Fonctions de $\mathbb{R}^p$ vers $\mathbb{R}^n$
Fonctions coordonnées, fonctions partielles
Limites
Continuité partielle, dérivées partielles
Continuité

Antoine MOTEAU antoine.moteau@wanadoo.fr

Table des matières

Fonctions vectorielles de p variables (Fonctions de $\mathbb{R}^p$ vers $\mathbb{R}^n$) : Fonctions coordonnées, fonctions partielles. Limite, continuité, dérivées partielles.

Conventions

- On note $\mathbb{E} = \mathbb{R}^p$ l'ensemble de départ, $\mathbb{F} = \mathbb{R}^n$ l'ensemble d'arrivée, et on suppose qu'ils sont munis chacuns
  - de leur structure d'espace vectoriel (ou affine, d'origine le vecteur nul) usuelle, et rapporté à la base (ou au repère) canonique,
    - la base canonique de $\mathbb{E} = \mathbb{R}^p$ étant notée souvent (sauf indication contraire) :
    $$\left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \cdots, \overrightarrow{e_p}\right) \text{ ou } \left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right) \text{ si } p = 2, \left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right) \text{ si } p = 3$$
    - la base canonique de $\mathbb{F} = \mathbb{R}^n$ étant notée si besoin (sauf indication contraire) :
    $$\left(\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, \cdots, \overrightarrow{F_n}\right) \text{ ou } \left(\overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}\right) \text{ si } n = 2, \left(\overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}, \overrightarrow{K}\right) \text{ si } n = 3$$
- Un vecteur (ou un point) de $\mathbb{E} = \mathbb{R}^p$ ou de $\mathbb{F} = \mathbb{R}^n$ sera souvent assimilé à la matrices (colonne ou ligne) de ses composantes (ou coordonnées), dans la base (ou le repère) canonique, sans que l'on fasse toujours une distinction nette entre matrices lignes et matrices colonnes (abus d'écriture ...), bien que en principe on note ici
  - à l'aide de matrices lignes les éléments de l'ensemble de départ
  - à l'aide de matrices colonnes les éléments de l'ensemble d'arrivée

  Cependant, la notation en colonnes prenant beaucoup de place, on utilisera parfois la notation de transposition (de matrices lignes) pour les éléments de l'espace d'arrivée ou, éventuellement une écriture vectorielle (ou affine) à l'aide d'une combinaison linéaire des vecteurs de la base canonique.

- $\mathbb{E} = \mathbb{R}^p$ et $\mathbb{F} = \mathbb{R}^n$ (en tant qu'espaces vectoriels) sont muni de la structure euclidienne usuelle, à l'aide du produit scalaire canonique pour lequel la base canonique est orthornormale.
  - le produit scalaire canonique est noté $< \mid >$.
  - la norme euclidienne associé est notée $\| \quad \|_2$

  et la distance euclidienne associée, dans l'espace affine sous-jacent (d'origine $O = \overrightarrow{0}$), est notée d .

  Par exemple, dans $\mathbb{R}^p$, avec $\begin{cases} \overrightarrow{x} = x_1\,\overrightarrow{e_1} + x_2\,\overrightarrow{e_2} + \cdots + x_p\,\overrightarrow{e_p} \equiv (x_1, x_2, \cdots, x_p) = {}^tX \text{ et } x = O + \overrightarrow{x} \\ \overrightarrow{y} = y_1\,\overrightarrow{e_1} + y_2\,\overrightarrow{e_2} + \cdots + y_p\,\overrightarrow{e_p} \equiv (y_1, y_2, \cdots, y_p) = {}^tY \text{ et } y = O + \overrightarrow{y} \end{cases}$
  - $< \overrightarrow{x} \mid \overrightarrow{y} > = \displaystyle\sum_{i=1\cdots p} x_i\, y_i = {}^tX\, Y$
  - $\|\overrightarrow{x}\|_2 = \sqrt{\displaystyle\sum_{i=1\cdots p} x_i^2} = \sqrt{{}^tX\, X}$
  - $d(x, y) = d(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = \|\overrightarrow{x} - \overrightarrow{y}\|_2 = \sqrt{\displaystyle\sum_{i=1\cdots p} (x_i - y_i)^2}$
- Même lorsque $n = p$, on essaie de distinguer, par des notations spécifiques, les objets de l'ensemble de départ et l'ensemble d'arrivée, surtout lorsque ces ensembles ne reçoivent pas la même interprétation : espace temporel (t), plan usuel (x,y), espace usuel (x,y,z), espace de paramétrage (u,v), ...

1 Rappels et compléments sur $\mathbb{R}^m$

1.1 Propriétés d'un produit scalaire (définition)

Un produit scalaire sur $\mathbb{R}^m$ est une application de $\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^m$ vers $\mathbb{R}$,

- symétrique : $\left(\forall\,\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\in\mathbb{R}^m,\ <\overrightarrow{u}\,|\,\overrightarrow{v}>=<\overrightarrow{v}\,|\,\overrightarrow{u}>\right)$
- bilinéaire : $\Bigg(\forall\,\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R},\ \forall\,\overrightarrow{u}_1,\ \overrightarrow{u}_2,\ \overrightarrow{v}\in\mathbb{R}^m,$

$$\begin{cases}<\lambda_1\overrightarrow{u}_1+\lambda_2\overrightarrow{u}_2\,|\,\overrightarrow{v}>=\lambda_1<\overrightarrow{u}_1\,|\,\overrightarrow{v}>+\lambda_2<\overrightarrow{u}_2\,|\,\overrightarrow{v}>\\ <\overrightarrow{v}\,|\,\lambda_1\overrightarrow{u}_1+\lambda_2\overrightarrow{u}_2>=\lambda_1<\overrightarrow{v}\,|\,\overrightarrow{u}_1>+\lambda_2<\overrightarrow{v}\,|\,\overrightarrow{u}_2>\end{cases}\Bigg)$$

- positive : $\left(\forall\,\overrightarrow{u}\in\mathbb{R}^m,\ <\overrightarrow{u}\,|\,\overrightarrow{u}>\geqslant 0\right)$
- "définie" : $\left(\forall\,\overrightarrow{u}\in\mathbb{R}^m,\ <\overrightarrow{u}\,|\,\overrightarrow{u}>=0\Longrightarrow\overrightarrow{u}=\overrightarrow{0}\right)$

On utilisera le produit scalaire canonique, lié à la base canonique (voir introduction).

