Automorphismes orthogonaux (d'un espace euclidien)

Antoine MOTEAU antoine.moteau@wanadoo.fr

Table des matières

1 Généralités **2**
1.1 Introduction 2
1.2 Propriétés 3
1.3 Groupe orthogonal $\mathcal{O}(E)$, sous groupe $\mathcal{SO}(E)$ 4

2 Automorphismes orthogonaux en dimension 2 **5**
2.1 Classification des automorphismes orthogonaux en dimension 2 5
2.2 Etude de commutativité 5
2.3 Décomposition d'une rotation en produit de deux symétries axiales 5
2.4 Calcul pratique de la matrice d'un automorphisme orthogonal 6

3 Automorphismes orthogonaux en dimension 3 **7**
3.1 Classification des automorphismes orthogonaux en dimension 3 7
3.1.1 Automorphismes orthogonaux directs 7
3.1.2 Automorphismes orthogonaux indirects 8
3.1.3 Exemples 8
3.2 Etude de commutativité 9
3.3 Décomposition d'une rotation en produit de deux réflexions 9
3.4 Décomposition d'une rotation en produit de deux retournements 11
3.5 Décomposition d'une rotation-réflexion en produit de trois réflexions 12
3.6 Calcul pratique de la matrice d'un automorphisme orthogonal 13
3.6.1 Changement de base orthonormale 13
3.6.2 Formules directes 14

Automorphismes orthogonaux d'un espace euclidien.

1 Généralités

$(E, < \mid >)$ est un espace euclidien de dimension n, orienté par le choix de sa base canonique orthonormale directe $\mathcal{C} = \left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \cdots, \overrightarrow{e_n}\right)$.

1.1 Introduction

Définition 1.1.1.

Un Automorphisme orthogonal de E est caractérisé par l'une des définitions équivalentes suivantes :

1. un automorphisme orthogonal de E est un endomorphisme de E, qui conserve la norme.
2. un automorphisme orthogonal de E est un endomorphisme de E, qui conserve le produit scalaire.
3. un automorphisme orthogonal de E est une application de E dans E, qui conserve le produit scalaire.

Preuve. (on prouve l'équivalence des trois définitions : $1 \Longrightarrow 2 \Longrightarrow 3 \Longrightarrow 1$)

- $1 \Longrightarrow 2$: d'après les relations de polarisation (expression du produit scalaire à l'aide de la norme) et on a aussi la réciproque $2 \Longrightarrow 1$
- $2 \Longrightarrow 3$: Rien à dire
- $3 \Longrightarrow 1$ ou 2 : C'est plus délicat : il faut montrer la linéarité !
  Pour λ réel et deux vecteurs $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ de E, quelconques :

$$\begin{aligned}
&\left\| f(\lambda \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) - \left(\lambda f(\overrightarrow{u}) + f(\overrightarrow{v})\right)\right\|^2 \\
&= \; < f(\lambda \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) - \lambda f(\overrightarrow{u}) - f(\overrightarrow{v}) \,\Big|\, f(\lambda \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) - \lambda f(\overrightarrow{u}) - f(\overrightarrow{v}) > \\
&= \; < f(\lambda \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) \,\Big|\, f(\lambda \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) > + \cdots + < f(\overrightarrow{v}) \,\Big|\, f(\overrightarrow{v}) > \\
&= \; < \lambda \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} \,\Big|\, \lambda \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} > + \cdots + < \overrightarrow{v} \,\Big|\, \overrightarrow{v} > \\
&= \; \left\|(\lambda \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) - (\lambda \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v})\right\|^2 = 0
\end{aligned}$$

Théorème 1.1.1.

Un automorphisme orthogonal de E est un automorphisme de E (qui conserve le produit scalaire).

(ce qui justifie le nom d'automorphisme orthogonal)

Preuve. Comme on est dans un espace de dimension finie, il suffit de prouver l'injectivité :

Soit u un automorphisme orthogonal de E.
$$\left(\overrightarrow{x} \in \ker(u)\right) \Longrightarrow \left(u(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{0}\right) \Longrightarrow \left(\|u(\overrightarrow{x})\| = 0\right) \Longrightarrow \left(\|\overrightarrow{x}\| = 0\right) \Longrightarrow \left(\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}\right)$$

Exemples 1.1.0.1.

1. $E = \mathbb{R}_n[X]$, muni du produit scalaire défini par $< P \mid Q >= \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)\, Q(t)\, dt$.
   L'application u définie par $\big(u(P)\big)(X) = P(-X)$, conserve la norme, c'est donc un automorphisme orthogonal. (u est même une symétrie (orthogonale) , puisque $u \circ u = id_E$).
2. Les symétries orthogonales d'un euclidien sont des automorphismes orthogonaux.
   (mais ce n'est pas le cas des projections orthogonales).
3. Les rotations d'un euclidien de dimension 2 ou 3 sont des automorphismes orthogonaux.

1.2 Propriétés

Un automorphisme orthogonal transforme une base orthonormale en une base orthonormale.

La matrice associée à un automorphisme orthogonal, dans une base orthonormale, est orthogonale.

Le déterminant d'un automorphisme orthogonal vaut $+1$ ou -1.

- si le déterminant est égal à $+1$, l'automorphisme est dit direct (de sens direct)
- si le déterminant est égal à -1, l'automorphisme est dit indirect (de sens indirect)

Un automorphisme orthogonal direct conserve l'orientation des bases orthonormales,
conserve les angles.

Un automorphisme orthogonal indirect change l'orientation des bases orthonormales,
change les angles en leurs opposés.

La composée de deux automorphismes orthogonaux est un automorphisme orthogonal
direct si les deux automorphismes sont de même sens
indirect sinon.

La réciproque d'un automorphisme orthogonal est un automorphisme orthogonal (de même sens)

Les valeurs propres réelles d'un automorphisme orthogonal, si elles existent, sont $+1$ ou -1.

(en dimension impaire, il y a toujours au moins une valeur propre réelle)

Si F est un sous espace stable par l'automorphisme orthogonal u (par exemple un sous espace propre de u),

alors $\begin{cases} \bullet\ F^\perp \text{ est stable par } u \\ \bullet\ \text{la restriction de } u \text{ à } F^\perp \text{ est un automorphisme orthogonal de } F^\perp \\ \quad \text{(et également, la restriction de } u \text{ à } F \text{ est un automorphisme orthogonal de } F) \end{cases}$

Preuve.

