Equations différentielles

Antoine MOTEAU antoine.moteau@wanadoo.fr

Table des matières

Equations différentielles

1 Systèmes différentiels linéaires d'ordre 1, à coefficients constants

1.1 Exemple (en dimension 3)

Soit les trois équations différentielles simultanées et croisées :

$$\begin{cases} x' = -3\,x + 2\,y + 2\,z + e^{i\,t} \\ y' = -x + 2\,z \\ z' = -3\,x + 3\,y + z \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{l}\text{où } x,\ y \text{ et } z \text{ sont des fonctions} \\ \text{de la même variable réelle } t\ .\end{array}\right)$$

Ce "système" différentiel s'écrit de façon matricielle : $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^{i\,t} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ou, en abrégé,

$\boxed{X' = A\,X + B}$ (ou $X' - A\,X = B$) avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} e^{i\,t} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Il s'agit d'un système différentiel du premier ordre, de taille 3, en la variable t,

- <u>linéaire</u> (en fait affine si $B \neq (0)$)
- <u>à coefficients constants</u> (les coefficients de la matrice A du système)
- <u>avec second membre</u>, non constant (la matrice B, cf. écriture $X' - AX = B$)
- de fonction (vectorielle) inconnue X (ou de fonctions scalaires inconnues x, y, z)

1.2 Généralisation (en dimension n)

Les systèmes différentiels linéaires d'ordre 1 à coefficients constants, de taille n, de fonction vectorielle inconnue X, en la variable réelle t, s'écrivent sous forme matricielle :

$$X'(t) = A\,X(t) + B(t) \text{ avec } \begin{cases} A(t) \text{ matrice carrée d'ordre } n \text{ à coefficients constants, réels ou complexes} \\ B(t) \text{ matrice colonne d'ordre } n \text{ dont les coefficients sont des fonctions de } t \\ \qquad \text{à valeurs dans } \mathbb{R}^n \text{ ou } \mathbb{C}^n \\ X(t) \text{ matrice colonne d'ordre } n \text{ dont les coefficients sont des fonctions de } t \\ \qquad \text{à valeurs dans } \mathbb{R}^n \text{ ou } \mathbb{C}^n \end{cases}$$

Remarque. Si la matrice colonne $B(t)$ est nulle, le système est "sans second membre" ou "homogène".

1.3 Existence de solutions, structure de l'ensemble des solutions

Théorème 1.3.1. *(de Cauchy, d'existence de solutions)*

Soit un système différentiel linéaire d'ordre 1 à coefficients constants, de taille n :

$$(S): \quad X'(t) = A\,X(t) + B(t)$$

Si les coefficients de la matrice B sont des fonctions <u>continues</u> sur l'<u>intervalle</u> I, alors,

pour toute condition initiale $(t_0, X_0) \in I \times \mathbb{R}^n$, le système (S) admet une solution unique X, définie sur I et telle que $X(t_0) = X_0$.

<u>*Preuve*</u>. admis.

Théorème 1.3.2. *Ensemble des solutions d'un système homogène (sans "second membre")*

Soit un système différentiel linéaire d'ordre 1 à coefficients constants, de taille n, homogène :

$$(S_0): \quad X' = A\,X$$

L'ensemble des solutions définies sur un <u>intervalle</u> I (et sur $\mathbb{R}$) est un espace vectoriel de dimension n.

<u>*Preuve*</u>. admis ou voir diagonalisation, trigonalisation de la matrice A.

Théorème 1.3.3. *Ensemble des solutions d'un système complet (avec "second membre")*

Soit un système différentiel linéaire d'ordre 1 à coefficients constants, de taille n, "avec second membre" :

$$(S): \quad X' = A\,X + B \qquad \text{où } B \text{ est } \underline{\text{continue}} \text{ sur } \underline{\text{l'intervalle}}\ I.$$

Les solutions de (S), définies sur l'intervalle I, sont la somme

- *de l'ensemble des solutions, sur I, du système homogène, $(S_0) : X' = A\,X$, associé,*
- *d'une solution particulière, sur I, du système avec second membre $(S) : X' = A\,X + B$,*

En cas de superposition (second membre $B = B_1 + B_2$, avec B_1 et B_2 continues sur I), Les solutions de (S), définies sur l'intervalle I, sont la somme

- *de l'ensemble des solutions, sur I, du système homogène, $(S_0) : X' = A\,X$, associé,*
- *d'une solution particulière, sur I, du système avec second membre $(S_1) : X' = A\,X + B_1$,*
- *d'une solution particulière, sur I, du système avec second membre $(S_2) : X' = A\,X + B_2$.*

<u>*Preuve*</u>. admis ou par différence ....

Exemple 1.3.0.1. En reprenant l'exemple donné dans l'introduction, $\begin{cases} x' = -3\,x + 2\,y + 2\,z + e^{i\,t} \\ y' = -x + 2\,z \\ z' = -3\,x + 3\,y + z \end{cases}$

1. On montre que l'ensemble des solutions, sur $\mathbb{R}$, du système homogène associé est
$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-2\,t} \\ -e^{-2\,t} \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \\ e^t \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} e^{-t} \\ e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{, avec } C_1, C_2, C_3 \text{ constantes arbitraires}$$
2. On constate qu'une solution particulière, sur $\mathbb{R}$, est $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{3-i}{2}\,e^{i\,t} \\ \dfrac{11-3\,i}{10}\,e^{i\,t} \\ \dfrac{9+3\,i}{10}\,e^{i\,t} \end{pmatrix}$
3. L'ensemble des solutions, sur $\mathbb{R}$, du système complet est donc
$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-2\,t} \\ -e^{-2\,t} \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \\ e^t \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} e^{-t} \\ e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dfrac{3-i}{2}\,e^{i\,t} \\ \dfrac{11-3\,i}{10}\,e^{i\,t} \\ \dfrac{9+3\,i}{10}\,e^{i\,t} \end{pmatrix} \quad \text{, avec } C_1, C_2, C_3 \text{ constantes arbitraires}$$
4. Si on impose des conditions initiales particulières, cela détermine les constantes C_1, C_2, C_3. Par exemple, avec les conditions initiales $x(0) = 0, y(0) = 1, z(0) = 0$, on obtient une unique solution sur $\mathbb{R}$, avec :
$$C_1 = \frac{7+i}{5} \quad ; \quad C_2 = \frac{1-i}{2} \quad ; \quad C_3 = -2 + i.$$

1.4 Résolution des systèmes linéaires à coefficients constants

La méthode de résolution du système homogène est basée sur la réduction de la matrice carrée A du système, cette matrice pouvant être

- diagonalisable (dans $\mathbb{R}$ ou, éventuellement, dans C)
- trigonalisable (dans $\mathbb{R}$ ou, toujours, dans C)

1.4.1 Matrice réelle, diagonalisable dans $\mathbb{R}$

Exemple 1.4.1.1. $\begin{cases} x' = y + z \\ y' = x + z + 3\,t \\ z' = x + y + 6 \end{cases}$ soit $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3\,t \\ 6 \end{pmatrix}$

1. Préliminaires (identification, intervalle de résolution)

2. Le système s'écrit sous la forme vectorielle $X' = A\,X + B$ avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ fonction de t.

3. Résolution par réduction matricielle.

La matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est diagonalisable dans $\mathbb{R}$ (elle est symétrique réelle) sous la forme

$$A = P\,\Delta\,P^{-1} \qquad \text{avec } \Delta = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Remarque. Ici (uniquement ici), on aurait pu choisir P orthogonale. Pourquoi ? Avantages ?

Le système s'écrit donc $X' = P\,\Delta\,P^{-1}\,X + B$ ou encore $P^{-1}\,X' = \Delta\left(P^{-1}\,X\right) + P^{-1}\,B$

On pose $\boxed{U = P^{-1}\,X}$, fonction vectorielle que l'on détaille sous la forme $U = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$ avec u, v, w fonctions de t et on pose également $B_1 = P^{-1}\,B$

Remarque. On a $U' = P^{-1}\,X'$, par linéarité de la dérivation, P étant à coefficients constants.

la fonction U est solution du système : $U' = \Delta\,U + B_1$, système qui se détaille ainsi :

$$\begin{cases} u' = 2\,u + t + 2 & (1) \\ v' = -v + 2\,t - 2 & (2) \\ w' = -w - 3\,t & (3) \end{cases}$$

Ici, les trois équations (1), (2) et (3) peuvent se résoudre séparément.

Les équations (1), (2) et (3), qui sont linéaires du premier ordre, se résolvent facilement.
La solution générale du système en U est

$$U = \begin{pmatrix} \lambda_1\,e^{2\,t} - \frac{5}{4} - \frac{t}{2} \\ \lambda_2\,e^{-t} - 4 + 2\,t \\ \lambda_3\,e^{-t} + 3 - 3\,t \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} e^{2\,t} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e^{-t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{5}{4} - \frac{t}{2} \\ -4 + 2\,t \\ 3 - 3\,t \end{pmatrix}$$

Finalement, à l'aide de la formule $X = P\,U$, on obtient :

$$\begin{cases} x = \lambda_1\,e^{2\,t} + \lambda_2\,e^{-t} + \lambda_3\,e^{-t} - \frac{9}{4} - \frac{3}{2}\,t \\ y = \lambda_1\,e^{2\,t} + \lambda_2\,e^{-t} - \frac{21}{4} + \frac{3}{2}\,t \\ z = \lambda_1\,e^{2\,t} - 2\,\lambda_2\,e^{-t} - \lambda_3\,e^{-t} + \frac{15}{4} - \frac{3}{2}\,t \end{cases}$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} e^{2\,t} \\ e^{2\,t} \\ e^{2\,t} \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} e^{-t} \\ e^{-t} \\ -2\,e^{-t} \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} e^{-t} \\ 0 \\ -e^{-t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{9}{4} - \frac{3}{2}\,t \\ -\frac{21}{4} + \frac{3}{2}\,t \\ \frac{15}{4} - \frac{3}{2}\,t \end{pmatrix}$$

Les constantes d'intégration (multiplicatives !) λ_1, λ_2, λ_3 sont à adapter aux conditions initiales.

1.4.2 Matrice réelle, trigonalisable dans $\mathbb{R}$

Exemple 1.4.2.1. $\begin{cases} x' = x + 2\,y - 4\,z + t \\ y' = -y + 6\,z \\ z' = -y + 4\,z \end{cases}$ soit $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & -1 & 6 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ou $X' = A\,X + B$.

La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & -1 & 6 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ se trigonalise sous la forme $A = P\,T\,P^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 8 & -10 & -8 \\ -2 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

et $T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On pose alors $U = P^{-1}\,X$, avec $U = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$, et $B_1 = P^{-1}\,B$.

la fonction U est solution du système : $U' = T\,U + B_1$, système qui se détaille ainsi :

$$\begin{cases} u' = 2\,u & (1) \\ v' = v + w - t & (2) \\ w' = w & (3) \end{cases}$$

Mais, ici (et par hasard), seule l'équation (1) est indépendante des autres !

