Séries entières

Antoine MOTEAU antoine.moteau@wanadoo.fr

Table des matières

1 Introduction 2
1.1 Notion de série entière . . . 2
1.2 Problèmes usuels . . . 2

2 Exemples de référence 2

3 Ensemble de convergence d'une série entière 3
3.1 Lemme d'Abel relatif aux séries entières . . . 3
3.2 Rayon de convergence, Disque ouvert de convergence . . . 3

4 Détermination du rayon de convergence 4
4.1 Règle de d'Alembert (quand elle est applicable) . . . 4
4.2 Alternatives à la règle de d'Alembert (exemples) . . . 5
4.3 Exemples d'application de la règle de d'Alembert . . . 5

5 Propriétés algébriques 6
5.1 Addition, produit par un scalaire . . . 6
5.2 Produit de Cauchy de deux séries entières (hors programme PT) . . . 6
5.3 Dérivées et primitives FORMELLES . . . 7

6 Propriétés de la fonction somme d'une série entière 8
6.1 Continuité de la fonction somme . . . 8
6.2 Cas des séries entières d'une variable réelle . . . 8
6.2.1 Propriétés à la frontière de l'ensemble de convergence . . . 8
6.2.2 Dérivation . . . 8
6.2.3 Intégration . . . 8

7 Développement d'une fonction en série entière 10
7.1 Condition nécessaire d'existence d'un DSE . . . 10
7.2 Série de Taylor d'une fonction . . . 10
7.3 Conditions suffisantes d'existence d'un DSE . . . 11
7.3.1 Formule de taylor avec reste intégral (rappels) . . . 11
7.3.2 Condition Nécessaire et Suffisante . . . 11
7.3.3 Condition Suffisante . . . 11

8 DSE des fonctions usuelles d'une variable réelle 12
8.1 DSE obtenus par la formule de Taylor . . . 12
8.2 DSE direct (somme d'une série géométrique) . . . 12
8.3 DSE obtenu par transformations élémentaires . . . 12
8.4 DSE obtenu par intégration . . . 12
8.5 DSE obtenu par la formule de Taylor . . . 13
8.6 DSE obtenu par identification (équation différentielle) . . . 13
8.7 Développements en série entière à connaître par cœur . . . 13

9 Fonctions usuelles d'une variable complexe 14
9.1 Fonctions rationnelles d'une variable complexe . . . 14
9.2 Exponentielle, sinus et cosinus d'une variable complexes . . . 14

10 Calculs élémentaires usuels (exemples) 15
10.1 Fonctions rationnelles . . . 15
10.2 Fonctions dont la dérivée est rationnelle . . . 15
10.3 Utilisation d'une équation différentielle . . . 15

11 Applications (exemples) 16

Séries entières

1 Introduction

1.1 Notion de série entière

Définition 1.1.1.

On appelle série entière de la variable z (réelle ou complexe), toute série de fonctions de terme général

$$u_n : z \longmapsto u_n(z) = a_n\, z^n$$

où $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de nombres réels ou complexes (coefficients de la série entière).

A z fixé, la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, z^n$ peut être convergence ou divergente. La *fonction somme*, de la série entière, est définie, pour les z tels que la série converge, par : $z \longmapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, z^n$

- Les (fonctions) sommes partielles d'ordre n , $\left(z \longmapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k\, z^k\right)$, sont des fonctions polynômes.
- Comme pour les séries numériques, les indices pourraient ne pas commencer à 0, et on pourrait indicer par une suite strictement croissantes d'indices entiers. Par exemple,

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} a_{2n}\, z^{2n} \text{ peut s'écrire } \sum_{n\in\mathbb{N}} b_n\, z^n \quad \text{avec } \begin{cases} b_{2p} = a_{2p} \\ b_{2p+1} = 0 \end{cases} \quad \text{ou encore} \quad \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n\, z^{2n} \quad \text{avec } c_n = a_{2n}$$

1.2 Problèmes usuels . . .

1. Etant donnée une série entière,
   - déterminer son ensemble de convergence (ensemble de définition de la fonction somme).
   - étudier les propriétés de la fonction somme.
   - utiliser les sommes partielles d'ordre n comme approximation polynomiale de la fonction somme.
2. Etant donnée une fonction, est elle la somme d'une série entière ?
3. Obtenir la solution de certaines équations fonctionnelles, comme fonction somme d'une série entière.
4. Calculer des valeurs approchées de certaines expressions . . .

2 Exemples de référence

Attention ! Cela ressemble à . . . Mais ce n'est pas . . . Cela a le couleur de . . .

Pour $z \in \mathbb{C}$, $\lvert z\rvert < 1$	$\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z} \quad , \quad (\lvert z\rvert < 1)$
Pour $z = x + i\,y \in \mathbb{C}$,	$\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z = e^x\,(\cos y + i\,\sin y) \quad , \quad (z \in \mathbb{C})$
Pour $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{N}$, Pour $z \in \mathbb{C}$, $\lvert z\rvert < 1$,	$\displaystyle(1+z)^\alpha = 1 + \alpha\,z + \frac{\alpha\,(\alpha-1)}{2}\,z^2 + \cdots + \frac{\alpha\,(\alpha-1)\cdots(\alpha-(n-1))}{n!}\,z^n + \cdots$ $\displaystyle= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha\,(\alpha-1)\cdots(\alpha-(n-1))}{n!}\,z^n \quad , \quad (\lvert z\rvert < 1)$

Egalement à connaître, les expressions de

$\dfrac{1}{1+x}$	$\ln(1+x)$	$\cos(x)$	$\sin(x)$	$\operatorname{ch}(x)$	$\operatorname{sh}(x)$

3 Ensemble de convergence d'une série entière

3.1 Lemme d'Abel relatif aux séries entières

Lemme 3.1.1.

Soit une série entière de terme général $u_n(z) = a_n\, z^n$, défini pour $n \in \mathbb{N}$.

Si pour $z_0 \in \mathbb{C}$, $z_0 \neq 0$, la suite $(a_n\, z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée,
alors la série entière converge absolument (en module) pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < |z_0|$.