1. Conservation du produit scalaire, de l'orthogonalité et de la norme.
2. Découle de la précédente, puisque la matrice de passage d'une base orthonormale à une autre est une matrice orthogonale.
3. D'après les propriétés des matrices orthogonales, de leurs déterminant et le reste relève de définitions.
4. D'après les propriétés des matrices orthogonales.
5. itou
6. F étant un sous espace stable par u, la restriction de u à F est une application qui conserve la norme, donc c'est un automorphisme orthogonal de F.
   - Stabilité de $F^\perp$ par u : soit $\overrightarrow{e} \in F^\perp$ et $\overrightarrow{v} \in F$, quelconques.
     La restriction de u à F est bijective et il existe un unique $\overrightarrow{w}$ de F tel que $\overrightarrow{v} = u(\overrightarrow{w})$. Alors,
     $$< u(\overrightarrow{e}) \,|\, \overrightarrow{v} >=< u(\overrightarrow{e}) \,|\, u(\overrightarrow{w}) > \ =< \overrightarrow{e} \,|\, \overrightarrow{w} >= 0$$
     d'où : $\forall \overrightarrow{v} \in F < u(\overrightarrow{e}) \,|\, \overrightarrow{v} >= 0$ ce qui prouve que $\forall \overrightarrow{e} \in F^\perp,\ u(\overrightarrow{e}) \in F^\perp$
   - La restriction de u à $F^\perp$ conserve la norme, c'est donc un automorphisme orthogonal de $F^\perp$.

1.3 Groupe orthogonal $\mathcal{O}(E)$, sous groupe $\mathcal{SO}(E)$

Proposition 1.3.1.

$\mathcal{O}(E)$ est l'ensemble des automorphismes orthogonaux de E.

$\mathcal{SO}(E)$ est l'ensemble des automorphismes orthogonaux <u>*directs*</u> *de E.*

- $\left(\mathcal{O}(E), \circ\right)$ *est un groupe.*
- det *est un morphisme de groupe, de* $\left(\mathcal{O}(E), \circ\right)$ *vers* $(\{-1, 1\};, \times)$
- $\left(\mathcal{SO}(E), \circ\right)$ *est un groupe, sous groupe du précédent et noyau de* det

(ces groupes sont non commutatifs en général)

<u>*Preuve*</u>. Déjà vu, dans le cadre des matrices orthogonales et transposé ici à l'aide de la bijection canonique (morphisme bijectif de groupes) qui fait correspondre à un automorphisme orthogonal la matrice qui lui est associée relativement à la base orthonormale directe canonique.

Remarques. On notera que

- Le produit (composée) de deux automorphismes orthogonaux directs est un automorphisme orthogonal direct.
- Le produit (composée) de deux automorphismes orthogonaux indirects est un automorphisme orthogonal direct.
- Le produit (composée) d'un automorphisme orthogonal direct et d'un automorphisme orthogonal indirect est un automorphisme orthogonal indirect.

2 Automorphismes orthogonaux en dimension 2

On assimilera souvent l'espace euclidien $\left(E, <\,|\,>\right)$ orienté de dimension 2, à $\mathbb{R}^2$ muni de son produit scalaire usuel et de sa base canonique orthonormale directe $\mathcal{C} = \left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.

2.1 Classification des automorphismes orthogonaux en dimension 2

À partir de la forme générale d'une matrice 2×2, par simple identification :

$$\text{si } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \text{ on a } I_2 = {}^tA\,A = \begin{pmatrix} a^2+c^2 & ab+cd \\ ab+cd & b^2+d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On pose $a = \cos\theta$ et $c = \sin\theta$ et on en déduit b et d (deux cas possibles).

On obtient ainsi les deux seuls cas possibles de matrices orthogonales 2×2 :

$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$: matrice d'une rotation d'angle θ, relativement à une base orthonormale directe

matrice orthogonale directe, de valeurs propres (complexes) $e^{i\,\theta}$ et $e^{-i\,\theta}$

$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$: matrice d'une symétrie orthogonale par rapport à une droite, relativement à une base orthonormale directe

matrice orthogonale indirecte, de valeurs propres réelles $+1$ et -1

Remarque. En pratique, ne pas utiliser cette écriture pour les matrices orthogonales indirectes

2.2 Etude de commutativité

Proposition 2.2.1.

Le produit de deux rotations planes, d'angles respectifs θ_1 et θ_2 est la rotation d'angle $\theta_1 + \theta_2$.

Le sous groupe $\left(\mathcal{SO}(\mathbb{R}^2), \circ\right)$ est commutatif et isomorphe au groupe $\left(\mathbb{R}, +\right)$

Remarque.

- Le produit de deux symétries axiales distinctes, s_1 et s_2 est non commutatif : $s_2 \circ s_1$ et $s_1 \circ s_2$ sont des rotations d'angles opposés (voir ci-dessous).
- Le groupe $\left(\mathcal{O}(\mathbb{R}^2), \circ\right)$ est non commutatif
- Le produit d'une rotation et d'une symétrie axiale est non commutatif

2.3 Décomposition d'une rotation en produit de deux symétries axiales

Théorème 2.3.1.

Une rotation vectorielle r, d'angle θ, se décompose comme le produit de deux symétries orthogonales axiales s_1 et s_2, sous la forme

$$r = s_2 \circ s_1 \qquad \textit{(non commutatif)}$$

- *s_1 étant la symétrie orthogonale par rapport à une droite vectorielle $\mathcal{D}_1$*
- *s_2 étant la symétrie orthogonale par rapport à une droite vectorielle $\mathcal{D}_2$*
- *les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ faisant entre elles l'angle $\text{angle}\left(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2\right) = \dfrac{\theta}{2} \mod \pi$ (angle de droites).*

l'une des deux droites ($\mathcal{D}_1$ ou $\mathcal{D}_2$) pouvant être choisie de façon arbitraire.

Preuve. Choisissons, de façon arbitraire, s_1, symétrie orthogonale axiale par rapport à la droite $\mathcal{D}_1$.

En prenant $s_2 = r \circ s_1$,

- s_2 est un automorphisme orthogonal indirect, donc une symétrie orthogonale axiale par rapport à une droite $\mathcal{D}_2$.
- $s_2 \circ s_1 = r \circ s_1 \circ s_1 = r \circ s_1^2 = r$

Il ne reste plus qu'à établir la propriété angulaire :
Soient $\overrightarrow{v_1}$ un vecteur directeur de $\mathcal{D}_1$ et $\overrightarrow{v_2}$ un vecteur directeur de $\mathcal{D}_2$. Pour un vecteur $\overrightarrow{v}$ non nul,

$$\begin{aligned}\theta &= \text{angle}\big(\overrightarrow{v}, r(\overrightarrow{v})\big) = \text{angle}\big(\overrightarrow{v}, s_2 \circ s_1(\overrightarrow{v})\big) = -\text{angle}\big(s_2(\overrightarrow{v}), s_1(\overrightarrow{v})\big) \\ &= -\text{angle}\big(s_2(\overrightarrow{v}), \overrightarrow{v}\big) - \text{angle}\big(\overrightarrow{v}, s_1(\overrightarrow{v})\big) \\ &= \text{angle}\big(s_1(\overrightarrow{v}), \overrightarrow{v}\big) + \text{angle}\big(\overrightarrow{v}, s_2(\overrightarrow{v})\big) = 2\,\text{angle}\big(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v}\big) + 2\,\text{angle}\big(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v_2}\big) = 2\,\text{angle}\big(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\big)\end{aligned}$$

