Endomorphismes symétriques, matrices symétriques réelles.

Antoine MOTEAU antoine.moteau@wanadoo.fr

Table des matières

Endomorphismes symétriques, matrices symétriques réelles

1 Endomorphismes symétriques

Définition 1.0.1.

Un endomorphisme u d'un espace euclidien est symétrique si et seulement si

$$\forall x, y \in \mathbb{E},\ < u(x) \mid y >=< x \mid u(y) >$$

Exemple 1.0.0.1. Les symétries orthogonales d'un espace euclidien sont symétriques :

Une symétrie s vérifie $s^2 = id$ et, comme une symétrie orthogonale est un automorphisme orthogonal,

$$\forall x, y \in \mathbb{E},\ < s(x) \mid y >=< s(s(x) \mid s(y) >=< x \mid s(y) >$$

Théorème 1.0.1. *Matrice d'un endomorphisme symétrique, dans une base orthonormale*

Un endomorphisme est symétrique si et seulement si sa matrice associée, relativement à une **base orthonormale**, *est symétrique (et réelle) (ide A réelle et ${}^tA = A$).*

Preuve.

En notant A la matrice de u dans la base orthonormale $\mathcal{B}$, X et Y les matrices colonne des composantes de x et y dans cette même base,

$${}^t(AX)\,Y =< u(x) \mid y >=< x \mid u(y) >= {}^tX\ A\,Y,\ \text{d'où}\ {}^tX\,{}^tA\,Y = {}^tX\ A\,Y$$

On a donc, $\forall\, X, Y,\ {}^tX\ \left({}^tA - A\right)\ Y = (0)$, ce qui prouve que $A = {}^tA$

ATTENTION :

1. Une symétrie n'est pas forcément symétrique
2. Une symétrie orthogonale est symétrique

2 Endomorphismes anti-symétriques

Définition 2.0.2.

Un endomorphisme u d'un espace euclidien est anti-symétrique si et seulement si

$$\forall x, y \in \mathbb{E},\ < u(x) \mid y >= -< x \mid u(y) >$$

Exemple 2.0.0.2. En dimension 3, les endomorphismes anti-symétriques sont les applications de la forme :

$$h_w : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{E} \\ v & \longmapsto & h_w(v) \quad = v \wedge w \end{array}$$

Théorème 2.0.2. *Matrice d'un endomorphisme anti-symétrique, dans une base orthonormale*

Un endomorphisme est anti-symétrique si et seulement si sa matrice associée, relativement à une **base orthonormale**, est anti-symétrique (et réelle) (ide A réelle et ${}^tA = -A$).

Preuve. Quasi identique à celle fournie pour les endomorphismes symétriques.

Exemple 2.0.0.3. Soit la matrice antisymétrique réelle $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. **(diagonale nulle !)**.

A est la matrice de l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$, relativement à la base canonique orthornomale directe. On a : $\ker f = Vect\left(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}\right)$ donc $f\left(\overrightarrow{v}\right) = \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w}$ où $\overrightarrow{w}$ est colinéaire à $\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}$.

Un simple ajustement permet de constater qu'il faut prendre $w = -\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$.

3 Réduction orthonormale des endomorphismes symétriques et des matrices symétriques réelles

L'espace euclidien $(\mathbb{E}, < \mid >)$ de dimension $n > 0$, est muni d'une base orthonormale $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \cdots, e_n)$, que l'on déclare canonique (et directe). E peut être identifié à $\mathbb{R}^n$, muni de sa base canonique.
Une matrice symétrique réelle sera considérée comme la matrice d'un endomorphisme symétrique de $\mathbb{E}$ (ou de $\mathbb{R}^n$) par rapport à la base orthonormale canonique.

Théorème 3.0.3.

Les valeurs propres d'une matrice symétrique réelle, d'un endomorphisme symétrique, sont réelles.

Preuve. Soit A une matrice symétrique réelle, d'ordre n.