Remarque. En particulier,

- Si la série entière converge pour $z_0 \in \mathbb{C}$, $z_0 \neq 0$ alors elle converge absolument pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < |z_0|$.
  (le terme général d'une série convergente tends vers 0 en $+\infty$, donc est borné).
- Si la série entière diverge pour $z_1 \in \mathbb{C}$ alors elle diverge pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > |z_1|$.
  (simple contraposition du lemme).

Preuve. Sous les hypothèses énoncées, $|a_n\, z^n| = |a_n\, z_0^n| \left|\dfrac{z}{z_0}\right|^n \leqslant M \left|\dfrac{z}{z_0}\right|^n$, d'où le résultat.

Pour z tel que $|z| < |z_0|$, la série géométrique de raison $\left|\dfrac{z}{z_0}\right|$ est convergente.

3.2 Rayon de convergence, Disque ouvert de convergence

Pour une série entière de terme général $u_n(z) = a_n\, z^n$, défini pour $n \in \mathbb{N}$, on considère

- A l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ tels que la suite $(a_n\, z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée
- $B = \{|z| \mid z \in A\}$ (B est non vide puisque $0 \in A$).

Premier cas : B majoré, de borne supérieure $R \in \mathbb{R}^*$.

- Pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R$, il existe $z_0 \in A$ tel que $|z| < |z_0|$.
  D'après le lemme d'Abel, $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n\, z^n$ converge.
- Pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > R$, $z \notin A$, donc la suite $(a_n\, z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas borné.
  La série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n\, z^n$ diverge (son terme général ne tends pas vers 0).
- Pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| = R$, on ne peut pas conclure en général, comme le montre l'exemple :

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n}\, z^n \qquad \text{où } R = 1 \text{ et } \begin{cases} \text{la série converge pour} & z = 1 \\ \text{la série diverge pour} & z = -1 \end{cases}$$

L'ensemble de convergence est compris entre

- Le disque ouvert de centre O et de rayon R, appelé **disque ouvert de convergence**
- Le disque fermé de centre O et de rayon R

sans que l'on puisse affirmer un résultat sur le cercle de centre O et de rayon R.

R est le rayon de convergence de la série entière

Deuxième cas : $A = \{0\}$ (et $B = \{0\}$). La série entière ne converge que pour $z = 0$.

La série entière a un rayon de convergence nul ($R = 0$)

Troisième cas : B n'est pas majoré. La série entière converge pour tout $z \in \mathbb{C}$.

La série entière a un rayon de convergence infini ($R = +\infty$)

4 Détermination du rayon de convergence

$\boxed{\text{Le rayon de convergence est aussi le rayon de d'absolue convergence}}$

Remarques.

- On se limitera le plus souvent à la recherche du rayon de convergence R, donc du disque ouvert de convergence.
  - Dans le cas réel, le "disque" ouvert de convergence est l'intervalle ouvert $]-R, R[$
  - Dans le cas complexe, le "disque" ouvert de convergence est l'ensemble des z tels que $|z| < R$
- Pour R fini, l'étude aux points de la frontière du disque ouvert de convergence ($|z| = R$), ne sera pas faite de façon systématique.
  - Cela peut être difficile dans $\mathbb{C}$ (une infinité de points).
  - Dans $\mathbb{R}$, c'est envisageable puisqu'il n'y a que les deux cas $z = R$ et $z = -R$ à étudier.

4.1 Règle de d'Alembert (quand elle est applicable)

Si la suite des coefficients est à termes non nuls (du moins à partir d'un certain rang) alors on peut essayer d'appliquer le critère de d'Alembert entre le module du terme général et celui de son suivant.

Exemple 4.1.0.1. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \sin(n)\, z^n$

Pour $n > 0$, et $z \neq 0$, $\displaystyle\left|\frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)}\right| = \frac{\left|\sin(n+1)\, z^{n+1}\right|}{|\sin(n)\, z^n|} = \left|\frac{\sin(n+1)}{\sin n}\right| |z|.$

Mais ici, $\displaystyle\left|\frac{\sin(n+1)}{\sin n}\right|$ n'a pas de limite quand $n \to +\infty$ et on ne peut pas conclure.

$\boxed{\text{La règle de d'Alembert n'est pas applicable.}}$

Exemple 4.1.0.2. $\displaystyle\sum_{n>0} \frac{1}{n+3^n} z^n$

Pour $n > 0$, et $z \neq 0$, $\displaystyle\left|\frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)}\right| = \frac{\left|a_{n+1}\, z^{n+1}\right|}{|a_n\, z^n|} = \frac{n+3^n}{n+1+3^{n+1}}\, |z| \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{3^n}{3^{n+1}}\, |z| \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{|z|}{3}$

$$\begin{cases} \text{Pour } |z| > 3, \text{ il y a divergence} \\ \text{Pour } |z| < 3, \text{ il y a convergence} \\ \text{Pour } |z| = 3, \text{ pas de conclusion directe} \end{cases}$$

$\boxed{R = 3 \text{ et le disque ouvert de convergence est le disque ouvert de centre } O \text{ et de rayon } 3}$

Exemple 4.1.0.3. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n\, z^n$, où a_n est la n-ième décimale de π

Les coefficients a_n ne sont (peut-être) pas tous non nuls, même à partir d'un certain rang.

$\boxed{\text{La règle de d'Alembert n'est pas applicable.}}$

Exemple 4.1.0.4. <u>Cas des (fonctions) polynômes</u>

Les fonctions polynomiales constituent un cas particulier de série entière :

$$\text{Pour } P \in \mathbb{C}[X],\ \text{degré}(P) = n, \quad P(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k\, z^k,\ \text{avec } a_k = 0 \text{ pour } k > n.$$

La règle de d'Alembert n'est pas applicable, mais la "série" converge pour tout z.
Pour un polynôme, on a $R = +\infty$.