Le système étant triangulaire supérieur, on commence la résolution par la dernière équation.

1. l'équation (3) a pour solution : $w = \lambda_3\,e^t$,
   et on reporte ce résultat dans l'équation (2) et dans l'équation (1).
2. l'équation (2) qui est devenue $v' = v + \lambda_3\,e^t - t$, a pour solution $v = \lambda_2\,e^t + \lambda_3\,t\,e^t + t + 1$,
   et on reporte ce résultat dans l'équation (1) (sans effet dans ce cas particulier).
3. l'équation (1) qui est devenue $u' = 2\,u$, a pour solution $u = \lambda_1\,e^{2\,t}$,
   et ... c'est fini pour U.

$$U = \begin{pmatrix} \lambda_1\,e^{2\,t} \\ \lambda_2\,e^t + \lambda_3\,t\,e^t + t + 1 \\ \lambda_3\,e^t \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} e^{2\,t} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ e^t \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ t\,e^t \\ e^t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ t+1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Finalement, à l'aide de la formule $X = P\,U$, on obtient :

$$\begin{cases} x = 8\,\lambda_1\,e^{2\,t} + (-10\,\lambda_2 - 8\,\lambda_3)\,e^t - 10\,\lambda_3\,t\,e^t - 10 - 10\,t \\ y = -2\,\lambda_1\,e^{2\,t} + 3\,\lambda_3\,e^t \\ z = -\lambda_1\,e^{2\,t} + \lambda_3\,e^t \end{cases}$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 8\,e^{2\,t} \\ -2\,e^{2\,t} \\ -e^{2\,t} \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -10\,e^t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} -8\,e^t - 10\,t\,e^t \\ 3\,e^t \\ e^t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -10 - 10\,t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Les constantes d'intégration (multiplicatives !) λ_1, λ_2, λ_3 sont à adapter aux conditions initiales.

1.4.3 Matrice réelle ou complexe, diagonalisable uniquement dans $\mathbb{C}$

C'est rigoureusement la même technique que dans le cas réel, sauf que

- les valeurs sont complexes
- les constantes d'intégration sont complexes
- on utilise des exponentielles complexes de la variable réelle t

Si, initialement, les coefficients du système sont réels, **pour avoir les solutions réelles, on ne gardera que les parties réelles des solutions obtenues.**

Exemple 1.4.3.1. $\begin{cases} x' = x + y - z + e^t \\ y' = -x + y + z \\ z' = x - y + z \end{cases}$ soit $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

```
> restart: with(linalg):
Définition du système en X, réduction de A et matrices du système en Y
> A := matrix( [[1,1,-1],[-1,1,1],[1,-1,1]]); B := vector( [exp(t),0,0] );
> Delta := jordan( A,'P'); B1 := evalm( inverse(P) &* B);
Système en Y = [u,v,w] et résolution (dans C)
> u1 := subs(_C1=a[1]+I*a[2], subs( dsolve( diff(u(t),t) = Delta[1,1]*u(t)+B1[1]), u(t)));
> v1 := subs(_C1=b[1]+I*b[2],subs( dsolve( diff(v(t),t) = Delta[2,2]*v(t)+B1[2]), v(t)));
> w1 := subs(_C1=c[1]+I*c[2],subs( dsolve( diff(w(t),t) = Delta[3,3]*w(t)+B1[3]), w(t)));
Retour en X (avec des constantes complexes)
> X := evalm( P &* [u1,v1,w1] );
Expressions réelles des composantes de X, avec des constantes réelles
> x1 := evalc( Re( X[1] ) );
> y1 := evalc( Re( X[2] ) );
> z1 := evalc( Re( X[3] ) );
Vérification
> X1 := [x1,y1,z1]:
> simplify( evalm( diff(X1,t) - A &* X1 -B) );   # on doit trouver [0,0,0]
```

1.4.4 Matrice réelle ou complexe, seulement trigonalisable dans $\mathbb{C}$

C'est rigoureusement la même technique que dans le cas réel, sauf que

- les valeurs sont complexes
- les constantes d'intégration sont complexes
- on utilise des exponentielles complexes de la variable réelle t

En final, il faudra revenir dans $\mathbb{R}$, en prenant une combinaison linéaire (réelle) des parties réelles et imaginaire de chaque expression obtenue.

Exemple 1.4.4.1. $\begin{cases} x' = x - y \\ y' = x + y + t \end{cases}$

Lorsque l'on arrive à un système triangulaire supérieur, on commence la résolution par la dernière équation.
(ou par la première si on a obtenu un système triangulaire inférieur).

1.5 Exemple de système linéaire d'ordre 2, à coefficients constants

On applique rigoureusement la même technique de réduction matricielle que pour l'ordre 1 …

Exemple 1.5.0.2. $\begin{cases} x'' = 2\,x - y - z \\ y'' = -x + 2\,y - z \\ z'' = -x - y + t \end{cases}$ soit $\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix}$

Ici la matrice A est symétrique réelle donc … et en plus …
On arrive, après transformation, à trois équations séparées, linéaires du second ordre et à coefficients constants, qui se résolvent facilement.
Il ne reste plus qu'à calculer l'expression des fonctions initiales …

Remarque. Comme la résolution de chacune des trois équations séparées introduit deux constantes (multiplicatives) d'intégration, en final, l'ensemble des solution dépendra de six constantes.

2 Equations linéaires scalaires d'ordre 1

On étudie ici les équations différentielles de la forme : $a(t)\,x' + b(t)\,x = c(t)$ où

- a, b, c sont des fonctions de la variable t, continues sur un intervalle I et à valeurs réelles ou complexes
- x est une fonction inconnue de la variable réelle t, à valeurs réelles ou complexes.

2.1 Existence de solutions, structure de l'ensemble des solutions

Théorème 2.1.1. *(de Cauchy, d'existence de solutions)*

Soit une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 1 :

$$(E): \qquad a(t)\,x' + b(t)\,x = c(t)$$

où a, b, c sont des fonctions de la variable t, continues sur l'intervalle I.

Si la fonction a ne s'annule pas sur l'intervalle I, alors,

pour toute condition initiale $\big(t_0, x_0\big) \in I \times \mathbb{R}$, l'équation différentielle (E) admet une solution unique x, définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, telle que $x\big(t_0\big) = x_0$.

Preuve. admis.

Théorème 2.1.2. *Ensemble des solutions d'une équation homogène (sans "second membre")*

Soit une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 1, homogène :

$$(E): \qquad a(t)\,x' + b(t)\,x = 0$$

où a, b sont des fonctions de la variable t, continues sur l'intervalle I, a ne s'annulant pas sur I.

L'ensemble des solutions de (E), définies sur l'intervalle I, est une droite vectorielle.

Preuve. (rappel de sup).

Théorème 2.1.3. *Ensemble des solutions de l'équation complète (avec "second membre")*

Soit une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 1 :

$$(E): \qquad a(t)\,x' + b(t)\,x = c(t)$$

où a, b, c sont des fonctions de la variable t, continues sur l'intervalle I, a ne s'annulant pas sur I.

Les solutions de (E), définies sur l'intervalle I, sont la somme

- *de l'ensemble des solutions, sur I, de l'équation homogène, $(E_0):\ a(t)\,x' + b(t)\,x = 0$, associée,*
- *et d'une solution particulière, sur I, de l'équation complète (E).*

Preuve. (rappel de sup).

Théorème 2.1.4. *(superposition)*

Soit une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 1 :

$$(E): \qquad a(t)\,x' + b(t)\,x = c_1(t) + c_2(t)$$

où a, b, c_1, c_2 sont des fonctions de la variable t, continues sur l'intervalle I, a ne s'annulant pas sur I.

Les solutions de (E), définies sur l'intervalle I, sont la somme

- *de l'ensemble des solutions, sur I, de l'équation homogène, $(E_0):\ a(t)\,x' + b(t)\,x = 0$, associée,*
- *d'une solution particulière, sur I, de l'équation $(E_1):\ a(t)\,x' + b(t)\,x = c_1(t)$,*
- *d'une solution particulière, sur I, de l'équation $(E_2):\ a(t)\,x' + b(t)\,x = c_2(t)$.*

Preuve. (rappel de sup).

2.2 Prolongement, raccordement (exemples)

2.2.1 Prolongement en un point

Soit une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 1, $(E):\ a(t)\,x' + b(t)\,x = c(t)$
où a, b, c sont des fonctions de la variable t, continues sur l'intervalle $I =]\alpha, \beta[$, avec $\beta \in \mathbb{R}$, la fonction a ne s'annulant pas sur I.

Soit φ une solution de (E) sur I. Si φ ainsi que φ' admettent une limite finie à gauche en β,
alors, en notant encore φ le prolongement de φ à $]\alpha, \beta]$, pour tout $t \in]\alpha, \beta]$, $a(t)\,\varphi'(t) + b(t)\,\varphi(t) = c(t)$.
On dira que

φ est une solution de (E) sur $]\alpha, \beta]$, obtenue par un prolongement de classe $\mathcal{C}^1$ en β.

Remarque. On pourrait envisager de même l'existence d'un prolongement à droite en α lorsque $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exemple 2.2.1.1. (voir ci-dessous les prolongements réalisés avant raccordement)

2.2.2 Raccordement de solutions

Soit une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 1, $(E):\ a(t)\,x' + b(t)\,x = c(t)$
où a, b, c sont des fonctions de la variable t, continues sur l'intervalle $I =]\alpha, \beta[$.

On suppose que a ne s'annule qu'en un seul point γ intérieur à I et on considère

- x_1 une solution de (E) sur l'intervalle $I_1 =]\alpha, \gamma[$
- x_2 une solution de (E) sur l'intervalle $I_2 =]\gamma, \beta[$

Si $\begin{cases} x_1 \text{ et } x_1' \text{ admettent des limites à gauche en } \gamma \\ x_2 \text{ et } x_2' \text{ admettent des limites à droite en } \gamma \end{cases}$ et si $\begin{cases} \lim\limits_{\gamma^-} x_1 = \lim\limits_{\gamma^+} x_2 \\ \lim\limits_{\gamma^-} x_1' = \lim\limits_{\gamma^+} x_2' \end{cases}$,

alors la fonction x définie sur I par $\begin{cases} x(t) = x_1(t) & \text{si } t \leqslant \gamma \\ x(t) = x_2(t) & \text{si } t \geqslant \gamma \end{cases}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur I,
qui vérifie en tout point t de I la relation $a(t)\,x'(t) + b(t)\,x(t) = c(t)$.

On dit que x est une solution de (E) sur I obtenue par raccordement (en γ) des solutions x_1 de (E) sur I_1 et x_2 de (E) sur I_2.

La solution générale de (E) sur I_1, ainsi que la solution générale de (E) sur I_2 dépendent de constantes. On sera certainement amené à donner des valeurs particulière à ces constantes pour obtenir un raccordement (en γ) des solutions (si un tel raccordement est possible).

