Fonctions de $\mathbb{R}^p$ vers $\mathbb{R}^n$, de classe $\mathcal{C}^k$

Antoine MOTEAU antoine.moteau@wanadoo.fr

Table des matières

Fonctions de $\mathbb{R}^p$ vers $\mathbb{R}^n$, de classe $\mathcal{C}^k$.

1 Dérivées partielles à l'ordre k

Soit f une fonction, définie sur l'ouvert Ω de $\mathbb{R}^p$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, admettant des (fonctions) dérivées partielles, définies sur Ω, par rapport à toutes les variables $x_1, x_2, \cdots, x_p$.
Les fonctions dérivées partielles de f, qui sont des fonctions de $\mathbb{R}^p$ vers $\mathbb{R}^n$, définies sur l'ouvert Ω, peuvent admettre à leur tour des (fonctions) dérivées partielles qui, elles mêmes, ...

Si elle existe, la fonction dérivée partielle de la fonction $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$, par rapport à la j-ème variable x_j, s'écrit

$$\frac{\partial\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\right)}{\partial x_j} \qquad \text{(notation première "pure")}$$

et si on continue à dériver par rapport à x_k ... etc ... cette notation devient vite très lourde.

1.1 Réduction des échafaudages

En utilisant les opérateurs de dérivation partielle $\dfrac{\partial}{\partial x_i}$ et la composition,

$$\frac{\partial\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial y}(f)\right) = \left(\frac{\partial}{\partial y}\circ\frac{\partial}{\partial x}\right)(f) \quad \text{se note} \quad \frac{\partial\circ\partial}{\partial y\,\partial x}(f) \quad \text{ou encore} \quad \frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x}(f) = \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}$$

Remarque. Attention, l'écriture se pratique de droite à gauche et respecte l'ordre de composition.

Cette notation, non ambiguë, permet d'écrire un grand nombre de dérivations successives, sans échafaudages, comme par exemple : $\underleftarrow{\dfrac{\partial^6 f}{\partial x\,\partial y\,\partial y\,\partial y\,\partial x\,\partial x}}$ | la "flèche", qui ne fait pas partie de la notation, rappelle aux étourdi(e)s l'ordre des dérivations successives.

1.2 Raccourci de notation

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial x}$ peut se noter sans ambiguïté $\dfrac{\partial^2 f}{(\partial x)^2}$, ce qui s'écrit (un peu abusivement) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$.
On pourra ainsi envisager d'écrire, sans aucune ambiguïté, $\underleftarrow{\dfrac{\partial^6 f}{\partial x\,\partial y^3\,\partial x^2}}$ à la place de $\underleftarrow{\dfrac{\partial^6 f}{\partial x\,\partial y\,\partial y\,\partial y\,\partial x\,\partial x}}$

Remarque. Il n'est pas possible (sauf situation particulière) de permuter les "δx" et "δy"

$$\underleftarrow{\frac{\partial^6 f}{\partial x\,\partial y^3\,\partial x^2}} \neq \underleftarrow{\frac{\partial^6 f}{\partial y^3\,\partial x^3}} \qquad \text{(en général)}$$

1.3 Formule de Liebnitz

Théorème 1.3.1. *Formule de Liebnitz*

Soient f et g deux fonctions, de $\mathbb{R}^p$ vers $\mathbb{R}^n$, admettant au point a des dérivées partielles à l'ordre r, selon la variable x.

$$\frac{\partial^r < f \mid g >}{\partial x^r}(a) = \sum_{k=0}^{r} C_r^k < \frac{\partial^k f}{\partial x^k} \,\Big|\, \frac{\partial^{r-k} g}{\partial x^{r-k}} > (a)$$

$$\frac{\partial^r\,(f \wedge g)}{\partial x^r}(a) = \sum_{k=0}^{r} C_r^k \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(a) \wedge \frac{\partial^{r-k} g}{\partial x^{r-k}}(a) \qquad (\text{si } n = 3)$$

Preuve. Démonstration par récurrence sur r ...(idem binôme de Newton)

2 Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

Pour les fonctions de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}^p$, on a déjà défini la notion de fonction de classe $\mathcal{C}^0$, puis celle de fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert non vide de $\mathbb{R}^p$.

