Exercices de révision d'algèbre Sup

Antoine MOTEAU antoine.moteau@wanadoo.fr
.../revexos — Révision : 12 avril 2003

Table des matières

Exercices de révision (Algèbre de Sup.)

Avertissement. Ceci ne constitue pas un catalogue exhaustif, mais une collection d'exercices divers, présentées dans un ordre plus ou moins logique, plus ou moins progressif, ayant cependant la prétention d'aborder la plupart des notions vues en sup ....

- **Il ne faut surtout pas les traiter dans l'ordre où il sont présentés !** (vous risqueriez de ne pas traiter des points importants)
- Si vous n'avez pas le temps de les faire tous dans l'immédiat, il serait bon de **les lire tous en détail**, en identifiant les points du programme correspondant !
- L'objectif est de maitriser **toutes** les notions (de niveau Sup) abordées par ces exercices

1 Groupes, relations

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note U_n l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité dans $\mathbb{C}$.
   (a) Représenter graphiquement U_4 , U_6 et U_8
   (b) Montrer que $(U_n, \times)$ est un sous groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$
   (c) Déterminer tous les sous groupes propres de $(U_6, \times)$ (il y en a 2)
   (d) Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}$ et intégrer
   $$\frac{x^{17}+x+1}{x^{16}+x^{12}+x^8+x^4+1} \qquad \text{(c'est facile)}$$
2. Soit $(G, *)$ un groupe et $(F, *)$ un sous groupe de $(G, *)$.
   On note $\mathcal{R}$ la relation définie dans G par :
   $$\forall x, y \in G,\ x\mathcal{R}y \text{ ssi } x * y^{-1} \in F$$
   Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence dans G
3. Soit E et F deux ensembles et f une application de E vers F.
   On note $\mathcal{R}$ la relation définie dans E par :
   $$\forall x, y \in E,\ x\mathcal{R}y \text{ ssi } f(x) = f(y)$$
   Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence dans E
4. Ordre lexicographique dans $\mathbb{N}^2$: On note $\preccurlyeq$ la relation définie dans $\mathbb{N}^2$ par :
   $$\forall (p, q), (p', q') \in \mathbb{N}^2,\ ((p, q) \preccurlyeq (p', q')) \text{ ssi } ((p \leqslant q) \text{ ou } (p = p' \text{ et } q \leqslant q'))$$
   Montrer que $\preccurlyeq$ est une relation d'ordre dans $\mathbb{N}^2$ et qu'elle est totale.

2 Anneau, Matrices

1. Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +, \times)$ l'anneau des matrices carrées d'ordre n.
   (a) Prouver que cet anneau n'est pas commutatif. Quelle en est la conséquence ?
   (b) Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. On introduit la matrice $B = A + I_3$
      i. Vérifier que A et B commutent (pour $\times$).
      ii. Calculer B^2, B^3, $\ldots B^k$
      iii. Exprimer A^k comme combinaison linéaire de I_3, B, B^2, à coefficients fonction de k
   (c) Soit $F = \{A^k,\ k \in N^*\}$.
   Montrer que $(F, +, \times, \cdot)$ est une **sous algèbre commutative de** $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +, \times, \cdot)$.
   Quelle est sa dimension ? **En donner une base** .
2. Calculer la **dérivée 2001-ième** de $x \longrightarrow (x^2 + x + 1)sin(x)$

3 Espaces vectoriels de dimension finie

1. Soit $(E,+,\cdot)$ un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension 4, de base $\mathcal{B}=(e_1,e_2,e_3,e_4)$.
La famille $\mathcal{F}=(f_1,f_2,\dots,f_7)$, de vecteurs de E, est définie par la donnée de la matrice des composantes de ses vecteurs relativement à la base $\mathcal{B}$:

$$\begin{array}{cc} \begin{matrix} f_1 & f_2 & f_3 & f_4 & f_5 & f_6 & f_7 \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 5 & 9 \\ 2 & 4 & 4 & 6 & 0 & 8 & 14 \\ 3 & 6 & 5 & 8 & -1 & 11 & 19 \\ 1 & 2 & 2 & 3 & 0 & 13 & 6 \end{pmatrix} & \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{matrix} \end{array}$$