Théorème 1.1.1. *(Inégalité de Cauchy-Schwarz)*

- $\left(\forall\,\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\in\mathbb{R}^m,\ |<\overrightarrow{u}\,|\,\overrightarrow{v}>|\leqslant\|\overrightarrow{u}\|_2\ \|\overrightarrow{v}\|_2\right)$.
- Si $|<\overrightarrow{u}\,|\,\overrightarrow{v}>|=\|\overrightarrow{u}\|_2\ \|\overrightarrow{v}\|_2$ alors $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires.

Preuve. Voir cours de sup ou cours sur les espaces préhilbertiens réels.

1.2 Propriétés d'une norme

- $\left(\forall\,\overrightarrow{u}\in\mathbb{R}^m,\ \|\overrightarrow{u}\|\geqslant 0\right)$
- $\left(\forall\,\overrightarrow{u}\in\mathbb{R}^m,\ \|\overrightarrow{u}\|=0\Longrightarrow\overrightarrow{u}=\overrightarrow{0}\right)$
- $\left(\forall\,\lambda\in\mathbb{R},\ \forall\,\overrightarrow{u}\in\mathbb{R}^m,\ \|\lambda\,\overrightarrow{u}\|=|\lambda|\ \|\overrightarrow{u}\|\right)$
- $\left(\forall\,\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\in\mathbb{R}^m,\ \|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|\leqslant\|\overrightarrow{u}\|+\|\overrightarrow{v}\|\right)$

On utilisera la norme euclidienne déduite du produit scalaire canonique (voir introduction).

1.3 Propriétés d'une distance

- $\left(\forall\,u,\ v\in\mathbb{R}^m,\ d(u\,,\,v)\geqslant 0\right)$
- $\left(\forall\,u,\ v\in\mathbb{R}^m,\ d(u\,,\,v)=d(v\,,\,u)\right)$
- $\left(\forall\,u,\ v\in\mathbb{R}^m,\ d(u\,,\,v)=0\Longrightarrow u=v\right)$
- $\left(\forall\,u,\ v,\ w\in\mathbb{R}^m,\ d(u\,,\,v)\leqslant d(u\,,\,w)+d(w\,,\,v)\right)$

On utilisera la distance euclidienne déduite de la norme associée au produit scalaire canonique (voir introduction).

1.4 Boules, ouverts et fermés

1.4.1 Définitions

- **Boule ouverte** de centre $x \in \mathbb{R}^m$ et de rayon $r > 0$:

$$\mathcal{B}_O\big(x,r\big) = \{y \in \mathbb{R}^m,\ d(x,y) < r\}$$

- **Boule fermée** de centre $x \in \mathbb{R}^m$ et de rayon $r > 0$:

$$\mathcal{B}_F\big(x,r\big) = \{y \in \mathbb{R}^m,\ d(x,y) \leqslant r\}$$

Etant donné un point x de $\mathbb{R}^m$, une propriété est dite vérifiée au voisinage de x s'il existe une boule ouverte de centre x sur laquelle cette propriété est vérifiée.

Un sous ensemble H de $\mathbb{R}^m$ est dit **ouvert** dans $\mathbb{R}^m$ lorsque

- $H = \emptyset$
- ou, pour chaque élément x de H, il existe une boule ouverte de centre x contenue dans H.

Un sous ensemble H de $\mathbb{R}^m$ est dit **fermé** dans $\mathbb{R}^m$ si son complémentaire dans $\mathbb{R}^m$ est ouvert dans $\mathbb{R}^m$.

Remarque. $\mathbb{R}^m$ et $\emptyset$ sont à la fois ouverts et fermés.

Théorème 1.4.1.

- *Une "boule ouverte" est un "ouvert",*
- *Une "boule fermée" est un "fermé".*

1.5 Parties bornées

Définition 1.5.1.

Une partie (sous-ensemble) $\mathcal{P}$ non vide de $\mathbb{R}^m$ est dite bornée (par M) si pour tout $u \in P$, $\|u\|_2 \leqslant M$ (ou $d(O,u) \leqslant M$).

2 Suites

2.1 Définitions

Définition 2.1.1.

Une suite $u = \Big(u_k\Big)_{k\in\mathbb{N}}$, à valeurs dans $\mathbb{R}^m$, est une application

$$\left(\begin{array}{cccl} u: & \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ & k & \longmapsto & u_k = \big(u_{k,1}, u_{k,2}, \cdots, u_{k,m}\big) \end{array}\right)$$

Pour $i \in [\![1 \cdots m]\!]$, la suite de réels, $\Big(\overrightarrow{u}_{k,i}\Big)_{k\in\mathbb{N}}$ est appelée i-ième suite coordonnée de $\Big(\overrightarrow{u}_k\Big)_{k\in\mathbb{N}}$.

2.2 Opérations sur les suites

Définition 2.2.1.

Etant données et un scalaire λ,

- La suite somme de deux suites $u = \Big(u_k\Big)_{k\in\mathbb{N}}$ et $v = \Big(v_k\Big)_{k\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^m$ est la suite $u + v = \Big(u_k + v_k\Big)_{k\in\mathbb{N}}$
- La suite produit par $\lambda \in \mathbb{R}$ de la suite $u = \Big(u_k\Big)_{k\in\mathbb{N}}$ est la suite $\lambda\, u = \Big(\lambda\, u_k\Big)_{k\in\mathbb{N}}$.

Théorème 2.2.1.

L'ensemble des suites à valeurs dans $\mathbb{R}^m$, muni des deux opérations précédentes, est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Preuve. Lourd : c'est un espace nouveau, il faut tout démontrer ...

2.3 Suites bornées

Théorème 2.3.1.

L'ensemble des suites à valeurs dans $\mathbb{R}^m$ et qui sont bornées est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Preuve. On montre qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites.

2.4 Suites convergentes

Définition 2.4.1.