Exemple 2.2.2.1. Soit l'équation (linéaire) du premier ordre $(E):\ t\,x' + x = \dfrac{1}{1+t}$

1. D'après le théorème de Cauchy, (E) admet des solutions pour toute condition initiale (t_0, x_0) telle que t_0 appartient à l'un des intervalles $I_1 =]-\infty, -1[$, $I_2 =]-1, 0[$, $I_3 =]0, +\infty[$
   Attention, on ne travaille que sur un seul de ces intervalles à la fois.
2. Sur un intervalle I_k, la solution générale est $x_k : t \longmapsto \dfrac{C_k}{t} + \dfrac{\ln|1+t|}{t}$.
3. les solutions x_2 (sur I_2) et x_3 (sur I_3) ne peuvent se prolonger en 0 (en se raccordant) que si $C_2 = 0$ et $C_3 = 0$:
$$\lim_{t\to 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1 \quad \text{et} \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\ln(1+t)}{t}\right) = -\frac{\ln(1+t)}{t^2} + \frac{1}{t\,(t+1)} = -\frac{1}{2} + \frac{2}{3}t + o(t) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} -\frac{1}{2}$$

   Il existe une seule solution définie et $\mathcal{C}^1$ sur $]-1, +\infty[$, qui est $x : t \longmapsto x(t) = \dfrac{\ln(1+t)}{t}$

4. Cette dernière solution ne peut pas se prolonger en -1 et, à fortiori, ne peut pas se recoller avec une solution définie sur $]-\infty, -1[$.

Exemple 2.2.2.2. Soit l'équation d'ordre 1, (E) : $t\,x' - 2\,x = 0$, de condition initiale $x(0) = 0$.

1. D'après le théorème de Cauchy, (E) admet des solutions pour toute condition initiale (t_0, x_0) où x_0 est réel quelconque et t_0 appartient à l'un des intervalles $I_1 =]-\infty, 0[$ ou $I_2 =]0, +\infty[$
Attention, on ne travaille que sur un seul de ces intervalles à la fois.

La condition initiale donnée n'est pas compatible avec les hypothèses du théorème de Cauchy

2. Sur l'intervalle I_k, la solution générale est $x_k : t \longmapsto C_k\, t^2$ (immédiat)

3. les solutions x_1 (sur I_1) et x_2 (sur I_2) se prolongent en 0 (en se raccordant !) quelque soient C_1 et C_2 :
$$\lim_{t\to 0} C_k\, t^2 = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{t\to 0} 2\,C_k\, t = 0$$

Il existe une infinité de solutions définies et $\mathcal{C}^1$ sur tout l'intervalle $]-\infty, +\infty[$, de formule :
$$x(t) = \begin{cases} C_1\, t^2 & \text{si } t \leqslant 0 \\ C_2\, t^2 & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases} \qquad (C_1 \text{ et } C_2 \text{ constantes arbitraires})$$

4. On pose $y_1 : t \longmapsto \begin{cases} t^2 & \text{si } t \leqslant 0 \\ 0 & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$ et $y_2 : t \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t \leqslant 0 \\ t^2 & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$

L'ensemble des solutions de (E), linéaire du premier ordre, satisfaisant à la condition initiale $x(0) = 0$, est un espace vectoriel de dimension 2 , de base (y_1, y_2).

2.3 Résolution de l'équation homogène

Soit une équation différentielle linéaire scalaire homogène d'ordre 1, (E_0) : $a(t)\,x' + b(t)\,x = 0$ où a, b sont des fonctions de la variable t, continues sur l'intervalle I, a ne s'annulant pas sur I.
La fonction nulle est solution de (E_0) sur I et on cherche les autres solutions x de (E_0) :
Analyse : Sur un sous-intervalle J de I où x en s'annule pas, on a : $\dfrac{x'(t)}{x(t)} = \dfrac{-b(t)}{a(t)}$ et on en déduit que, pour $t \in J$, $\ln|x(t)| = \displaystyle\int \frac{-b(t)}{a(t)}\,dt + K$. En posant $K = -\ln(|\lambda|)$, avec $\lambda \neq 0$, on obtient :
$$\forall\, t \in J,\ \ |x(t)| = |\lambda|\; e^{\displaystyle\int \frac{-b(t)}{a(t)}\,dt}$$
Comme la fonction x est continue sur J et ne s'annule pas. x garde un signe constant sur J et, quite à changer le signe de λ, on a :
$$\forall\, t \in J,\ \ x(t) = \lambda\, e^{\displaystyle\int \frac{-b(t)}{a(t)}\,dt}$$
Synthèse : On constate que ces fonctions sont solutions de (E) sur tout I et, qu'avec $\lambda = 0$ on retrouve la solution nulle.

La solution générale, sur I, de l'équation différentielle linéaire scalaire homogène d'ordre 1,

(E_0) : $a(t)\,x' + b(t)\,x = 0$ où a, b sont des fonctions de la variable t, continues sur l'intervalle I,

est l'ensemble des fonctions $x : t \longmapsto \lambda\, e^{\displaystyle -\int \frac{b(t)}{a(t)}\,dt}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

C'est la droite vectorielle engendré par la fonction $x_1 : t \longmapsto e^{\displaystyle -\int \frac{b(t)}{a(t)}\,dt}$

Remarque. Chaque fois que j'emploie cette formule, je me plante ! (oubli du signe, échange a et b).
Finalement, il est plus sûr (et simple) de refaire directement en 2 lignes le calcul de l'analyse . . .

2.4 Recherche d'une solution particulière de l'équation complète

2.4.1 Solutions "évidentes"

Exemple 2.4.1.1. Soit l'équation (linéaire) du premier ordre $(E): \ t\,x' + x = t$

1. D'après le théorème de Cauchy, (E) admet des solutions pour toute condition initiale (t_0, x_0) telle que t_0 appartient à l'un des intervalles $I_1 =]-\infty, 0[$, $I_2 =]0, +\infty[$.
2. La fonction $t \longmapsto \dfrac{t}{2}$ est une solution évidente de l'équation complète (E) !
3. Sur un des intervalles I_k, la solution générale de (E_0) est $x_k : t \longmapsto \dfrac{\lambda_k}{t} + \dfrac{t}{2}$ avec λ_k constante.
4. Raccordement : sur $]-\infty, +\infty[$, la seule solution de (E) est $t \longmapsto \dfrac{t}{2}$.

Exemple 2.4.1.2. Soit l'équation différentielle (E) : $\quad x' + x = \sin(t) + 3\,t + \cos(t) + 1 + t^2$

1. **Identification** : Equation différentielle du premier ordre, linéaire, avec second membre.
2. Existence de solutions : d'après le théorème de Cauchy et au vu des coefficients et du second membre, il existe des solutions définies sur $\mathbb{R}$ tout entier (solution unique définie sur $\mathbb{R}$ lorsqu'une condition initiale quelconque $x(t_0) = x_0$ est donnée).
3. Résolution de l'équation sans second membre ... $x : t \longmapsto A\,e^{-t}$.
4. **Recherche d'une solution particulière** : En regroupant de façon "fine", (E) s'écrit :
$$x' + x = (\cos t + \sin t) + (1 + t) + (2\,t + t^2)$$
   - $x' + x = \cos t + \sin t$ a pour solution particulière évidente $x_1 : t \longmapsto \sin t$
   - $x' + x = 1 + t$ a pour solution particulière évidente $x_2 : t \longmapsto t$
   - $x' + x = 2\,t + t^2$ a pour solution particulière évidente $x_3 : t \longmapsto t^2$
5. Conclusion : la solution générale, sur $\mathbb{R}$, de (E) est :
$$x : t \longmapsto A\,e^{-t} + \sin t + t + t^2 \qquad (A \text{ étant une constante arbitraire})$$

2.4.2 "Variation de la constante"

Soit une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 1, $\quad (E): \ a(t)\,x' + b(t)\,x = c(t)$
où a, b, c sont des fonctions de la variable t, continues sur l'intervalle I, a ne s'annulant pas sur I.

Soit h une solution sur I, connue, non nulle, de l'équation homogène associée (E_0) **sans constante**.
On suppose bien sur que c n'est pas la fonction nulle.

Une solution particulière x, de (E) sur I, ne pouvant pas être de la forme $\lambda\,h$ avec λ constante, ne peut être que de la forme $x = \lambda\,h$ avec λ **non constante**

On recherche donc une solution particulière de (E), sur I, sous la forme

$x = \lambda\,h$ avec λ **non constante** c'est à dire λ fonction de t.

Remarque. Comme la solution générale de (E_0) sur I est $\lambda\,h$, avec λ constante, quand on change pour λ non constante, on dit que l'on fait "varier la constante", d'où le nom imagé de la méthode :

"Méthode de variation de la constante"

Par identification, après report dans (E), la fonction λ est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1, homogène.

Conseil : En prenant h sans constante, et en choisissant ensuite une constante d'intégration nulle pour l'expression de λ, on évitera l'introduction de constantes abusives dans l'expression de la solution générale.

Exemple 2.4.2.1. Soit l'équation (linéaire) du premier ordre (E) : $t\,x' + x = \dfrac{1}{1+t}$

1. D'après le théorème de Cauchy, (E) admet des solutions pour toute condition initiale (t_0, x_0) telle que t_0 appartient à l'un des intervalles $I_1 =]-\infty, -1[$, $I_2 =]-1, 0[$, $I_3 =]0, +\infty[$.
2. Sur un intervalle I_k, la solution générale de l'équation homogène associée (E_0) est $x_k : t \longmapsto \dfrac{\lambda_k}{t}$.
3. Recherche d'une solution particulière de (E), sur l'un des I_k ($]0, +\infty[$ par exemple).
   Soit $h : t \longmapsto \dfrac{1}{t}$ (sans constante), base simple de la solution générale de (E_0) sur I_k.
   On cherche une solution particulière de (E) sur I_k, **par la méthode de variation de la constante**, sous la forme $x = \lambda\, h$ avec λ fonction de t.

   Réalisation du calcul de manière formelle, dans l'équation type
   (cela évite les erreurs, c'est plus simple et plus rapide !)
   On a alors $x'(t) = \lambda'(t)\,h(t) + \lambda(t)\,h'(t)$ et en reportant $x(t)$ et $x'(t)$ dans (E), on obtient
   $$a(t)\left[\lambda'(t)\,h(t) + \lambda(t)\,h'(t)\right] + b(t)\left[\lambda(t)\,h(t)\right] = c(t)$$
   que l'on transforme en : $\lambda'(t)\,a(t)\,h(t) + \lambda(t)\underbrace{\left[a(t)\,h'(t) + b(t)\,h(t)\right]}_{nul} = c(t)$.
   Ainsi $\lambda'(t) = \dfrac{c(t)}{a(t)\,h(t)}$ (a et h ne s'annulant pas sur I_k).