Remarque. En dimension 4, c'est plus amusant mais, si cela vous chante, vous pouvez redescendre en dimension 3 en supprimant la quatrième ligne et même sur le plat en supprimant aussi la troisième (après, il est préférable de changer d'orientation …élever des moutons, s'installer potier en Lozère …toutes activités d'avenir …)
Rapidement, avec très peu de calculs et même sans calculs (mais avec des arguments solides),
   - Etudier la liberté de $\mathcal{F}$, son caractère générateur de E
   - Calculer le rang de $\mathcal{F}$
   - Extraire de $\mathcal{F}$ une base de E si cela est possible
   - Donner une base du sous espace $F=\mathcal{V}ect(\mathcal{F})$ de E, engendré par cette famille.
   - Donner une base d'un supplémentaire de F dans E
   - Donner une représentation paramétrique de F
   - Donner une représentation par équations cartésiennes de F

2. Soit $E=\mathcal{A}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. $(E,+,\cdot)$ est un $\mathbb{R}$ ev.
   (a) Montrer que la famille $(x\longrightarrow \cos^n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille libre de E.
   (b) En déduire que la famille $(x\longrightarrow \cos(nx))_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille libre de E.
   (c) Montrer qu'aucune de ces familles n'est génératrice de E (par exemple, montrer que sin n'est pas combinaison linéaire d'éléments d'une de ces familles).
   (d) Montrer que

$$\forall x\in[0,\pi],\ sin(x)=\frac{4}{\pi}cos(0x)+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}-1}{n^2-1}\cos(nx)$$

3. Soit $(E,+,\cdot)$ un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension 4, de base $\mathcal{B}=(e_1,e_2,e_3,e_4)$.
La famille $\mathcal{F}=(f_1,f_2,\dots,f_8)$, de vecteurs de E, est définie par la donnée de la matrice des composantes de ses vecteurs relativement à la base $\mathcal{B}$:

$$\begin{array}{cc} \begin{matrix} f_1 & f_2 & f_3 & f_4 & f_5 & f_6 & f_7 & f_8 \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 3 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 3 & 4 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{matrix} \end{array}$$

Pour chaque couple de sous espaces vectoriels, vérifier si leur somme est directe et puis si ces sous espaces sont supplémentaires dans E :
   - $\mathcal{V}ect(f_1,f_2)$ et $\mathcal{V}ect(f_5,f_6)$
   - $\mathcal{V}ect(f_1,f_2)$ et $\mathcal{V}ect(f_3,f_4)$
   - $\mathcal{V}ect(f_1,f_2,f_3)$ et $\mathcal{V}ect(f_4,f_7,f_8)$

4. Soit $(E,+,\cdot)$ un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension 4, de base $\mathcal{B}=(e_1,e_2,e_3,e_4)$.
Soit $F=\mathcal{V}ect(e_1+2e_2-e_3+e_4\ ,\ 2e_1-e_2+e_3-e_4)$.
Trouver deux sous espaces vectoriels G et H, qui soient supplémentaires de F et qui soient également supplémentaires entre eux (on doit donc avoir $E=F\oplus G=F\oplus H=G\oplus H$).

4 Corps

Soit l'ensemble $F_2 = \{0,1\}$, que l'on muni des opérations $+$ et $\times$ définies par :

$$\begin{cases} 0+0=0 \quad ; \quad 0+1=1+0=1 \quad ; \quad 1+1=0 \qquad \text{XOR} \\ 0\times 0=0 \quad ; \quad 0\times 1=1\times 0=0 \quad ; \quad 1\times 1=1 \qquad \text{ET} \end{cases}$$