Une suite $\Big(u_n\Big)_{k\in\mathbb{N}}$, à valeurs dans $\mathbb{R}^m$, est dite convergente, de limite $L \in \mathbb{R}^m$, si et seulement si

$$\Big(\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\ k_0 \in \mathbb{N} :\ \forall\ k \in \mathbb{N},\ k \geqslant k_0 \Rightarrow d(u_k - L) < \varepsilon\Big)$$

Si $\Big(u_n\Big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{R}^m$ vers L, on note $L = \lim\limits_{k\to+\infty} u_k$.

$u = \Big(u_n\Big)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $L = (\ell_1, \ell_2, \cdots, \ell_m)$ si et seulement si, pour tout $i \in [\![1\cdots m]\!]$, la i-ième suite coordonnée de u converge vers ℓ_i.

Théorème 2.4.1.

Toute suite, à valeurs dans $\mathbb{R}^m$, qui est convergente est bornée.

(la réciproque est fausse).

Preuve. $\big|\, \|u_k\|_2 - \|L\|_2 \,\big| \leqslant \|u_k - L\|_2 + \|L\|_2 \dots$

Contre-exemple : ...

Théorème 2.4.2.

- *L'ensemble des suites à valeurs dans $\mathbb{R}^m$ et qui sont convergentes est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel,*
- *et la limite est une application linéaire sur cet espace :*
  - $\lim\limits_{k\to+\infty} u_k + v_k = \lim\limits_{k\to+\infty} u_k + \lim\limits_{k\to+\infty} v_k$,
  - $\lim\limits_{k\to+\infty} \lambda\, u_k = \lambda \lim\limits_{k\to+\infty} u_k$.

Preuve.

- On montre que l'on a un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites.
- Linéarité de la limite. Démonstration classique, à l'aide de la définition :
  - Pour l'addition : soit $\varepsilon > 0$.
    Prenons n_1 tel que ... et n_2 tel que ... (cf hypothèse).
    En prenant $n_0 = \dots$, d'après l'inégalité triangulaire, on a ...
    En résumé, ...
  - pour la multiplication par λ : soit $\varepsilon > 0$. ...

3 Fonctions vectorielles, fonctions coordonnées, fonctions partielles

3.1 Fonctions vectorielles de plusieurs variables

Définition 3.1.1.

L'ensemble $\mathcal{F}\big(A, \mathbb{R}^n\big)$, des fonctions définies sur une partie A non vide de $\mathbb{R}^p$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, est muni des opérations usuelles :

- Pour f et g appartenant à $\mathcal{F}\big(A, \mathbb{R}^n\big)$, $f+g$ est l'élément de $\mathcal{F}\big(A, \mathbb{R}^n\big)$ défini par

$$\left(\begin{array}{cccc} f+g: & A & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & x & \longmapsto & f(x)+g(x) \end{array}\right)$$

- Pour λ appartenant à $\mathbb{R}$ et f appartenant à $\mathcal{F}\big(A, \mathbb{R}^n\big)$, λf est l'élément de $\mathcal{F}\big(A, \mathbb{R}^n\big)$ défini par

$$\left(\begin{array}{cccc} \lambda f: & A & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & x & \longmapsto & \lambda f(x) \end{array}\right)$$

Théorème 3.1.1.

$\mathcal{F}\big(A, \mathbb{R}^n\big)$, muni de ces opérations, est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel (qui n'est pas de dimension finie).

3.2 Fonctions coordonnées

Pour une fonction $\left\{\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{E}=\mathbb{R}^p & \longrightarrow & \mathbb{F}=\mathbb{R}^n \\ & m & \longmapsto & f(m) \end{array}\right.$

on note $f_i(m)$ la i-ième composante de $f(m)$ sur la base canonique de $\mathbb{F}$.

La fonction $\left\{\begin{array}{cccc} f_i: & \mathbb{E}=\mathbb{R}^p & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & m & \longmapsto & f_i(m) \end{array}\right.$ est la i-ième fonction coordonnée de la fonction f.

Intérêt : Une fonction de $\mathbb{R}^p$ vers $\mathbb{R}^n$ peut ainsi être considérée comme une collection de n fonctions simultanées de $\mathbb{R}^p$ vers $\mathbb{R}$.

Par exemple, $\left\{\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{E}=\mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{F}=\mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \longmapsto & \begin{pmatrix} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = f_1(x,y) \\ \\ \dfrac{x\,y}{x^2+y^2} = f_2(x,y) \end{pmatrix} \end{array}\right.$ est la collection des deux fonctions :

$$\left(\begin{array}{cccc} f_1: & \mathbb{E}=\mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \end{array}\quad , \quad \begin{array}{cccc} f_2: & \mathbb{E}=\mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & \dfrac{x\,y}{x^2+y^2} \end{array}\right)$$

3.3 Fonctions partielles en un point

Soit une fonction $\left\{\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{E}=\mathbb{R}^p & \longrightarrow & \mathbb{F}=\mathbb{R}^n \\ & m & \longmapsto & f(m) \end{array}\right.$ et un point fixe m_0, de coordonnées $(a_1, a_2, \cdots, a_p)$.

Si on ne s'autorise qu'à ne laisser varier qu'UNE seule coordonnée de m_0, par exemple la i-ième, on obtient une fonction vectorielle d'UNE seule variable réelle, à valeur dans $\mathbb{R}^n$:

$\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{F}=\mathbb{R}^n \\ t & \longmapsto & f(a_1,\cdots,a_{i-1},\,\underline{t}\,,a_{i+1},\cdots,a_p) \end{array}\right.$ appelée "i-ième fonction partielle de f en m_0" .

Intérêt : Cela ramène au cas particulier simple de fonctions vectorielle d'une seule variable, ou même au cas de fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ en prenant les fonctions coordonnées des fonctions partielles en m_0.

> Cependant, la collection des fonctions partielles en m_0 ne représente pas la fonction f : la considération des fonctions partielles n'autorisant que les déplacements parallèles aux axes de coordonnées.

Remarque. On évitera de nommer les fonctions partielles en un point (pas de notation simple satisfaisante) !

Avec, par exemple, la fonction $\left\{\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{E}=\mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{F}=\mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \longmapsto & \begin{pmatrix} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \\ \\ \dfrac{x\ y}{x^2+y^2} \end{pmatrix} \end{array}\right.$

les fonctions partielles de f en $m_0=(2,3)$ sont les fonctions :

$$\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ x & \longmapsto & \begin{pmatrix} \dfrac{x^2-9}{x^2+9} \\ \\ \dfrac{3\ x}{x^2+9} \end{pmatrix} \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ y & \longmapsto & \begin{pmatrix} \dfrac{4-y^2}{4+y^2} \\ \\ \dfrac{2\ y}{4+y^2} \end{pmatrix} \end{array}\right.$$

4 Fonctions bornées

Définition 4.0.1.