   Application à notre cas particulier : on a ici $\lambda'(t) = \dfrac{1}{1+t}$ d'où $\lambda(t) = \ln(|1+t|) + 0$.

   (E) a pour solution particulière sur I_k la fonction $t \longmapsto \dfrac{\ln(1+t)}{t}$

4. Solution générale de l'équation complète :

   Sur l'un des I_k, la solution générale de (E) est $t \longmapsto \dfrac{\lambda_k}{t} + \dfrac{\ln(|1+t|)}{t}$ avec λ_k constante.

   (On vérifie que l'on obtient bien une solution générale qui est une droite affine).

5. Compléments (prolongement, raccordement) :
   On a vu précédemment l'existence d'un raccordement, en 0 seulement, lorsque $\lambda_2 = 0$ et $\lambda_3 = 0$.

   Sur $]-1, +\infty[$, (E) n'admet que la (seule) solution : $t \longmapsto \dfrac{\ln(1+t)}{t}$.

   (et (E) n'admet pas de solutions sur un intervalle contenant -1).

3 Equations linéaires scalaires d'ordre 2

On étudie ici les équations différentielles de la forme : $a(t)\,x'' + b(t)\,x' + c(t)\,x = d(t)$ où

- a, b, c, d sont des fonctions de la variable t, continues sur un intervalle I et à valeurs réelles ou complexes
- x est une fonction inconnue de la variable réelle t, à valeurs réelles ou complexes.

3.1 Existence de solutions, structure de l'ensemble des solutions

Théorème 3.1.1. *(de Cauchy, d'existence de solutions)*

Soit une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 2 :

$$(E): \qquad a(t)\,x'' + b(t)\,x' + c(t)\,x = d(t)$$

où a, b, c, d sont des fonctions de la variable t, continues sur l'intervalle I.

Si la fonction a ne s'annule pas sur l'intervalle I, alors,

pour toute condition initiale $\left(t_0, x_0, x'_0\right) \in I \times \mathbb{R}^2$, l'équation différentielle (E) admet une solution unique x, définie et de classe $\mathcal{C}^2$ sur I, telle que $x\left(t_0\right) = x_0$ et $x'\left(t_0\right) = x'_0$.

Preuve. admis.

Théorème 3.1.2. *Ensemble des solutions d'une équation homogène (sans "second membre")*

Soit une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 2, homogène :

$$(E): \qquad a(t)\,x'' + b(t)\,x' + c(t)\,x = 0$$

où a, b, c sont des fonctions de la variable t, continues sur l'intervalle I, a ne s'annulant pas sur I.

L'ensemble des solutions de (E), définies sur l'intervalle I, est un plan vectoriel.

Preuve. (idem preuve vue en sup pour les équations à coefficients constants).

Théorème 3.1.3. *Ensemble des solutions de l'équation complète (avec "second membre")*

Soit une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 2 :

$$(E): \qquad a(t)\,x'' + b(t)\,x' + c(t)\,x = d(t)$$

où a, b, c, d sont des fonctions de la variable t, continues sur l'intervalle I, a ne s'annulant pas sur I.

Les solutions de (E), définies sur l'intervalle I, sont la somme

- *de l'ensemble des solutions, sur I, de l'équation homogène, (E_0) : $a(t)\,x'' + b(t)\,x' + c(t)\,x = 0$,*
- *et d'une solution particulière, sur I, de l'équation complète (E).*

Preuve. (idem preuve vue en sup pour les équations à coefficients constants).

Théorème 3.1.4. *(superposition)*

Soit une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 1 :

$$(E): \qquad x'' + b(t)\,x' + c(t)\,x = d_1(t) + d_2(t)$$

où a, b, c, d_1, d_2 sont des fonctions de la variable t, continues sur l'intervalle I, a ne s'annulant pas sur I.

Les solutions de (E), définies sur l'intervalle I, sont la somme

- *de l'ensemble des solutions, sur I, de l'équation homogène, (E_0) : $a(t)\,x'' + b(t)\,x' + c(t)\,x = 0$,*
- *d'une solution particulière, sur I, de l'équation (E_1) : $a(t)\,x'' + b(t)\,x' + c(t)\,x = d_1(t)$,*
- *d'une solution particulière, sur I, de l'équation (E_2) : $a(t)\,x'' + b(t)\,x' + c(t)\,x = d_2(t)$.*

Preuve. (idem preuve vue en sup pour les équations à coefficients constants).

3.2 Equations à coefficients constants : rappel succint de sup

Equations différentielles se mettant sous la forme $a\,y'' + b\,y' + c\,y = f(t)$ où

- a, b, c sont des nombres complexes, $a \neq 0$,
- f une somme de fonctions de type $t \longmapsto e^{\alpha\,t}\,P(t)$ où $\alpha \in \mathbb{C}$ et $P \in \mathbb{C}[X]$.

3.2.1 Solutions de l'équation homogène (sans second membre)

Voir programme de Sup ou programme de Spé (application de la diagonalisation des matrices).

Les solutions se déduisent des zéros (réels ou complexes) du polynôme caractéristique $a\,r^2 + b\,r + c$

- Avec deux zéros distincte réels (ou complexes) ...
  - $y'' + 5\,y' + 6\,y = 0$ a pour solution générale sur $\mathbb{R}$: $y = A\,e^{-2\,t} + B\,e^{-3\,t}$
  - $y'' + y' + y = 0$ a pour solution générale sur $\mathbb{R}$: $y = e^{-t/2}\left(A \sin \dfrac{\sqrt{3}\,t}{2} + B \cos \dfrac{\sqrt{3}\,t}{2}\right)$
    (ne pas rester abusivement avec des exponentielles complexes !)
- Avec une racine double (réelle) ...
  - $y'' + 6\,y' + 9\,y = 0$ a pour solution générale sur $\mathbb{R}$: $y = A\,e^{-3\,t} + B\,t\,e^{-3\,t} = e^{-3\,t}\big(A + B\,t\big)$

3.2.2 Solution particulière de l'équation avec second membre exponentielle polynôme

On se place éventuellement dans le domaine des exponentielles complexes.

Exemple 3.2.2.1. $y'' + 4\,y' + 4\,y = t\,e^{-2\,t}$

1. **Identification et existence de solution(s)**
2. Résolution de l'équation sans second membre ... $y = A\,e^{-2\,t} + B\,t\,e^{-2\,t}$
3. Recherche d'une solution particulière de l'équation complète sous la forme

$$y = (\,a\,t^3 + b\,t^2 + \underbrace{c\,t + d}_{\text{inutile !}}\,)\,e^{-2\,t}$$

Remarque. -2 étant solution double de l'équation caractéristique, il faut "pomper" deux fois.

4. Conclusion ...

Exemple 3.2.2.2. $y'' + 4\,y' + 4\,y = t \qquad (= e^{0\,t}\,t)$

0 n'étant pas solution de l'équation caractéristique, il ne faut pas "pomper" et on cherche une solution particulière sous la forme $y = u\,t + v \qquad (= e^{0\,t}\big(u\,t + v\big))$

Exemple 3.2.2.3. $y'' + 4\,y' + 4\,y = t\,\sin t$

- On peut passer temporairement dans le domaine complexe : $t\,\sin t = \Im\left(t\,e^{i\,t}\right)$ ...
- On peut chercher une solution particulière sour la forme

$$y = \underbrace{(a\,t + b)\,\cos t}_{\text{ne pas oublier cette partie}} + (c\,t + d)\,\sin t$$

Remarque. i n'étant pas solution de l'équation caractéristique, il ne faut pas "pomper".

Exemple 3.2.2.4. $y'' + 4\,y' + 4\,y = t + t\,\sin t$

Comme on a déjà résolu, de façons séparées l'équation avec le second membre t et avec le second membre $t\,\sin t$, on peut appliquer le théorème de superposition.

3.2.3 Equation avec second membre autre ...

Exemple 3.2.3.1. $y'' + y = \tan^2 x$ (grand classique ...)

Cette équation, à coefficients constants, ne rentre pas dans le cadre du programme de Sup (voir une méthode de résolution ci-dessous).

Dans la suite, les équations différentielles linéaires ne sont plus systématiquement à coefficients constants ou à second membre simple !

3.3 Prolongement, raccordement (exemples)

Exemple 3.3.0.2. Soit (E) : $\left(-3\,t^3-5\,t^2-2\,t\right)x''+\left(4\,t+2\right)x'+\left(6\,t+2\right)x=6\,t^2+6\,t+2$

- (E) est du d'ordre 2, linéaire, avec second membre, à coefficients non constants.
- Le théorème de Cauchy affirme l'existence de solutions sur l'un ou l'autre des intervalles $I_1=\left]-\infty,-1\right[$ ou $I_2=\left]-1,\dfrac{-2}{3}\right[$ ou $I_3=\left]\dfrac{-2}{3},0\right[$ ou $I_4=\left]0,+\infty\right[$.
- Sur un (quelconque) des intervalles I_k, la solution générale est $x_k : t\longmapsto A_k\,t^2+\dfrac{B_k}{t+1}+t$
- En prenant les limites à gauche ou à droite des dérivées à l'ordre 0, 1 et 2, on constate que
  - Ces solutions se prolongent et se raccordent (en prenant des constantes identiques) en une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sans aucun problème en $\dfrac{-2}{3}$ et en 0
  - On a un prolongement en -1 (et un raccordement) de classe $\mathcal{C}^2$ que si $B_1=B_2=0$.
    La solution générale de (E), sur $]-\infty,+\infty[$ est $t:\longmapsto A\,t^2+t$ (A constante arbitraire).

Exemple 3.3.0.3. Soit l'équation différentielle linéaire d'ordre 2, (E) : $2\,t\,x''+x'-2\,x=0$

Bien qu'à priori, d'après le théorème de Cauchy, on ne puisse assurer l'existence de solutions que sur $]0,+\infty[$ ou (exclusivement) sur $]-\infty,0[$, la résolution de cette équation se fait en cherchant

- une solution particulière sous forme de série entière (voir ultérieurement) au voisinage de 0,
- puis une deuxième solution, par la méthode de variation de la constante (voir ultérieurement)

Après ces quelques calculs ... on constate que

- Sur $]0,+\infty[$, (E) a pour solution générale $x_1 : t\longmapsto A_1\,\sinh\left(2\sqrt{t}\right)+B_1\,\cosh\left(2\sqrt{t}\right)$.
  Ces solutions n'admettent de prolongement de classe $\mathcal{C}^2$ en 0 que si $A_1=0$.

  $$\boxed{\text{Les prolongements de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur } [0,+\infty[\text{ sont de la forme } f_1 : t\longmapsto B_1\,\cosh\left(2\sqrt{t}\right)}$$

- Sur $]-\infty,0[$, (E) a pour solution générale $x_2 : t\longmapsto A_2\,\sin\left(2\sqrt{-t}\right)+B_2\,\cos\left(2\sqrt{-t}\right)$.
  Ces solutions n'admettent de prolongement de classe $\mathcal{C}^2$ en 0 que si $A_2=0$.

  $$\boxed{\text{Les prolongements de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur }]-\infty,0] \text{ sont de la forme } f_2 : t\longmapsto B_2\,\cos\left(2\sqrt{-t}\right)}$$

On peut ensuite essayer de recoller, en 0, les solutions f_1 et f_2 :

- $f_1(t)=B_1+2\,B_1\,t+\dfrac{2\,B_1}{3}\,t^2+o(t^2)$ (développement limité à droite en 0, à l'ordre 2)
- $f_2(t)=B_2+2\,B_2\,t+\dfrac{2\,B_2}{3}\,t^2+o(t^2)$ (développement limité à gauche en 0, à l'ordre 2)

On ne peut recoller en une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ au voisinage de 0 que si $B_1=B_2$!