Définition 2.0.1.

Soit f, une fonction de $\mathbb{R}^p$ vers $\mathbb{R}^n$, définie sur un ouvert non vide Ω de $\mathbb{R}^p$.

- Pour $k \in \mathbb{N},\ k > 1$, f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur Ω si
  1. f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω
  2. les fonctions dérivées partielles de f sont de classe $\mathcal{C}^{k-1}$ sur Ω .

- Si, pour tout $k \in \mathbb{N}$, f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur Ω, f est dite de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur Ω.

(définition récursive)

Exemple 2.0.0.1. Catégories élémentaires de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$

- Les fonctions constantes,
- Les fonction coordonnées élémentaires de $\mathbb{R}^p$ vers $\mathbb{R}$: $x_j : (x_1, x_2, \cdots, x_p) \longmapsto x_j$,
- La fonction de conjugaison dans $\mathbb{C} \equiv \mathbb{R}^2$: $x + i\,y \longmapsto x - i\,y$,
- les fonctions polynomiales de p variables,
- les fonctions rationnelles de p variables, sur leur ensemble de définition.
- ...

On note

- $\mathcal{C}^k\Big(\Omega\ ,\ \mathbb{R}^n\Big)$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\Omega \subset \mathbb{R}^p$, à valeurs dans $\mathbb{R}^n$
- $\mathcal{C}^\infty\Big(\Omega\ ,\ \mathbb{R}^n\Big)$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\Omega \subset \mathbb{R}^p$, à valeurs dans $\mathbb{R}^n$

Théorème 2.0.2. *(espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$)*

$\mathcal{C}^k\Big(\Omega\ ,\ R^n\Big), \mathcal{C}^\infty\Big(\Omega\ ,\ R^n\Big)$, muni des opérations usuelles $+$ et $\cdot$, sont des espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$.

Preuve.

On montre simplement, par récurrence sur l'entier $k \in \mathbb{N}$, que $\left(\mathcal{C}^{k+1}\Big(\Omega\ ,\ R^n\Big), +, \cdot\right)$ est un sous-espace vectoriel de $\left(\mathcal{C}^{k}\Big(\Omega\ ,\ R^n\Big), +, \cdot\right)$.

On en déduit aisément que $\left(\mathcal{C}^{\infty}\Big(\Omega\ ,\ R^n\Big), +, \cdot\right)$ est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel également.

Théorème 2.0.3. *(composition)*

Si g est une fonction de $\mathbb{R}^p$ vers $\mathbb{R}^n$, de classe $\mathcal{C}^k$ sur un ouvert Ω, et f une fonction de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}^q$, de classe $\mathcal{C}^k$ sur un ouvert U tel que $g(\Omega) \subset U$, (avec $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$),
alors $f \circ g$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur Ω.

Preuve.

De même que précédemment ...

Théorème 2.0.4.

Soient f et g des fonctions de $\mathbb{R}^p$ vers $\mathbb{R}^n$,
h une fonction de $\mathbb{R}^p$ vers $\mathbb{R}$,
et λ un réel,

Si f, g et h sont toutes de classe $\mathcal{C}^k$ sur l'ouvert Ω (avec $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$),
alors

$$\left.\begin{array}{lll} f+g \quad ; & \lambda \cdot f \quad ; & h \cdot f \\ \\ <f \mid g> \quad ; & \|f\|_2^2 & \\ \\ f \wedge g & (\text{si } n=3) & \end{array}\right\} \text{ sont de classe } \mathcal{C}^k \text{ sur } \Omega$$

et ... $\|f\|_2$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\Omega \setminus f^{-1}\left(\{\overrightarrow{0}\}\right)$

Preuve.