4.2 Alternatives à la règle de d'Alembert (exemples)

Exemple 4.2.0.5. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \sin(n)\, z^n$

- $\sin(n)$ est borné (par 1), et $|\sin(n)\, z^n| < |z^n|$. Comme la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} z^n$ converge pour $|z| < 1$, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \sin(n)\, z^n$ converge aussi pour $|z| < 1$ et son rayon de convergence R vérifie $R \geqslant 1$
- Pour $z = 1$, le terme général, $\sin n$, ne tends pas vers 0, donc $R \leqslant 1$

Finalement $\boxed{\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \sin(n)\, z^n \text{ a pour rayon de convergence } R = 1\ .}$

Exemple 4.2.0.6. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n\, z^n,$ où a_n est la n-ième décimale de π

- a_n est borné (par 9), et $|a_n\, z^n| < |9\, z^n|$. Comme la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} 9\, z^n$ converge pour $|z| < 1$, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n\, z^n$ converge aussi pour $|z| < 1$, et son rayon de convergence est supérieur ou égal à 1
- Pour $z = 1$, $a_n\, z^n = a_n$ ne tends pas vers 0 (π est irrationnel). Il y a divergence pour $z = 1$ et le rayon de convergence est inférieur ou égal à 1.

Finalement $\boxed{\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n\, z^n, \text{ où } a_n \text{ est la } n\text{-ième décimale de } \pi, \text{ a pour rayon de convergence } R = 1\ .}$

4.3 Exemples d'application de la règle de d'Alembert

Remarque. L'obtention d'un rayon de convergence fini ne précise pas complètement l'ensemble de convergence

Exemple 4.3.0.7. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} z^n.$ On obtient $R = 1$ et on peut préciser l'ensemble de convergence :

Pour $|z| = 1$, z^n ne tends pas vers 0 et on en déduit que

- dans $\mathbb{C}$, l'ensemble de convergence est réduit au disque ouvert de convergence,
- dans $\mathbb{R}$, l'ensemble de convergence est $]-1, 1[$.

Exemple 4.3.0.8. $\displaystyle\sum_{n>0} \frac{1}{n}\, z^n.$ On obtient $R = 1$ et on peut préciser l'ensemble de convergence :

- dans $\mathbb{C}$, il s'agit du disque fermé de centre O et de rayon 1, **privé** de $z = 1$ (admis),
- dans $\mathbb{R}$, l'ensemble de convergence est $[-1, 1[$: $\begin{cases} \displaystyle\sum_{n>0} \frac{1}{n} & \text{diverge (série de Riemann),} \\ \displaystyle\sum_{n>0} \frac{(-1)^n}{n} & \text{converge (série alternée élémentaire).} \end{cases}$

Exemple 4.3.0.9. $\displaystyle\sum_{n>0} \frac{1}{3^n\, n^2}\, z^{2\,n}.$ On obtient $R = \sqrt{3}$ et on peut préciser l'ensemble de convergence :

- dans $\mathbb{C}$, l'ensemble de convergence est le disque fermé de centre O et de rayon $\sqrt{3}$,
- dans $\mathbb{R}$, l'ensemble de convergence est $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$.

Exemple 4.3.0.10. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{n!}\, z^n.$ $R = +\infty$ et l'ensemble de convergence est $\mathbb{C}$ (ou $\mathbb{R}$ dans le cas réel).

Exemple 4.3.0.11. $\displaystyle\sum_{n>0} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n z^n.$ $R = 1$ et on peut préciser l'ensemble de convergence :

Pour $|z| = 1$, $\displaystyle\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{e} \neq 0.$

- dans $\mathbb{C}$, l'ensemble de convergence est $\{z \mid |z| < 1\}$,
- dans $\mathbb{R}$, l'ensemble de convergence est $]-1, 1[$.

5 Propriétés algébriques

5.1 Addition, produit par un scalaire

Théorème 5.1.1.

Soit une série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n\, z^n$, *de rayon de convergence* $R \in \overline{\mathbb{R}}$,

Pour $\lambda \neq 0$, *la série entière* $\sum_{n\geqslant 0} \lambda\, a_n\, z^n$ *a pour rayon de convergence* R *et,*

$$\forall\, z\,,\ |z| < R\,,\ \sum_{n\geqslant 0} \lambda\, a_n\, z^n = \lambda \sum_{n\geqslant 0} a_n\, z^n$$

Remarque : Si $\lambda = 0$, *on a la série nulle, de rayon de convergence infini.*

<u>*Preuve*</u>. déduction directe des résultats sur les séries numériques.

Théorème 5.1.2.

Soient deux séries entières $\begin{cases} \sum_{n\geqslant 0} a_n\, z^n, & \text{de rayon de convergence } R_a \in \overline{\mathbb{R}}, \\ \sum_{n\geqslant 0} b_n\, z^n, & \text{de rayon de convergence } R_b \in \overline{\mathbb{R}}. \end{cases}$

La série entière $\sum_{n\geqslant 0} (a_n + b_n)\, z^n$ *a un rayon de convergence* R *tel que* $R \geqslant \min(R_a, R_b)$ *et,*

$$\forall\, z\,,\ |z| < R\,,\ \sum_{n\geqslant 0} (a_n + b_n)\, z^n = \sum_{n\geqslant 0} a_n\, z^n\ +\ \sum_{n\geqslant 0} b_n\, z^n$$

Remarque : Si $R_a \neq R_b$, *alors* $R = \min(R_a, R_b)$.

<u>*Preuve*</u>.

- Si $|z| < \min(R_a, R_b)$, les deux séries convergent donc leur somme aussi et $R \geqslant \min(R_a, R_b)$.
- Si $R_a \neq R_b$, par exemple $R_a < R_b$, alors, avec z tel que $R_a < |z| < R_b$, on a la somme d'une série divergente et d'une série convergente, donc divergente..
- Si $R_a = R_b < \infty$, alors, avec z tel que $|z| > R_a = R_b$, on a la somme de deux séries divergentes et cela pourrait être une série convergente.
  Par exemple, en prenant $a_n = \left(\dfrac{1}{n!} - n\right)$ et $b_n = n$, on a $R_a = 1$, $R_b = 1$
  et comme $a_n + b_n = \dfrac{1}{n!}$, la série entière $\sum_{n\geqslant 0} (a_n + b_n)\, z^n$ a un rayon de convergence $R = +\infty$