La solution générale de (E), linéaire du second ordre, sur tout $]-\infty,+\infty[$ est :

$$x : t\longmapsto\begin{cases}B\,\cos\left(2\sqrt{-t}\right) & \text{pour } t\leqslant 0\\ B\,\cosh\left(2\sqrt{t}\right) & \text{pour } t\geqslant 0\end{cases}\qquad \text{où } B \text{ est une constante arbitraire}$$

Il s'agit d'un espace vectoriel, qui n'est que de dimension 1 !

3.4 Résolution de l'équation homogène

Remarque. **Avis aux ploucs !** La notion de polynôme caractéristique et d'équation caractéristique n'a de sens que dans le cas des équations à coefficients constants !

Il n'y a pas de méthode générale qui permette la résolution systématique des équations différentielles du second ordre à coefficients non constants. Pour espérer résoudre complètement une telle équation, il faut disposer au minimum d'une solution particulière connue :

- connue à l'avance
- que l'on peut calculer en supposant qu'elle a une forme simple : $\begin{cases}\text{polynomiale} & \text{(si cela existe)}\\ \text{somme d'une série entière} & \text{(si cela existe)}\\ \text{autre} \dots & \end{cases}$

Sinon, il faudra utiliser des méthodes de calcul approché ....

3.4.1 Variation de la constante, à partir d'une droite de solutions connue

Lorsque l'équation homogène (E_0) satisfait aux hypothèses du théorème de Cauchy sur un intervalle I, la solution générale de (E_0), sur I, est un plan vectoriel de base (x_1, x_2).
Si on ne connaît que x_1 (par exemple), on connaît une droite vectorielle de solutions : c'est la droite des $\lambda\, x_1$ avec λ constante. La fonction inconnue x_2 n'étant pas de la forme $\lambda\, x_1$ avec λ constante, on a

$\boxed{x_2 = \lambda\, x_1 \text{ avec } \lambda \textbf{ non constante} \quad (\lambda \text{ est une fonction de } t)}$. C'est sous cette forme que l'on cherche x_2.

Réalisation du calcul de manière formelle (cela évite les erreurs)

Soit h $(= x_1)$ une solution particulière sur l'intervalle I, non nulle et connue, de l'équation homogène :

$$(E_0) : \qquad a(t)\, x'' + b(t)\, x' + c(t)\, x = 0$$

a, b, c étant des fonctions de la variable t, continues sur l'intervalle I, a ne s'annulant pas sur I.

On cherche une autre solution de (E_0) sur I, indépendante de h, sous la forme

$x = \lambda\, h$ avec λ fonction de t. **("méthode de variation de la constante")**

On a alors $\begin{cases} x(t) = \lambda(t)\, h(t) \\ x'(t) = \lambda'(t)\, h(t) + \lambda(t)\, h'(t) \\ x''(t) = \lambda''(t)\, h(t) + 2\,\lambda'(t)\, h'(t) + \lambda(t)\, h''(t) \end{cases}$, ce que l'on reporte dans (E_0) :

$$a(t)\left[\lambda''(t)\, h(t) + 2\,\lambda'(t)\, h'(t) + \lambda(t)\, h''(t)\right] + b(t)\left[\lambda'(t)\, h(t) + \lambda(t)\, h'(t)\right] + c(t)\left[\lambda(t)\, h(t)\right] = 0$$

$$\lambda''(t)\left[a(t)\, h(t)\right] + \lambda'(t)\left[2\, a(t)\, h'(t) + b(t)\, h(t)\right] + \lambda(t)\underbrace{\left[a(t)\, h''(t) + b(t)\, h'(t) + c(t)\, h(t)\right]}_{nul} = 0$$

On obtient une équation différentielle linéaire de fonction inconnue λ', du premier ordre, homogène :

$$\left[a(t)\, h(t)\right]\lambda''(t) + \left[2\, a(t)\, h'(t) + b(t)\, h(t)\right]\lambda'(t) = 0$$

En appliquant ce résultat à un cas particulier, on en déduit $\lambda'(t)$ puis $\lambda(t)$ puis $x_2(t) = \lambda(t)\, h(t)$.
Il ne reste plus qu'à conclure ... **attention, il n'y aura que deux (vraies) constantes**.

Exemple 3.4.1.1. Soit l'équation différentielle :

$$\left[-t^3 \sin t - 2\,t^2 \cos t\right] x'' + \left[t^3 \cos t - 2\,t^2 \sin t - 2\,t \cos t\right] x' + \left[-t^2 \cos t + 2\,t \sin t + 2 \cos t\right] x = 0$$

1. Préliminaires : reconnaissance, existence de solutions (intervalle(s) de résolution)
2. On constate que $h : t \longmapsto t$ est solution (évidente), sur $\mathbb{R}$.
3. On cherche une deuxième solution x_2 par la méthode de variation de la constante :
   (a) Calculs $\boxed{\textbf{A mener de manière uniquement formelle sur les noms } a,\ b,\ c,\ h}$
   (b) Expression concrète finale de la dérivée de la (fausse) "constante" λ'
   (c) Intégration, expression de $\lambda(t)$, solution $x_2 = \ldots = \dfrac{\cos t}{t}$, par exemple.
   (d) Conclusion générale, sur $]0, +\infty[$ ou sur $]-\infty, 0[$ ...
   (e) Etude d'un prolongement-raccordement en 0 ...

Exemple 3.4.1.2. $(1+t)\, x'' - 3\, x' + (2-t)\, x = 0$ (coefficients polynomiaux) : $x_1 : t \longmapsto e^t$ est solution sur $\mathbb{R}$. Par variation de la constante, on trouve $x_2 : t \longmapsto e^{-t}\, P(t)$ avec P polynôme ... à finir.

Exemple 3.4.1.3. $y'' + 4\, y' + 4\, y = 0$ (coefficients constants)

1. Equation différentielle d'ordre 2, linéaire, à coefficient constants, homogène.
2. -2 est racine (double) du polynôme caractéristique et $x_1 : t \longmapsto e^{-2\,t}$ est solution.
   Pour l'instant, on n'a identifié qu'une droite de solutions : $x = \lambda\, x_1$ (λ constante quelconque)
3. En recherchant une seconde solution (x_2), par la méthode de variation de la constante, on trouve $\lambda(t) = 1 \times t + 0 = t$ (par exemple) d'où $x_2(t) = t\, x_1(t)$
4. Conclusion : la solution générale (définie sur $\mathbb{R}$) est $x : t \longmapsto A\, e^{-2\,t} + B\, t\, e^{-2\,t}$

3.5 Recherche d'une solution sous forme de série entière ou polynomiale

Pour une équation différentielle linéaire d'ordre 2 (et même d'ordre 1),

- homogène
- ou non homogène, quand le second membre s'y prête,

on peut espérer qu'il existe une solution particulière non nulle qui soit développable en série entière de la variable, autour de 0.

Remarque. Si les coefficients de la série entière deviennent nuls à partir d'un certain rang, on obtient une solution polynomiale.

Exemple 3.5.0.4. Soit l'équation différentielle :

$$(E): \left(2t^5-4t^4+4t^3-2t^2-t\right)x''+\left(-4t^5+4t^4-4t^3+4t^2-2\right)x'+\left(12t^4-24t^3+20t^2-8t+4\right)x=0$$

1. Equation différentielle du second ordre, linéaire sans second membre et à coefficients polynômiaux.
2. Normalement il faudrait chercher les zéros du polynôme $a(t)$ (coefficient de x'') pour détecter les intervalles sur lesquels on peut appliquer le théorème de Cauchy ...(on remarque cependant que ce coefficient s'annule en 0).
3. **Mon petit doigt (qui est futé) me dit qu'il y a une solution qui est un polynôme** mais ce petit doigt n'est pas si futé que cela puisqu'il est incapable de me dire le degré du polynôme !

   (a) **Recherche du degré n d'un polynôme solution :**
   Ce polynôme peut être pris sous la forme $P = t^n + \ldots = t^n + Q$ avec Q de degré au plus $n-1$.
   (le coefficient dominant peut être pris égal à 1 puisque l'on est dans un espace vectoriel de solutions, et cela simplifiera et réduira les calculs !).

   En reportant $P = t^n + Q$ dans (E), et après simplifications (ça se fait à la main parait-il, merci Maple), on obtient ...un truc un peu compliqué ! Il faut trier :
   Compte tenu du degré de Q, le terme dominant de $a(t)\,P''(t) + b(t)\,P'(t) + c(t)\,P(t)$ est $(-4n+12)\,t^{n+4}$ et comme on doit avoir $a(t)\,P'' + b(t)\,P' + c(t)\,P = 0$, on en déduit que $n = 3$.

   Remarque. A la main (et avec mon petit doigt), le polynôme Q ne comptant pas dans le calcul du degré de $a(t)\,P''(t)+b(t)\,P'(t)+c(t)\,P(t)$, on pouvait chercher le degré de P en prenant Q nul (uniquement pour ce calcul !).

   (b) **Recherche du polynôme par identification :** On pose $P = t^3 + u\,t^2 + v\,t + w$.
   En reportant cette expression dans (E), on en déduit des relations (linéaires) entre u, v et w (expression de la nullité des coefficients de $a(t)\,P''(t) + b(t)\,P'(t) + c(t)\,P(t)$) :

   $$4w-2v=0\ ;\ -4v+20w-12=0\ ;\ 8u-24w+16v-8=0\ ;\ -16+8v-12u=0$$
   $$12w-20v+28+4u=0\ ;\ 4u=0\ ;\ -8w+4v-6u=0$$

   Ce système (linéaire) se résout facilement et on trouve $P = t^3 + 2t + 1$ comme solution de (E)

4. Recherche d'une seconde solution (variation de la constante) ... **A faire en calcul littéral !**
5. Conclusion ...(solution complète, sur un intervalle à préciser).