De même que précédemment ...

Théorème 2.0.5.

Soient n fonctions, $f_1, f_2, \cdots, f_n$, de $\mathbb{R}^p$ vers $\mathbb{R}^n$, toutes de classe $\mathcal{C}^k$ sur l'ouvert Ω ($k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$),

$\det_{\mathcal{C}}\left(f_1, f_2, \cdots f_n\right)$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur Ω ($\mathcal{C}$ étant une base quelconque de $\mathbb{R}^n$)

Preuve.

De même que précédemment ...

3 LE THEOREME DE SCHWARZ

Théorème 3.0.6.

> Soit f une fonction de $\mathbb{R}^p$ vers $\mathbb{R}^n$, admettant des dérivées partielles, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j\,\partial x_i}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_j}$, à l'ordre 2 au voisinage du point a_0, par rapport aux variables x_i et x_j.
>
> **Si** ces (fonctions) dérivées partielles sont **continues en** a_0, alors elles prennent la même valeur en a_0 (ide : $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j\,\partial x_i}(a_0) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_j}(a_0)$)

Preuve. admis ...

- Ainsi, sous réserve d'existence et de continuité à un ordre suffisant, sur tout un ouvert Ω, on aurait, par exemple : $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}$; $\dfrac{\partial^6 f}{\partial x\,\partial y\,\partial y\,\partial y\,\partial x\,\partial x} = \dfrac{\partial^6 f}{\partial x\,\partial y^3\,\partial x^2} = \dfrac{\partial^6 f}{\partial y^3\,\partial x^3}$

- **Contre pied du théorème** : **Si** $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_j}(a_0) \neq \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j\,\partial x_i}(a_0)$ **alors ...**

Exemple 3.0.0.2. Un cas où $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_j}(a_0) \neq \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j\,\partial x_i}(a_0)$:

Soit f, de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$, définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $\begin{cases} f(x,y) = y^2 \sin \dfrac{x}{y} & \text{lorsque } y \neq 0 \\ f(x,0) = 0 \end{cases}$

f est, naturellement, $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$. En revenant à la définition (par taux d'accroissements partiels), on montre l'existence (et on les calcule) des nombres dérivés partiels d'ordre 1 et d'ordre 2 croisés en $(0,0)$:

1. - $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \forall\, k \neq 0,\ \dfrac{f(x,0+k)-f(x,0)}{k-0} = k \sin\dfrac{x}{k} \xrightarrow[k\to 0]{} 0$

     donc $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,0)$ existe et vaut 0. D'autre part, pour $(x,y) \neq (0,0)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \cdots$.
   - $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \forall\, h \neq 0,\ \dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial y}(x+h,0) - \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,0)}{h-0} = 0 \xrightarrow[h\to 0]{} 0$

     donc $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(x,0)$ existe et vaut 0

2. - $\begin{cases} \forall\, y \in \mathbb{R}^*,\ \forall\, h \neq 0,\ \dfrac{f(0+h,y)-f(0,y)}{h-0} = \dfrac{y^2}{h}\sin\dfrac{h}{y} \underset{h\to 0}{\sim} y \xrightarrow[h\to 0]{} y \\ \text{pour } y = 0,\ \forall\, h \neq 0,\ \dfrac{f(0+h,y)-f(0,y)}{h-0} = 0 \xrightarrow[h\to 0]{} 0 = y \end{cases}$

     donc $\forall\, y \in \mathbb{R},\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,y)$ existe et vaut y. D'autre part, pour $(x,y) \neq (0,0)$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \cdots$.
   - $\forall\, y \in \mathbb{R},\ \forall\, k \neq 0,\ \dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,y+k) - \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,y)}{k-0} = \dfrac{y+k-y}{k} \xrightarrow[k\to 0]{} 1$

     donc $\forall\, y \in \mathbb{R},\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(0,y)$ existe et vaut 1

On a donc : $\boxed{\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(0,0) = 0 \quad \neq \quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(0,0) = 1}$. Les fonctions dérivées partielles croisées d'ordre 2 de f, sont définies sur tout $\mathbb{R}^2$ mais ne sont pas (toutes les deux) continues en $(0,0)$.

