Révisions d'Algèbre (rappels cours Sup)

Antoine MOTEAU antoine.moteau@wanadoo.fr

.../revcours — Révision : 12 avril 2003

Table des matières

Révisions d'algèbre Sup. (rappels de cours)

Avertissement. Ceci ne constitue pas un cours mais un **catalogue de points importants**, de **repères**, destinés à faciliter vos révisions sur le programme de Sup.
Certaines notions ne sont qu'évoquées (définition vide) et **il faut vous référer à votre cours de Sup**.
Les points abordés ici, sont présentés dans un ordre plus ou moins logique . . .

1 Lois de composition sur un ensemble non vide

1.1 Loi de composition interne (l.c.i.) dans $\mathbb{E}$

Définition 1.1.1. Application, notée $*$ ici, de $\mathbb{E}\times\mathbb{E}$ dans $\mathbb{E}$:

$$\begin{aligned} *:\ & \mathbb{E}\times\mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E} \\ & (a,b) \longmapsto *(a,b) \quad \text{(que l'on écrit } a*b \text{ en notation algébrique)} \end{aligned}$$

1.1.1 Propriétés éventuelles d'une l.c.i. : (A, N, S, C)

A (Associativité) : $\forall a,b,c\in\mathbb{E},\ a*(b*c)=(a*b)*c$ ce que l'on peut alors écrire $a*b*c$

N (existence d'un élément Neutre, unique) :

$$\exists e\in\mathbb{E} :\ \forall a\in\mathbb{E},\ a*e=e*a=a \quad \begin{cases}\text{souvent noté } 0 \text{ pour } + \\ \text{souvent noté } 1 \text{ pour } \times\end{cases}$$

S (existence d'un Symétrique, unique) :

$$\forall x\in\mathbb{E},\ \exists x'\in\mathbb{E} :\ x*x'=x'*x=e \quad \begin{cases}\text{opposé pour } + \text{ et noté } -x \\ \text{inverse pour } \times \text{ et noté } x^{-1}\end{cases}$$

C (commutativité) : $\forall x,y\in\mathbb{E},\ x*y=y*x.$ Attention : $\begin{cases}-(a+b)=-b+-a \\ (a\times b)^{-1}=b^{-1}\times a^{-1}\end{cases}$

1.1.2 Propriétés conjointes de deux l.c.i. : Distributivété de l'une sur l'autre.

Définition 1.1.2. $*$ est distributive sur $+$ ssi

$$\forall x,y,z\in\mathbb{E},\ \begin{cases} x*(y+z)=(x*y)+(x*z) & \text{Distributivité à gauche de } * \text{ sur } + \\ (y+z)*x=(y*x)+(z*x) & \text{Distributivité à droite de } * \text{ sur } + \end{cases}$$

1.2 Loi de composition externe (l.c.e.) dans $\mathbb{E}$, à opérateurs dans $\mathbb{K}$

Définition 1.2.1. Application, notée $\cdot$ ici, de $\mathbb{K}\times\mathbb{E}$ dans $\mathbb{E}$:

$$\begin{aligned} \cdot:\ & \mathbb{K}\times\mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E} \\ & (\lambda,x) \longmapsto \cdot(\lambda,x) \quad \text{(écrit } \lambda\cdot x \text{ en notation algébrique)} \end{aligned}$$

2 Relations dans un ensemble $\mathbb{E}$.

2.1 Relations d'équivalence (RST).

Définition 2.1.1. Une relation $\mathcal{R}$ dans $\mathbb{E}$ est une relation d'équivalence ssi elle est

- **Reflexive :** $\forall x\in\mathbb{E},\ x\mathcal{R}x$
- **Symétrique :** $\forall x,y\in\mathbb{E},\ x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$
- **Transitive :** $\forall x,y,z\in\mathbb{E},\ (x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z] \Rightarrow x\mathcal{R}z$

