Géométrie en dimension 2 ou 3.
Courbes planes définies par une équation cartésienne.
Surfaces définies par une équation cartésienne.
Courbe intersection de deux surfaces.

Antoine MOTEAU antoine.moteau@wanadoo.fr

Table des matières

Courbes planes ou surfaces définies implicitement.

Le plan affine euclidien est muni de son repère canonique orthonormé direct $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.

L'espace affine euclidien est muni de son repère canonique orthonormé direct $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$.
Dans la suite, on confond souvent un point m avec le couple (x, y) (ou le triplet (x, y, z)) de ses coordonnées dans le repère canonique.

1 Tangente en un point non singulier d'une courbe plane définie implicitement

Soit $(\mathcal{C})$ une courbe plane d'équation cartésienne $f(x, y) = 0$, où f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert $\mathcal{U}$ contenant $(\mathcal{C})$.
La courbe $(\mathcal{C})$ est l'ensemble des points $m = (x, y)$ vérifiant $f(x, y) = 0$.

- Si l'équation de la courbe est sous la forme $y = g(x)$ (ou $x = h(y)$), il s'agit d'une équation **explicite** : y est donnée par une formule en fonction de x (ou x par une formule en fonction de y).
- Lorsque l'équation reste sous la forme $f(x, y) = 0$, on dit qu'il s'agit d'une équation cartésienne **implicite** (non explicite).

Les équations explicites constituent un cas particulier des équation implicites (par exemple, $y = g(x) \iff f(x, y) = 0$, avec $f(x, y) = g(x) - y$).
Quand une courbe est donnée par une équation implicite $f(x, y) = 0$, on ne sait pas toujours établir

- une équation explicite $y = g(x)$ (ou $x = h(y)$), même en traitant la courbe morceaux par morceaux
- ou une représentation paramétrique
- ou une représentation polaire (ou polaire paramétrée)

Définition 1.0.1. Point singulier

Un point m de la courbe $(\mathcal{C})$, d'équation implicite $f(x, y) = 0$, est dit **singulier** si les dérivées partielles de f en m sont toutes nulles (sinon le point est dit **régulier**).

Pour chercher les points singuliers, il faut résoudre le système

$$\begin{cases} f(x, y) = 0 \qquad \text{(ne pas oublier que le point doit appartenir à la courbe !)} \\ \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases} \end{cases}$$

Théorème 1.0.1. *Existence (locale) d'une représentation fonctionnelle*

Soit $m_0 = (x_0, y_0)$ un point de la courbe $(\mathcal{C})$, d'équation implicite $f(x, y) = 0$ avec f de classe $\mathcal{C}^1$.

- Si $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$,
alors, au voisinage de (x_0, y_0), la courbe admet une représentation sous la forme $y = \phi(x)$, avec ϕ de classe $\mathcal{C}^1$.

- Si $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \neq 0$,
alors, au voisinage de (x_0, y_0), la courbe admet une représentation sous la forme $x = \psi(y)$, avec ψ de classe $\mathcal{C}^1$.

Preuve. Admis

Remarque. Si on peut apporter la preuve de l'existence (locale) d'une représentation explicite, on ne sait pas toujours établir une telle relation . . .

Théorème 1.0.2.

La tangente à la courbe d'équation $f(x,y)=0$ en un point $m_0=(x_0,y_0)$ non singulier

- est orthogonale au vecteur

$$\overrightarrow{grad}\, f_{m_0} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\ \overrightarrow{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\ \overrightarrow{j}$$

- a pour équation cartésienne

$$(x-x_0)\ \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + (y-y_0)\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = 0$$

- est dirigée par le vecteur

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\ \overrightarrow{i} - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\ \overrightarrow{j}$$

Preuve. **Utilisation de l'existence d'une représentation explicite locale**

1. (premier cas) : Si au voisinage de m_0, point non singulier de $(\mathcal{C})$, la courbe $(\mathcal{C})$ admet une représentation fonctionnelle (explicite) sous la forme $y=\phi(x)$, avec ϕ de classe $\mathcal{C}^1$,
   - la tangente à $(\mathcal{C})$, en un point $m\big(x, y=\phi(x)\big)$, voisin de m_0, a pour vecteur directeur

   $$1\ \overrightarrow{i} + \phi'(x)\ \overrightarrow{j}$$

   - en dérivant la relation $f\big(x,\phi(x)\big)=0$, on obtient

   $$\frac{\partial f}{\partial x}\big(x,\phi(x)\big) + \frac{\partial f}{\partial y}\big(x,\phi(x)\big)\ \phi'(x) = 0$$