Exemple 3.0.0.3. Peut-on avoir l'égalité $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i\, \partial x_j}(a_0) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j\, \partial x_i}(a_0)$, sans avoir la continuité en a_0 ?

Soit la fonction $\begin{cases} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & \dfrac{x^2\, y^2}{x^2+y^2} \end{cases}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$

- f est, naturellement, $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$
- f est continue en $(0,0)$: $|f(r\cos t, r\sin t) - f(0,0)| \leqslant r^2 \xrightarrow[r\to 0]{} 0$

1. On prouve l'existence et l'égalité de $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}(0,0)$ et de $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}(0,0)$:
   (a) - Nombre dérivé partiel d'ordre 1, par rapport à x, en $(0,0)$:
         $\forall\, h \neq 0,\ \dfrac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h-0} = 0 \xrightarrow[h\to 0]{} 0$ donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$
       - Expression dérivée partielle d'ordre 1, par rapport à x, en $(x,y) \neq (0,0)$:
         Pour $(x,y) \neq (0,0)$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \cdots$
       - Nombre dérivé partiel d'ordre 2, par rapport à x puis y, en $(0,0)$:
         $\forall\, k \neq 0,\ \dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0+k) - \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{k-0} = 0 \xrightarrow[k\to 0]{} 0$ donc $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}(0,0) = 0$

   (b) Par raison de symétrie, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}(0,0) = 0$
2. On prouve que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}$ n'est pas continue en $(0,0)$:
   - Pour $(x,y) \neq (0,0)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}(x,y) = \dfrac{8x^3\, y^3}{(x^2+y^2)^3}$
   - $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}(x,x) = 1 \xrightarrow[x\to 0]{} 1 \neq \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}(0,0) = 0$

4 Formule de Taylor à l'ordre 2, pour une fonction réelle de 2 variables

Théorème 4.0.7.

Soit f, une fonction de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert Ω.

En tout point (x,y) de Ω, pour (h,k) tels que le segment $[(x,y),(x+h,y+k)]$ soit inclus dans Ω,

$$\begin{aligned} f(x+h,y+k) = f(x,y) + h\,\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + k\,\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) & \\ + \frac{1}{2}\left[h^2\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + 2\,h\,k\,\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(x,y) + k^2\,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)\right] & \\ + o\left(h^2+k^2\right) & \end{aligned}$$

Preuve. admis

Voir l'application à l'étude des extrémums locaux.

5 Fonctions vectorielles d'une seule variable, de classe $\mathcal{C}^k$

$\mathbb{R}^n$ est muni de sa base canonique $\left(\overrightarrow{w_1},\overrightarrow{w_2},\cdots,\overrightarrow{w_n}\right)$ et, pour une fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}^n$, on peut (si nécessaire) détailler l'écriture de $f(t)$, en utilisant les fonctions coordonnées de f :

$$f(t)=\sum_{i=1}^{n} f_i(t)\,\overrightarrow{w_i}$$

Les notions relatives aux structures algébriques, aux structures métriques et topologique, sont identiques, que les fonctions soient à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{R}^n$, ce qui fait que, souvent, on utilise les mêmes écritures, dans l'un ou l'autre cas, sans détailler selon les fonctions coordonnées, quite à surmonter la fonction d'une flèche dans le cas où $n>1$.

Ce qui est <u>relatif à la structure d'ordre</u> de $\mathbb{R}$ (pour l'espace d'arrivée), n'est pas généralisable, du cas des fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, au cas des fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}^n$ lorsque $n>1$.