> Une fonction f, de $\mathbb{R}^p$ vers $\mathbb{R}^n$, définie sur une partie A non vide de $\mathbb{R}^p$, est dite bornée (en norme, par M) sur A si et seulement si
>
> $$\Big(\forall x\in A,\ \|f(x)\|_2\leqslant M\Big)$$

Théorème 4.0.1.

> *L'ensemble des fonctions, de $\mathbb{R}^p$ vers $\mathbb{R}^n$, qui sont définies et bornées sur une partie A non vide de $\mathbb{R}^p$, est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.*

Preuve. On montre qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}\big(A,\mathbb{R}^n\big)$.

Théorème 4.0.2.

> *Une fonction est bornée si et seulement si chacune de ses fonctions coordonnées est bornée.*

Preuve. Pour $y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in\mathbb{R}^n$, $\max\limits_{j=1\cdots n}|y_j|\leqslant\sqrt{\sum\limits_{j=1}^{n}y_j^2}\leqslant\sqrt{n}\max\limits_{j=1\cdots n}|y_j|$.

5 Limites

5.1 Rappel : fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$

5.1.1 Limite finie en un point de $\mathbb{R}$

Une fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, définie sur une partie A non vide, admet la limite finie $L \in \mathbb{R}$, selon A, en x_0 si et seulement si

- $(\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ \eta > 0,\ \forall x \in A,\ 0 < |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon\ )$
- $(\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ \eta > 0,\ \forall x \in A,\ 0 < d(x\,,\,x_0) < \eta \Rightarrow d(f(x)\,,\,L) < \varepsilon\ )$
- $(\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ \eta > 0,\ \forall x \in A,\ x \in \mathcal{B}^*_O\big(x_0,\eta\big) \Rightarrow f(x) \in \mathcal{B}_O(L,\varepsilon)\ )$

Remarques.
- **f pourrait ne pas être définie en x_0.**
- Il y a **unicité** de la limite.

<u>**Commentaires**</u> :
- La première définition est en termes de valeur absolue ou de norme :
$$\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ \eta > 0,\ \forall x \in A,\ 0 < \|x - x_0\|_2 < \eta \Rightarrow \|f(x) - L\|_2 < \varepsilon$$
et peut se généraliser au cas des fonctions de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}^p$.
- La deuxième et la troisième définition, en termes de distances et de boules, peuvent se généraliser au cas des fonctions de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}^p$.

5.1.2 Autres notions de limites, dans $\mathbb{R}$, <u>liées à la relation d'ordre de $\mathbb{R}$</u>

- Limite infinie en un point de $\mathbb{R}$, par exemple :
$$\left(\lim_{x\to a} f(x) = +\infty\right) \Leftrightarrow \left(\forall M > 0,\ \exists\ \eta > 0,\ \forall x \in A,\ 0 < |x - x_0| < \eta \Rightarrow f(x) > M\right)$$
- Limite finie en $+\infty$ (ou $-\infty$), par exemple :
$$\left(\lim_{x\to+\infty} f(x) = L\right) \Leftrightarrow \left(\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ M > 0,\ \forall x \in A,\ x > M \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon\right)$$
- Limite infinie en $+\infty$ (ou $-\infty$), par exemple :
$$\left(\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty\right) \Leftrightarrow \left(\forall\ M > 0,\ \exists\ m \in \mathbb{R},\ \forall x \in A,\ x < m \Rightarrow f(x) > M\right)$$
- Limite infinie, **à gauche (ou à droite)**, en un point de $\mathbb{R}$, par exemple :
$$\left(\lim_{x\to a^-} f(x) = +\infty\right) \Leftrightarrow \left(\forall M > 0,\ \exists\ \eta > 0,\ \forall x \in A,\ 0 < a - x < \eta \Rightarrow f(x) > M\right)$$
- Limite finie, **à gauche (ou à droite)**, en un point de $\mathbb{R}$, par exemple :
$$\left(\lim_{x\to a^+} f(x) = L\right) \Leftrightarrow \left(\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ \eta > 0,\ \forall x \in A,\ 0 < x - a < \eta \Rightarrow \|f(x) - L\|_2 < \varepsilon\right)$$

Les notions liées à la relation d'ordre, ne peuvent pas être généralisées à $\mathbb{R}^m$.

5.1.3 Propriétés algébriques

On sait que la fonctionnelle "limite", pour les fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, possède de bonnes propriétés, ce qui permet de réaliser aisément le calcul de limites, à partir des limites connues pour les fonctions élémentaires :

- Somme, produit, quotient
- produit par un scalaire
- Composition
- fonctions réciproques

Ces notions, liées à la structure algébrique, peuvent être généralisées à $\mathbb{R}^m$.

5.1.4 Propriétés liées à la relation d'ordre de $\mathbb{R}$

Rappel **non exhaustif** de quelques théorèmes, spécifiques au cas des fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

Théorème 5.1.1. *(de la limite monotone)*

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.
Si f est définie et croissante sur un intervalle $[a, b[$, alors f admet une limite à gauche en b, qui est

- finie si f est majorée
- égale à $+\infty$ si f n'est pas majorée.

(on a de même le cas d'un fonction décroissante minorée).

Théorème 5.1.2.

Soient f et g des fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, définies au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$ (sauf peut-être en a) et admettant des limites en a.

Si, au voisinage de a, $f < g$, alors $\lim\limits_a f \leqslant \lim\limits_a g$

Théorème 5.1.3.

Soient f et g des fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, définies au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$ (sauf peut-être en a) et admettant des limites en a.

Si $\lim\limits_a f < \lim\limits_a g$, alors il existe un intervalle ouvert U contenant a tel que $\big(\forall x \in U \setminus \{a\},\ f(x) < g(x)\big)$.