Exemple 2.3.0.1. Dans $\mathbb{R}^2$, muni de sa base orthonormale canonique directe $\mathcal{C} = (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$,
Soit f l'endomorphisme dont la matrice, relativement à $\mathcal{C}$, est $R = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$

1. f est une rotation d'angle θ tel que $\cos\theta = \dfrac{3}{5}$ et $\sin\theta = \dfrac{-4}{5}$. Puisque $\sin\theta < 0$, on a $\theta = -\arccos\left(\dfrac{3}{5}\right)$
2. Soit s_1 la symétrie orthogonale par rapport à la droite $\mathcal{D}_1$ d'équation $2\,x + y = 0$ (droite choisie de façon arbitraire), de vecteur orthogonal $\overrightarrow{w_1} = 2\,\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$
   - Si p est le projecteur orthogonal sur $\mathcal{D}_1^{\perp} = Vect(\overrightarrow{w_1})$, on a :
     $s_1(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{v} - 2\,p(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{v} - 2\,\dfrac{<\overrightarrow{w_1} \mid \overrightarrow{v}>}{\|\overrightarrow{w_1}\|^2}\,\overrightarrow{w_1}$ et la matrice de s_1, relativement à la base $\mathcal{C}$, est :
     $$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} s_1(\overrightarrow{i}) & s_1(\overrightarrow{j}) \end{array} \\ S_1 = & \begin{pmatrix} -3/5 & -4/5 \\ -4/5 & 3/5 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \overrightarrow{i} \\ \overrightarrow{j} \end{array} \end{array}$$
     symétrique uniquement parce que la base $\mathcal{C}$ est orthonormale.
   - ou, à l'aide de la matrice Δ de s_1 dans la base orthonormale directe $\mathcal{B} = (\overrightarrow{I}, \overrightarrow{J})$ avec $\overrightarrow{J} = \dfrac{\overrightarrow{w_1}}{\|\overrightarrow{w_1}\|}$ et la matrice de passage P (orthogonale directe) de la base $\mathcal{C}$ à cette base $\mathcal{B}$:
     $$S_1 = P\,\Delta\,P^{-1} = P\,\Delta\,{}^tP = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \\ -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/5 & -4/5 \\ -4/5 & 3/5 \end{pmatrix}$$
3. La matrice de $s_2 = f \circ s_1$, relativement à $\mathcal{C}$, est : $S_2 = R \times S_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
   La droite $\mathcal{D}_2$ est l'espace propre de s_2 associé à 1 et a pour équation $x = 0$
4. <u>Conclusion</u> :
   f est la composée, <u>dans cet ordre</u>, de la symétrie orthogonale par rapport à la droite $\mathcal{D}_1$, d'équation $2\,x + y = 0$, par la la symétrie orthogonale par rapport à la droite $\mathcal{D}_2$, d'équation $x = 0$ (axe Oy).
   Ces deux droites formant entre elles un angle $\dfrac{\theta}{2} = \cdots = -\arccos\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)$

2.4 Calcul pratique de la matrice d'un automorphisme orthogonal

1. La matrice d'une rotation d'angle θ, relativement à une base orthonormale directe est toujours :
   $$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \qquad \text{(en dimension 2)}$$
2. La matrice d'une symétrie orthogonale par rapport à une droite $\mathcal{D}$, relativement à une base orthonormale directe, peut se calculer
   - par formule directe, à l'aide du projecteur orthogonal sur $\mathcal{D}^{\perp}$ (voir exemple ci-dessus)
   - par changement de base orthonormale directe adaptée (voir exemple ci-dessus)

3 Automorphismes orthogonaux en dimension 3

On assimilera souvent l'espace euclidien $\big(E, <\mid>\big)$ orienté de dimension 3, à $\mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire usuel et de sa base canonique orthonormale directe $\mathcal{C} = \big(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\big)$.

3.1 Classification des automorphismes orthogonaux en dimension 3

On ne cherche pas une forme générale des matrices orthogonales d'ordre 3 ... surtout pas !

Pour un automorphisme orthogonal f, en dimension 3,

- Comme 3 est impair, il existe (au moins) une valeur propre réelle, α, qui est $+1$ ou -1.
- Le polynôme caractéristique est à coefficients réels et les deux autres valeurs propres, β et γ, sont
  - toutes deux réelles (à valeur $+1$ ou -1)
  - ou complexes non réelles conguguées ($\gamma = \overline{\beta}$)
- $\alpha\,\beta\,\gamma = \det\big(f\big)$

On en déduit la classification des automorphismes orthogonaux en dimension 3.

3.1.1 Automorphismes orthogonaux directs

Un automorphisme orthogonal direct f, possède :

- une seule valeur propre réelle, simple, α, qui ne peut être que $+1$:
  les deux autres sont β et $\overline{\beta}$ et alors $1 = \det A = \alpha\,\beta\,\overline{\beta} = |\beta|^2$
- ou trois valeurs valeurs propres réelles, $\begin{cases} +1 \text{ simple et } -1 \text{ double} & \text{(symétrie orthogonale axiale)} \\ +1 \text{ (triple)} & \text{(application identité)} \end{cases}$

Soit $\overrightarrow{K}$ un vecteur propre unitaire, associé à la valeur propre $+1$ de f. On a donc $f\big(\overrightarrow{K}\big) = \overrightarrow{K}$.

On choisit des vecteurs $\overrightarrow{I}$ et $\overrightarrow{J}$ tels que la base $\mathcal{U} = \big(\overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}, \overrightarrow{K}\big)$ soit orthonormale <u>directe</u>.

La <u>restriction</u> de f à $Vect\big(\overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}\big) = Vect\big(\overrightarrow{K}\big)^{\perp}$ est un automorphisme orthogonal direct en dimension 2, de matrice, relativement à la base $\big(\overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}\big)$ connue. La matrice de f, relativement à la base $\mathcal{U} = \big(\overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}, \overrightarrow{K}\big)$ est donc de la forme :

$$R = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

> Un automorphisme orthogonal direct f, non identité, est une rotation,
>
> - d'axe l'espace propre associé à la valeur propre $+1$ de f
>
> $\boxed{\text{orienté par le choix d'un vecteur propre unitaire } \overrightarrow{K}}$
>
> - d'angle θ déterminé par les relations :
>   - $\boxed{1 + 2\,\cos\theta = \mathrm{tr}(f)}$ (invariance de la trace)
>   - Si $\overrightarrow{u}$ est un vecteur unitaire orthogonal à $\overrightarrow{K}$, par exemple $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{I}$ (cf. ci-dessus),
>
> $\boxed{\Big[\overrightarrow{u}, f\big(\overrightarrow{u}\big), \overrightarrow{K}\Big] = <\Big(\overrightarrow{u} \wedge f\big(\overrightarrow{u}\big)\Big) \mid \overrightarrow{K} > = \sin\theta}$ (et aussi $< \overrightarrow{u} \mid f\big(\overrightarrow{u}\big) > = \cos\theta$)
>
> **Si on change l'orientation de l'axe, l'angle est changé en son opposé.**
>
> ---
>
> - L'identité est aussi une rotation, d'axe quelconque et d'angle nul.
> - Une rotation d'angle π est une symétrie orthogonale axiale par rapport à l'axe (**retournement**) (valeurs propres $+1$ simple et -1 double)

