Intégrales impropres (généralisées)

Antoine MOTEAU antoine.moteau@wanadoo.fr

Table des matières

Intégrales impropres (généralisées).

1 Introduction, généralités

1.1 Intégrale impropre (généralisée) en une seule extrémité d'un intervalle

Définition 1.1.1.

Soit $[a,b[$ un intervalle semi-ouvert de $\mathbb{R}$ ($a \in \mathbb{R}$, $b \in \overline{\mathbb{R}}$, $a < b$) et f une fonction continue par morceaux sur $[a,b[$, a valeurs réelles ou complexes.

Soit F, la fonction définie sur $[a,b[$ par $F(X) = \displaystyle\int_a^X f(t)\,dt$.

- Si la fonction F admet une limite finie L lorsque X tend vers b , alors l'intégrale impropre (généralisée) en b,
$$\int_a^b f(t)\,dt$$
est dite convergente (en b), de valeur L (ou "converge vers L" ou "existe et vaut L").
- Si la fonction F n'admet pas de limite finie lorsque X tend vers b , alors l'intégrale impropre (généralisée) en b est dite divergente (ou diverge) en b.

On a une définition analogue sur un intervalle semi-ouvert à gauche $]a,b]$.

Exemples 1.1.0.1. (preuves issues directement de la définition)

$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx$	généralisée en $+\infty$	, diverge .	$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx$	généralisée en 0	, diverge .
$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3}\,dx$	généralisée en $+\infty$	, converge vers $\frac{1}{2}$.	$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^3}\,dx$	généralisée en 0	, diverge .
$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$	généralisée en 0	, converge vers 2 .	$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$	généralisée en $+\infty$	, diverge .
$\displaystyle\int_0^1 \ln x\,dx$	généralisée en 0	, converge vers -1 .	$\displaystyle\int_1^{+\infty} \ln x\,dx$	généralisée en $+\infty$	, diverge .
$\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-3x}\,dx$	généralisée en $+\infty$	, converge vers $\frac{1}{3}$.	$\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{3x}\,dx$	généralisée en $+\infty$	, diverge.

Remarque. Une intégrale sera généralisée en une extrémité d'un intervalle lorsque
- cette extrémité est infinie.
- cette extrémité est finie et l'intégrande n'a pas de limite finie en cette extrémité.

Théorème 1.1.1. *Relation de Chasles.*

Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a,b[$ ($a \in \mathbb{R}$, $b \in \overline{\mathbb{R}}$, $a < b$) et $c \in]a,b[$.

$\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ *est convergente si et seulement si* $\displaystyle\int_c^b f(t)\,dt$ *est convergente.*

et, en cas de convergence, on a la relation de Chasles : $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt$

(et de même sur $]a,b]$)

Preuve.

$\displaystyle\int_a^c f(t)\,dt$ est une intégrale définie et, pour $X \in [a,b[$, $\displaystyle\int_a^X f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^X f(t)\,dt$.
On a le résultat en étudiant la limite lorsque X tends vers b.

1.2 Intégrale faussement généralisée en une extrémité finie

Soit $[a, b]$ un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$ et f une fonction continue par morceaux sur $[a, b[$.
Si f admet une limite finie à gauche en b, alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ est convergente.

On dit aussi que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ est "faussement" généralisée en l'extrémité finie b.
(et de même sur $]a, b]$)

Preuve. f admet un prolongement continu sur $[a, b]$ et on tombe dans le cas des intégrales définies.

Exemple 1.2.0.1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx$ est "faussement" généralisée en 0 :

La fonction $f : x \longmapsto \dfrac{\sin x}{x}$ est continue par morceaux sur $]0, 1]$ et admet la limite 1 en 0.

1.3 Intégrale généralisée en un nombre fini de points d'un intervalle

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, d'extrémités a et b $(-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty)$, et f une fonction définie sur I, sauf peut-être en un nombre fini de points de $\overline{\mathbb{R}}$, $a_0, a_1, \cdots, a_n = b$ avec

$$a_0 = a < a_1 < a_2 < \cdots < a_{n-1} < a_n = b$$

On suppose en outre que f est continue par morceaux sur chaque intervalle ouvert $]a_i, a_{i+1}[$.