Théorème 5.1.4. …

5.2 Limite d'une fonction vectorielle, de $\mathbb{R}^p$ vers $\mathbb{R}^n$, en un point de $\mathbb{R}^p$

Seule la notion de limite finie en un point fini peut être généralisée, du cas des fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, au cas des fonctions de $\mathbb{R}^p$ vers $\mathbb{R}^n$ (lorsque $p > 1$ et $n > 1$).

5.2.1 Définitions

Définition 5.2.1.

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}^p$ et m_0 un élément de A.
Une fonction f de $\mathbb{R}^p$ vers $\mathbb{R}^n$, définie sur A (sauf peut-être en m_0), admet la limite $L \in \mathbb{R}^n$, selon A, en m_0, si et seulement si

$$\Big(\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ \eta > 0,\ \forall\ m \in A,\ 0 < \|m - m_0\|_2 < \eta \Rightarrow \|f(m) - L\|_2 < \varepsilon\Big)$$

Remarques.

- **f peut ne pas être définie en m_0.**
- Il y a **unicité** de la limite.

Définition 5.2.2. restriction de la notion de limite : limite (partielle) selon une direction

Soit f une fonction f de $\mathbb{R}^p$ vers $\mathbb{R}^n$, définie au voisinage de m_0 (sauf peut être en m_0).

f admet la limite (partielle) L, selon la direction du vecteur $\overrightarrow{h} \neq \overrightarrow{0}$, en m_0 si et seulement si

$$\Big(\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ \eta > 0,\ \forall\ t \in \mathbb{R},\ 0 < |t| < \eta \Rightarrow \left\| f(m_0 + t\,\overrightarrow{h}) - L \right\|_2 < \varepsilon\Big)$$

Remarques. Pour la limite (partielle) en un point, selon une direction,

- Il s'agit d'un cas particulier des limites, où l'on privilégie les déplacements uniquement selon une direction fixe.
- Il y a unicité de la limite (partielle) en m_0 selon la direction de $\overrightarrow{h}$.
- Si f a une limite (tout court) en m_0, alors cette limite est limite (partielle) de f en m_0, selon toutes les directions (la réciproque est fausse).

Exemple 5.2.1.1.

Soit la fonction $\left\{\begin{array}{llll} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \longmapsto & \begin{pmatrix} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \\ \\ \dfrac{x\,y}{x^2+y^2} \end{pmatrix} \end{array}\right.$ si $(x,y) \neq (0,0)$

- Déterminer la limite (partielle) de f en $m_0 = (0,0)$, selon chaque direction $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$.
- Déterminer la limite (partielle) de f en $m_1 = (1,1)$, selon chaque direction $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$.

5.2.2 Propriétés algébriques

- Somme
- produit par un scalaire, produit par une fonction scalaire
- Composition
- produit scalaire, produit vectoriel, déterminant, ...

5.2.3 Autres propriétés

Théorème 5.2.1.

Si une fonction définie au voisinage de m_0 (sauf peut-être en m_0) admet une limite L en m_0 alors elle est bornée au voisinage de m_0.

Preuve. Pour m voisin de m_0, distinct de m_0, on a $\left|\,\|f(m)\|_2 - \|L\|_2\,\right| \leqslant \|f(m) - L\|_2$.

Théorème 5.2.2.

Une fonction définie au voisinage de m_0 (sauf peut-être en m_0) admet une limite $L = (\ell_1, \ell_2, \cdots, \ell_n)$ en m_0 si et seulement si pour tout $j \in [\![1 \cdots n]\!]$ la j-ième fonction coordonnée de f admet la limite ℓ_j en m_0.

(il en est de même pour la limite (partielle) selon une direction).

Preuve. Pour $y = (y_1, y_2, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, $\max\limits_{j=1\cdots n} |y_j - \ell_j| \leqslant \sqrt{\sum\limits_{j=1}^{n} (y_j - \ell_j)^2} \leqslant \sqrt{n} \max\limits_{j=1\cdots n} |y_j - \ell_j|$.

6 Continuité

6.1 Continuité en un point

Définition 6.1.1.

Une fonction $\begin{cases} f: & \mathbb{E}=\mathbb{R}^p & \longrightarrow & \mathbb{F}=\mathbb{R}^n \\ & m & \longmapsto & f(m) \end{cases}$, définie au voisinage de m_0,
est continue en m_0 si $\lim\limits_{m_0} f = f(m_0)$

cela peut s'écrire : $(\forall\ \varepsilon>0,\ \exists\ \eta>0,\ \forall\ m\in\mathbb{R}^p,\ 0\leqslant \|m-m_0\|_2<\eta \Rightarrow \|f(m)-f(m_0)\|_2<\varepsilon)$

Théorème 6.1.1.

f est continue en m_0 si et seulement si toutes ses fonctions coordonnées sont continues en m_0 .

Preuve. éléments de démonstration : inégalités (idem suites) ...

Théorème 6.1.2.

Si f est continue en $m_0=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ alors la k-ième fonction partielle de f en m_0 est continue en a_k .

Mais la réciproque est fausse !

Preuve. éléments de démonstration : idem inégalités élémentaires ...

Exemple 6.1.0.1.

Soit la fonction $\begin{cases} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & \dfrac{x\ y}{x^2+y^2} \end{cases}$ si $(x,y)\neq(0,0)$ et $f(0,0)=0$

on a : $\lim\limits_{x\to 0} f(x,0)=0=f(0,0)$ et $\lim\limits_{y\to 0} f(0,y)=0=f(0,0)$

mais $\lim\limits_{x\to 0} f(x,x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{2\ x^2}=\dfrac{1}{2}\neq f(0,0)$

f n'est donc pas continue en $(0,0)$, bien que ses fonctions partielles (fonctions d'une seule variable) le soient.

6.2 Continuité sur une partie

Définition 6.2.1.

Soit f une fonction définie sur une partie A non vide de $\mathbb{R}^p$.

f est continue sur A si et seulement si en tout point m_0 de A, f admet en m_0, selon A, la limite $f(m_0)$.

(si A est un ouvert, f est continue sur A si et seulement si f est continue en tout point de A).

cela peut s'écrire :

$$(\forall\ m_0\in A,\ \forall\ \varepsilon>0,\ \exists\ \eta>0,\ \forall\ m\in A,\ 0\leqslant \|m-m_0\|_2<\eta \Rightarrow \|f(m)-f(m_0)\|_2<\varepsilon)$$

Notation : L'ensemble des fonctions continues sur $A\subset\mathbb{R}^p$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ se note $\mathcal{C}\Big(A,\mathbb{R}^n\Big)$

Remarque. f est continue sur A si et seulement si toutes ses fonctions coordonnées (à valeurs dans $\mathbb{R}$) sont continues sur A .