On interprète A comme la matrice d'un endomorphisme de $\mathbb{C}^n$, relativement à la base canonique de $\mathbb{C}^n$. Soit λ une valeur propre (complexe) de A et V un vecteur propre (complexe) associé.

- On a $AV = \lambda V$ d'où $A\overline{V} = \overline{\lambda}\,\overline{V}$ puis ${}^tVA\overline{V} = \overline{\lambda}\,{}^tV\overline{V} = \overline{\lambda}\,\|V\|^2$
- De $AV = \lambda V$ on déduit ${}^tVA = \lambda\,{}^tV$ puis ${}^tVA\overline{V} = \lambda\,{}^tV\overline{V} = \lambda\,\|V\|^2$

Ainsi $\overline{\lambda}\,\|V\|^2 = \lambda\,\|V\|^2$ et, comme $\|V\|^2 \neq 0$, λ est réel.

On en déduit immédiatement le théorème suivant :

Théorème 3.0.4.

Le polynôme caractéristique d'un endomorphisme symétrique, d'une matrice symétrique réelle, est scindé dans $\mathbb{R}$.

On a alors un enchaînement de théorèmes qui conduisent, étape par étape, à la diagonalisation des endomorphismes symétriques et des matrices symétriques réelles :
(on démontrera ensuite ces théorèmes un à un).

Théorème 3.0.5. (1)

Deux vecteurs propres, associés à des valeurs propres distinctes d'un endomorphisme symétrique, sont orthogonaux.

Théorème 3.0.6. (2)

Les espaces propres d'un endomorphisme symétrique sont orthogonaux deux à deux.

Théorème 3.0.7. (3)

Soit u un endomorphisme symétrique.

- Le supplémentaire orthogonal d'un sous-espace propre de u est stable par u
- La restriction de u au supplémentaire orthogonal d'un sous-espace propre est symétrique.

Théorème 3.0.8. (4) *Diagonalisation des endomorphismes symétriques*

Tout endomorphisme symétrique est DIAGONALISABLE dans $\mathbb{R}$.
et on peut **choisir** une base orthonormale de vecteurs propres.

Théorème 3.0.9. (5) *Diagonalisation des matrices symétriques réelles*

Toute matrice symétrique réelle A est diagonalisable dans $\mathbb{R}$, sous la forme :

$$A = P\,D\,P^{-1} \qquad \text{et on peut choisir } P \text{ orthogonale} \qquad (\text{ide, telle que } P^{-1} = {}^tP).$$

ATTENTION !

1 Les vecteurs propres "natifs" ne sont pas forcément orthogonaux ni normés.
2 Il faudra construire une base orthonormée de vecteurs propre.

Preuve. (1). Soit u un endomorphisme symétrique, v et w vecteurs propres de u, associées à λ et μ.

On a $< u(v)|w >=< v|u(w) >$ d'où $\lambda < v|w >= \mu < v|w >$ puis $(\lambda-\mu) < v|w >= 0$ et enfin $< v|w >= 0$, c'est à dire $v \perp w$.

Preuve. (2). L'orthogonalité des sous-espaces propres est une conséquence directe du théorème précédent.

Preuve. (3). Soit $\mathbb{F}$ l'espace propre associé à la valeur propre λ de l'endomorphisme symétrique u de $\mathbb{E}$.

Si $\mathbb{F} = \mathbb{E}$, c'est fini. On suppose dans la suite que $\mathbb{F} \neq \mathbb{E}$.

1. Soit $w \in \mathbb{F}^{\perp}$. $\forall v \in \mathbb{F}$, $< v|u(w) >=< u(v)|w >= \lambda < v|w >= 0$, ce qui prouve que $u(w) \in \mathbb{F}^{\perp}$.
   On a donc prouvé que $\mathbb{F}^{\perp}$ est stable par u.