Exemple : La relation d'égalité dans n'importe quel ensemble.
Exemple : La relation de congruence modulo n dans $\mathbb{Z}$: $\forall x,y\in\mathbb{Z},\ x\equiv y \mod n$ ssi $\exists k\in\mathbb{Z} :\ x-y=k\times n$

2.2 Relations d'ordre (RAT).

Définition 2.2.1. Une relation $\preccurlyeq$ dans $\mathbb{E}$ est une relation d'ordre ssi elle est

- **Reflexive :** $\forall x \in \mathbb{E},\ x \preccurlyeq x$
- **Anti-Symétrique :** $\forall x, y \in \mathbb{E},\ (x \preccurlyeq y \text{ et } y \preccurlyeq x) \Rightarrow x = y$
- **Transitive :** $\forall x, y, z \in \mathbb{E},\ (x \preccurlyeq y \text{ et } y \preccurlyeq z] \Rightarrow x \preccurlyeq z$

Exemple : La relation d'égalité dans n'importe quel ensemble est à la fois d'équivalence et d'ordre.
Exemple : La relation d'inclusion dans l'ensemble $\mathcal{P}(\mathbb{E})$ des parties de l'ensemble $\mathbb{E}$.

Définition 2.2.2. Relation d'ordre total sur $\mathbb{E}$: $\forall x, y \in \mathbb{E},\ (x \preccurlyeq y)$ ou $(y \preccurlyeq x)$

Définition 2.2.3. Relation d'ordre compatible avec les lois de composition internes ....

Exemple : Aucune relation d'ordre total dans $\mathbb{C}$ n'est compatible avec les opérations $(+, \times)$ de $\mathbb{C}$.

2.3 Applications d'un ensemble $\mathbb{E}$ vers un ensemble $\mathbb{F}$.

2.3.1 Application injective

Définition 2.3.1. f, application de $\mathbb{E}$ vers $\mathbb{F}$, est injective

ssi $\forall x, x' \in \mathbb{E},\ f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$
ssi $\forall x, x' \in \mathbb{E},\ x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$

2.3.2 Application surjective

Définition 2.3.2. f, application de $\mathbb{E}$ vers $\mathbb{F}$, est surjective ssi $\forall y \in \mathbb{F}, \exists x \in \mathbb{E} :\ y = f(x)$

2.3.3 Application bijective

2.3.4 Application réciproque d'une application bijective

2.3.5 Image et Image réciproque d'une partie

$$\forall A \subset \mathbb{E},\ f(A) = \{y \in F :\ \exists x \in A :\ y = f(x)\} = \{f(x) \,|\, x \in A\}$$
$$\forall B \subset \mathbb{F},\ f^{-1}(B) = \{x \in \mathbb{E} :\ f(x) \in B\}$$

Attention :
- f^{-1}, appliqué à une partie de $\mathbb{F}$ a toujours un sens
- f^{-1}, appliqué à un élément de $\mathbb{F}$ n'a de sens que si f est bijective

2.3.6 Composition d'applications

Exemple : Si $f\ (: \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{F})$ et $g\ (: \mathbb{F} \longrightarrow \mathbb{G})$ sont bijectives, alors $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

3 Structures

3.1 Groupe (group).

Définition 3.1.1. Ensemble non vide muni d'une loi de composition interne A N S (C)

3.1.1 Sous-groupe.

Définition 3.1.2.

Théorème 3.1.1. *(Caractérisation minimale des sous groupes)*
Soit $(\mathbb{G}, *)$ un groupe et $\mathbb{E}$ une partie de $\mathbb{G}$. $(\mathbb{E}, *)$ est un sous groupe de $(\mathbb{G}, *)$ ssi

- *$\mathbb{E}$ est non vide (par exemple $e \in \mathbb{E}$)*
- *$\mathbb{E}$ est stable par $*$: $(\forall u, v \in \mathbb{E},\ u * v \in \mathbb{E})$*
- *$\mathbb{E}$ est stable par symétrisation : $\forall u \in \mathbb{E},\ u^{-1} \in \mathbb{E}$*