6.3 Propriétés liées à la structure algébrique de l'ensemble d'arrivée

La continuité en un point, ou sur une partie, est conservée par les opérations usuelles :

- Somme,
- Produit par un scalaire,
- Produit par une fonction scalaire,
- Composition,
- Produit scalaire, produit vectoriel, déterminant, ...

Théorème 6.3.1.

$\mathcal{C}\Big(A, \mathbb{R}^n\Big)$, muni des opérations usuelles $+$ et $\cdot$, est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel.

(cet espace n'est pas de dimension finie)

Preuve. Sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}\Big(A, \mathbb{R}^n\Big)$.

On en déduit que, par exemple

- les fonctions polynômes de p variables sont continues sur $\mathbb{R}^p$
- les fonctions rationnelles de p variables sont continues sur sur leur ensemble de définition
- ...

Théorème 6.3.2. *(image d'une partie fermée bornée)*

L'image d'une partie fermée bornée non vide de $\mathbb{R}^p$, par une fonction continue de $\mathbb{R}^p$ vers $\mathbb{R}^n$, est une partie fermée bornée non vide de $\mathbb{R}^n$.

Preuve. Admis.

Théorème 6.3.3. *(conséquence directe du précédent)*

Une fonction continue sur une partie fermée bornée non vide de $\mathbb{R}^p$ y est bornée **et y atteint ses bornes**.

6.4 Fonctions (k-)lipschitziennes

Définition 6.4.1.

Une fonction f est k-lipschitzienne sur une partie A si

$$\forall\ x, x' \in A,\ \|f(x) - f(x')\|_2 \leqslant k\ \|x - x'\|_2$$

Remarque. Une fonction, (k-)lipschitzienne sur une partie A, est continue sur A (mais la réciproque est fausse !)

Exemples et contre-exemples :

- L'application $\|\ \|_2$, de $\mathbb{R}^p$ vers $\mathbb{R}$, est 1-lipschitzienne sur $\mathbb{R}^p$: $\Big|\|a\|_2 - \|b\|_2\Big| \leqslant \|a - b\|_2$
- sin est lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.
- $\sqrt{\ }$ est continue sur $\mathbb{R}$, mais n'y est pas lipschitzienne
(mais elle est lipschitzienne sur tout intervalle $[a, +\infty[$, avec $a > 0$).
- $x \longmapsto \dfrac{1}{x} \sin x$, prolongée par continuité en 0, est continue sur $\mathbb{R}$, lipschitzienne sur $\mathbb{R}$ (elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, à dérivée bornée).
- ...

7 Dérivabilité partielle

7.1 Vecteur dérivé partiel en un point

Définition 7.1.1.

Soit une fonction $\begin{cases} f: & \mathbb{E}=\mathbb{R}^p & \longrightarrow & \mathbb{F}=\mathbb{R}^n \\ & m & \longmapsto & f(m) \end{cases}$ définie sur l'ouvert Ω (non vide) de $\mathbb{R}^p$

Soit $a \in \Omega$ et $\overrightarrow{h}$ un vecteur de $\mathbb{R}^p$.

f est dérivable en a selon le vecteur $\overrightarrow{h}$, si $\dfrac{f(a+t\,\overrightarrow{h})-f(a)}{t}$ admet une limite lorsque t tends vers 0.

Cette limite est la dérivée de f en a selon le vecteur $\overrightarrow{h}$ et on note :

$$D_{\overrightarrow{h}}f(a)=\lim_{t\to 0}\frac{f(a+t\,\overrightarrow{h})-f(a)}{t}.$$

Lorsque $\overrightarrow{h}=\overrightarrow{e_j}$ (j-ième vecteur de la base canonique), $D_{\overrightarrow{h}}f(a)$ se note $D_jf(a)$ ou $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a)$.

$\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a)$ est la i-ième dérivée partielle de f en a,
le i-ième vecteur dérivé partiel de f en a,
le vecteur dérivé partiel de f en a, par rapport à la i-ième variable x_i .

Remarque. Comme Ω est ouvert, il existe un nombre réel $\delta>0$ tel que, pour $\forall t\in[-\delta,\delta]$, $a+t\,\overrightarrow{h}\in\Omega$.

Avec $a=\Big(a_k\Big)_{k=1\cdots p}$, pour i tel que $3<i<p-1$, par exemple, on a :

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)&=\lim_{t\to 0}\frac{f(a_1,a_2,\cdots,a_{i-1},\ \underline{\mathbf{a_i+t}}\ ,a_{i+1},\cdots,a_p)-f(a_1,a_2,\cdots,a_{i-1},\ \underline{\mathbf{a_i}}\ ,a_{i+1},\cdots,a_p)}{t}\\ &=\lim_{\lambda\to a_i}\frac{f(a_1,a_2,\cdots,a_{i-1},\ \underline{\lambda}\ ,a_{i+1},\cdots,a_p)-f(a_1,a_2,\cdots,a_{i-1},\ \underline{\mathbf{a_i}}\ ,a_{i+1},\cdots,a_p)}{\lambda-a_i}\end{aligned}$$

Théorème 7.1.1.