5.2 Produit de Cauchy de deux séries entières (hors programme PT)

Théorème 5.2.1. *(produit de Cauchy)*

Soient deux séries entières $\begin{cases} \sum_{n\geqslant 0} a_n\, z^n, & \text{de rayon de convergence } R_a \in \overline{\mathbb{R}}, \\ \sum_{n\geqslant 0} b_n\, z^n, & \text{de rayon de convergence } R_b \in \overline{\mathbb{R}}. \end{cases}$

La série entière $\sum_{n\geqslant 0} c_n\, z^n$, *avec* $c_n = \sum_{p+q=n} a_p\, b_q$

- *est le produit de Cauchy des séries* $\sum_{n\geqslant 0} a_n\, z^n$ *et* $\sum_{n\geqslant 0} a_b\, z^n$,
- *a un rayon de convergence* R *tel que* $R \geqslant \min(R_a, R_b)$,
- *et vérifie :* $\forall\, z\,,\ |z| < R\,,\ \sum_{n\geqslant 0} c_n\, z^n = \left(\sum_{n\geqslant 0} a_n\, z^n\right) \times \left(\sum_{n\geqslant 0} b_n\, z^n\right)$.

Remarque : Si $R_a \neq R_b$, *alors* $R = \min(R_a, R_b)$.

Preuve. Admis

Remarque : la série des produits "terme à terme" de deux séries entières n'a aucun sens.

Exemple 5.2.0.12. $\dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{n\geqslant 0} x^n$, $R = 1$ (avec comme domaine de convergence réel $]-1,1[$).

- Par le DSE de $(1+z)^\alpha$, $\dfrac{1}{(1-x)^2} = (1-x)^{-2} = \displaystyle\sum_{n\geqslant 0}(n+1)\,x^n$, $R=1$.
- Par le produit de Cauchy, (avec $a_p = b_q = 1$)

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \frac{1}{1-x} \times \frac{1}{1-x} = \sum_{n\geqslant 0}\sum_{p+q=n}(1\times 1)\,x^n = \sum_{n\geqslant 0}(n+1)\,x^n,\ R\geqslant 1 \text{ (puis } R=1)$$

- Par dérivation (voir ci-dessous), $\dfrac{1}{(1-x)^2} = \left(\dfrac{1}{1-x}\right)' = \displaystyle\sum_{n\geqslant 1} n\,x^{n-1} = \sum_{n\geqslant 0}(n+1)\,x^n$, $R=1$

5.3 Dérivées et primitives FORMELLES

Définition 5.3.1.

Etant donnée une série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n\, z^n$,

- sa série (entière) dérivée formelle est la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} n\, a_n\, z^{n-1}$
- ses séries (entières) primitives formelles sont les séries entières $\lambda + \displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{a_n}{n+1}\, z^{n+1}$

(où λ est une constante arbitraire).

Théorème 5.3.1.

Etant donnée une série entière de rayon de convergence R, ses séries dérivée FORMELLE et primitives FORMELLES ont également R comme rayon de convergence.

(par contre, les ensembles de convergence peuvent-être différents)

Preuve.

- Si le rayon de convergence de la série initiale peut-être établi avec la règle de d'Alembert, alors la preuve est immédiate : pour $z \neq 0$ et n suffisamment grand,
  1. Dérivation : $\left|\dfrac{(n+1)\,a_{n+1}\,z^n}{n\,a_n\,z^{n-1}}\right| = \dfrac{n+1}{n}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right||z| \underset{n\to+\infty}{\sim} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right||z|$
  2. Primitivation : $\left|\dfrac{\frac{a_{n+1}}{n+2}\,z^{n+2}}{\frac{a_n}{n+1}\,z^{n+1}}\right| = \dfrac{n+1}{n+2}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right||z| \underset{n\to+\infty}{\sim} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right||z|$
- Sinon ...

Exemple 5.3.0.13. Avec $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{n+1}\,z^n$, $R=1$ (de domaine de convergence réel $[-1,1[$),

- pour la série dérivée, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{n}{n+1}\,z^{n-1}$, $R=1$ et le domaine de convergence réel est $]-1,1[$,
- pour une série primitive, $\lambda + \displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{(n+1)^2}\,z^{n+1}$, $R=1$ et le domaine de convergence réel est $[-1,1]$.

6 Propriétés de la fonction somme d'une série entière

6.1 Continuité de la fonction somme

Théorème 6.1.1.

La fonction somme d'une série entière est continue dans le disque ouvert de convergence.

Preuve. Admis.

6.2 Cas des séries entières d'une variable réelle

6.2.1 Propriétés à la frontière de l'ensemble de convergence

Théorème 6.2.1.

Si une série entière réelle, de rayon de convergence fini $R > 0$, est convergente pour $x = R$, alors sa fonction somme est continue à gauche en R (donc sur $]-R, R]$).

De même, en cas de convergence en $-R$, la fonction somme est continue à droite en $-R$.

Preuve. Admis.

6.2.2 Dérivation

Théorème 6.2.2.

La fonction somme d'une série entière réelle est dérivable sur l'ensemble ouvert de convergence $]-R, +R[$ et sa dérivée est la fonction somme de sa série dérivée.

Avec les abus habituels, cela pourrait s'écrire : $\forall x \in]-R, R[\,,\ \left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n\right)' = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n\, a_n\, x^{n-1}$

Preuve. Admis

Théorème 6.2.3.

La fonction somme d'une série entière réelle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'ensemble ouvert de convergence $]-R, +R[$.

Preuve. itération du théorème précédent, les séries dérivées successives ayant toutes le même rayon de convergence.

6.2.3 Intégration

Théorème 6.2.4.

La fonction somme d'une série entière réelle est intégrable sur segment inclus dans l'ensemble ouvert de convergence $]-R, +R[$ et a pour primitive (à une constante près) la fonction somme d'une série primitive formelle.

Avec les abus habituels, cela pourrait s'écrire : $\forall x \in]-R, R[\,,\ \int \left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n\right) dx = \lambda + \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1}\, x^{n+1}$

Preuve.

C'est la conséquence immédiate des théorèmes précédents, les séries primitives ayant le même rayon de convergence que la série initiale.

Exemple 6.2.3.1. Soit $\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n\,x^n$, avec $R=1$, de domaine de convergence réel $]-1,+1\,[$,

de fonction somme $f : x \longmapsto \dfrac{1}{1+x}$ (sur l'ensemble $]1,+1[$).