5.1 Limite, continuité, dérivation

On reprend sans problèmes les notions vues dans le cas général des fonctions de $\mathbb{R}^p$ vers $\mathbb{R}^n$.
De plus, comme l'espace de départ est $\mathbb{R}$, on peut considérer la notion de
- (vecteur) limite à gauche ou à droite en un point de $\mathbb{R}$ ou même en l'infini,
- (vecteur) dérivé à gauche ou à droite en un point de $\mathbb{R}$.

5.2 Extension de la notion d'intégrale

Pour une fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}^n$, **<u>continue par morceaux</u>** sur l'intervalle fermé borné $[a,b]$,

$$\int_a^b f(t)\,dt=\int_a^b\left(\sum_{i=1}^{n} f_i(t)\,\overrightarrow{w_i}\right)dt=\sum_{i=1}^{n}\left(\int_a^b f_i(t)\,dt\right)\overrightarrow{w_i}$$

5.3 Rappel de quelques propriétés usuelles

- Linéarité de l'intégration.
- Relation de Chasles.
- Primitives (vectorielles).
- Intégration par parties (lorsque les fonctions sont de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux) :
  - **<u>pour un produit scalaire</u>** :

$$\int_a^b <f(t)\mid g'(t)>\,dt=\Big[<f(t)\mid g(t)>\Big]_a^b-\int_a^b <f'(t)\mid g(t)>\,dt$$

Remarque. Dans le cas de fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, le PS canonique est le produit normal :

$$<f(t)\mid g(t)>=f(t)\,g(t)$$

  - **<u>pour le produit vectoriel (fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}^3$)</u>** :

$$\int_a^b f(t)\wedge g'(t)\,dt=\Big[f(t)\wedge g(t)\Big]_a^b-\int_a^b f'(t)\wedge g(t)\,dt$$

- Changement de variable :

Si Φ est un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^1$ de $[\alpha, \beta]$ vers $[a, b]$, alors

$$\int_a^b f(t)\ dt = \int_{\Phi^{-1}(a)}^{\Phi^{-1}(b)} f\Big(\Phi(u)\Big)\ \frac{d\,\Phi}{du}(u)\ du$$

- Majoration (inégalité de la moyenne)

Pour $a < b$,

$$\left\|\int_a^b f(t)\ dt\right\|_2 \leqslant \int_a^b \|f(t)\|_2\ dt \leqslant (b-a) \sup_{t\in[a,b]} \|f(t)\|_2$$

admis.

- Inégalité de Cauchy-Schwarz (cas particulier des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C} \equiv \mathbb{R}^2$)

Pour $a < b$,

$$\left|\int_a^b \overline{f(t)}\ g(t)\ dt\right| \leqslant \int_a^b |f(t)\ g(t)|\ dt \leqslant \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2\ dt}\ \sqrt{\int_a^b |g(t)|^2\ dt}$$

admis (dans le cas réel, voir le cours : préhilbertiens réels).

5.4 Inégalité des accroissements finis

Théorème 5.4.1. *Inégalité des accroissements finis*

Pour une fonction f, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$,

$$\|f(b) - f(a)\|_2 \leqslant (b-a) \sup_{t\in[a,b]} \|f'(t)\|_2$$

Preuve. Admis.

Théorème 5.4.2. *Formule des accroissements finis :* **fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$, uniquement !**

Pour une fonction f, définie sur $[a, b]$, **à valeurs dans** $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^0$ sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$,

$$\exists\ c \in]a, b[\ :\ f(b) - f(a) = (b-a)\ f'(c)$$

Preuve. Voir cours de Sup.