Pour une fonction φ de $\mathbb{R}^p$ vers $\mathbb{R}$, deux fonctions f et g de $\mathbb{R}^p$ vers $\mathbb{R}^n$,
n fonctions $f_1,f_2,\cdots,f_n$ de $\mathbb{R}^p$ vers $\mathbb{R}^n$,

admettant une dérivée partielle en a, par rapport à la i-ième variable x_i, et un réel λ,

- $\dfrac{\partial\,(f+\lambda\cdot g)}{\partial\,x_i}(a)=\dfrac{\partial\,f}{\partial\,x_i}(a)+\lambda\cdot\dfrac{\partial\,g}{\partial\,x_i}(a)$
- $\dfrac{\partial\,(\varphi\,f)}{\partial\,x_i}(a)=\varphi(a)\,\dfrac{\partial\,f}{\partial\,x_i}(a)+\dfrac{\partial\,\varphi}{\partial\,x_i}(a)\,f(a)$
- $\dfrac{\partial\,<f\mid g>}{\partial\,x_i}(a)=<\dfrac{\partial\,f}{\partial\,x_i}(a)\mid g(a)>+<f(a)\mid\dfrac{\partial\,g}{\partial\,x_i}(a)>$
- $\dfrac{\partial\,(f\ \wedge\ g)}{\partial\,x_i}(a)=\dfrac{\partial\,f}{\partial\,x_i}(a)\ \wedge\ g(a)+f(a)\ \wedge\ \dfrac{\partial\,g}{\partial\,x_i}(a)\qquad$ (si $p=3$)
- $\dfrac{\partial}{\partial x_i}\Big(\det_{\mathcal{C}}(f_1,f_2,\cdots,f_n)\Big)(a)=\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\det_{\mathcal{C}}\Big(f_1(a),f_2(a),\cdots,f_{j-1}(a),\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(a),f_{j+1}(a),\cdots,f_n(a)\Big)$
- etc ...

Preuve. Par exemple, dans le cas du produit scalaire, on peut écrire

$<f(a+t\,\overrightarrow{h})\,|\,g(a+t\,\overrightarrow{h})>-<f(a)\,|\,g(a)>=<f(a+t\,\overrightarrow{h})-f(a)\,|\,g(a)>+<f(a)\,|\,g(a+t\,\overrightarrow{h})-g(a)>$

et, après division par t, passer à la limite, en utilisant la linéarité.

7.2 Fonctions dérivées partielles

Définition 7.2.1.

Soit une fonction $\begin{cases} f: & \mathbb{E}=\mathbb{R}^p & \longrightarrow & \mathbb{F}=\mathbb{R}^n \\ & m & \longmapsto & f(m) \end{cases}$ définie sur l'ouvert Ω (non vide) de $\mathbb{R}^p$.

La fonction qui, à tout point m de Ω, associe le i-ième vecteur dérivé partiel de f en m (lorsqu'il existe) s'appelle **i-ième (fonction) dérivée partielle** de f et se note $\dfrac{\partial}{\partial x_i}\big(f\big)$ ou $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_i}: & \mathbb{E}=\mathbb{R}^p & \longrightarrow & \mathbb{F}=\mathbb{R}^n \\ & m & \longmapsto & \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(m) \end{cases}$$

Si toutes les fonctions dérivées partielles de f existent, sont définies et continues sur Ω, la fonction f est dite (de classe) $\mathcal{C}^1$ sur Ω.

Exemple 7.2.0.2. Soit, par exemple, la fonction $\begin{cases} f: & \mathbb{E}=\mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{F}=\mathbb{R}^2 \\ & (u,v) & \longmapsto & \begin{pmatrix} x = u\ \sin v \\ y = u^2+u\,v \end{pmatrix} \end{cases}$

les fonctions dérivées partielles de f sont les fonctions :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial u}: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (u,v) & \longmapsto & \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u}(u,v) = \sin v \\ \dfrac{\partial y}{\partial u}(u,v) = 2\,u+v \end{pmatrix} \end{cases} \text{ et } \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial v}: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (u,v) & \longmapsto & \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial v}(u,v) = u\cos v \\ \dfrac{\partial y}{\partial v}(u,v) = u \end{pmatrix} \end{cases}$$

Dans le cas d'une fonction vectorielle d'une seule variable, la notion de dérivée partielle par rapport à cette unique variable, rejoint la notion de dérivée usuelle et autorise l'écriture f' (ou également $\dfrac{d\,f}{d\,t}$).

Exemple 7.2.0.3. Avec la fonction : $\begin{cases} f: & R & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & t & \longmapsto & \begin{pmatrix} x = & t^2+1 \\ y = & \sin t+\cos t \end{pmatrix} \end{cases}$

on a : $\begin{cases} f' = \dfrac{d\,f}{d\,t}: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & t & \longmapsto & f'(t) = \dfrac{d\,f}{d\,t}(t) = \begin{pmatrix} x'(t) = & \dfrac{d\,x}{d\,t}(t) = & 2\,t \\ y'(t) = & \dfrac{d\,y}{d\,t}(t) = & \cos t - \sin t \end{pmatrix} \end{cases}$

8 Exemples d'étude de prolongement par continuité

8.1 Fonction non prolongeable par continuité

Soit la fonction $\begin{cases} f: & \mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & \dfrac{2\,x\,y}{x^2+y^2}\end{cases}$

1. Propriétés générales de f (fonction rationnelle en x et y) :
   - f est une fonction définie, continue sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.
   - f admet des dérivées partielles, par rapport à chacune de ses variables x et y, en tout point de $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ et ses fonctions dérivées partielles sont continue sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.

   En un mot, f est de classe (au moins) $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.
2. Etude d'un prolongement par continuité en $(0,0)$:

   Etude des fonctions partielles : $\begin{cases} \text{pour } x\neq 0,\ f(x,0)=0 \text{ et } \lim\limits_{x\to 0} f(x,0)=0 \\ \text{pour } y\neq 0,\ f(0,y)=0 \text{ et } \lim\limits_{y\to 0} f(0,y)=0\end{cases}$

   mais cela ne suffit pas : pour $x\neq 0$, $f(x,x)=1$ et $\lim\limits_{x\to 0} f(x,x)=1$.

   $\boxed{\text{La fonction } f \text{ n'est pas prolongeable par continuité en } (0,0)}$.

8.2 Fonction prolongée par continuité, différentiable mais pas de classe $\mathcal{C}^1$

Soit la fonction $\begin{cases} f: & \mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & \dfrac{x\,y^2}{x^2+y^2}\end{cases}$

1. Propriétés générales de f (fonction rationnelle en x et y) :
   - f est une fonction définie, continue sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.
   - f admet des dérivées partielles, par rapport à chacune de ses variables x et y, en tout point de $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ et ses fonctions dérivées partielles sont continue sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.

   En un mot, f est de classe (au moins) $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.
2. Etude d'un prolongement par continuité en $(0,0)$:

   Pour $r>0$, $f(r\,\cos\theta, r\,\sin\theta)=\dfrac{r^3\,\cos\theta\,\sin^2\theta}{r^2}=r\,\underbrace{\cos\theta\,\sin^2\theta}_{\text{borné}}\xrightarrow[r\to 0]{} 0$. Ainsi $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$.