Remarque. Bien que la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{1}{1+x}$ soit définie sur $]-1,+\infty[$, c'est seulement pour $x \in\,]-1,+1[$ que l'on a $f(x)=\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n\,x^n$

1. La série dérivée, $\sum_{n\geqslant 1}(-1)^n\,n\,x^{n-1}=\sum_{n\geqslant 0}(-1)^{n+1}\,(n+1)\,x^n$, a pour fonction somme, sur $]-1,+1\,[$, la fonction $x \longmapsto \dfrac{-1}{(1+x)^2}$: $\quad \forall\, x\in\,]-1,+1\,[,\ \dfrac{-1}{(1+x)^2}=\sum_{n\geqslant 0}(-1)^{n+1}\,(n+1)\,x^n,\ R=1.$

2. La série primitive qui s'annule en 0, $\sum_{n\geqslant 0}\dfrac{(-1)^n}{n+1}\,x^{n+1}$ ou encore $\sum_{n\geqslant 1}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}\,x^n$, a pour fonction somme, sur au moins $]-1,+1\,[$ et au plus $[-1,+1\,]$, la fonction $F : x \longmapsto \ln(1+x)$.
   Cette série primitive converge aussi pour $x=1$ (Théorème spécial des séries alternées) et on en déduit que sa fonction somme est continue à gauche en 1, ce qui prouve que :
   $$\forall\, x\in\,]-1,+1\,],\ \ln(1+x)=\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\,x^n,\ R=1$$
   En particulier, $\ln(2)=\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$, mais ici, il n'y a rien de semblable pour $x=-1$.

Exemple 6.2.3.2. Soit $\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n\,x^{2\,n}$, avec $R=1$, de domaine de convergence réel $]-1,+1\,[$,

de fonction somme $f : x \longmapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ (sur l'ensemble $]1,+1\,[$).

Remarque. Bien que la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ soit définie sur $]-\infty,+\infty[$, c'est seulement pour $x\in\,]-1,+1\,[$ que l'on a $f(x)=\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n\,x^{2\,n}$

1. La série dérivée, $\sum_{n\geqslant 1}(-1)^n\,2\,n\,x^{2\,n-1}$, a pour fonction somme, sur $]-1,+1\,[$, la fonction $x \longmapsto \dfrac{-2\,x}{(1+x^2)^2}$: $\quad \forall\, x\in\,]-1,+1\,[,\ \dfrac{-2\,x}{(1+x^2)^2}=\sum_{n\geqslant 1}(-1)^n\,2\,n\,x^{2\,n-1},\ R=1$.

2. La série primitive qui s'annule en 0, $\sum_{n\geqslant 0}\dfrac{(-1)^{n+1}}{2\,n+1}\,x^{2\,n+1}$, a pour fonction somme, sur au moins $]-1,+1\,[$ et au plus $[-1,+1\,]$, la fonction $F : x \longmapsto \arctan x$.
   Cette série primitive converge aussi pour $x=1$ (Théorème spécial des séries alternées) et on en déduit que sa fonction somme est continue à gauche en 1, ce qui prouve que :
   $$\forall\, x\in\,]-1,+1\,],\ \arctan x=\sum_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^{n+1}}{2\,n+1}\,x^{2\,n+1},\ R=1$$
   En particulier, $\dfrac{\pi}{4}=\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{2\,n+1}$ mais ici, il n'y a rien de semblable pour $x=-1$.

7 Développement d'une fonction en série entière

Définition 7.0.1.

Une fonction f, définie au voisinage de 0, est développable en série entière (DSE) si et seulement si il existe une série entière, de rayon de convergence $R > 0$, telle que f soit la somme de cette série entière sur le disque ouvert de centre O et de rayon R.

Nous nous limitons ici au cadre des fonctions d'une variable réelle, à valeurs éventuellement complexes .

7.1 Condition nécessaire d'existence d'un DSE

Proposition 7.1.1. *Condition Nécessaire (NON suffisante)*

Pour qu'une fonction f, d'une variable réelle, soit développable en série entière (DSE), il faut que

- *f soit définie sur un intervalle ouvert non vide centré en 0*
- *f soit de classe $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0*

Preuve. Conséquence immédiate des théorèmes sur les propriétés de la somme d'une série entière réelle.

7.2 Série de Taylor d'une fonction

Proposition 7.2.1.

Si la fonction f, d'une variable réelle, est développable en série entière (DSE), sous la forme $\forall x \in]-R, R[\,,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n$, alors, $\forall n \in \mathbb{N}\,,\ a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$

Preuve. Conséquence du théorème de dérivation des séries entières réelles.

Définition 7.2.1.

La série de Taylor d'une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0 est la série entière

$$\sum_{n \geqslant 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\, x^n$$

Remarque. **(importante)**

- Si f est DSE alors cette série entière est sa série de Taylor. On en déduit qu'il y a

  unicité du développement en série entière

- Si la série de Taylor de f a un rayon de convergence nul, f n'est pas DSE .
- Si la série de Taylor de f a un rayon de convergence non nul, f n'est pas forcément la somme de sa série de Taylor, comme le montre l'exemple ci-dessous.

Exemple 7.2.0.3. Une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, qui n'est pas développable en série entière.

Soit la fonction f, de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, définie sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} f(x) = e^{-1/x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

On montre, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f est de classe $\mathcal{C}^n$, avec comme proposition de récurrence à l'ordre n :

$$\mathcal{H}_n : \begin{cases} f^{(n)}(0) = 0 \\ \text{pour } x \neq 0, f^{(n)}(x) = e^{-1/x^2}\, P_n\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{avec } P_n \in \mathbb{R}[X] \end{cases}$$

La série de Taylor de f est la série nulle, de rayon de convergence infini, de somme est nulle sur $\mathbb{R}$. Or la fonction f ne s'annule qu'en 0.
La fonction f, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur R, n'est pas DSE et n'est pas la somme de sa série de Taylor, bien que la somme de cette série soit définie sur $\mathbb{R}$ tout entier !