La matrice associée à f, relativement à la base canonique $\mathcal{C}$, est

$$P\,R\,P^{-1} \qquad , \text{avec } P^{-1} = {}^tP$$

où P est la matrice (orthogonale directe) de passage de la base canonique $\mathcal{C}$ à la base $\mathcal{U}$ introduite ci-dessus.

$$P = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \overrightarrow{I} & \overrightarrow{J} & \overrightarrow{K} \end{array} \\ \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \overrightarrow{i} \\ \overrightarrow{j} \\ \overrightarrow{k} \end{array}$$

3.1.2 Automorphismes orthogonaux indirects

Un automorphisme orthogonal indirect f, possède :

- une seule valeur propre réelle, simple, α, qui ne peut être que -1 :
  les deux autres sont β et $\overline{\beta}$ et alors $-1 = \det A = \alpha\,\beta\,\overline{\beta} = -\,|\beta|^2$
- ou trois valeurs valeurs propres réelles, $\begin{cases} -1 \text{ simple et } +1 \text{ double} & \text{(symétrie orthogonale plane)} \\ -1 \text{ (triple)} & \text{(application } -id_E) \end{cases}$

Soit $\overrightarrow{K}$ un vecteur propre unitaire, associé à la valeur propre -1 de f. On a donc $f(\overrightarrow{K}) = -\overrightarrow{K}$.

On choisit des vecteurs $\overrightarrow{I}$ et $\overrightarrow{J}$ tels que la base $\mathcal{U} = (\overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}, \overrightarrow{K})$ soit orthonormale directe.

La restriction de f à $Vect(\overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}) = Vect(\overrightarrow{K})^{\perp}$ est un automorphisme orthogonal direct en dimension 2, de matrice, relativement à la base $(\overrightarrow{I}, \overrightarrow{J})$ connue. La matrice de f, relativement à la base $\mathcal{U} = (\overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}, \overrightarrow{K})$ est donc de la forme :

$$M = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Classification d'un automorphisme orthogonal indirect f, selon l'ordre de la valeur propre -1 :

- -1 est valeur propre triple $(\theta = \pi)$: $f = -id_E$
- -1 est valeur propre simple, d'espace propre dirigé par le vecteur unitaire $\overrightarrow{K}$:
  - Si $+1$ est valeur propre (donc double, avec $\theta = 0$),

    $\boxed{f \text{ est la symétrie orthogonale par rapport au plan orthogonal à } \overrightarrow{K} \ (\textbf{réflexion})}$

  - Si $+1$ n'est pas valeur propre, $\boxed{f \text{ est une rotation-réflexion}}$, composée commutative de
    - la rotation r d'axe orienté par $\overrightarrow{K}$, d'angle $\theta \neq 0 \mod \pi$
    - par la symétrie orthogonale s par rapport au plan orthogonal à $\overrightarrow{K}$.

Remarque. Pour trouver l'angle de la rotation r dans la rotation-réflexion, on utilisera les formules :

$$\begin{cases} 2\,\cos\theta - 1 = \mathrm{tr}(f) \\ \text{avec } \overrightarrow{u} \text{ unitaire orthogonal à } \overrightarrow{K}; \quad [\,\overrightarrow{u}\,,\, f(\overrightarrow{u})\,,\, \overrightarrow{K}\,] = <(\overrightarrow{u} \wedge f(\overrightarrow{u}))\mid \overrightarrow{K}> = -\sin\theta \quad \text{(je dis moins)} \end{cases}$$

Comme précédemment, la matrice associée à f, relativement à la base canonique $\mathcal{C}$, est $P\,M\,P^{-1}$ où P est la matrice (orthogonale directe) de passage de la base canonique $\mathcal{C}$ à la base $\mathcal{U}$ (et $P^{-1} = {}^tP$).

3.1.3 Exemples

Exemples 3.1.3.1. Dans $\mathbb{R}^3$, muni de sa base orthonormale canonique directe $\mathcal{C} = (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$,

1. Rotation : Soit f l'endomorphisme dont la matrice relativement à $\mathcal{C}$ est

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} A \text{ est orthogonale directe, donc } f \text{ est une rotation} \\ \text{L'espace propre associé à } +1 \text{ est orienté par} \ldots \overrightarrow{K} = \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right] \\ 2\,\cos\theta + 1 = \frac{5}{3}, \text{ ne suffit pas pour identifier complètement } \theta. \end{cases}$$

```
> with(linalg): A := 1/3*matrix( [[2,2,1], [-2,1,2], [1,-2,2]] );
  evalm(transpose(A) &* A); det(A)        #--> tA*A=Id, det(A)=1 : orthogonale directe
  vvp := eigenvects(A);
  K := normalize(op(op(select(x->op(1,x)=1,[vvp]))[3]));  #--> K Unit. orientant l'axe
  eq := dotprod(K, [x,y,z], orthogonal) = 0;
  u := normalize(subs({x=1,y=1,z=1},subs(solve(eq,{x,y,z}),[x,y,z])));  # unit. Orth. K
  c := (trace(A) -1)/2;                                                  # ne suffit pas
  if evalf(det(matrix([u,evalm(A&*u),K]))) >= 0 then theta := arccos(c) # je dis +
  else theta := -arccos(c) fi;           #--> theta = - arccos(1/3)      # je dis -
```

2. Rotation-réflexion : Soit f l'endomorphisme dont la matrice relativement à $\mathcal{C}$ est

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Glos malin ! C'est la même que la précédente, sauf que …
on a échangé les 2 dernières colonnes.
Matrice orthogonale indirecte, ce qui peut donner deux situations !
Mais $A^2 \neq I_3$ (ide, ${}^tA \neq A$) donc f n'est pas une symétrie !
f est une rotation-réflexion. Trouver l'axe orienté et l'angle associé …

3. Retournement : Soit f l'endomorphisme dont la matrice relativement à $\mathcal{C}$ est

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

re Glos malin ! C'est la même que la précédente, sauf que …
on a encore échangé 2 colonnes.
Matrice orthogonale directe, donc il s'agit d'une rotation !
Mais $A^2 = I_3$ (ide, ${}^tA = A$) donc f est aussi une symétrie (axiale).
f est une rotation d'angle π (ou symétrie orthogonale axiale)
(ou retournement). Trouver l'axe …

4. Réflexion : Soit f l'endomorphisme dont la matrice relativement à $\mathcal{C}$ est

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Promis ! C'est la dernière fois ! C'est la même que …, sauf que …
on a encore échangé 2 colonnes.
Matrice orthogonale indirecte, ce qui peut donner deux situations !
Mais $A^2 = I_3$ (ide, ${}^tA = A$) donc f est aussi une symétrie.
f est une réflexion. Trouver le plan de réflexion …

3.2 Etude de commutativité

Les automorphismes orthogonaux de $\mathcal{O}(\mathbb{R}^3)$ ne commutent pas entre eux, sauf cas particulier :

- deux rotations de même axe commutent (d'après la commutativité des rotations en dimension 2)
- une rotation commute avec la réflexion par rapport au plan orthogonal à l'axe de rotation.