Exemple 3.5.0.5. Soit l'équation différentielle $(E):\ 2\,t\,x'' + x' - 2\,x = 0$

1. Equation différentielle du second ordre, linéaire sans second membre et à coefficients polynômiaux.
2. Le théorème de Cauchy assure l'existence de solutions sur $]-\infty, 0[$ ou sur $]0, +\infty[$
3. Si on cherche une solution polynomiale $P = \lambda\,t^n + Q$, on aboutit à

   $$2\lambda\,t\,n\,(n-1)\,t^{n-2} + \lambda\,n\,t^{n-1} + \lambda\,t^n + H(t) = 0 \text{ avec } H \text{ polynôme de degré} < n.$$

   On a donc $\lambda = 0$ et on a trouvé la fonction nulle comme solution particulière ! (applaudissements).

4. En fait, si on cherche une solution sous forme de série entière, on trouve comme solution sur tout $\mathbb{R}$:

   $$x_1 : t \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{2n}}{(2n)!}\,t^n \quad ; \ R = +\infty$$

Exemple 3.5.0.6. Soit l'équation différentielle : (E) : $\quad x\,y'' + 2\,y' + x\,y = 0$

1. Equation différentielle du second ordre, linéaire sans second membre et à coefficients polynômiaux.
2. Le théorème de Cauchy n'affirme l'existence de solutions que sur $]-\infty, 0[$ ou sur $]0, +\infty[$.
3. **Mon petit doigt (futé) me dit qu'il y a une solution développable en série entière** (donc définie au voisinage de 0, ce qui serait mieux que la conclusion du théorème de Cauchy !).
   On cherche les coefficients de la série entière d'une telle solution, en procédant par identification :

$$y = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\,x^n \qquad (\text{avec } R > 0)\ ; \quad y' = \sum_{n=1}^{+\infty} n\,a_n\,x^{n-1}\ ; \quad y'' = \sum_{n=2}^{+\infty} n\,(n-1)\,a_n\,x^{n-2}$$

Le report dans (E) donne : $\quad 0 = \sum_{n=2}^{+\infty} n\,(n-1)\,a_n\,x^{n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} 2\,n\,a_n\,x^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\,x^{n+1}$

(a) **On commence par harmoniser les exposants** :

$$0 = \underbrace{\sum_{n=2}^{+\infty} n\,(n-1)\,a_n\,x^{n-1}}_{\text{on pose } p=n-1} + \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} 2\,n\,a_n\,x^{n-1}}_{\text{on pose } p=n-1} + \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\,x^{n+1}}_{\text{on pose } p=n+1} \quad \text{ce qui donne :}$$

$$0 = \sum_{p=1}^{+\infty} (p+1)\,p\,a_{p+1}\,x^p + \sum_{p=0}^{+\infty} 2\,(p+1)\,a_{p+1}\,x^p + \sum_{p=1}^{+\infty} a_{p-1}\,x^p$$

(b) **On regroupe ensuite les termes généraux**, avec des exceptions pour les premiers termes :

$$\begin{aligned} 0 &= 2\,a_1 + \sum_{p=1}^{+\infty}\Big[(p+1)\,p\,a_{p+1} + 2\,(p+1)\,a_{p+1} + a_{p-1}\Big]\,x^p \\ &= 2\,a_1 + \sum_{p=1}^{+\infty}\Big[(p+1)\,(p+2)\,a_{p+1} + a_{p-1}\Big]\,x^p \end{aligned}$$

On obtient donc une récurrence linéaire simple, avec des indices allant de deux en deux $\begin{cases} a_0 = \cdots & (\text{par exemple } a_0 = 1) \\ a_1 = 0 & \\ \text{pour } p > 0, & a_{p+1} = -\dfrac{a_{p-1}}{(p+2)\,(p+1)} \end{cases}$

- Si p est impair ($p = 2\,n+1$), $\quad a_{2\,n+1} = 0$
- Si p est pair ($p = 2\,n$), $\quad a_{2\,n} = \dfrac{-1}{(2n+1)(2n)} \times \dfrac{-1}{(2n-1)(2n-2)} \times \cdots$
  $\cdots \times \dfrac{-1}{(2k+1)(2k)} \times \cdots \times \dfrac{-1}{(5)(4)} \times \dfrac{-1}{(3)(2)}\,a_0$

Je propose $a_{2n} = \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!}$

Ce que l'on vérifie à l'aide d'une petite récurence (au cas où je me serai trompé en comptant les -1)

(c) **On vérifie que la série obtenue a un rayon de convergence non nul**
On trouve ici $R = +\infty$ et on peut conclure :

(E) a pour solution, sur $]-\infty, +\infty[$, $\quad y = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!}\,x^{2n} = \cdots = \dfrac{\sin x}{x}$

Ici, on la chance de pouvoir identifier la somme de la série !

4. Recherche d'une seconde solution (variation de la constante) ... **A faire en calcul littéral !**
5. Conclusion ... (solution complète, sur un intervalle à préciser).

Exemples 3.5.0.1. Exemples divers

- $2\,x\,y'' + y' - 2\,y = 0$ (calculs et identification, un peu complexe, sans plus)
- $y'' + x^2\,y' + x\,y = 0$ (calculs et identification, simple)
- ...

Exemple 3.5.0.7. DSE d'une fonction à l'aide d'une équation différentielle (exemple classique).

Soit la fonction f définie sur $]-1,1[$ par $f(t) = \arcsin^2(t)$

1. **Observation** :
   - f est définie, $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0, ce qui est nécessaire mais non suffisant pour assurer l'existence d'un développement en série entière. autour de 0
   - $t \longmapsto \arcsin t$ est développable en série entière autour de 0, avec un rayon de convergence égal à 1 et on peut espérer que le carré soit également développable en série entière autour de 0, avec un rayon de convergence non nul ...
2. **Idée pratique pouvant donner un résultat** :

   utiliser une équation différentielle simple, linéaire, à coefficients polynomiaux, vérifiée par f.
3. **Mise en œuvre** :

   (a) $f'(t) = 2\dfrac{\arcsin t}{\sqrt{1-t^2}}$ ... C'est une équation différentielle ($1\,x' + 0\,x = s(t)$, sans x) mais le second membre n'est pas une fonction simple et, si on continue à dériver ainsi, on gardera un second membre compliqué.

   (b) On essayant d'éviter les produits ou quotients dans les coefficients, on écrit l'expression obtenue sous la forme $\sqrt{1-t^2}\; f'(t) = 2\arcsin t$ et, en dérivant encore une fois, on fera disparaître $\arcsin t$:

   (c) On a donc $\sqrt{1-t^2}\, f''(t) - \dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}}\, f'(t) = \dfrac{2}{\sqrt{1-t^2}}$, que l'on peut arranger :

   $$(1-t^2)\, f''(t) - t\, f'(t) = 2$$

   équation différentielle du premier ordre en f', linéaire, à coefficients polynomiaux.

   > On cherche, sous forme de série entière autour de 0, la solution (connue) de l'équation différentielle
   > $$(E) : \quad (1-t^2)\, x' - t\, x = 2, \qquad \text{satisfaisant à } x(0) = 0$$

   (d) Résolution par identification $x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, t^n \quad R > 0, \ldots$

   On en déduit une relation de récurrence d'ordre 1 entre les coefficients (de deux en deux) , ce qui permettra de calculer, de façons séparées, les termes d'indice pair et les termes d'indice impair.
   Après simulation, proposition de formule et vérification de cettre proposition par récurrence, on obtient une expression générale des coefficients :

   $$\begin{cases} a_0 = 0 & (f'(0) = 0) \\ a_1 = 2 & (f''(0) = 2) \end{cases} \qquad \text{et, pour } p > 0 \text{ ,} \begin{cases} a_{2\,p} = 0 \\ a_{2\,p+1} = \cdots \end{cases}$$

   Remarque. f est paire, f' est impaire et le résultat est cohérent.
   On vérifie ensuite que le rayon de convergence de la série obtenue est non nul ($R = 1$ ici).

   (e) D'après le théorème de Cauchy relatif à l'existence et à l'unicité de solutions le résultat obtenu est le DSE de f'.
   Par, intégration, sachant que $f(0) = 0$, on obtient le DSE de $f = \arcsin^2$.

Exemple 3.5.0.8. Fonctions définies comme solutions d'une équation différentielles.

L'équation de Bessel, $(E) : \quad t^2\, x'' + t\, x' + (t^2 - n)\, x = 0 \quad$ (avec $n \in \mathbb{N}$), a pour solution sur $\mathbb{R}$:

$$J_n(t) = \left(\frac{t}{2}\right)^n \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{p!\,(n+p)!} \left(\frac{t}{2}\right)^p \quad ; R = +\infty \qquad \text{(fonction de Bessel)}$$

3.6 Solution particulière de l'équation complète : "variation des constantes"

Recherche d'une solution particulière de l'équation avec second membre $(E) : a(t)\,x'' + b(t)\,x' + c(t)\,x = d(t)$, à partir d'une base de solutions de l'équation sans second membre (homogène) associée (E_0).

Soient x_1 et x_2 deux solutions indépendantes de l'équation sans second membre (E_0).

x_1 et x_2 étant exprimées sans constantes, ce qui évitera ensuite les doubles constantes abusives !

- La solution générale de l'équation sans second membre est de la forme

$$x = \lambda\,x_1 + \mu\,x_2 \qquad \text{(avec } \lambda \text{ et } \mu \text{ constantes arbitraires)}$$

- On cherche une solution particulière de l'équation (E) complète sous la forme :

$$x = \lambda\,x_1 + \mu\,x_2 \qquad \begin{cases} \text{en considérant maintenant } \lambda \text{ et } \mu \text{ comme des fonctions de } t \\ \text{(on dit que l'on fait "varier" les constantes \ldots)} \end{cases}$$

En reportant dans l'équation complète, et en utilisant le fait que x_1 et x_2 sont des solutions de l'équation sans second membre, on espère en déduire $\lambda(t)$ et $\mu(t)$ ...

Hélàs, Hélàs, Hélàs (trois fois), les calculs sont inexploitables !

Idée ! : comme on ne cherche pas toutes les fonctions λ et μ (il y en a une infinité !) mais seulement un exemple de fonctions λ et μ, on peut essayer d'imposer une condition supplémentaire choisie de façon à avoir un calcul exploitable :

On cherche des fonctions λ et μ telles que

$$\begin{cases} (1) \quad x : t \longmapsto \lambda(t)\,x_1(t) + \mu(t)\,x_2(t) & \text{soit solution de l'équation complète} \\ (2) \quad \boxed{\lambda'(t)\,x_1(t) + \mu'(t)\,x_2(t) = 0} & \text{(condition supplémentaire)} \end{cases}$$

Cette condition (2) fera disparaître $\lambda''(t)$ et $\mu''(t)$ lors du report dans l'équation complète !