Application de la formule des accroissements finis :

Soit la fonction $\begin{cases} f: & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} \equiv \mathbb{R}^2 \\ & t \longmapsto e^{i\,t} \end{cases}$, $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $[a, b]$, avec $a = 0$ et $b = \pi$.
Supposons l'existence de $c \in]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = (b-a)\ f'(c)$. Alors,

$$e^{i\,\pi} - e^0 = (\pi - 0)\ i\ e^{i\,c} \quad \text{c'est à dire,} \quad -1-1 = i\,\pi\ e^{i\,c}$$

En prenant les modules, on en déduit que $\boxed{2 = \pi}$.

5.5 Formules de Taylor à l'ordre k

Pour une fonction vectorielle f, d'une seule variable réelle t, à valeur dans $\mathbb{R}^n$, avec $f(t)=\sum\limits_{i=1}^{n} f_i(t)\ \overrightarrow{w_i}$,

$$\frac{d^k f}{dt^k}(t)=\sum_{i=1}^{n}\frac{d^k f_i}{dt^k}(t)\ \overrightarrow{w_i} \quad \text{s'écrira aussi} \quad f^{(k)}(t)=\sum_{i=1}^{n} f_i{}^{(k)}(t)\ \overrightarrow{w_i}$$

5.5.1 Formule de Taylor avec reste intégral, à l'ordre k

Théorème 5.5.1.

Soit f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}^n$, de classe $\mathcal{C}^{k+1}$ sur l'intervalle I (d'intérieur non vide).

$$\forall\, t\in I,\ \forall\, h\in\mathbb{R},\ t+h\in I \Rightarrow$$
$$f(t+h)=f(t)+h\ f'(t)+\frac{h^2}{2}\ f''(t)+\cdots+\frac{h^k}{k!}\ f^{(k)}(t)$$
$$+\frac{h^{k+1}}{k!}\int_0^1 (1-u)^k\ f^{(k+1)}(t+u\,h)\ du$$

Preuve. Par récurrence sur k ... VOIR COURS DE SUP (intégration par parties).

Autre écriture de la formule de Taylor avec reste intégral, à l'ordre k :

avec $[a,b]\subset I$, $\quad (\ a=t\ ,\ b=t+h\ ,\ v=a+u(b-a) \ )$

$$f(b)=f(a)+(b-a)\ f'(a)+\frac{(b-a)^2}{2}\ f''(a)+\cdots+\frac{(b-a)^k}{k!}\ f^{(k)}(a)$$
$$+\frac{1}{k!}\int_a^b (b-v)^k\ f^{(k+1)}(v)\ dv$$

5.5.2 Inégalité de Taylor à l'ordre k

Théorème 5.5.2.

Soit f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}^p$, de classe $\mathcal{C}^{k+1}$ sur l'intervalle I (d'intérieur non vide).

$$\forall\, t\in I,\ \forall\, h\in\mathbb{R},\ t+h\in I \Rightarrow$$
$$\left\|f(t+h)-\sum_{i=0}^{k}\frac{h^i}{i!}\ f^{(i)}(t)\right\|_2 \leqslant \frac{h^{k+1}}{(k+1)!}\ \sup_{u\in[0,1]}\left\|f^{(k+1)}(t+u\,h)\right\|_2$$

Preuve. Voir théorème de majoration énoncé précédemment.

5.5.3 Formule de Taylor Young, à l'ordre k

Théorème 5.5.3.

Soit f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}^n$, de classe $\mathcal{C}^k$ sur l'intervalle I (d'intérieur non vide).

$$\forall\, t\in I,\ \forall\, h\in\mathbb{R},\ t+h\in I \quad\Longrightarrow\quad f(t+h)=\sum_{i=0}^{k}\frac{h^i}{i!}\ f^{(i)}(t)\quad+\overrightarrow{o}\left(h^k\right)$$

Remarque. $\quad \dfrac{\left\|\overrightarrow{o}\left(h^k\right)\right\|_2}{h^k}=\overrightarrow{\varepsilon}\left(h^k\right)\xrightarrow[h\to 0]{} 0.$

6 Equations aux dérivées partielles à l'ordre 2. Exemples

6.1 Exemple 1.

Déterminer les fonctions de $\Omega = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, **de classe $\mathcal{C}^2$ sur** Ω, vérifiant l'équation :

$$(E): \quad x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\,x\,y\,\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

Indication : On pourra effectuer un changement de variables, en posant $u = x$ et $v = \dfrac{y}{x}$, en vue d'obtenir une équation plus simple selon les variables u et v.