3.3 Décomposition d'une rotation en produit de deux réflexions

Théorème 3.3.1.

Une rotation vectorielle r, d'axe $\mathcal{D}$ orienté par $\overrightarrow{w}$, d'angle θ, se décompose comme le produit de deux symétries orthogonales planes (réflexions) s_1 et s_2 sous la forme

$$r = s_2 \circ s_1 \qquad \textit{(non commutatif)}$$

- *s_1 étant la symétrie orthogonale par rapport à un plan $\mathcal{P}_1$ contenant l'axe $\mathcal{D}$*
- *s_2 étant la symétrie orthogonale par rapport à un plan $\mathcal{P}_2$ contenant l'axe $\mathcal{D}$*
- *les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ faisant entre eux l'angle $\text{angle}(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2) = \dfrac{\theta}{2} \mod \pi$ (angle de plans).*

l'un des deux plans ($\mathcal{P}_1$ ou $\mathcal{P}_2$), contenant l'axe $\mathcal{D}$, pouvant être choisi de façon arbitraire.

Preuve.

- On peut se placer dans une base orthonormale directe, de troisième vecteur colinéaire à $\overrightarrow{w}$, et considérer la restriction de r à $\mathcal{D}^\perp$ pour se ramener à la décomposition vue en dimension 2.
- Ou reprendre directement la démonstration : Choisissons, de façon arbitraire, s_1, symétrie orthogonale plane par rapport au plan $\mathcal{P}_1$ contenant l'axe $\mathcal{D}$ et posons $s_2 = r \circ s_1$.
  - s_2 est un automorphisme orthogonal indirect (il faut regarder si c'est une réflexion ou une rotation-réflexion)
  - $s_2 \circ s_1 = r \circ s_1 \circ s_1 = r \circ s_1^2 = r$

  $s_2(\overrightarrow{w}) = r \circ s_1(\overrightarrow{w}) = r(\overrightarrow{w}) = \overrightarrow{w}$. Donc $\overrightarrow{w}$ est vecteur propre de s_2 associé à la valeur propre $+1$, ce qui prouve que s_2 est une réflexion, par rapport à un plan $\mathcal{P}_2$ contenant l'axe $\mathcal{D}$.

  Il en reste plus qu'à établir la propriété angulaire : notons $\overrightarrow{v_1}$ un vecteur directeur de $\mathcal{D}_1$ et $\overrightarrow{v_2}$ un vecteur directeur de $\mathcal{D}_2$. Pour un vecteur $\overrightarrow{v}$ non nul,

$$\begin{aligned}\theta &= \text{angle}(\overrightarrow{v}, r(\overrightarrow{v})) = \text{angle}(\overrightarrow{v}, s_2 \circ s_1(\overrightarrow{v})) = -\text{angle}(s_2(\overrightarrow{v}), s_1(\overrightarrow{v})) \\ &= -\text{angle}(s_2(\overrightarrow{v}), \overrightarrow{v}) - \text{angle}(\overrightarrow{v}, s_1(\overrightarrow{v})) \\ &= \text{angle}(s_1(\overrightarrow{v}), \overrightarrow{v}) + \text{angle}(\overrightarrow{v}, s_2(\overrightarrow{v})) = 2\,\text{angle}(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v}) + 2\,\text{angle}(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v_2}) = 2\,\text{angle}(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2})\end{aligned}$$

Exemple 3.3.0.1. Dans $\mathbb{R}^3$, muni de sa base orthonormale canonique directe $\mathcal{C} = (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$,
Soit f l'endomorphisme dont la matrice, relativement à $\mathcal{C}$ est :

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \quad \left\{\begin{array}{l} A \text{ est orthogonale directe, donc } f \text{ est une rotation} \\ \text{L'espace propre associé à } +1 \text{ est orienté par} \ldots \overrightarrow{K} = \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right] \\ 2\cos\theta + 1 = \frac{5}{3}, \text{ ne suffit pas pour identifier complètement } \theta. \\ \sin\theta = \left[\overrightarrow{I}, f(\overrightarrow{I}), \overrightarrow{K}\right] = \cdots < 0, \text{ donc } \theta = -\arccos\left(\frac{1}{3}\right) \end{array}\right.$$

1. Soit s_1 la symétrie orthogonale par rapport au plan $\mathcal{P}_1$ d'équation $2\,x + y - 2\,z = 0$
(plan choisi arbitrairement, mais contenant le vecteur $\overrightarrow{K}$), de vecteur orthogonal $\overrightarrow{w_1} = 2\,\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} - 2\,\overrightarrow{k}$.
   - Si p est le projecteur orthogonal sur $Vect(\overrightarrow{w_1})$, pour un vecteur $\overrightarrow{v}$,

   $$s_1(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{v} - 2\,p(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{v} - 2\,\frac{<\overrightarrow{w_1} \mid \overrightarrow{v}>}{\|\overrightarrow{w_1}\|^2}\,\overrightarrow{w_1}$$

   et la matrice S_1 de s_1, relativement à la base $\mathcal{C}$, est :

   $$S_1 = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} s_1(\overrightarrow{i}) & s_1(\overrightarrow{j}) & s_1(\overrightarrow{k}) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1/9 & -4/9 & 8/9 \\ -4/9 & 7/9 & 4/9 \\ 8/9 & 4/9 & 1/9 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \overrightarrow{i} \\ \overrightarrow{j} \\ \overrightarrow{k} \end{array}$$

   symétrique uniquement parce que

   la base $\mathcal{C}$ est orthonormale.

   - On pouvait aussi faire un changement de base orthonormale directe adaptée ...

2. On en déduit la matrice S_2 de s_2, relativement à $\mathcal{C}$: $S_2 = A \times S_1 = \begin{pmatrix} 2/27 & 10/27 & 25/27 \\ 10/27 & 23/27 & -10/27 \\ 25/27 & -10/27 & 2/27 \end{pmatrix}$

3. Le plan $\mathcal{P}_2$ est l'espace propre de s_2 associé à la valeur propre $+1$, orthogonal à l'espace propre de s_2 associé à la valeur propre -1.
$\mathcal{P}_2$ a pour vecteur orthogonal $\overrightarrow{w_2} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ et pour équation $-5\,x + 2\,y + 5\,z = 0$.