   - ce dernier résultat s'interprète comme le produit scalaire des vecteurs :

   $$1\ \overrightarrow{i} + \phi'(x)\ \overrightarrow{j} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial x}\big(x,\phi(x)\big)\ \overrightarrow{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\big(x,\phi(x)\big)\ \overrightarrow{j}$$

   on en déduit que,

   $$\frac{\partial f}{\partial x}\big(x,\phi(x)\big)\ \overrightarrow{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\big(x,\phi(x)\big)\ \overrightarrow{j}$$

   est un vecteur normal à la courbe au point $m\big(x, y=\phi(x)\big)$.
2. (deuxième cas) : Si au voisinage de m_0, point non singulier de $(\mathcal{C})$, la courbe $(\mathcal{C})$ admet une représentation fonctionnelle (explicite) sous la forme $x=\psi(x)$, avec ψ de classe $\mathcal{C}^1$,
   un calcul analogue prouve que

   $$\frac{\partial f}{\partial x}\big(\psi(x),y\big)\ \overrightarrow{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\big(\psi(x),y\big)\ \overrightarrow{j}$$

   est un vecteur normal à la courbe au point $m\big(x=\psi(y), y\big)$.

Exemple 1.0.0.1. Soit la conique $(\mathcal{C})$ d'équation cartésienne $x^2+6\,x\,y+y^2-2\,x+y-7=0$

1. Donner l'équation de la tangente à $(\mathcal{C})$ au point $(1,1)$,
2. Déterminer les points de $(\mathcal{C})$ où la tangente est dirigée par $\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}$,
3. Déterminer les points de $(\mathcal{C})$ où la tangente est parallèle à un axe de coordonnée,
4. Préciser la nature de $(\mathcal{C})$

2 Plan tangent en un point régulier d'une surface définie implicitement

Soit (Σ) une surface d'équation cartésienne $f(x, y, z) = 0$, où f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert $\mathcal{U}$ contenant (Σ).

La surface (Σ) est l'ensemble des points $m = (x, y, z)$ vérifiant $f(x, y, z) = 0$.

- Si l'équation de la surface est sous la forme $z = g(x, y)$ (ou $y = h(x, z)$ ou $x = k(y, z)$), il s'agit d'une équation **explicite** : z est donnée par une formule en fonction de x et y (ou y par une formule en fonction de x et z ou ...).
- Lorsque l'équation reste sous la forme $f(x, y, z) = 0$, on dit qu'il s'agit d'une équation cartésienne **implicite** (non explicite).

Les équations explicites constituent un cas particulier des équation implicites (par exemple, $z = g(x, y) \iff f(x, y, z) = 0$, avec $f(x, y, z) = g(x, y) - z$).

Quand une surface est donnée par une équation implicite $f(x, y, z) = 0$, on ne sait pas toujours établir

- une équation explicite $z = g(x, y)$ (ou $y = h(x, z)$ ou $x = k(y, z)$), même en traitant la surface morceaux par morceaux
- une représentation paramétrique (nappe)

Définition 2.0.2. Point singulier

Un point m de la surface (Σ), d'équation implicite $f(x, y, z) = 0$, est dit **singulier** si les dérivées partielles de f en m sont toutes nulles (sinon le point est dit **régulier**).

Pour chercher les points singuliers, il faut résoudre le système

$$\begin{cases} f(x,y,z) = 0 \qquad \text{(ne pas oublier que le point doit appartenir à la surface !)} \\ \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 0 \end{cases} \end{cases}$$

Théorème 2.0.3. *Existence (locale) d'une représentation fonctionnelle*

Soit $m_0 = (x_0, y_0, z_0)$ un point de la surface (Σ) d'équation implicite $f(x, y, z) = 0$ avec f de classe $\mathcal{C}^1$.