1. Montrer que $(F_2,+,\times)$ est un corps
2. Montrer que l'équation $X^2+X+1=0$ n'a pas de solution dans F_2

On "**invente**" une solution de l'équation $X^2+X+1=0$, que l'on nomme "2" et on pose par convention "3"=1+"2".
L'ensemble $F_4=\{0,1,2,3\}$ est muni des opérations $+$ et $\times$ définies par leur tables :

$+$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	0	3	2
2	2	3	0	1
3	3	2	1	0

$\times$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	3	1
3	0	3	1	2

1. Montrer (ou admettre) que $(F_4,+,\times)$ est un corps (dont $(F_2,+,\times)$ est un sous corps)
2. Montrer que l'équation $X^2+X+1=0$ a des solutions dans F_4 et factoriser $X^2+X+1=0$ dans F_4
3. Montrer que l'équation $X^2+2X+1=0$ n'a pas de solution dans F_4

On "**invente**" une solution de l'équation $X^2+2X+1=0$, que l'on nomme "5" ...

5 Morphismes de groupes (cf exercices précédents)

1. Le groupe $(F_4,+)$ est-il isomorphe au groupe $(U_4,\times)$?
2. Le groupe $(F_4\setminus\{0\},\times)$ est-il isomorphe au groupe $(U_3,\times)$?

6 Polynômes de Lagrange

Soit $n\in\mathbb{N}^*$, $E=\mathbb{R}_n[X]$ et $n+1$ réels <u>distincts</u> : $a_0,a_1,\cdots,a_n$.

Pour $i\in\{0,\cdots n\}$, on définit les polynômes H_i et L_i par :

$$H_i(X)=\prod_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{k=n}(X-a_k) \qquad \text{et} \qquad L_i(X)=\frac{1}{H_i(a_i)}H_i(X)$$

et les applications f_i, de $E=\mathbb{R}_n[X]$ vers $\mathbb{R}$, par : $\forall P\in\mathbb{R}_n[X]$, $f_i(P)=P(a_i)$
Remarque. Les polynômes L_i sont les polynômes de **Lagrange**, d'ordre n, relatifs aux points $a_0,a_1,\dots a_n$

1. Montrer que la famille $(H_i)_{i=0\cdots n}$ est une base de E (donc aussi la famille $(L_i)_{i=0\cdots n}$)
2. Montrer que les f_i sont des applications linéaires et que la famille $(f_i)_{i=0\cdots n}$ est une base de $\mathcal{L}(E,\mathbb{R})$.
3. Pour $i\in\{0\cdots n\}$ et $j\in\{0\cdots n\}$, calculer $f_i(L_j)$
4. Déterminer le noyau de f_i et en donner une base, exprimée à l'aide des L_j
5. On cherche un polynôme de degré au plus n prenant aux points a_i les valeurs b_i.
   Montrer que l'on peut prendre le polynôme P défini par :
   $$P(X)=\sum_{k=0}^{n}b_kL_k(X)$$
6. **EXEMPLE** (Que l'on peut traiter avec Maple, avec $n=10$, ou "à la main", avec $n=3$) :
   On prend $a_0=0,a_1=1,a_2=2,\dots a_n=n$.
   (a) Calculer les polynômes $L_0,L_1,L_2,\dots L_n$
   (b) Déterminer un polynôme P tel que : $\forall i=0\cdots n$, $P(a_i)=i^2$