3.1.2 Morphismes de groupes.

Définition 3.1.3. Application f, d'un groupe $(E, *)$ vers un groupe $(F, \bullet)$, telle que

$$\forall u, v \in \mathbb{E},\ f(u * v) = f(u) \bullet f(v)$$

Théorème 3.1.2. *Soit f un morphisme du groupe $(E, *)$ vers le groupe $(F, \bullet)$.*

- *l'image par f d'un sous groupe de $(E, *)$ est un sous groupe de $(F, \bullet)$.*
- *l'image réciproque par f d'un sous groupe de $(F, \bullet)$ est un sous groupe de $(E, *)$.*
- *le noyau de f ($\ker f$) est un sous-groupe de $(E, *)$*
- *f est injective ssi $\ker f$ est réduit à l'élément neutre de $\mathbb{E}$.*

3.1.3 Exemples de Non groupes, de groupes, de sous-groupes, de morphismes de groupes.

$(\mathbb{N}, +)$, $(\mathbb{N}, \times)$, $(\mathbb{Z}, \times)$ ne sont pas des groupes
$(\mathbb{Z}, +)$ est un groupe
Pour $n \in \mathbb{N}$, en notant $U_n = \{z \in \mathbb{C} :\ z^n = 1\}$, $(U_n, \times)$ est un groupe (sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$
$\mathcal{M}_{p\times q}(\mathbb{K})$ (avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$), muni de l'addition usuelle $+$, est un groupe commutatif et l'application "trace" est un morphisme de ce groupe vers le groupe $(\mathbb{K}, +)$.

$\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ (avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$), ensemble des matrices carrées inversibles pour la multiplication usuelle $\times$, muni de $\times$ est un groupe **non** commutatif et l'application déterminant est un morphisme de ce groupe vers le groupe $(\mathbb{K}^*, \times)$.
L'ensemble des matrices carrées triangulaires supérieures avec la loi ...
L'ensemble des matrices carrées diagonales avec la loi ...

3.2 Anneau (ring)

Définition 3.2.1. Ensemble $\mathcal{A}$ non vide, muni de deux lois de composition interne $+$ et $\times$ telles que

- Pour la loi $+$: $(\mathcal{A}, +)$ et un groupe commutatif
- Pour la loi $\times$:
  - $\times$ est Associative
  - $\times$ possède un élément neutre
- Pour les deux lois : $\times$ est distributive sur $+$

3.2.1 Formule du binôme de Newton

Théorème 3.2.1. *Si a et b sont deux éléments d'un anneau $(\mathcal{A}, +, \times)$,* **qui commutent** *($a \times b = b \times a$), alors ...*

3.2.2 Sous-anneau.

Définition 3.2.2.

3.2.3 Morphismes d'anneaux.

Définition 3.2.3.

$$\forall a, b \in \mathcal{A},\ f(a + b) = f(a) + f(b) \text{ et } f(a \times b) = f(a) \times f(b)$$

3.2.4 Exemples d'anneaux, de sous-anneaux, de morphismes d'anneaux.

$(\mathbb{N}, +, \times)$ n'est pas un anneau
$(\mathbb{Z}, +, \times)$ est un anneau (commutatif)
$(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$ est un anneau non commutatif (avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$)
$(\mathbb{K}[X], +, \times)$ est un anneau commutatif (avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$)

3.3 Corps (field)

Définition 3.3.1. Un corps est un anneau $(\mathcal{A}, +, \times)$, où la deuxième loi $(\times)$ est telle que $(\mathcal{A} \setminus \{0\}, \times)$ est un groupe commutatif.

3.3.1 Sous-corps.

Définition 3.3.2.

3.3.2 Morphismes de corps.

Définition 3.3.3.