- Si $\dfrac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$,
  alors, au voisinage de (x_0, y_0, z_0), la surface admet une représentation sous la forme $z = \phi(x, y)$, avec ϕ de classe $\mathcal{C}^1$.
- Si $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$,
  alors, au voisinage de (x_0, y_0, z_0), la surface admet une représentation sous la forme $y = \psi(x, z)$, avec ψ de classe $\mathcal{C}^1$.
- Si $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$,
  alors, au voisinage de (x_0, y_0, z_0), la surface admet une représentation sous la forme $x = \xi(y, z)$, avec ξ de classe $\mathcal{C}^1$.

Preuve. Admis.

Remarque. Si on peut apporter la preuve de l'existence (locale) d'une représentation explicite, on ne sait pas toujours établir une telle relation ...

Théorème 2.0.4.

Le plan tangent à la surface d'équation $f(x,y,z)=0$ en un point $m_0=(x_0,y_0,z_0)$ non singulier

- est orthogonal au vecteur

$$\overrightarrow{grad}\, f_{m_0} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)\ \overrightarrow{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)\ \overrightarrow{j} + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)\ \overrightarrow{k}$$

- a pour équation cartésienne

$$(x-x_0)\ \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0) + (y-y_0)\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0) + (z-z_0)\ \frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0) = 0$$

Preuve. **Utilisation de l'existence d'une représentation explicite locale**

1. (premier cas) : Si au voisinage de m_0, point non singulier de (Σ), la surface (Σ) admet une représentation fonctionnelle (explicite) sous la forme $z=\phi(x,y)$, avec ϕ de classe $\mathcal{C}^1$, cette représentation s'interprète comme un paramétrage :

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = \phi(u,v) \end{cases}$$

   - le plan tangent à (Σ), en un point $m\big(x,y,z=\phi(x,y)\big)$, voisin de m_0, a pour vecteurs directeurs

$$1\ \overrightarrow{i} + 0\ \overrightarrow{j} + \frac{\partial \phi}{\partial x}(x,y)\ \overrightarrow{k} \quad \text{et} \quad 0\ \overrightarrow{i} + 1\ \overrightarrow{j} + \frac{\partial \phi}{\partial y}(x,y)\ \overrightarrow{k}$$

   - en dérivant la relation $f\big(x,y,\phi(x,y)\big)=0$, par rapport à x puis par rapport à y, on obtient :

$$\begin{array}{ccccccc} \frac{\partial f}{\partial x}\big(x,y,\phi(x,y)\big) & + & 0 & + & \frac{\partial f}{\partial z}\big(x,y,\phi(x,y)\big) & \frac{\partial \phi}{\partial x}(x,y) & =0 \\ 0 & + & \frac{\partial f}{\partial y}\big(x,y,\phi(x,y)\big) & + & \frac{\partial f}{\partial z}\big(x,y,\phi(x,y)\big) & \frac{\partial \phi}{\partial y}(x,y) & =0 \end{array}$$

   - ces derniers résultats s'interprètent comme le produit scalaire du vecteur :

$$\frac{\partial f}{\partial x}\big(x,y,\phi(x,y)\big)\ \overrightarrow{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\big(x,y,\phi(x,y)\big)\ \overrightarrow{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\big(x,y,\phi(x,y)\big)\ \overrightarrow{k}$$

   avec les deux vecteurs directeurs du plan tangent en $m\big(x,y,z=\phi(x,y)\big)$ trouvés ci-dessus.

   On en déduit que

$$\frac{\partial f}{\partial x}\big(x,y,\phi(x,y)\big)\ \overrightarrow{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\big(x,y,\phi(x,y)\big)\ \overrightarrow{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\big(x,y,\phi(x,y)\big)\ \overrightarrow{k}$$

   est un vecteur normal au plan tangent en $m\big(x,y,z=\phi(x,y)\big)$.

2. (autres cas) : avec une représentation paramétrique locale $y=\psi(x,z)$ ou $x=\xi(y,z)$, on obtient un résultat analogue.