En principe, on devrait noter :

$$\begin{cases} f(x,y) \text{ le résultat du calcul à partir des variables } x \text{ et } y \\ \widetilde{f}(u,v) \text{ le résultat du calcul à partir des variables } u \text{ et } v \end{cases} \quad \left(\text{avec} \quad f(x,y) = \widetilde{f}\left(x, \frac{y}{x}\right)\right)$$

mais on fera les confusions usuelles : $f \equiv f(x,y) \equiv \widetilde{f}(u,v) \equiv \widetilde{f}$

Première étape : transformer les dérivées partielles de f, selon x et y, en expressions ne dépendant que des dérivées partielles de f selon u et v.

- Dérivation partielle à l'ordre 1.

Préalable : $(x,y) \longmapsto \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ a pour matrice jacobienne : $\begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} = 1 & \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{-y}{x^2} & \dfrac{\partial v}{\partial y} = \dfrac{1}{x} \end{pmatrix}$

Dans la suite, on gardera les coefficients comme expressions de x et y, ce qui simplifie systématiquement les calculs, sans chercher à exprimer x ou y en fonction de u et v.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial v}\frac{y}{x^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \times 0 + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{1}{x} = \frac{1}{x}\frac{\partial f}{\partial v} \end{aligned}$$

- Dérivation partielle à l'ordre 2.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}{\partial x} = \frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$$

mais il y a plus simple ici, en dérivant, par rapport à x, l'expression obtenue à l'ordre 1 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial v}\frac{y}{x^2}\right)}{\partial x} = \frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)}{\partial x} - \frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)}{\partial x}\frac{y}{x^2} - \frac{\partial f}{\partial v}\frac{-2y}{x^3} \\ &= \left[\frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right] - \left[\frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right]\frac{y}{x^2} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{2y}{x^3} \\ &= \left[\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v\,\partial u}\frac{-y}{x^2}\right] - \left[\frac{\partial^2 f}{\partial u\,\partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\frac{-y}{x^2}\right]\frac{y}{x^2} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{2y}{x^3} \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial v\,\partial u}\frac{y}{x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial u\,\partial v}\frac{y}{x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\frac{y^2}{x^4} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{2y}{x^3} \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - \frac{2y}{x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial v\,\partial u} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\frac{y^2}{x^4} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{2y}{x^3} \qquad \underline{\textbf{puisque } f \textbf{ est } \mathcal{C}^2} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}=\frac{\partial\left(\dfrac{\partial f}{\partial u}-\dfrac{\partial f}{\partial v}\,\dfrac{y}{x^2}\right)}{\partial y}=\frac{\partial\left(\dfrac{\partial f}{\partial u}\right)}{\partial y}-\frac{\partial\left(\dfrac{\partial f}{\partial v}\right)}{\partial y}\,\frac{y}{x^2}-\frac{\partial f}{\partial v}\,\frac{1}{x^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\qquad \underline{(f \text{ est } \mathcal{C}^2)}$$

$$=\left[\frac{\partial\left(\dfrac{\partial f}{\partial u}\right)}{\partial u}\,\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial\left(\dfrac{\partial f}{\partial u}\right)}{\partial v}\,\frac{\partial v}{\partial y}\right]-\left[\frac{\partial\left(\dfrac{\partial f}{\partial v}\right)}{\partial u}\,\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial\left(\dfrac{\partial f}{\partial v}\right)}{\partial v}\,\frac{\partial v}{\partial y}\right]\frac{y}{x^2}-\frac{\partial f}{\partial v}\,\frac{1}{x^2}$$