7 Applications, $\mathbb{N}$, récurrence, dénombrement, combinaisons etc..

1. Combien y-a-t'il de nombres de cinq chiffres (écrits en base 10) où 0 figure une fois et une seule ? (rep parmi 1273, 26244, 143526)
2. Soit E un ensemble, A et B deux parties de E et f l'application :
$$f : \begin{array}{l} \mathcal{P}(E) \longrightarrow \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E) \\ X \longmapsto (X \cup A, X \cup B) \end{array}$$
   (a) Montrer que f n'est pas surjective
   (b) Montrer que f est injective si et seulement si $A \cap B = \emptyset$
3. Soit $E = \{(a, b, c) \in \mathbb{N}^3,\ b \leqslant 3\}$. Montrer que l'application f :
$$f : \begin{array}{l} E \longrightarrow \mathbb{N} \\ (a, v, c) \longmapsto (2a + 1)2^{b+4c} \end{array}$$
   est une bijection.
   Résoudre l'équation $f(a, b, c) = 2^b + 8c$, d'inconnues a, b, c éléments de E.
4. Calculer
$$\sum_{k=0}^{Ent(n/2)} C_n^{2k}$$
5. Montrer que
$$\forall (n, p) \in \mathbb{N}^2, \sum_{k=0}^{p} (-1)^k C_n^k = (-1)^p C_{n-1}^p$$
6. Calculer
$$\sum_{k=0}^{n} k\ C_n^k \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} C_n^k$$
7. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $S_n = \sum_{k=0}^{n} (n - k)^2 (-1)^k$
8. Montrer que la somme des cubes des entiers compris entre 0 et n, est égale au carré de leur somme.

8 Noyau et Image d'application linéaire

1. On se place en dimension finie, 2 ou 3 (par exemple dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ si besoin).
   Donner, dans chaque cas, des exemples d'applications linéaires (que l'on pourra définir matriciellement) tels que
   - $\{0\} \not\subseteq \ker f \subset Imf$
   - $\{0\} \not\subseteq Imf \subset \ker f$
   - $f^2 = 0$
   - $f^2 = f$
   - $f^2 \neq 0$ et $f^3 = 0$
   - $f \circ g \neq g \circ f$
   - (f, g) libre et $f \circ g = g \circ f$
2. Dans $E = \mathbb{R}[X]$, montrer que l'application f définie par $f(P)(X) = XP(X)$ est un endomorphisme de E, qui admet un inverse à gauche mais pas à droite.
   Donner un exemple d'endomorphisme qui admet un inverse à droite mais pas à gauche.

9 Applications réciproques.

Soit la fonction f, de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, définie par $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1}$.

1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$ et qu'elle est impaire
2. Montrer que f admet une fonction réciproque et que cette fonction réciproque est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$
3. Calculer $f^{-1}(0)$, $\quad {f^{-1}}'(0)$
4. Montrer que f^{-1} satisfait à l'équation différentielle $y' = \sqrt{y^2+1}$
5. En déduire que f^{-1} satisfait à une équation différentielle simple, linéaire du deuxième ordre.
   Finalement, quelle est la fonction f^{-1} ?

10 Sous espaces vectoriels, sommes directes, supplémentaires

Soit $E = \mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. $(E, +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$ ev.

1. Soient $E_1 = \{f \in E \,|\, f \text{ est paire}\}$ et $E_2 = \{f \in E \,|\, f \text{ est impaire}\}$.
   Montrer que E_1 et E_2 sont des sous espaces vectoriels de E.
   Montrer que E_1 et E_2 sont supplémentaires dans E (ide $E = E_1 \oplus E_2$)
2. Soient $F_1 = \{f \in E \,|\, f \text{ est continue}\}$ et $F_2 = \{f \in E \,|\, f \text{ est périodique}\}$.
   E est-il la somme de F_1 et de F_2 ?
   La somme de F_1 et de F_2 est-elle directe ?
3. Soit $G_1 = \{f \in E \,|\, f(x) \geqslant 0\}$.
   $(G_1, +, \cdot)$ n'est pas un sous ev de $(E, +, \cdot)$ **Vrai ou faux ?**
4. Soit $G_2 = \{f \in E \,|\, f \text{ bijective de }]-1, 1[\text{ vers } \mathbb{R}\}$.
   $(G_2, +, \cdot)$ n'est pas un sous ev de $(E, +, \cdot)$. **Vrai ou faux ?** ?