Exemple 2.0.0.2. Soit la quadrique $(\mathcal{Q})$ d'équation cartésienne $x^2+y^2-z^2+x\,y-1=0$

1. Donner l'équation du plan tangent à $(\mathcal{Q})$ au point $(1,1,\sqrt{2})$
2. Déterminer les points de $(\mathcal{Q})$ où le plan tangent est orthogonal à $\overrightarrow{i}+\overrightarrow{k}$
3. Déterminer les points de $(\mathcal{Q})$ où le plan tangent est parallèle à un plan de coordonnées

3 Tangente à une courbe intersection de deux surfaces définies implicitement

Soit la courbe (Γ), intersection des deux surfaces $\begin{cases} S_1, \text{ d'équation cartésienne implicite } f(x,y,z)=0 \\ S_2, \text{ d'équation cartésienne implicite } g(x,y,z)=0 \end{cases}$

où f et g sont des fonction de classe $\mathcal{C}^1$ dans un ouvert $\mathcal{U}$ contenant (Γ).

Si en $m_0 \in (\Gamma)$, les plans tangents à S_1 et à S_2 ne sont pas confondus, alors

1. Au voisinage de m_0, (Γ) est le support d'un arc paramétré de classe $\mathcal{C}^1$.
2. L'intersection des plans tangents à S_1 et à S_2 est la tangente à (Γ) en m_0 et la tangente en m_0 à (Γ) est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{grad}\, f_{m_0} \wedge \overrightarrow{grad}\, g_{m_0}$.

En effet, la tangente à (Γ) en m_0 étant orthogonale à chacun de des deux vecteurs $\overrightarrow{grad}\, f_{m_0}$ et $\overrightarrow{grad}\, g_{m_0}$, on en déduit qu'elle est colinéaire à leur produit vectoriel.

Exemple 3.0.0.3. Soit la courbe (Γ) d'équations cartésiennes $\begin{cases} 2\,x^2 - 3\,y^2 - z^2 - 4\,x + 6 = 0 \\ x^2 - 4\,y^2 - z^2 - 4\,x + 8 = 0 \end{cases}$

(Γ) est l'intersection de $\begin{cases} S_1, \text{ quadrique, d'équation cartésienne implicite } 2\,x^2 - 3\,y^2 - z^2 - 4\,x + 6 = 0, \\ S_2, \text{ quadrique, d'équation cartésienne implicite } x^2 - 4\,y^2 - z^2 - 4\,x + 8 = 0. \end{cases}$

Le point $m_0 = (1,1,1)$ est un point de (Γ).

1. Déterminer la tangente en m_0 à (Γ).
2. Montrer que Γ est tracée sur un cylindre de révolution d'axe Oz, dont on précisera l'équation cartésienne.
3. En déduire que le sous-arc de (Γ) contenant m_0, est paramétré par : $\begin{cases} x = \sqrt{2}\,\cos\theta \\ y = \sqrt{2}\,\sin\theta \\ z = \sqrt{10\,\cos^2\theta - 4\sqrt{2}\,\cos\theta} \end{cases}$
4. Retrouver à l'aide de ce paramétrage la tangente en m_0 à (Γ).

4 Tangente à une courbe intersection de deux nappes paramétrées

Pour un point m_0 de la courbe,

- il faut trouver à quelles valeurs de paramétres il correspond pour l'une ET pour l'autre nappe.
- Ensuite, on détermine les plans tangents à chacune des nappes en ce point, en fonction des valeurs des paramètres respectifs.
- Si ces plans ne sont pas confondus, on en déduit la tangente à la courbe en m_0.

Exemple 4.0.0.4. Soit la courbe (Γ) intersection des deux nappes

$$S_1 : \begin{cases} x = t + 2\,u \\ y = 5\,t - 5 - 10\,t\,u \\ z = 2\,t - 2 + u \end{cases} \quad (t,u) \in \mathbb{R}^2 \qquad \text{et} \qquad S_2 : \begin{cases} x = t + 1 + 2\,u \\ y = 5\,t - 3\,t\,u \\ z = t + u \end{cases} \quad (t,u) \in \mathbb{R}^2$$

Le point $m_0 = (1,0,0)$ est un point de (Γ).

1. Déterminer les valeurs de paramètres pour m_0 sur S_1 et les valeurs de paramètres pour m_0 sur S_2.
2. Déterminer le plan tangent à S_1 en m_0 et le plan tangent à S_2 en m_0.
3. Déterminer un vecteur directeur de la tangente en m_0 à (Γ).
4. Donner un paramétrage de Γ et préciser l'équation du plan osculateur de Γ en m_0.

< $\mathcal{FIN}$ >