On introduit des points intermédiaires quelconques, $c_1, c_2, \cdots, c_n$ tels que

$$a = a_0 < c_1 < a_1 < c_2 < a_2 < c_3 < \cdots < c_{n-1} < a_{n-1} < c_n < a_n = b$$

et on renomme tous les points (de façon à avoir une écriture homogène) : $\begin{cases} a_i = d_{2i} & \text{pour } i = 0 \cdots n \\ c_i = d_{2i+1} & \text{pour } i = 0 \cdots n-1 \end{cases}$

Définition 1.3.1.

- Si **<u>toutes</u>** les intégrales généralisées <u>en une seule extrémité</u>, $\displaystyle\int_{d_i}^{d_{i+1}} f(t)\,dt$,
  sont convergentes alors

$$\int_a^b f(t)\,dt \text{ est dite convergente, de valeur } \int_a^b f(t)\,dt = \sum_{i=0}^{2n-1} \int_{d_i}^{d_{i+1}} f(t)\,dt$$

- Si **<u>au moins une</u>** des intégrales généralisées $\displaystyle\int_{d_i}^{d_{i+1}} f(t)\,dt$ est divergente, alors

$$\int_a^b f(t)\,dt \text{ est dite divergente.}$$

Remarque.

- D'après le théorème précédent, cette définition et le résultat en cas de convergence sont indépendants du choix (arbitraire) des points intermédiaires $c_1, c_2, \cdots, c_n$.
- En cas de convergence, on peut appliquer la formule de Chasles, avec n'importe quel point intermédiaire dans $]a, b[$:

Si $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ converge, alors $\forall\, c \in]a, b[$, $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt$

Exemples 1.3.0.2. (preuves différées)

$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ généralisée en 0 et $+\infty$, diverge .

$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx$ "faussement" généralisée en 0 $\left(\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 x}{x^2} = 1\right)$ généralisée en $+\infty$, converge, vers ?.

$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{\left(|1-x|\right)^{3/2}}\,dx$ généralisée en 0, 1^-, 1^+ et en $+\infty$, converge, vers ?.

$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{(x-1)\,(x-3)}\,dx$ "faussement" généralisée en 1^- et 1^+ généralisée en 0, 3 et en $+\infty$, diverge. En effet :

$\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{\ln x}{(x-1)\,(x-3)}\,dx$, converge.

$\displaystyle\int_{1/2}^{1} \frac{\ln x}{(x-1)\,(x-3)}\,dx$ $\left(\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{\ln x}{(x-1)\,(x-3)} = \dfrac{1}{2}\right)$, converge.

$\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{\ln x}{(x-1)\,(x-3)}\,dx$ $\left(\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{\ln x}{(x-1)\,(x-3)} = \dfrac{1}{2}\right)$, converge.

$\displaystyle\int_{2}^{3} \frac{\ln x}{(x-1)\,(x-3)}\,dx$, diverge. STOP !

$\displaystyle\int_{3}^{45} \frac{\ln x}{(x-1)\,(x-3)}\,dx$, diverge (inutile).

$\displaystyle\int_{45}^{+\infty} \frac{\ln x}{(x-1)\,(x-3)}\,dx$, converge (inutile).

1.4 Quelques précautions dans l'écriture

- Ecrire $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$, de façon isolée, ne signifie pas que cette intégrale converge (ide "a un sens" ou représente une valeur). C'est simplement une façon d'introduire le problème.
- Ecrire $I = \displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$, ne signifie pas que l'intégrale converge, mais c'est le moyen de lui associer le nom I, destiné à nommer temporairement, de façon plus courte, le problème posé.
(à condition bien sur que ce nom ne représente pas déjà un calcul ou une valeur).
Une fois la justification de convergence apportée, I représentera aussi la valeur associée à l'intégrale.
- Ecrire $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = \cdots$, suppose que l'intégrale converge et que le membre de droite représente sa valeur.
On ne peut donc écrire $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = \cdots$ qu'après avoir prouvé que l'intégrale est convergente.

> Pour une intégrale généralisée, toute solution qui commence par $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = \cdots$, ne pourra produire **que des âneries**.
>
> De même, pour l'étude de la limite d'une fonction f en un point a, toute solution qui commence par $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \cdots$, ne pourra produire **que des âneries**.
>
> De même, ...

1.5 Intégrale généralisée absolument convergente

plus précisément, "convergente en module" (l'intégrande est une fonction à valeurs complexes, éventuellement réelles).

Théorème 1.5.1.

Si une fonction f est continue par morceaux sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$, alors $|f|$ est continue par morceaux sur cet intervalle.