$$=\left[0+\frac{\partial^2 f}{\partial v\,\partial u}\,\frac{1}{x}\right]-\left[0+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\,\frac{1}{x}\right]\frac{y}{x^2}-\frac{\partial f}{\partial v}\,\frac{1}{x^2}=\frac{1}{x}\,\frac{\partial^2 f}{\partial v\,\partial u}-\frac{y}{x^3}\,\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}-\frac{1}{x^2}\,\frac{\partial f}{\partial v}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)}{\partial y}=\frac{1}{x}\,\frac{\partial\left(\dfrac{\partial f}{\partial v}\right)}{\partial y}=\frac{1}{x}\left[\frac{\partial\left(\dfrac{\partial f}{\partial v}\right)}{\partial u}\,\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial\left(\dfrac{\partial f}{\partial v}\right)}{\partial v}\,\frac{\partial v}{\partial y}\right]=\frac{1}{x^2}\,\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}$$

Deuxième étape : transformation de l'équation (E) (en x et y) en une équation équivalente (en u et v), dans le domaine considéré :

En reportant dans (E), après simplification, on obtient comme équation équivalente : $x^2\,\dfrac{\partial^2 \widetilde{f}}{\partial u^2}=0.$

> Si cela est nécessaire, on peut maintenant (et seulement maintenant) transformer les coefficients (restés en x et y) comme expressions de u et v.
> (pour cela, on chercherait à exprimer x et y en fonction de u et v).

Ici, ce n'est pas nécessaire : dans Ω, l'équation (E) est équivalente à $\dfrac{\partial^2 \widetilde{f}}{\partial u^2}=0$ et on en déduit :

1. $\dfrac{\partial \widetilde{f}}{\partial u}(u,v)=a(v)$ (constante par rapport à u, donc fonction uniquement de v)
2. puis $\widetilde{f}(u,v)=u\,a(v)+b(v)$ (intégration de la constante $a(v)$ par rapport à u)

Troisième étape : conclusion dans les termes du problème :

> Finalement, les fonctions cherchées, solutions de (E) dans Ω, sont de la forme :
>
> $$(x,y)\longmapsto f(x,y)=x\times a\left(\frac{y}{x}\right)+b\left(\frac{y}{x}\right)$$
>
> avec a et b fonctions, d'une seule variable , de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$

Remarque. Cela donne des solutions diverses, dans tout ou partie de Ω, ..., par exemple :

$(x,y)\longmapsto x\,\sin\dfrac{y}{x}+0$; $(x,y)\longmapsto x\,\ln\dfrac{y}{x}+\tan\dfrac{y}{x}$; $(x,y)\longmapsto 0+\arctan\dfrac{y}{x}$ etc ...

6.2 Exemple 2.

Déterminer les fonctions de $\Omega=\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}_+^*$ vers $\mathbb{R}$, **de classe $\mathcal{C}^2$ sur** Ω, vérifiant l'équation :

$$(E):\quad x^2\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-y^2\,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$$

Indication : On pourra effectuer le changement de variables défini par : $u=x\,y$ et $v=\dfrac{y}{x}$.

On doit arriver à $2\,u\,\dfrac{\partial^2 \widetilde{f}}{\partial u\,\partial v}-\dfrac{\partial \widetilde{f}}{\partial v}=0$, d'où $\dfrac{\partial \widetilde{f}}{\partial v}=a(v)\,\ln(\sqrt{u})$ puis $\widetilde{f}(u,v)=A(v)\,\ln(u)+b(u)$,
A (primitive de a) et b étant des fonctions d'une seule variable, de classe $\mathcal{C}^2$.
Ensuite, il faut conclure en termes de (x,y).

< $\mathcal{FIN}$ >