3.3.3 Exemples de corps.

$(\mathbb{R}, +, \times)$, $(\mathbb{C}, +, \times)$, $(\mathbb{Q}, +, \times)$ sont des corps
$(\mathbb{K}(X), +, \times)$, où $\mathbb{K}(X)$ est l'ensemble des fractions rationnelles de X, à coefficients dans $\mathbb{K}(= \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$, est un corps.
$(\{0, 1\}, XOR, ET)$ est un corps fini à 2 éléments.

3.4 Espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$ (Vector space).

Définition 3.4.1. Ensemble non vide, muni de

- une loi de composition interne $+$ telle que $(\mathbb{E}, +)$ soitun groupe commutatif
- une loi de composition externe $\cdot$, à opérateurs dans un corps $\mathbb{K}$

telle que ...**4 propriétés !**

3.4.1 Sous-espaces vectoriels.

Définition 3.4.2.

Théorème 3.4.1. *Caractérisation minimale des sous espaces vectoriels :*
Soit $(\mathbb{E}, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$ ev et $\mathbb{F}$ une partie de $\mathbb{E}$. $(\mathbb{F}, +, \cdot)$ est un sous espace vectoriel de $(\mathbb{E}, +, \cdot)$ ssi

- *$\mathbb{F}$ est non vide (par exemple $0 \in \mathbb{F}$)*
- *$\mathbb{F}$ est stable par $+$: $(\forall u, v \in \mathbb{F},\ u + v \in \mathbb{F})$*
- *$\mathbb{F}$ est stable par $\cdot$: $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall u \in \mathbb{F},\ \lambda \cdot u \in \mathbb{F}$*

3.4.2 Exemples d'espaces vectoriels et de sous espaces.

$(\mathcal{C}(E, \mathbb{R}), +, .)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
$(\mathcal{C}^\infty(E, \mathbb{R}), +, .)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, sous espace de $(\mathcal{C}(E, \mathbb{R}), +, .)$.

3.4.3 Morphismes d'espaces vectoriels (ou applications linéaires).

Définition 3.4.3.

Exemples.

3.5 Algèbre sur un corps $\mathbb{K}$ (Algebra).

Définition 3.5.1. Ensemble non vide, muni de

- deux lois de composition interne $+$ et $\times$
- une loi de composition externe $\cdot$, à opérateurs dans un corps $\mathbb{K}$

telles que ...

3.5.1 Sous-algèbres.

Définition 3.5.2.

3.5.2 Exemples d'algèbres et de sous-algèbres.

$(\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}),+,\circ,\cdot)$ est une algèbre sur $\mathbb{R}$.
$(\mathcal{C}^\infty(E,\mathbb{R}),+,\circ,\cdot)$ est une algèbre sur $\mathbb{R}$, sous algèbre de la précédente.
$(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}),+,\times,\cdot)$ est une algèbre sur $\mathbb{R}$.
$(\mathbb{K}[X],+,\times,\cdot)$ est une algèbre sur le corps $\mathbb{K}$.

4 Dénombrements.

E_n et F_p étant des ensembles finis à n et p éléments (avec $0 \leqslant p \leqslant n$),

1. Nombre d'applications de E_n vers F_p
2. Nombre de parties de E_n
3. Nombre d'applications injectives de F_p vers E_n
4. Nombre de permutations de E_n
5. Nombre de parties à p éléments dans E_n
6. Combinaisons, Triangle de Pascal
7. Formule du binôme de Newton (**dans un anneau commutatif**)
8. Formule de Liebnitz
$$\frac{d^n}{dx^n}(< f(x)\,|\,g(x) >= \cdots$$

5 $\mathbb{K}$ espaces vectoriels.

Combinaisons linéaires (sommes **finies**)
Familles libres, Familles liées
Famille génératrice **de** ...

Sous espace vectoriel de ...
Sous espace vectoriel engendré par ...