Preuve. (voir aussi cours de Sup)

1. Si f est à valeurs réelles, on montre que $f^+ = \sup(f, 0)$ et $f^- = \inf(0, f)$ sont continues par morceaux sur I. Comme $|f| = f^+ - f^-$, $|f|$ est continue par morceaux sur I.
2. Si f est à valeurs complexes, on montre que $\Re(f)$ et $\Im(f)$ sont continues par morceaux sur I, puis que … .

Théorème 1.5.2.

Si $\displaystyle\int_a^b |f(t)|\, dt$ est convergente, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\, dt$ est convergente (et $\displaystyle\left|\int_a^b f(t)\, dt\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\, dt$).

Preuve. Admis

Définition 1.5.1.

Si $\displaystyle\int_a^b |f(t)|\, dt$ est convergente, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\, dt$ est dite "absolument convergente"

(donc convergente).

On dira aussi, éventuellement, "convergente en module".

Une intégrale impropre convergente, non absolument convergente est dite parfois "semi-convergente".

Exemple 1.5.0.2. $$\underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 x}{x^3}\, dx}_{\text{absolument convergente}} \quad \left(= \frac{3\,\pi}{8}\right) \; ; \quad \underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx}_{\text{"semi-convergente"}} \quad \left(= \frac{\pi}{2}\right)$$

Pour la première c'est facile à montrer, mais de là à la calculer … .
Pour la seconde, on montre assez facilement qu'elle converge (et on peut même la calculer), mais pour montrer qu'elle n'est pas absolument convergente, c'est plus ardu ! (à voir ultérieurement).

1.6 Opérations algébriques

Théorème 1.6.1.

Si f et g sont deux fonctions à intégrales convergentes sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$, et λ un réel (ou complexe), alors

- *λf est à intégrale convergente sur I et* $\displaystyle\int_I (\lambda f)(t)\, dt = \lambda \int_I f(t)\, dt$
- *$f + g$ est à intégrale convergente sur I et* $\displaystyle\int_I (f+g)(t)\, dt = \int_I f(t)\, dt + \int_I g(t)\, dt$

Preuve. Ceci découle de la linéarité de l'intégrale définie, et de la linéarité du passage à la limite.

Un tel théorème permet de décomposer un problème lourd en plusieurs problèmes simples, que l'on traitera séparément avant de les assembler. **Mais** …

Cependant, il y a un piège !

L'intégrale $\int_I (f+g)(t)\,dt$ peut exister (ide, être convergence) sans que les intégrales $\int_I f(t)\,dt$ et $\int_I g(t)\,dt$ existent elles mêmes, comme le prouve l'exemple suivant :

Exemple 1.6.0.3. Avec $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$ et $g(x) = \dfrac{-1}{x+2}$, on a $(f+g)(x) = \dfrac{1}{(x+1)\,(x+2)}$.

- $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)\,(x+2)}$ converge. En effet :

$$\int_0^X \frac{dx}{(x+1)\,(x+2)} = \left[\ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right)\right]_0^X = \ln\left(\frac{X+1}{X+2}\right) - \ln\left(\frac{1}{2}\right) \xrightarrow[X\to+\infty]{} \ln 2$$

- $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x+1}$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} -\frac{dx}{x+2}$ sont toutes les deux divergentes !

1.7 Démarche pour l'étude d'une intégrale généralisée

1. Etude de l'intégrande
   - continuité par morceaux
   - identification des points où l'intégrale est généralisée (et ce n'est pas seulement aux "bornes" de l'intégrale qu'il peut y avoir un problème).
2. Etude séparée de chacune des intégrales généralisées en une extrémité :
   - apporter la preuve de la convergence de chacune
   - ou apporter la preuve de la divergence de l'une d'entre elle.

   On évitera d'utiliser le signe intégral dans cette démarche !

   L'écriture $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = \dots$ n'apparaîtra que dans une conclusion (ou dans une conclusion partielle).
3. En cas de convergence, on pourra essayer ensuite de calculer l'intégrale
   - exactement, si c'est possible ou si on y arrive ...
   - par valeur approchée à une précision $\epsilon > 0$ donnée,

   en faisant attention à ne pas écrire des relations fausses ou aberrantes (voir exemple ci-dessus).
4. ...