7.3 Conditions suffisantes d'existence d'un DSE

7.3.1 Formule de taylor avec reste intégral (rappels)

Proposition 7.3.1. *(rappel)*

Soit f une fonction f, de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur l'intervalle $]a,b[$, $(a<b)$.

Pour $\alpha \in]a,b[$ et h tel que $\alpha+h \in [a,b]$,

$$f(\alpha+h) = f(\alpha)+f'(\alpha)\,\frac{h}{1}+f''(\alpha)\,\frac{h^2}{2!}+\cdots+f^{(n)}(\alpha)\,\frac{h^n}{n!}+\frac{h^{n+1}}{n!}\int_0^1 (1-t)^n\, f^{(n+1)}(\alpha+t\,h)\,dt$$

Preuve. Cf Sup, démonstration par récurrence, à l'aide d'une intégration par parties.

Proposition 7.3.2. *(adaptation de la précédente, prise au voisinage de 0)*

Soit f une fonction f, de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur l'intervalle $]-a,a[$, $(a>0)$.

Pour tout $x \in]-a,a[$,

$$f(x) = f(0)+f'(0)\,\frac{x}{1}+f''(0)\,\frac{x^2}{2!}+\cdots+f^{(n)}(0)\,\frac{x^n}{n!}+\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\, f^{(n+1)}(t)\,dt$$

Preuve. proposition précédente avec $\alpha=0$ et $h=x$ et avec le changement de variable $u=t\,x$ dans l'intégrale.

7.3.2 Condition Nécessaire et Suffisante

Proposition 7.3.3.

Une fonction f, d'une variable réelle, $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0, est développable en série entière (DSE), (de rayon de convergence non nul), si et seulement il existe $x>0$ tel que

$$\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\, f^{(n+1)}(t)\,dt \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Preuve. Conséquence immédiate de la définition des séries entières.

Remarque. Condition difficile à prouver en général. On se limitera à une condition suffisante, par exemple :

7.3.3 Condition Suffisante

Proposition 7.3.4.

Pour qu'une fonction f, d'une variable réelle, $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0, soit développable en série entière (DSE), il suffit que ses dérivées successives soient bornées uniformément sur un intervalle $[-a,a]$ avec $a>0$:

$$\left(\exists\, a>0\,,\ \exists\, M \geqslant 0\,,\ \forall\, n\in\mathbb{N}\,,\ \sup_{x\in[-a,a]}\left|f^{(n)}(x)\right| \leqslant M\right)$$

(Le rayon de convergence sera supérieur ou égal à a)

Preuve.

Sous les hypothèses énoncées,, pour $x\in[-a,a]$,

$$\left|\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\, f^{(n+1)}(t)\,dt\right| \leqslant M\,\frac{a^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \quad \text{(terme d'une série numérique convergente).}$$

8 DSE des fonctions usuelles d'une variable réelle

8.1 DSE obtenus par la formule de Taylor

Pour $x \in \mathbb{R}$, quelconque,	$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$; $R = +\infty$
Pour $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$, Pour $x \in \mathbb{R}$, $\lvert x \rvert < 1$,	$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha\, x + \frac{\alpha\,(\alpha-1)}{2}\, x^2 + \cdots + \frac{\alpha\,(\alpha-1)\cdots(\alpha-(n-1))}{n!}\, x^n + \cdots$ $= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha\,(\alpha-1)\cdots(\alpha-(n-1))}{n!}\, x^n$; $R = 1$ $= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(\alpha-k)}{n!}\, x^n$; $R = 1$

8.2 DSE direct (somme d'une série géométrique)

Pour $x \in \mathbb{R}$, $\lvert x \rvert < 1$	$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$; $R = 1$

8.3 DSE obtenu par transformations élémentaires

A l'aide des transformations $x \rightsquigarrow -x$, $x \rightsquigarrow x^2$, $x \rightsquigarrow -x^2$, $x \rightsquigarrow a\,x$, on obtient aisément les DSE suivants :

Pour $x \in \mathbb{R}$, $\lvert x \rvert < 1$	$\frac{1}{1+x} = \cdots$	$\frac{1}{1+x^2} = \cdots$	$\frac{1}{1-x^2} = \cdots$	$R = 1$	$\left(\text{d'après } \frac{1}{1-x}\right)$
Pour $x \in \mathbb{R}$, $\lvert x \rvert < 1$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \cdots$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \cdots$		$R = 1$	$\left(\text{ d'après } (1+x)^{-1/2}\right)$

Pour $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, Pour $x \in \mathbb{R}$, $\lvert x \rvert < \lvert a \rvert$	$\frac{1}{a-x} = \frac{1}{a}\,\frac{1}{1-\frac{x}{a}} = \cdots$	$\frac{1}{a+x} = \frac{1}{a}\,\frac{1}{1+\frac{x}{a}} = \cdots$	$R = \lvert a \rvert$	$\left(\text{d'après } \frac{1}{1-z}\right)$

Pour $a \in \mathbb{C}$, Pour $x \in \mathbb{R}$, quelconque,	$e^{a\,x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{n!}\, x^n$ $R = +\infty$	$\left(\text{ d'après } e^x\right)$

8.4 DSE obtenu par intégration

Pour $x \in \mathbb{R}$, $\lvert x \rvert < 1$	$\ln(1+x)$	$\ln(1-x)$	$\arctan x$	$\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ $= \text{argth}x$	$R = 1$
Pour $x \in \mathbb{R}$, $\lvert x \rvert < 1$	$\arcsin x$	$\arccos x$	$\ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\,\right)$ $= \text{argsh}x$		$R = 1$

8.5 DSE obtenu par la formule de Taylor

Pour $x \in \mathbb{R}$, $\lvert x\rvert < 1$	$\operatorname{sh} x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad ; R = +\infty$	$\operatorname{ch} x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad ; R = +\infty$
Pour $x \in \mathbb{R}$, $\lvert x\rvert < 1$	$\sin x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\, x^{2n+1} \quad ; R = +\infty$	$\cos x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\, x^{2n} \quad ; R = +\infty$

Remarque. **On peut également les obtenir par combinaison linéaire, à l'aide de l'exponentielle complexe.** (voir fonctions usuelles d'une variable complexe).