Intersection de deux sous espaces vectoriel
Somme de deux sous espaces vectoriels
Somme directe de deux sous espaces vectoriels : $\mathbb{F} \oplus \mathbb{G}$
Sous espaces vectoriels supplémentaires

Image d'un sous ev par une application linéaire
Image réciproque d'un sous ev par une application linéaire
Noyau d'une application linéaire
Image d'une application linéaire
Théorème 5.0.1. *Caractérisation des applications linéaires injectives*

Endomorphisme, Isomorphisme, Automorphismes
Restriction d'une application linéaire à un sous espace vectoriel

Espace vectoriel $(\mathcal{L}(\mathbb{E},\mathbb{F}),+,\cdot)$ des application linéaires de E vers F
Algèbre $(\mathcal{L}(\mathbb{E}),+,\circ,\cdot)$ des endomorphismes de $\mathbb{E}$
Groupe linéaire $(\mathcal{GL}(\mathbb{E}),\circ)$ des automorphismes de $\mathbb{E}$

L'ensemble des isomorphismes de $\mathbb{E}$ vers $\mathbb{F}$ n'est pas un espace vectoriel.

6 $\mathbb{K}$ espaces vectoriels de dimension finie.

Familles génératrices de .... Familles libres
Bases
Dimension
Théorème 6.0.2. *Caractérisation des bases :*

- *famille libre, de cardinal égal à la dimension de l'espace*
- *famille génératrice de l'espace, de cardinal égal à la dimension de l'espace*

Dimension d'un sous espace vectoriel
Dimension de la somme de deux sous espaces vectoriels
Somme directe, Dimension de la somme directe de deux sous espaces vectoriels

Théorème du rang
Théorème de la base incomplète

Image d'une famille libre par une application linéaire injective

6.1 Représentation des sous-espaces vectoriels, en dimension finie

- Par une base
- par un système d'équations paramétriques
- par un système d'équations cartésiennes

Extraction d'une base depuis une famille génératrice de l'espace
Construction d'une famille étagée par rapport à une base
Construction d'un supplémentaire (cf TH de la base incomplète)

6.2 Représentation matricielle des applications linéaires

Représentation à l'aide des informations marginales
Formules de changement de base
Influence d'un changement de base(s) sur la matrice d'une application linéaire

6.2.1 Exemples usuels

Matrice d'une symétrie, relativement à une base donnée.
Matrice d'un projecteur, relativement à une base donnée

6.3 Résolution des systèmes d'équations linéaires

Méthode du pivot de Gauss.
Systèmes de Cramer, Formules de Cramer
Inverse d'une matrice

7 Matrices à coefficients dans un corps $\mathbb{K}$

7.1 Opérations

Addition, produit, produit par un scalaire

7.2 Applications à arguments matriciels

Transposition : ${}^tA \times B = {}^tB \times {}^tA$
Inverse : $(A \times B)^{-1} = B^{-1} \times A^{-1}$
Trace : Linéarité
Déterminant.

7.3 Matrices particulières

- Symétriques, Antisymétriques
- Triangulaires supérieures,
- Triangulaires inférieures,
- Diagonales
- Matrices orthogonales : ${}^tP = P^{-1}$

8 Déterminants de matrices

Développement par rapport à une ligne ou à une colonne
Déterminant d'un produit de matrices
Caractérisation des matrices inversibles

9 Espace vectoriel euclidien $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$

Bases orthonormées
Matrice de passage d'une base orthonormée à une autre : Matrices "orthogonales"
Orientation, Bases directes
Matrices de rotation, de symétrie orthogonale
Projections orthogonales

10 Ensemble $\mathbb{K}[X]$ des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

$(\mathbb{K}(X), +, \times, \cdot)$ est une algèbre sur $\mathbb{K}$.
Degré et valuation.
Division euclidienne
Relations entre coefficients et racines
Dérivation
Formule de Taylor
Racines multiples et dérivation

Polynômes de Lagrange

11 Ensemble $\mathbb{K}(X)$ des fractions rationnelles à coefficients dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

$(\mathbb{K}(X), +, \times)$ est un corps.
Décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}$ ou dans $\mathbb{R}$

< $\mathcal{FIN}$ >