4. Conclusion :
f est la composée, dans cet ordre, de la symétrie orthogonale par rapport au plan $\mathcal{P}_1$, d'équation $2\,x + y - 2z = 0$, par la la symétrie orthogonale par rapport au plan $\mathcal{P}_2$, d'équation $-5\,x + 2\,y + 5\,z = 0$
.
Ces deux plans formant entre eux l'angle $\frac{\theta}{2} = \cdots = -\arccos\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$

```
> restart: with(linalg):
  A := 1/3*matrix([[2,2,1 ], [-2,1,2],[1,-2,2]] );
  e := [[1,0,0], [0,1,0], [0,0,1]];                               # base canonique
  K := normalize(subs({_t[1]=1}, linsolve(evalm(A-diag(1,1,1)), [0,0,0])));

  w1 := normalize( [2, 1, -2] );
  S1 := transpose(matrix([seq( matadd(e[i],w1, 1,-2*dotprod(e[i],w1)), i=1..3)]));

  S2 := evalm( A &* S1 );
  w2 := subs({_t[1]=1}, linsolve(evalm(S2+diag(1,1,1)), [0,0,0]));
  P2 := numer( dotprod(w2, [x,y,z], orthogonal ));                # --> équation de P2
```

3.4 Décomposition d'une rotation en produit de deux retournements

Théorème 3.4.1.

Une rotation vectorielle r, d'axe $\mathcal{D}$ orienté par $\overrightarrow{w}$, d'angle θ, se décompose comme le produit de deux retournements (symétries orthogonales axiales) r_1 et r_2 sous la forme

$$r = r_2 \circ r_1 \qquad\qquad \textit{(non commutatif)}$$

- *r_1 étant la symétrie orthogonale par rapport à une droite $\mathcal{D}_1$ orthogonale à l'axe $\mathcal{D}$*
- *r_2 étant la symétrie orthogonale par rapport à une droite $\mathcal{D}_2$ orthogonale à l'axe $\mathcal{D}$*
- *les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ faisant entre elles l'angle $angle(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2) = \dfrac{\theta}{2} \mod \pi$ (angle de droites).*

l'une des deux droites ($\mathcal{D}_1$ ou $\mathcal{D}_2$), orthogonale à $\mathcal{D}$, pouvant être choisie de façon arbitraire.

Preuve.

De la décomposition $r = s_2 \circ s_1$ de r en produit de deux réflexions, on déduit $r = (-s_2) \circ (-s_1)$.

- $r_1 = -s_1$ est la symétrie axiale par rapport à la droite $\mathcal{D}_1$ orthogonale au plan $\mathcal{P}_1$ de s_1
- $r_2 = -s_2$ est la symétrie axiale par rapport à la droite $\mathcal{D}_2$ orthogonale au plan $\mathcal{P}_2$ de s_2
- l'angle des droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ est égal à l'angle des plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$

Exemple 3.4.0.2. Dans $\mathbb{R}^3$, muni de sa base orthonormale canonique directe $\mathcal{C} = (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$,
Soit f l'endomorphisme dont la matrice, relativement à $\mathcal{C}$ est :

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \qquad \left\{\begin{array}{l} A \text{ est orthogonale directe, donc } f \text{ est une rotation} \\ \text{L'espace propre associé à } +1 \text{ est orienté par } \ldots \overrightarrow{K} = \left[\dfrac{\sqrt{2}}{2}, 0, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right] \\ 2\cos\theta + 1 = \dfrac{5}{3}, \text{ ne suffit pas pour identifier complètement } \theta. \\ \sin\theta = \left[\overrightarrow{I}, f(\overrightarrow{I}), \overrightarrow{K}\right] = \cdots < 0, \text{ donc } \theta = -\arccos\left(\dfrac{1}{3}\right) \end{array}\right.$$

On impose à l'axe du retournement r_1 d'être dirigé par le vecteur $\overrightarrow{w_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ (orthogonal à $\overrightarrow{K}$).

r_1 est donc la symétrie orthogonale par rapport à cet axe, et on peut calculer sa matrice facilement :
Si p est le projecteur orthogonal sur $Vect(\overrightarrow{w_1})$, pour un vecteur $\overrightarrow{v}$,

$$r_1(\overrightarrow{v}) = -(\overrightarrow{v} - 2\,p(\overrightarrow{v})) = -\left(\overrightarrow{v} - 2\,\frac{<\overrightarrow{w_1} \mid \overrightarrow{v}>}{\|\overrightarrow{w_1}\|^2}\,\overrightarrow{w_1}\right)$$

Il est aussi simple de commencer par décomposer f comme le produit de deux réflexions : $f = s_2 \circ s_1$, puis de poser $r_1 = -s_1$ et $r_2 = -s_2$ pour obtenir $f = r_2 \circ r_1$.
Les réflexions s_1 et s_2 sont celles qui ont été utilisées dans l'exercice précédent.

1. la matrice de r_1, relativement à la base canonique est :

$$R_1 = \begin{pmatrix} -1/9 & 4/9 & -8/9 \\ 4/9 & -7/9 & -4/9 \\ -8/9 & -4/9 & -1/9 \end{pmatrix} \qquad r_1 \text{ est la rotation } \left\{\begin{array}{l} \text{d'angle } \pi \\ \text{d'axe dirigé par } \overrightarrow{w_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \end{array}\right.$$

2. la matrice de r_2, relativement à la base canonique est :

$$R_2 = \begin{pmatrix} -2/27 & -10/27 & -25/27 \\ -10/27 & -23/27 & 10/27 \\ -25/27 & 10/27 & -2/27 \end{pmatrix} \qquad r_2 \text{ est la rotation } \left\{\begin{array}{l} \text{d'angle } \pi \\ \text{d'axe dirigé par } \overrightarrow{w_2} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \end{array}\right.$$

Les axes de r_1 et r_2 formant entre eux l'angle de droites $\dfrac{\theta}{2} = \cdots = -\arccos\left(\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)$

3.5 Décomposition d'une rotation-réflexion en produit de trois réflexions

On a déjà vu qu'une rotation-réflexion f était la composée (commutative), sous la forme $f = s_3 \circ r$,

- de la rotation r
- et de la réflexion s_3 par rapport au plan orthogonal à l'axe de f (et de r).

s_3 se détermine facilement à partir de l'axe de f et on a ensuite $r = s_3 \circ f \quad (= f \circ s_3)$.
Il resta à décomposer r comme le produit (non commutatif) $r = s_2 \circ s_1$, où s_1 et s_2 sont des symétries orthogonales planes par rapport à des plans contenant l'axe de r (de f). En final, $f = s_3 \circ s_2 \circ s_1$.