8.6 DSE obtenu par identification (équation différentielle)

Pour $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$, la fonction $f : x \longmapsto (1+x)^\alpha$ est solution de l'équation différentielle

$$(E) : (1+x)\, y'(x) - \alpha\, y(x) = 0, \qquad f(0) = 1$$

En cherchant une solution de (E) sous forme de série entière, on retrouve les coefficients du DSE de $(1+x)^\alpha$:

Avec $y(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n$, $R > 0$, on a, pour $x \in]-R, R[$ $y'(x) = \displaystyle\sum_{\substack{\cancel{n=0}\\ n=1}}^{+\infty} n\, a_n\, x^{n-1}$.

En reportant ceci dans (E), pour $x \in]-R, R[$, on a successivement :

$$(1+x) \sum_{n=1}^{+\infty} n\, a_n\, x^{n-1} - \alpha \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n = 0 \ ; \quad \sum_{n=1}^{+\infty} n\, a_n\, x^{n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} n\, a_n\, x^n - \alpha \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n = 0$$

et on harmonise en premier les exposants (en changeant de nom d'indice), puis on regroupe les sommes :

$$\sum_{p=0}^{+\infty}(p+1)\, a_{p+1}\, x^p + \sum_{p=1}^{+\infty} p\, a_p\, x^p - \sum_{p=0}^{+\infty} \alpha\, a_p\, x^p = 0 \ ; \quad \underbrace{(a_1 + \alpha\, a_0)}_{p=0} + \sum_{p=1}^{+\infty}\big((p+1)\, a_{p+1} + (p-\alpha)\, a_p\big)\, x^p = 0.$$

D'où $\begin{cases} a_0 = 1 & \text{puisque } f(0) = 1 \\ a_1 = -\alpha\, a_0 & \\ a_{p+1} = \dfrac{\alpha - p}{p+1}\, a_p & \text{pour } p \geqslant 1 \end{cases}$

et, pour $p \geqslant 1$, $a_p = \dfrac{\alpha-(p-1)}{p} \times \dfrac{\alpha-(p-2)}{p-1} \times \dfrac{\alpha-(p-3)}{p-2} \times \cdots \dfrac{\alpha-2}{3} \times \dfrac{\alpha-1}{2} \times \dfrac{\alpha}{1}$.

En résumé, on a, $a_0 = 1$ et, pour $p \geqslant 1$, $a_p = \dfrac{\alpha\,(\alpha-1)\,\cdots(\alpha-(p-1))}{p!}$ (résultat déjà vu).

La série entière obtenue a un rayon de convergence égal à 1, sa somme prend la valeur 1 en 0, et par unicité de la solution d'une équation différentielle satisfaisant à une condition initiale donnée, cette somme est égale sur $]-1, 1[$ à la fonction $x \longmapsto (1+x)^\alpha$.

8.7 Développements en série entière à connaître par cœur

- $\dfrac{1}{1+x}$ ou $\dfrac{1}{1-x}$
- $\ln(1+x)$
- e^x
- $\sin(x)$
- $\cos(x)$
- $\operatorname{sh}(x)$
- $\operatorname{ch}(x)$
- $(1+x)^\alpha$ pour α non entier naturel.

9 Fonctions usuelles d'une variable complexe

9.1 Fonctions rationnelles d'une variable complexe

Bien que l'on introduise aisément les fonctions rationnelles d'une variable complexe, certaines opérations, usuelles dans le cas d'une variable réelle, posent un problème dans le cas où la variable est complexe.

- Les propriétés algébriques usuelles sont conservées (par exemple, décomposition en éléments simples).
- Les fonctions rationnelles sont continues sur leur ensemble de définition.
- Vous pouvez dériver "formellement" (c'est une opération algébrique).
- **Cependant, l'intégration pose un problème ! (voir les résultats "bizarres" fournis par Maple)** : il s'agit d'une théorie particulière (hors programme), dont l'exploitation est délicate.

9.2 Exponentielle, sinus et cosinus d'une variable complexes

Exponentielle d'un complexe :	$\forall z \in \mathbb{C}\,,\ e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}\quad ; R = +\infty$	
Cosinus d'un complexe :	$\forall z \in \mathbb{C}\,,\ \cos z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\, z^{2n}\quad ; R = +\infty$	$\cos z = \frac{e^{i\,z} + e^{-i\,z}}{2}$
Sinus d'un complexe :	$\forall z \in \mathbb{C}\,,\ \sin z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\, z^{2n+1}\quad ; R = +\infty$	$\sin z = \frac{e^{i\,z} - e^{-i\,z}}{2\,i}$

Propriétés

- $\boxed{\text{Pour } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ et } z = x + i\,y,\ e^z = e^{x+iy} = e^x\left(\cos y + i\,\sin y\right)}$
- Toutes les formules algébriques usuelles sont conservées
- La trigonométrie complexe englobe la trigonométrie circulaire usuelle et la trigonométrie hyperbolique :

$$\boxed{\forall z \in \mathbb{C}\,,\quad \begin{cases} \operatorname{sh} z = i\,\sin(i\,z) = \dfrac{e^z - e^{-z}}{2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)!}\, z^{2n+1} \quad ; \quad R = +\infty \\[2ex] \operatorname{ch} z = \cos(i\,z) = \dfrac{e^z + e^{-z}}{2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!}\, z^{2\,n} \quad ; \quad R = +\infty \end{cases}}$$

- Ces fonctions sont continues sur $\mathbb{C}$.
- Vous pouvez les dériver formellement, en calculer des primitives formelles.
- **Cependant, vous ne pouvez pas introduire de fonctions réciproques !** (voir les résultats bizarres fournis par Maple dans le cadre de variables complexes).

Exemple 9.2.0.1.

> Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $\sin z = 2$.
>
> On vérifiera qu'il existe une infinité de solutions.

Remarque. C'est quasiment le même exercice que l'exercice simple (et classique) de terminale : résoudre (dans $\mathbb{R}$), l'équation d'inconnue x : $\dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = y$ (ide, $\operatorname{sh}(x) = y$).

