{d\overrightarrow{M}}{ds}(0) + \frac{(s - 0)^2}{2} \frac{d^2\overrightarrow{M}}{ds^2}(0) + \overrightarrow{o}((s - 0)^2)$$

Comme $\overrightarrow{T}(0) = \frac{d\overrightarrow{M}}{ds}(0)$ et $\overrightarrow{N}(0) = R(0) \frac{d^2\overrightarrow{M}}{ds^2}(0) = \frac{1}{\gamma(0)} \frac{d^2\overrightarrow{M}}{ds^2}(0)$, en notant $X(s)$ et $Y(s)$ les coordonnées de $M(s)$ dans le repère de Frenet en $M_0 = M(0)$, on a :

$$\begin{cases} X(s) = & +s & +o_1(s^2) \\ Y(s) = & \frac{s^2}{2} \gamma(0) & +o_2(s^2) \end{cases} \quad \text{et on en déduit que} \quad \gamma(0) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{2 Y(s)}{(X(s))^2}$$

Cela peut être utile dans quelques cas particuliers ... pour obtenir un résultat en peu de calculs :

Pour un arc paramétré sous la forme $t \mapsto M(t)$

1. Si le vecteur tangent en $M(t_0)$ est colinéaire à \overrightarrow{i} , alors $\gamma(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{2 (y(t) - y(t_0))}{(x(t) - x(t_0))^2}$
2. Si le vecteur tangent en $M(t_0)$ est colinéaire à \overrightarrow{j} , alors $\gamma(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{2 (x(t) - x(t_0))}{(y(t) - y(t_0))^2}$
3. Sinon, il faudrait faire un changement de repère orthonormé ... pour se mettre dans une des deux situations précédentes et ce n'est plus avantageux ...

Exemple 7.4.0.1.

1. Rayon de courbure à l'origine de la parabole d'équation $y^2 = 2p x$

$$\overrightarrow{T} = \overrightarrow{j} \text{ d'où } \gamma = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{2(x - 0)}{(y - 0)^2} = \frac{1}{p} \quad \text{et} \quad R = p \quad (\text{au signe près!})$$

2. Rayon de courbure à l'origine de la courbe d'équation $y = x^2 [1 + \ln(1 + \cos^2(\pi e^{\sin x}))]^3$

(a) on peut chercher à appliquer les formules générales ...

(b) ou directement, puisque $y'(0) = 0$, on prend $\overrightarrow{T} = \overrightarrow{i}$ et

$$\gamma = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 (y - 0)}{(x - 0)^2} = 2 [1 + \ln(2)]^3 \quad \text{et} \quad R = \frac{1}{2 (1 + \ln(2))^3} \quad \text{au signe près!}$$

< FIN >