Exemple 3.5.0.3. Dans $\mathbb{R}^3$, muni de sa base orthonormale canonique directe $\mathcal{C} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$,
Soit f l'endomorphisme dont la matrice, relativement à $\mathcal{C}$ est :

$$A = \frac{1}{27}\begin{pmatrix} 2 & -26 & 7 \\ -23 & 2 & 14 \\ 14 & 7 & 22 \end{pmatrix} \quad \left\{ \begin{array}{l} A \text{ est orthogonale indirecte et } {}^tA \neq A, \text{ donc } f \text{ est une rotation-réflexion} \\ \text{L'espace propre associé à } -1 \text{ est orienté par } \vec{K} = \left[\dfrac{7}{\sqrt{107}}, \dfrac{7}{\sqrt{107}}, \dfrac{-3}{\sqrt{107}}\right] \\ 2\cos\theta - 1 = \dfrac{26}{27}, \text{ ne suffit pas pour identifier complètement } \theta. \\ \dfrac{1}{2}\left[\vec{i} - \vec{j}, f(\vec{i} - \vec{j}), \vec{K}\right] = \sin\theta > 0, \text{ donc } \theta = -\arccos\left(\dfrac{53}{54}\right) \end{array} \right.$$

1. La réflexion s_3, par rapport au plan orthogonal à l'axe dirigé par $\vec{w_3} = \vec{K}$ est définie par :
   Si p est le projecteur orthogonal sur $Vect(\vec{w_3})$, $\quad s_3(\vec{v}) = \vec{v} - 2\,p(\vec{v}) = \vec{v} - 2\,\dfrac{<\vec{w_3} \mid \vec{v}>}{\|\vec{w_3}\|^2}\,\vec{w_3}$

   et la matrice S_3 de s_3, relativement à la base $\mathcal{C}$, est ... $\quad S_3 = \begin{pmatrix} 9/107 & -98/107 & 42/107 \\ -98/107 & 9/107 & 42/107 \\ 42/107 & 42/107 & 89/107 \end{pmatrix}$
2. Soit s_1 la symétrie orthogonale par rapport au plan $\mathcal{P}_1$ d'équation $x - y = 0$ (arbitraire, contenant $\vec{K}$)
   - le vecteur $\vec{w_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est orthogonal à $\mathcal{P}_1$. Donc $s_1(\vec{v}) = \vec{v} - 2\,\dfrac{<\vec{w_1} \mid \vec{v}>}{\|\vec{w_1}\|^2}\,\vec{w_1}$
   - La matrice S_1 de s_1, relativement à la base $\mathcal{C}$, est ... $\quad S_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
3. La matrice S_2 de $s_2 = s_3 \circ f \circ s_1$, relativement à $\mathcal{C}$, est :

$$S_2 = S_3 \times A \times S_1 = \cdots = \begin{pmatrix} -136/2889 & 2860/2889 & -385/2889 \\ 2860/2889 & 185/2889 & 364/2889 \\ -385/2889 & 364/2889 & 2840/2889 \end{pmatrix}$$

   Le plan $\mathcal{P}_2$ de la réflexion s_2 est orthogonal à l'espace propre de s_2 associé à la valeur propre -1 donc orthogonal à $\vec{w_2} = [55, -52, 7]$ et a pour équation $55\,x - 52\,y + 7\,z = 0$.

```
> e := [[1,0,0], [0,1,0], [0,0,1]];                              # base canonique
  A := 1/27*matrix( [[2,-26,7], [-23, 2, 14], [14,7,22] ] );
  evalm( transpose(A) &* A ); det(A);
  K := map(simplify, normalize(subs({_t[1]=1}, linsolve(evalm(A+diag(1,1,1)),[0,0,0]))));
  eq := dotprod(K, [x,y,z], orthogonal) = 0;
  u := normalize(subs({x=1,y=1,z=1}, subs(solve(eq,{x,y,z}),[x,y,z])));  # unit. Orth. K
  c := (trace(A) +1)/2;                                            # ne suffit pas
  if evalf(det(matrix([u,evalm(A&*u),K]))) >= 0 then theta := -arccos(c)  # je dis -
  else theta := +arccos(c) fi;                                     # je dis +

  S3 := transpose(matrix([seq( matadd(e[i],K, 1,-2*dotprod(e[i],K)), i=1..3)]));
  w1 := normalize( [1, -1, 0] );
  S1 := transpose(matrix([seq( matadd(e[i],w1, 1,-2*dotprod(e[i],w1)), i=1..3)]));
  S2 := evalm( S3 &* A &* S1 );
  w2 := subs({_t[1]=1}, linsolve(evalm(S2+diag(1,1,1)), [0,0,0]));
  P2 := numer( dotprod(w2, [x,y,z], orthogonal ));               # --> équation de P2
```

3.6 Calcul pratique de la matrice d'un automorphisme orthogonal

3.6.1 Changement de base orthonormale

Exemples 3.6.1.1. Dans $\mathbb{R}^3$, muni de sa base orthonormale canonique directe $\mathcal{C} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$,

1. Rotation : Matrice, relativement à $\mathcal{C}$, de r, rotation d'axe orienté par $\vec{w} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$, d'angle $\theta = \dfrac{\pi}{3}$.

   On se place dans une base orthogonale directe, $\mathcal{B} = (\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$, avec $\vec{K} = \dfrac{\vec{w}}{\|\vec{w}\|}$ (colinéaire à l'axe).

   Le calcul d'un vecteur $\vec{I}$ est aisé et on y introduit si possible des zéros de façon à avoir ensuite un calcul de $\vec{J}$ facile. Ainsi, rapidement, on obtient une base $\mathcal{B}$ telle que la matrice de passage de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{B}$ soit :

   $$P = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \vec{I} & \vec{J} & \vec{K} \end{array} \\ \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{array}$$

   Attention
   - P doit être orthogonale $\begin{cases} \text{colonnes normées} \\ \text{et} \\ \text{orthogonales deux à deux} \end{cases}$
   - P doit être directe : $\det(P) = 1$ ou encore $\vec{I} \wedge \vec{J} = \vec{K}$

   et on a bien sur $P^{-1} = {}^tP$

   La matrice de r, dans la base $\mathcal{B}$, est la matrice $M = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

   et la matrice de r, relativement à $\mathcal{C}$, est $R = P\,M\,P^{-1} = P\,M\,{}^tP = \cdots = \begin{pmatrix} 2/3 & 2/3 & 1/3 \\ -1/3 & 2/3 & -2/3 \\ -2/3 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$

   ```
   > restart: with(linalg):
     w := [1,1,-1]; theta := Pi/3;
     b[3] := normalize(w); b[1] := normalize([1,0,1]); b[2] := crossprod(b[3],b[1]);
     P := transpose( matrix( [b[1], b[2], b[3]] ) );
     orthog(P); evalb(det(P)=1);                    # Tests de vérification sur P
     M := matrix([[cos(theta),-sin(theta),0],[sin(theta),cos(theta),0],[0,0,1]]);
     R := evalm( P &* M &* transpose(P) );
   ```

2. Retournement : Matrice, relativement à $\mathcal{C}$, de r_1, retournement d'axe dirigé par $\vec{w} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ (symétrie orthogonale par rapport à la droite dirigé par $\vec{w} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$).