11 Sous anneaux

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $n\mathbb{Z} = \{nk,\ k \in \mathbb{Z}\}$. Montrer que $(n\mathbb{Z}, +, \times)$ est un sous anneau de $(\mathbb{Z}, +, \times)$
2. $(\mathbb{R}_n[X], +, \times)$ n'est pas un sous anneau de $(\mathbb{R}[X], +, \times)$. **Vrai ou faux ?**
3. $(\mathbb{R}_n[X], +, \cdot)$ est un sous espace vectoriel de $(\mathbb{R}[X], +, \cdot)$. **Vrai ou faux ?**
4. Soit $E = \{P \in \mathbb{R}[X] \,|\, P(1) = 0 \text{ et } P(2) = 0\}$.
   $(E, +, \times, \cdot)$ est une sous algèbre de $(\mathbb{R}[X], +, \times, \cdot)$. **Vrai ou faux ?**
5. Soit $F = \{P \in \mathbb{R}[X] \,|\, P(1) \times P(2) = 0\}$.
   $(F, +, \times)$ n'est pas un sous anneau de $(\mathbb{R}[X], +, \times)$. **Vrai ou faux ?**

12 Applications linéaires définies matriciellement (produit vectoriel interdit)

Soit $(E, +, \times)$ un $\mathbb{R}$ ev de dimension 3, de base $\mathcal{B} = (\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
On considère les endomorphismes de E définis par leur matrices relativement à la base $\mathcal{B}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 5 & -6 & 11 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -5 \end{pmatrix}$$

1. Calculer les déterminants.
2. Noyau et Image de ces endomorphismes (on en donnera une base **et** des équations cartésiennes).
3. **Changement de base.** Soit les vecteurs $\vec{u} = \vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k}$, $\quad \vec{v} = 2\vec{\imath} - \vec{\jmath} + \vec{k}$, $\quad \vec{w} = 3\vec{\imath} + \vec{\jmath} + 2\vec{k}$
   (a) Montrer que $\mathcal{C} = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base de E
   (b) **Déterminer les matrices des endomorphismes, relativement à la base $\mathcal{C}$.**
4. Exprimer le vecteur $\vec{f} = 4\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} - 2\vec{k}$ dans la base $\mathcal{C}$

13 Symétries et projecteurs

Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{R}$ ev de dimension 3, de base $\mathcal{B} = (\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

Soit (P) le plan vectoriel d'équation $2x - y + 3z = 0$

Soit (D) la droite vectorielle d'équations $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 3x - 2y = 0 \end{cases}$

Déterminer, relativement à la base $\mathcal{B}$, la matrice de la symétrie par rapport à (P), parallèlement à (D).
En déduire, pratiquement sans calculs, les matrices de

1. la symétrie par rapport à (D), parallèlement à (P).
2. la projection sur (D), parallèlement à (P).
3. la projection sur (P), parallèlement à (D).

14 Suites récurrentes linéaires doubles

a et b étant des réels ou complexes fixés, on considère $E(a, b)$ l'ensemble des suites définies par la relation de récurrence linéaire à coefficients constants a et b :

$$\begin{cases} \begin{cases} u_0 = \alpha \\ u_1 = \beta \end{cases} & \text{valeurs initiales arbitaires} \\ u_{n+2} = a\ u_{n+1} + b\ u_n & \text{pour } n \geqslant 0 \end{cases}$$

1. Montrer que $(E(a, b), +, \cdot)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ (ou sur $\mathbb{C}$).
2. On suppose que l'équation $x^2 - ax - b = 0$ admet deux racines distinctes r_1 et r_2.
   Vérifier que les suites de terme général r_1^n et r_2^n constituent une base de E
3. On suppose que l'équation $x^2 - ax - b = 0$ admet une seule racine (double) r.
   Vérifier que les suites de terme général r^n et nr^n constituent une base de E
4. Exemples : Pour les suites, suivantes, calculer le terme u_{20}
   (a) $u_{n+2} = u_{n+1} - u_n$ avec $u_0 = 1$ et $u_1 = -1$
   (b) $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 3u_n$ avec $u_0 = 1$ et $u_1 = 2$
   (c) $u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n$ avec $u_0 = 1$ et $u_1 = 2$

15 Inverses de matrices.

1. Calculer, de tête, les inverses des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \; ; \; \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \; ; \; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \; ; \; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \; ; \; \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \; ; \; \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \; ; \; \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Calculer les inverses, lorsqu'ils existent, des matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \; ; \; \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \; ; \; \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \; ; \; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