10 Calculs élémentaires usuels (exemples)

10.1 Fonctions rationnelles

Pour calculer le développement en série entière (DSE) d'une fonction rationnelle définie au voisinage de 0, on peut la **décomposer en éléments simples** (DES) dans $\mathbb{C}$, sachant que, pour $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$,

$$\frac{1}{(x-a)^p} = \frac{(-1)^p}{a^p}\,\frac{1}{\left(1-\dfrac{x}{a}\right)^p} = \frac{(-1)^p}{a^p}\left(1-\frac{x}{a}\right)^{-p} = \frac{(-1)^p}{a^p}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}(-p-k)}{n!}\right)\left(-\frac{x}{a}\right)^n \text{ , si } |x| < R = |a|$$

$$\boxed{\frac{1}{(x-a)^p} = \frac{(-1)^p}{a^p}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}(p+k)}{a^n\, n!}\right)x^n \qquad \text{, si } |x| < R = |a|}$$

Dans le cas des fonctions réelles d'une variable réelle, on devra ensuite regrouper les éléments conjugués d'une décomposition en éléments simples, avant de calculer une primitive . . . .

Exemple 10.1.0.2. Décomposer en série entière $x \longmapsto \dfrac{x+1}{x^2+5\,x+6}$

On précisera avec soin le rayon de convergence (voir le théorème relatif à l'addition de SE).

Exemple 10.1.0.3. Décomposer en série entière $x \longmapsto \dfrac{x+1}{2+x+x^2}$

On précisera avec soin le rayon de convergence (voir le théorème relatif à l'addition de SE).

10.2 Fonctions dont la dérivée est rationnelle

Uniquement pour des fonctions réelles d'une variable réelle, avec regroupement des éléments simples conjugués de la dérivée avant intégration.

Exemple 10.2.0.4. Décomposer en série entière $\ln(x^2-5\,x+6)$, en précisant le rayon de convergence.

Exemple 10.2.0.5. Décomposer en série entière $\arctan(1+x)$, en précisant le rayon de convergence.

Exemple 10.2.0.6. Décomposer en série entière $\ln(1+x+x^2)$, en précisant le rayon de convergence.

10.3 Utilisation d'une équation différentielle

Uniquement pour des fonctions d'une variable réelle.

Exemple 10.3.0.7. Décomposition en série entière de la fonction $\left|\begin{array}{llll} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & (1+x)^\alpha \end{array}\right.$

- Pour $\alpha \in \mathbb{N}$, il s'agit d'un polynôme que l'on peut développer par la formule du binôme. Dans ce seul cas, le rayon de convergence est $+\infty$.
- Pour $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$, la fonction $f : x \longmapsto (1+x)^\alpha$ est solution de l'équation différentielle

$$(E) : (1+x)\,y'(x) - \alpha\,y(x) = 0, \qquad f(0) = 1$$

En recherchant une solution de (E) sous forme de série entière, on retrouve les coefficients du DSE de $(1+x)^\alpha$ que l'on avait obtenu directement par la formule de Taylor.
On remarque que le rayon de convergence est égal à 1.

Exemple 10.3.0.8. Décomposer en série entière la fonction $\left| \begin{array}{rcl} f: \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \arcsin^2 x \end{array} \right.$, en précisant le rayon de convergence.

- f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,+1[$ (mais cela ne suffit pas pour assurer l'existence d'un DSE),
- Hors programme PT : arcsin étant DSE, avec un rayon de convergence égal à 1, à l'aide du théorème sur le produit de Cauchy, on prouve que $f = \arcsin^2$ est DSE, avec un rayon de convergence supérieur ou égal à 1.
- On montre que f est solution de l'équation différentielle :

$$(E): \qquad (1-x^2)\,y'' - x\,y' = 2 \quad ; \quad y(0) = 0, y'(0) = 0, y''(0) = 2$$

(on montre d'abord que $\sqrt{1-x^2}\, f'(x) = 2\arcsin x$).

Analyse : On cherche les solutions de (E) sous la forme $y = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n$, sur $]-R, R[$, avec $R > 0$.
. . .

Synthèse : La série entière obtenue a un rayon de convergence égal à 1. et sa fonction somme est solution de (E), satisfaisant aux conditions initiales données.
D'après l'unicité de la solution de (E) satisfaisant aux conditions initiales données (théorème d'existence et d'unicité de Cauchy, pour les équations différentielles), la somme de la série entière obtenu est égale à f sur le disque ouvert de convergence.

Exemple 10.3.0.9. Déterminer un DSE de la fonction $\left| \begin{array}{rcl} f: \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sin^2 x \end{array} \right.$

Ce n'est pas la peine d'introduire une équation différentielle ! Le résultat s'obtient à l'aide d'une formule trigonométrique élémentaire et du DSE de $\cos(2x)$.

11 Applications (exemples)

1. Calcul approché de certaines intégrales

   Exemple 11.0.0.10. Calculer une valeur approchée à 10^{-3} près de $\displaystyle\int_0^1 e^{x^2}\, dx$.

   - Série entière usuelle et transformation de l'argument en x^2,
   - théorème sur l'intégration de la somme d'une série entière,
   - approximation, à ε près, de la somme d'une série numérique (majoration absolue du reste selon le critère de convergence) ...

2. Résolution de certaines équations différentielles (voir cours "équations différentielles")

   Exemple 11.0.0.11. Résoudre l'équation différentielle : $x\,y'' + 2\,y' + x\,y = 0$ avec $y(0) = 1, y'(0) = 0$.

   On cherche la solution sous forme de série entière $y = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n$ avec $R > 1$.

   Analyse ..., synthèse ...et on obtient $y : x \longmapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2\,n+1)!} x^{2\,n}$, $R = +\infty$. dont on identifie facilement la fonction somme : $y(x) = \dfrac{\sin x}{x}$.

   Exemple 11.0.0.12. Résoudre l'équation différentielle : $x\,y'' + y' + x\,y = 0$ avec $y(0) = 1, y'(0) = 0$.

   On cherche la solution sous forme de série entière (Analyse, synthèse).
   On pourra ensuite vérifier que cette solution est définie sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi \cos(x\, \sin t)\, dt$
   (cela nous ramène au chapitre sur les intégrales dont l'intégrande dépends d'un paramètre ...).

3. ...

< $\mathcal{FIN}$ >