   On prend la même base $\mathcal{B}$ que précédemment. La matrice de r_1, relativement à $\mathcal{B}$, est $F = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

   La matrice de r_1, relativement à $\mathcal{C}$, est $R_1 = P\,F\,P^{-1} = P\,F\,{}^tP = \cdots = \begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 & -2/3 \\ 2/3 & -1/3 & -2/3 \\ -2/3 & -2/3 & -1/3 \end{pmatrix}$

   ```
   > F := matrix( [[-1,0,0],[0,-1,0], [0,0,1]] );
     R1 := evalm( P &* F &* transpose(P) );
   ```

3. Réflexion : Matrice, relativement à $\mathcal{C}$, de s_1, réflexion par rapport au plan d'équation x+y-z=0 (symétrie orthogonale par rapport au plan orthogonal à $\vec{w} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$).

   On prend la même base $\mathcal{B}$ que précédemment. La matrice de s_1, relativement à $\mathcal{B}$, est $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

   La matrice de s_1, relativement à $\mathcal{C}$, est $S_1 = P\,G\,P^{-1} = P\,G\,{}^tP = \cdots = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & 2/3 \\ -2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$

   ```
   > G := matrix( [[1,0,0],[0,1,0], [0,0,-1]] );
     S1 := evalm( P &* G &* transpose(P) );
   ```

   Ce calcul est inutile si on a déjà calculé R_1 . En effet, $s_1 = -r_1$ (et on a effectivement trouvé $S_1 = -R_1$).

3.6.2 Formules directes

1. Rotation : Soit la rotation r , d'axe orienté par $\overrightarrow{w}$ et d'angle θ.

La matrice de r, relativement à une base orthogonale directe $\mathcal{B} = \left(\overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}, \overrightarrow{K}\right)$ où $\overrightarrow{K} = \dfrac{\overrightarrow{w}}{\|\overrightarrow{w}\|}$, est :

$$M = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \cos\theta \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + (1-\cos\theta) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \sin\theta \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- la première matrice est celle de l'identité $: \overrightarrow{v} \longmapsto \overrightarrow{v}$
- la seconde est la matrice du projecteur sur $Vect\left(\overrightarrow{K}\right)$ $: \overrightarrow{v} \longmapsto < \overrightarrow{K} \mid \overrightarrow{v} > \overrightarrow{K}$
- la troisième (antisymétrique) est celle du produit vectoriel à gauche par $\overrightarrow{K}$ $: \overrightarrow{v} \longmapsto \overrightarrow{K} \wedge \overrightarrow{v}$

Si r est la rotation d'axe orienté par $\overrightarrow{w}$ et d'angle θ,

$$r\left(\overrightarrow{v}\right) = \cos\theta\ \overrightarrow{v} \quad + \quad \frac{(1-\cos\theta)}{\|\overrightarrow{w}\|^2} < \overrightarrow{w} \mid \overrightarrow{v} > \overrightarrow{w} \quad + \quad \frac{\sin\theta}{\|\overrightarrow{w}\|}\ \overrightarrow{w} \wedge \overrightarrow{v}$$

A l'aide de ces formules, on calcule directement les images des vecteurs d'une base $\mathcal{C} = \left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ pour en déduire la matrice R de r relativement à cette base $\mathcal{C}$:

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} r\left(\overrightarrow{i}\right) & r\left(\overrightarrow{j}\right) & r\left(\overrightarrow{k}\right) \end{array} & \\ R = \begin{pmatrix} \quad & \quad & \quad \\ & & \\ & & \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \overrightarrow{i} \\ \overrightarrow{j} \\ \overrightarrow{k} \end{array} \end{array}$$

Exemple 3.6.2.1. Dans $\mathbb{R}^3$, muni de sa base orthonormale canonique directe $\mathcal{C} = \left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$,

matrice R, relativement à $\mathcal{C}$, de la rotation r d'axe orienté par $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}$ et d'angle $\theta = \dfrac{\pi}{3}$.

```
> rgen := (w,theta) -> v -> evalm(   cos(theta) * v
                                   + (1-cos(theta))/norm(w,2)^2 * dotprod(w,v) * w
                                   + sin(theta)/norm(w,2) * crossprod(w,v));
  e := [[1,0,0],[0,1,0],[0,0,1]]; # base canonique
  w := [1,1,-1]; theta := Pi/3;
  r := rgen(w,theta);
  R := transpose( matrix( [r(e[1]), r(e[2]), r(e[3])] ));
```

On trouve : $R = \begin{pmatrix} 2/3 & 2/3 & 1/3 \\ -1/3 & 2/3 & -2/3 \\ -2/3 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$

2. Réflexion : Soit s la réflexion par rapport au plan $\mathcal{P}$, de vecteur orthogonal $\overrightarrow{w}$.

- Le projecteur orthogonal sur $\mathcal{P}^\perp = Vect\left(\overrightarrow{w}\right)$ est défini par : $\overrightarrow{v} \longmapsto \dfrac{< \overrightarrow{w} \mid \overrightarrow{v} >}{\|\overrightarrow{w}\|^2} \overrightarrow{w}$
- On a $s = id - 2\,p$, d'où : $\boxed{s\left(\overrightarrow{v}\right) = \overrightarrow{v} - 2 \dfrac{< \overrightarrow{w} \mid \overrightarrow{v} >}{\|\overrightarrow{w}\|^2} \overrightarrow{w}}$

  Comme précédement, on en déduit la matrice de s dans la base $\mathcal{C} = \left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$.

3. Retournement : Soit r le retournement d'axe $\mathcal{D}$ dirigé par $\overrightarrow{w}$

- r est une rotation d'axe $\mathcal{D}$ orienté par $\overrightarrow{w}$ et d'angle π
- $r = -s = 2\,p - id$, où s est la symétrie orthogonale par rapport au plan $\mathcal{D}^\perp$ de normale dirigée par $\overrightarrow{w}$ et p est le projecteur orthogonal sur $\mathcal{P}^\perp$, d'où : $\boxed{r\left(\overrightarrow{v}\right) = 2 \dfrac{< \overrightarrow{w} \mid \overrightarrow{v} >}{\|\overrightarrow{w}\|^2} \overrightarrow{w} - \overrightarrow{v}}$

  Comme précédement, on en déduit la matrice de r dans la base $\mathcal{C} = \left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$.

< $\mathcal{FIN}$ >