2. Soit $(f_1, \cdots, f_q)$ une base orthonormale de $\mathbb{F}$, que l'on complète par $f_{q+1}, \cdots f_n$, vecteurs orthonormés de $\mathbb{F}^{\perp}$, pour former une base de $\mathbb{E}$ (ce qui est possible, d'après le procédé de Schmidt).
   Dans cette base orthonormale, la matrice de u est symétrique réelle, de la forme $\begin{pmatrix} C & (0) \\ (0) & D \end{pmatrix}$
   où C et D sont carrées, symétriques réelles.
   D est la matrice de la restriction de u à $\mathbb{F}^{\perp}$ (endomoprhisme de $\mathbb{F}^{\perp}$), relativement à la base orthonormale $(f_{q+1}, ..., f_n)$ de $\mathbb{F}^{\perp}$.
   Comme D est symétrique réelle, on en déduit (cf Th 1.0.1.) que la restriction de u à $\mathbb{F}^{\perp}$ est un endomorphisme symétrique de $\mathbb{F}^{\perp}$.

Preuve. (4). Le théorème précédent a préparé le terrain pour une démonstration par récurrence sur la dimension de E :

Soit la propriété, dépendant de $n \in \mathbb{N}^*$: $\mathcal{H}(n)$: "Tout endomorphisme symétrique d'un espace euclidien de dimension n est diagonalisable dans $\mathbb{R}$, dans une base orthonormale".

- Pour $n = 1$, c'est évident puisque u est de la forme $\lambda\, id$.
- Supposons la propriété vraie jusqu'à $n \geqslant 1$ et montrons la pour $n + 1$:
  u étant un endomorphisme symétrique de l'espace euclidien $\mathbb{E}$ de dimension $n + 1$, soit λ une valeur propre de u, et $\mathbb{F}$ l'espace propre associé.
  - Si $\mathbb{F} = \mathbb{E}$, alors $u = \lambda\, id$ est diagonalisable et toute base orthonormale de $\mathbb{E}$ est une base de vecteurs propres de u.
  - Si $dim(\mathbb{F}) = p$, avec $1 \leqslant p \leqslant n$ (p est inconnu, d'où l'importance de "jusqu'à" dans l'hypothèse).
    Les restrictions u_1 de u à $\mathbb{F}$ et u_2 de u à $\mathbb{F}^{\perp}$ sont des endomorphismes symétriques d'espaces euclidiens de dimension inférieure ou égale à n. Ils sont diagonalisables (d'après l'hypothèse de récurrence) dans des bases orthonormales $\mathcal{C}'$ de $\mathbb{F}$ et $\mathcal{C}''$ de $\mathbb{F}^{\perp}$ respectivement.
    En choisissant la base $\mathcal{C} = \mathcal{C}' \cup \mathcal{C}''$, comme base orthonormale de $\mathbb{E}$, la matrice de u dans cette base orthonormale est diagonale.

Résumé : Si la propriété est vraie jusqu'à l'ordre $n \geqslant 1$, alors elle est vraie jusqu'à l'ordre $n + 1$ et, comme elle est vraie à l'ordre 1, on en déduit qu'elle est vraie à tout ordre $n \geqslant 1$.

Preuve. (5). Simple traduction du théorème précédent en termes de matrice symétrique réelle.

4 Exemples

1. Si on donne une matrice symétrique réelle n'ayant **que des valeurs propres simples** , en cherchant les vecteurs propres, on obtiendra automatiquement une base orthogonale de vecteurs propres et il n'y a plus qu'à la normer pour obtenir une base orthonormale de vecteurs propres. **C'est trop simple !**

2. Pour que cela soit intéressant, il faudrait diagonaliser une matrice symétrique réelle ayant des valeurs propres multiples : la probabilité pour que l'on obtienne directement, par hasard, une base orthogonale de vecteurs propres est faible.
   Il faudra alors faire un **travail d'orthormalisation**, sous-espace propre par sous-espace propre, pour construire une base orthonormale de vecteurs propres.

< *FIN* >