- En reportant (1) dans l'équation complète, **avec des calculs uniquement formels ! n'utilisant x_1 et x_2 et les coefficients que par leur nom**

après simplifications $\left(\begin{array}{l} x_1 \text{ et } x_2 \text{ solution de } (E_0) \\ \text{et relation (2)} \end{array} \right)$ on en déduit : $\lambda'(t)\,x_1'(t) + \mu'(t)\,x_2'(t) = \dfrac{d(t)}{a(t)}$

$\lambda'(t)$ et $\mu'(t)$ sont solutions du système de Cramer :

$$\begin{cases} \lambda'(t)\,x_1'(t) + \mu'(t)\,x_2'(t) = \dfrac{d(t)}{a(t)} \\ \lambda'(t)\,x_1(t) + \mu'(t)\,x_2(t) = 0 \qquad \text{ne pas oublier cette équation !} \end{cases}$$

Les formules de Cramer donnent $\lambda'(t)$ et $\mu'(t)$, expression formelle de $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_1'(t)$, $x_2'(t)$ et des coefficients $d(t)$ et $a(t)$.
Pour l'équation à traiter, on en déduit l'expression de $\lambda'(t)$ et $\mu'(t)$ en fonction de t, et, par intégration (si on sait le faire), un exemple de couple de fonctions (λ, μ).

- **Conclusion** : (sur un intervalle I à préciser ...), la solution générale de l'équation complète est :

$$x : t \longmapsto A\,x_1(t) + B\,x_2(t) + \lambda(t)\,x_1(t) + \mu(t)\,x_2(t) \qquad \text{où} \begin{cases} A \text{ et } B \text{ sont des (vraies) constantes} \\ \lambda \text{ et } \mu \text{ sont des fonctions de } t \end{cases}$$

Exemple 3.6.0.9. $y'' + y = \tan^2 x$ (grand classique, assez simple ...)

4 Equations différentielles non linéaires

4.1 Equations différentielles du premier ordre, à variables séparables

C'est le cas le plus simple à résoudre ..., à condition de savoir calculer des primitives.
Les équations différentielles du premier ordre à variables séparables sont les équations différentielles de la variable x et de fonction inconnue $y : x \longmapsto y(x)$ qui peuvent se mettre sous la forme :

$$\boxed{f(y)\, y' = g(x)}$$

ide, $f\big(y(x)\big)\; y'(x) = g(x)$, pour x appartenant à un intervalle I

1. On suppose que $\begin{cases} g \text{ est continue sur } I \\ f \text{ est continue sur un intervalle } J \text{ et } \underline{\text{ne s'annule pas}} \text{ sur } J \end{cases}$

   Il existe un théorème (de Cauchy) , qui affirme que, dans ces conditions,

   pour tout couple $(x_0, y_0) \in I \times J$, il existe un sous-intervalle I_m de I, contenant x_0, et une fonction y de classe $\mathcal{C}^1$ sur I_m telle que y soit l'unique solution de (E) sur I_m satisfaisant à la condition initiale $y(x_0) = y_0$.

   Remarque. Ce théorème affirme en outre que I_m est maximal.

2. Si F est une primitive de f sur l'intervalle J et G une primitive de g sur l'intervalle I, les fonctions solutions vérifient
$$F\big(y(x)\big) = G(x) + K$$
   où K est une constante définie d'après les conditions initiales.

3. On en déduit alors que le graphe d'une solution (associée à la constante K) est une partie de la courbe plane d'équation cartésienne : $F\big(y\big) = G(x) + K$

   Les courbes intégrales sont les courbes planes, d'équations cartésienne (implicites)
$$F\big(y\big) = G(x) + K$$
   (dans une partie de $\mathbb{R}^2$ à préciser)

4. Si, dans l'équation $F\big(y(x)\big) = G(x) + K$, on sait exprimer $y(x)$ en fonction de x :
$$y(x) = F^{-1}\big(G(x) + K\big) \qquad \text{(lorsque } F \text{ admet une réciproque \ldots connue \ldots)}$$
   on aura les solutions sous forme explicite (sur un intervalle à préciser).

Exemple 4.1.0.10. $y' = e^{x+y}$

1. Existence de solutions : Application du théorème de Cauchy ...
2. Identification : il faut s'apercevoir que l'équation est à variables séparables
3. Solutions ...

Exemple 4.1.0.11. $(1 - x^2)\, y' - \sqrt{1 - y^2} = 0$

1. Existence de solutions : Application du théorème de Cauchy ...
2. Identification ...
3. Solutions ...
   On obtient une relation entre x et y, sous la forme : $\arcsin\big(y(x)\big) = \dfrac{1}{2} \ln \left|\dfrac{1+x}{1-x}\right| + K$,
   y ne pouvant être définie que sur un intervalle tel que $\ln \left|\dfrac{1+x}{1-x}\right| + K \in]-1, +1[$.

4.2 Equations "homogènes" en x et y

Les équations différentielles du premier ordre homogènes en x et y (ne pas confondre avec "homogènes") sont les équations différentielles qui peuvent se mettre sous la forme :

$$\boxed{(1) : \qquad y' = f\left(\frac{y}{x}\right)} \qquad \text{avec } y' = \frac{d\,y}{d\,x}$$

ide, $y'(x) = f\left(\dfrac{y(x)}{x}\right)$, pour x appartenant à un intervalle ne contenant pas 0

1. On suppose que f est une fonction continue (sur un certain intervalle ...)
   et que $(x, y) \longrightarrow f\left(\dfrac{y}{x}\right)$ est continue sur un pavé $I \times J$ de $\mathbb{R}^2$.

   Il existe un théorème (de Cauchy), qui affirme que, dans ces conditions, pour toute condition initiale $(x_0, y_0) \in I \times J$, il existe une solution (unique) satisfaisant à cette condition initiale.

2. On pose $t = \dfrac{y}{x}$ et on considère x et y comme des fonctions (simultanées) de t
   On a donc :

   - $y = t\,x$ avec x et y fonctions simultanées de la variable t
   - $\boxed{dy = t\,dx + x\,dt}$
   - $y' = \dfrac{d\,y}{d\,x}$ **Attention !** y est $\begin{cases} \text{fonction de } x \text{ d'une part} \\ \text{fonction de } t \text{ d'autre part} \end{cases}$

   On évitera ensuite l'utilisation de la notation "prime" qui pourrait être ambiguë ...

3. En remplaçant dans l'équation initiale, on obtient $\dfrac{t\,dx + x\,dt}{dx} = f(t)$ puis $\big(f(t) - t\big)\,dx = x\,dt$ (équation à variables séparables, en la variable t et de fonction inconnue x), ce qui donne, lorsque l'on essaie de séparer les "variables" :

$$\boxed{\text{Si } f(t) - t \neq 0, \qquad \frac{1}{x}\frac{dx}{dt} = \frac{1}{f(t) - t} \qquad (2)}$$

4. Conclusion :
   - Si $t_1, t_2, \cdots t_p$ sont les solutions de $f(t) - t = 0$, on obtient comme solutions de (1) les droites d'équations $y = t_i\,x$.
   - A partir de (2) : on obtient $x = \lambda\,h(t)$ où λ est une constante arbitraire non nulle.
     Les courbes intégrales sont les (portions de) courbes d'équations paramétriques :

$$\begin{cases} x = \lambda\,h(t) \\ \\ y = \lambda\,t\,h(t) \end{cases} \qquad t \in \cdots$$

   Remarque. les droites obtenues à partir de $f(t) - t = 0$ seront les asymptotes des courbes paramétrées obtenues à partir de (2) ...

Exemple 4.2.0.12. $x\,y\,y' + y^2 - x^2 - x\,y = 0$

1. Existence de solutions
   (a) Mise sous forme de Cauchy c'est grace à cette écriture que l'on identifiera le type
   (b) Recherche de conditions d'application du théorème de Cauchy ...
2. Calculs ... **uniquement avec t, dx et dy**
3. Représentation graphique de quelques courbes intégrales ...

4.3 Equations lacunaires (exemples)

4.3.1 Equations lacunaires en la variable

Equations de la forme $G(y,y')=0$ où y est fonction de x.

On essaie de paramétrer la courbe d'équation $G(X,Y)=0\ldots$

Exemple 4.3.1.1. $y'^2-y^2\left(1+y'^2\right)=0$ où y est fonction de la variable x.

On pose : $\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=\tan t\\ y=\sin t\end{cases}$ ... (ce n'est pas immédiat !)

On évitera ensuite l'utilisation de la notation "prime" qui pourrait être ambiguë ...

1. Existence de solutions ...
2. Calculs ... on exprime x en fonction de t :
   $\dfrac{dy}{dt}\,\dfrac{dt}{dx}=\tan t$ d'où $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{\cos^2 t}{\sin t}$ d'où $x=\cdots+K$
3. Conclusion : solutions sous forme paramétrée : $\begin{cases}x=H(t)\\ y=\sin t\end{cases}$ (calculs précédents)

4.3.2 Equations lacunaires en y

Equations de la forme $G(x,y')=0$ où y est fonction de la variable x.

On essaie de paramétrer la courbe d'équation $G(X,Y)=0\ldots$

Exemple 4.3.2.1. $y'^2-x^2\left(1+y'^2\right)=0$ où y est fonction de la variable x.

On pose : $\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=\tan t\\ x=\sin t\end{cases}$ ... (ce n'est pas immédiat !)

On évitera ensuite l'utilisation de la notation "prime" qui pourrait être ambiguë ...

1. Existence de solutions ...
2. Calculs ... on exprime y en fonction de t :
   $\dfrac{dy}{dt}\,\dfrac{dt}{dx}=\tan t$ d'où $\dfrac{dy}{dt}=\cdots$ et $y=\cdots+K$
3. Conclusion : solutions sous forme paramétrée : $\begin{cases}x=\sin t\\ y=H(t)\end{cases}$ (calculs précédents).

4.4 Autres exemples

4.4.1 Changement de fonction inconnue (exemples)

Exemple 4.4.1.1. $x\,y\,y'+y^2-x^2+1=0$ où y est fonction de la variable x.

On peut poser $z=y^2$

Exemple 4.4.1.2. $y'=\left(\dfrac{x-y-1}{2x-2y+1}\right)$ où y est fonction de la variable x.

Le changement de fonction inconnue : $z(x)=x-y(x)$, conduit à une équation à variables séparables.
On obtient des courbes intégrales ayant des équations de la forme $x-2\,y-3\,\ln\left(|x-y+2|\right)=cte$

4.4.2 Echange des rôles de la variable et de la fonction (exemples)

Exemple 4.4.2.1. $(y^3+x)\,y'+1=0$ où y est fonction de la variable x.

Cette équation s'écrit aussi, en termes d'expression différentielle : $(y^3+x)\,dy+dx=0$.
A partir de cette expression, on regarde x comme fonction de y et y comme la variable ! On a donc :

$$\frac{dx}{dy}+x=-y^3 \quad \text{, équation linéaire du premier ordre} \begin{cases}\text{de variable } y\\ \text{de fonction inconnue } x \text{ (de la variable } y)\end{cases}$$

La solution de cette dernière équation est : $x=K\,e^{-y}+6-6\,y+3\,y^2-y^3$.
Ce qui donne (à K fixé) une équation cartésienne et la possibilité de représenter cette solution.