   $\boxed{\text{En posant } f(0,0)=0, \text{ on transforme } f \text{ en une fonction continue aussi en } (0,0)}$.
3. Etude de la dérivabilité partielle en $(0,0)$ **(il n'y a plus de choix, il faut subir $f(0,0)$).**
   (a) Par rapport à la première variable (x).
      1. Expression (et fonction) dérivée partielle par rapport à x en $(x,y)\neq(0,0)$:
      Pour $(x,y)\neq(0,0)$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\dfrac{y^2}{x^2+y^2}-\dfrac{2\,x^2\,y^2}{(x^2+y^2)^2}$
      2. Nombre dérivé partiel par rapport à x en $(0,0)$:
      Retour à la définition, avec le taux d'accroissement de la fonction partielle de x en $(0,0)$) :
      Pour $h\neq 0$, $\dfrac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}=\dfrac{0-0}{h}=0\xrightarrow[h\to 0]{} 0$. Donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ existe et $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0$.
      3. Continuité de la fonction dérivée partielle par rapport à x en $(0,0)$:
      Pour $r>0$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(r\,\cos\theta, r\,\sin\theta)=\dfrac{r^2\,\sin^2\theta}{r^2}-\dfrac{2\,r^4\,\cos^2\theta\,\sin^2\theta}{r^4}=\sin^2\theta\,(1-2\,\cos^2\theta)$
      n'a pas une limite constante quand r tends vers 0. $\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial x} \text{ n'est pas continue en } (0,0)}$.

   (b) Par rapport à la seconde variable (y). Même schéma ;
      1. Expression (et fonction) dérivée partielle par rapport à y en $(x,y)\neq(0,0)$: ...
      2. Nombre dérivé partiel par rapport à y en $(0,0)$: ...
      3. Continuité de la fonction dérivée partielle par rapport à y en $(0,0)$: ...

$\boxed{\text{En résumé, la fonction } f\text{, prolongée par continuité en posant } f(0,0)=0\text{, est définie, continue sur tout } \mathbb{R}^2\text{, de classe } \mathcal{C}^1 \text{ seulement sur } \mathbb{R}^2\setminus\{0,0\}.}$

8.3 Fonction prolongée par continuité et de classe $\mathcal{C}^1$

Soit la fonction $\begin{cases} f: & \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & \dfrac{x\,y^3}{x^2+y^2} \end{cases}$

1. Propriétés générales de f (fonction rationnelle en x et y) :
   - f est une fonction définie, continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
   - f admet des dérivées partielles, par rapport à chacune de ses variables x et y, en tout point de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et ses fonctions dérivées partielles sont continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

   En un mot, f est de classe (au moins) $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
2. Etude d'un prolongement par continuité en $(0,0)$:

   Pour $r > 0$, $f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \dfrac{r^4\cos\theta\sin^3\theta}{r^2} = r^2\underbrace{\cos\theta\sin^3\theta}_{\text{borné}} \xrightarrow[r\to 0]{} 0$. Ainsi $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

   $\boxed{\text{En posant } f(0,0) = 0\text{, on transforme } f \text{ en une fonction continue aussi en } (0,0)}$.
3. Etude de la dérivabilité partielle en $(0,0)$ **(il n'y a plus de choix, il faut subir $f(0,0)$).**
   (a) Par rapport à la première variable (x).

   1. Expression (et fonction) dérivée partielle par rapport à x en $(x,y) \neq (0,0)$:

   Pour $(x,y) \neq (0,0)$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{y^3}{x^2+y^2} - \dfrac{2\,x^2\,y^3}{(x^2+y^2)^2}$

   2. Nombre dérivé partiel par rapport à x en $(0,0)$:

   Retour à la définition, avec le taux d'accroissement de la fonction partielle de x en $(0,0)$) :

   Pour $h \neq 0$, $\dfrac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \dfrac{0-0}{h} = 0 \xrightarrow[h\to 0]{} 0$. Donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ existe et $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$

   3. Continuité de la fonction dérivée partielle par rapport à x en $(0,0)$:

   Pour $r > 0$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) = \dfrac{2\,r^3\sin^3\theta}{r^2} - \dfrac{2\,r^5\cos^2\theta\sin^3\theta}{r^4} \xrightarrow[r\to 0]{} 0 = \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$.

   Ainsi $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$.

   On a prouvé que $\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial x} \text{ est définie sur } \mathbb{R}^2 \text{ et continue sur tout } \mathbb{R}^2}$.

   (b) Par rapport à la seconde variable (y). Même schéma :

   1. Expression (et fonction) dérivée partielle par rapport à y en $(x,y) \neq (0,0)$:

   Pour $(x,y) \neq (0,0)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \cdots$

   2. Nombre dérivé partiel par rapport à y en $(0,0)$:

   Pour $k \neq 0$, $\dfrac{f(0,0+k)-f(0,0)}{k} = \dfrac{0-0}{k} = 0 \xrightarrow[h\to 0]{} 0$. Donc $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ existe et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

   3. Continuité de la fonction dérivée partielle par rapport à y en $(0,0)$:

   Pour $r > 0$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta) = \cdots \xrightarrow[r\to 0]{} 0 = \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

   Ainsi $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

   On a prouvé que $\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial y} \text{ est définie sur } \mathbb{R}^2 \text{ et continue sur tout } \mathbb{R}^2}$.

   $\boxed{\text{La fonction } f\text{, prolongée en posant } f(0,0) = 0\text{, est définie, continue et de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur tout } \mathbb{R}^2 .}$
4. On pourrait ensuite étudier les dérivées partielles des fonctions dérivées partielles :

   Appliquer les trois étapes **1**, **2** et **3**, de dérivation par rapport à x puis par rapport à y (comme ci-dessus), à chacune des fonctions $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ (remplacer f par $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ puis par $\dfrac{\partial f}{\partial y}$).

   On constate que, si les 4 nombres dérivés partiels d'ordre 2 en $(0,0)$ existent, les 4 fonctions dérivées partielles d'ordre 2 ne sont pas toutes continues en $(0,0)$ ... .

< *FIN* >