16 Espace euclidien de dimension 3. Rotations, Symétrie et projecteurs orthogonaux

Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{R}$ ev euclidien, de dimension 3, de base orthonormée directe $\mathcal{B} = (\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

1. Déterminer la matrice de la rotation d'angle $\dfrac{\pi}{6}$ et d'axe dirigé par $\vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k}$
2. Déterminer la matrice de la symétrie orthogonale par rapport au plan d'équation $x + y + z = 0$
3. Déterminer la matrice du projecteur orthogonal sur le plan d'équation $x + y + z = 0$

17 Polynômes

17.1 Bases de $\mathbb{K}[X]$

1. Trouver une base de $\mathbb{R}_4[X]$, formée de polynômes qui soient tous de même degré
2. Trouver une base de $\mathbb{R}_4[X]$, formée de polynômes qui soient tous de même valuation
3. Montrer, sans calculs, que les familles suivantes sont des bases de $\mathbb{R}_4[X]$:

$$2, X+2, X^2+X+1, X^3+X, X^4-X^2$$
$$3, X+X^3, X^2+X^3+X^4, 5X^3-X^4, -X^4$$

4. Existe-t-il une base de $\mathbb{R}_4[X]$, formée de polynômes qui s'annulent tous en 1 ?

17.2 Factorisation

1. Factoriser dans $\mathbb{R}$: X^4+X^2+1
2. Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$: $x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$ comme produit de polynômes de degré au plus 2.
3. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $nX^{n+2}-(n+2)X^{n+1}+(n+2)X-n$ est divisible par $(X-1)^3$ dans $\mathbb{R}[X]$.
4. Résoudre l'équation $x^3-12x+16=0$, sachant qu'elle a une racine multiple
5. Résoudre l'équation $x^5-13x^4+67x^3-171x^2+216x-108=0$, sachant qu'elle a une racine double et une racine triple
6. Résoudre l'équation $x^3-4x^2-17x+60=0$, sachant qu'il existe deux racines qui diffèrent de 2
7. Résoudre l'équation $3x^4-3x^3-12x^2+48x-64=0$, sachant qu'il existe deux racines opposées
8. Résoudre l'équation $3x^4-19x^3+9x^2-19x+6=0$, sachant qu'il existe deux racines dont le produit est égal à 2

17.3 Equations symétriques

Résoudre, dans C, $z^6-3z^5+3z^4-3z^2+3z-1=0$.
Indication : Poser $y=z+\dfrac{1}{z}$ et montrer que y vérifie une équation polynomiale de degré faible.
Résoudre, dans $\mathbb{R}$, $z^6-3z^5+3z^4-3z^2+3z-1=0$.
Indication : Poser $y=z-\dfrac{1}{z}$ et montrer que y vérifie une équation polynomiale de degré faible.

18 Fractions rationnelles

1. Calculer
$$\int_0^1 \frac{1}{x^2+x+1}\,dx \quad ; \quad \int_0^1 \frac{1}{(x^2+x+1)^2}\,dx \quad ; \quad \int_0^1 \frac{1}{(x^2+x+1)^3}\,dx \quad \text{puis} \quad \int_0^1 \frac{x^7+1}{(x^2+x+1)^3}\,dx$$
2. Déterminer une primitive de
$$\frac{x^2}{(x+1)^3(x-1)^2}$$
3. Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_0, a_1, \cdots a_n$, $n+1$ réels distincts, le polynôme P défini par :
$$P(X)=\prod_{k=0}^{n}(X-a_i)$$
Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{x-a_i}=\frac{P'}{P}$
En déduire, en fonction du polynôme P, de P' et de P'' ;
$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(x-a_i)^2} \quad \text{et} \quad \sum_{\substack{i,j=0\\ i\neq j}}^{n}\frac{1}{(x-a_i)(x-a_j)}$$

< $\mathcal{FIN}$ >