4.4.3 Paramètrage (exemples)

Exemple 4.4.3.1. Soit une équation différentielle (E), qui s'écrit en termes d'expression différentielle :

$$(E): \quad (x^2+y^2)\,(x\,dx+y\,dy)-(x^2+y^2+x)\,(x\,dy-y\,dx)=0$$

après avoir posé $y'=\dfrac{dy}{dx}$ lorsque y est fonction de la variable x.

En passant en coordonnées polaires : $\begin{cases} x=r(\theta)\,\cos\theta \\ y=r(\theta)\,\sin\theta \end{cases}$, avec r fonction de θ, on obtient :

$$dr=(r+\cos\theta)\,d\theta \qquad \text{(équation différentielle linéaire du premier ordre),}$$

Cette dernière équation a pour solutions : $r=K\,e^{\theta}+\dfrac{\sin\theta-\cos\theta}{2}$.

Le solutions de (E) sont les courbes paramétrées : $\begin{cases} x=\left(K\,e^{\theta}+\dfrac{\sin\theta-\cos\theta}{2}\right)\cos\theta \\ y=\left(K\,e^{\theta}+\dfrac{\sin\theta-\cos\theta}{2}\right)\sin\theta \end{cases}$

d'équation cartésienne $x^2+y^2=K\,\sqrt{x^2+y^2}\,e^{\arctan(y/x)}+\dfrac{y-x}{2}$

Exemple 4.4.3.2. $y'=\left(\dfrac{x-y-1}{x+2y+1}\right)^2$ où y est fonction de la variable x.

On pose $u=x-y-1$ et $v=x+2\,y+1$ et on exprime x et y en fonction de u et v ...

Remarque. On raisonne alors en termes d'expression différentielle ($y'=\dfrac{dy}{dx}$) ...

On obtient $\dfrac{dv}{du}=\dfrac{v^2+2\,u^2}{v^2-u^2}$, (équation homogène en u et v), ce qui conduit à une solution paramétrée $\begin{cases} u=u(t) \\ v=v(t) \quad (=t\,u(t)) \end{cases}$ puis à une expression paramétrée de x et y.

4.5 Système différentiel autonome d'ordre 1

4.5.1 Exemple de système différentiel d'ordre 1, non linéaire

Les gentils petits lapins sont les proies des vilains renards, leurs prédateurs !

- Mais quand il n'y a pas assez de lapins, les renards périclitent et leur population décroît, ce qui permet au lapins de gambader et de se reproduire tranquillement, ce qui augmente leur population.
- Mais quand la population des lapins a augmenté, les renards mangent mieux et prolifèrent, ce qui finit par faire décroître la population des lapins.
- Mais quand il n'y a plus assez de lapins ...
- etc ...

L'effectif x des lapins et l'effectif y des renards sont des fonction du temps t.
Voltera a imaginé un modèle (simplifié), sous la forme d'un système différentiel, qui décrit l'évolution conjointe de l'effectif de chaque population (lapins et renards) en fonction du temps : $\begin{cases} x' = a\,x - b\,x\,y \\ y' = -c\,y + d\,x\,y \end{cases}$

où a, b, c, d sont des constantes d'environnement : $\begin{cases} \text{qualité du romarin et de la ciboulette} \\ \text{configuration du terrain} \\ \text{activité de la société de chasse locale} \\ \textit{etc}\ldots \end{cases}$

Ce système n'est pas linéaire ! Sa résolution se fait par approximation numérique et, avec de bons coefficients, on observe graphiquement une évolution bouclée.

4.5.2 Généralités

Définition 4.5.1.

Soient deux fonctions ϕ et ψ, de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$, et à valeurs réelles.
On appelle système autonome de la variable t, d'inconnues les fonctions x et y de la variable réelle t, le système de deux équations différentielles conjointes :

$$(S) : \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \varphi(x, y) \\ \dfrac{dy}{dt} = \psi(x, y) \end{cases}$$

Les courbes d'équations paramétriques $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ pour $t \in I$ et qui satisfont au système (S),

$$\text{ide, telles que } \forall\, t \in I,\ \big(x(t), y(t)\big) \in \Omega\ ,\ \frac{dx}{dt}(t) = \varphi(x(t), y(t))\ ,\ \frac{dy}{dt}(t) = \psi(x(t), y(t),$$

sont les trajectoires du système (S).

Théorème 4.5.1. *(de Cauchy, d'existence de solutions)*

Soit un système autonome de deux équations différentielles du premier ordre :

$$(S) : \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \varphi(x, y) \\ \dfrac{dy}{dt} = \psi(x, y) \end{cases}$$

où les fonctions φ et ψ dont de classe $\mathcal{C}^1$ sur un l'ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$.

Pour tout triplet (t_0, x_0, y_0) telle que $t_0 \in \mathbb{R}$, $(x_0, y_0) \in \Omega$,

il existe un intervalle I, maximal unique, contenant t_0 et deux fonctions uniques x et y de I vers $\mathbb{R}$ telles que x et y sont des solutions de (S) sur I satisfaisant aux conditions initiales $x(t_0) = x_0$ et $y(t_0) = y_0$.

Preuve. admis.

5 Résolution numérique (approchée)

5.1 Algorithme d'Euler, pour les équations scalaires du premier ordre

On ne traite que les équations qui se mettent sous forme de Cauchy : (E) : $y' = F(x, y)$ où
- F est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$
- y est une fonction de la variable x.

Principe :
A partir d'une condition initiale $y(x_0) = y_0$ telle que $(x_0, y_0) \in \Omega$, la formule de l'équation différentielle $(y' = F(x, y))$ permet de calculer la dérivée de la solution en x_0.
- On approche, sur un petit intervalle d'amplitude h, la courbe solution par sa tangente en x_0, ce qui permet de calculer une valeur approchée y_1 de la solution en $x_1 = x_0 + h$.
- Il n'y a plus qu'à recommencer à partir de la nouvelle condition initiale : $y(x_1) = y_1$ ...

Raisonnablement, plus on s'éloigne de l'abscisse initiale, plus on accumule les erreurs et ceci ne peut donner des résultats acceptables que
- lorsque le pas h est "petit"
- et qu'à condition que l'on ne s'éloigne "pas trop" de l'abscisse initiale x_0.

La qualité de l'approximation obtenue dépends aussi de l'équation différentielle : certaines (sait-on lesquelles ?) se prêtent bien à ce genre d'approximation, d'autres (lesquelles ?) s'y prêtent mal ....

Algorithme :

```
F := (x,y) -> ...
x := x_0; y := y_0;  # conditions initiales
h := 0.00001;        # est ce petit ? assez petit ? trop petit ?
n := 1000;           # on va jusqu'à la distance 1000 * h de x_0. Est ce trop loin ?
for k = 1 to n
do
      y' := F(x,y);  # avant
      x := x + h;
      y := y + h * y'
od;
```

Pour $i = 0 \dots n-1$, $\begin{cases} x_{i+1} = x_i + h \\ y_{i+1} = y_i + h\,F(x_i, y_i) \end{cases}$

On peut utiliser les résultats successifs (conditions initiales successives) (x_k, y_k) pour construire une représentation graphique approchée de la solution satisfaisant à la condition initiale $y(x_0) = y_0$.

On "testera" la méthode sur des équations à solution connue.

5.2 Algorithme d'Euler, pour les systèmes différentiels autonomes d'ordre 1

Exemple : résolution approchée du système de Volterra (les gentils petits lapins et les glos méchants renards)

$$\begin{cases} x' = a\,x - b\,x\,y \\ y' = -c\,y + d\,x\,y \end{cases} \quad \text{où} \quad \begin{array}{l} x \text{ et } y \text{ sont fonction de } t \\ a,\ b,\ c,\ d \text{ sont des coefficients} \end{array}$$

Ce système s'écrit sous forme vectorielle : $Y' = F(t, Y)$ avec $Y = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et on applique le même algorithme que précédemment, simplement adapté à la forme vectorielle :

$$\begin{cases} t_{i+1} = t_i + h \\ Y_{i+1} = Y_i + h\,F(t_i, Y_i) \quad \begin{cases} x_{i+1} = x_i + h\left(a\,x_i - b\,x_i\,y_i\right) \\ y_{i+1} = y_i + h\left(-c\,y_i + d\,x_i\,y_i\right) \end{cases} \end{cases}$$

A partir d'une valeur initiale (x_0, y_0) en t_0, on obtient une liste de points (x_i, y_i) qui sont les sommets d'une ligne polygonale d'approximation du graphe de la solution en fonction d'une discrétisation (t_i) du temps t.

Le système $\begin{cases} x' = 8\,x - 0.5\,x\,y \\ y' = -10\,y + 0.4\,x\,y \end{cases}$ avec $\begin{cases} x(0) = 40 \\ y(0) = 6 \end{cases}$ et un pas $h = 0.0001$
devrait donner une bonne idée de l'évolution bouclée de la solution sur une période de temps allant de 0 à, par exemple, $100 = 1000000\,h$ unités de temps.
On observera cependant une légère dérive, due au cumul des erreurs d'approximation.

5.3 Algorithme d'Euler, pour les équations différentielles d'ordre 2

Soit une équation différentielle d'ordre 2, de fonction inconnue y de la variable x, se mettant sous forme de Cauchy :

$$y'' = \varphi(x, y, y')$$

avec φ fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^3$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Si on pose $\begin{cases} u = y' \\ v = y \end{cases}$, l'équation se transforme en le système différentiel : $\begin{cases} u' = \varphi(x, v, u) \\ v' = u \end{cases}$.

Ce système, noté sous forme vectorielle $Y' = F(x, Y)$ avec $Y = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad \left(= \begin{pmatrix} y' \\ y \end{pmatrix} \right)$, est résolu comme précédemment :

$$\begin{cases} x_{i+1} = x_i + h \\ Y_{i+1} = Y_i + h\,F(x_i, Y_i) \end{cases} \quad \begin{cases} u_{i+1} = u_i + h\,\varphi(x_i, v_i, u_i) & (= y'(x_{i+1})) \\ v_{i+1} = v_i + h\,u_i & (= y(x_{i+1})) \end{cases}$$

A partir d'une condition initiale $(x_0\,,\, y_0 = v_0\,,\, y'_0 = u_0) \in \Omega$, on obtient une liste de points $(x_i,\, y_i = v_i)$ qui sont les sommets d'une ligne polygonale d'approximation du graphe de la solution y satisfaisant aux conditions initiales $y(x_0) = x_0$ et $y'(x_0) = y'_0$.

Les remarques sur la qualité de l'approximation obtenue sont les mêmes que celles faites précédemment.

On "testera" la méthode sur des équations à solution connue.

5.4 Autres algorithmes d'approximation

Il y en a beaucoup d'autres, plus complexes et plus théoriques que l'algorithme élémentaire d'Euler.

$< \quad \mathcal{FIN} \quad >$