2 Intégrale généralisée à l'infini

On s'intéresse ici aux fonctions continues par morceaux sur $[a, +\infty[$, avec $a \in \mathbb{R}$.
(le cas des fonctions continues par morceaux sur $]-\infty, a]$, $a \in \mathbb{R}$, s'en déduit naturellement).

2.1 Exemples

2.1.1 Exemples de référence (à connaître par cœur !)

Il s'agit des intégrales de fonctions qui sont les équivalents usuels élémentaires de référence au voisinage de $+\infty$.

Intégrales de Riemann $\alpha \in \mathbb{R}$	$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx$	converge ssi $\alpha > 1$
Exponentielles $p \in \mathbb{C}$	$\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-px}\,dx$	converge ssi $\Re(p) > 0$
Logarithmes $\beta \in \mathbb{R}$	$\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{\ln^\beta x}\,dx$	toujours divergente

2.1.2 Autres exemples (à démontrer à chaque utilisation)

Intégrales de Bertrand Puissance-Logarithme $\alpha\,,\ \beta \in \mathbb{R}$	$\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha\ \ln^\beta x}\,dx$	$\alpha > 1$: converge $\alpha = 1$: converge ssi $\beta > 1$ $\alpha < 1$: diverge quelque soit β
Exponentielle-Puissance -Logarithme $p \in \mathbb{C}\,,\ \alpha \in \mathbb{R}\,,\ \beta \in \mathbb{R}$	$\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{e^{-px}}{x^\alpha\ \ln^\beta x}\,dx$	$\Re(p) > 0$: converge quelque soit α et β $\Re(p) = 0$: $\begin{cases} \alpha > 1 & : \text{converge} \\ \alpha = 1 & : \text{converge ssi } \beta > 1 \\ \alpha < 1 & : \text{diverge quelque soit } \beta \end{cases}$ $\Re(p) < 0$: diverge quelque soit α et β

2.1.3 Fonctions dont on connaît une primitive

Dans le cas où l'on connaît une primitive de la fonction , on se ramène directement à la définition de la convergence d'une intégrale.

Exemple 2.1.3.1.

- Les intégrales de Riemann : $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx$.
- L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$.
- Le cas limite de l'intégrale de Bertrand : $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\ln^\beta x}\,dx$.
- ...

2.2 Condition Nécessaire de convergence

Théorème 2.2.1.

Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a,+\infty[$, à valeurs réelles .

Si f *admet une limite* $L \in \overline{\mathbb{R}}$ *en* $+\infty$,
alors **si** $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ *est convergente,*
alors $L = 0$.

Ce qui peut s'énoncer aussi :

Si f *admet une limite* $L \in \overline{\mathbb{R}}$ *en* $+\infty$,
alors **si** *cette limite est non nulle,*
alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ *est divergente.*

(C'est cette dernière forme qui sera la plus utile !)

Pour une fonction à valeurs dans $\mathbb{C}$, on traitera séparément la partie imaginaire et la partie réelle.

Preuve.

Supposons que f admette la limite L non nulle en $+\infty$, par exemple $L > 0$ (le cas $L < 0$ est similaire).
Soit $A > a$, tel que $\forall x > A\,,\ f(x) > \dfrac{L}{2}$.
Pour tout $X > A$, $\displaystyle\int_A^X f(t)\,dt > \int_A^X \frac{L}{2}\,dt = \frac{L\,(X-A)}{2} \xrightarrow[X\to+\infty]{} +\infty$.
Comme $\displaystyle\int_a^A f(t)\,dt$ est fini, on en déduit que $\displaystyle\int_a^X f(t)\,dt \xrightarrow[X\to+\infty]{} +\infty$, ce qui prouve la divergence.

Attention !

- Si f a une limite nulle en $+\infty$, on ne peut rien dire pour $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$!

Exemple 2.2.0.2. Les intégrales de Riemann , $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx$:

- Avec $0 < \alpha \leqslant 1$, la limite est nulle en $+\infty$ et l'intégrale diverge
- Avec $1 < \alpha$, la limite est nulle en $+\infty$ et l'intégrale converge.

- Si f n'a pas de limite en $+\infty$, on ne peut rien dire pour $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$!

Exemple 2.2.0.3. les bosses "évanescentes" ($\oplus$ est le "ou exclusif") :

- Soit $k \in]0,1[$ et la fonction f définie ainsi :

$$\Big(\forall x > 0\,,\ \Big(\exists n \in \mathbb{N}^*\ :\ x \in [n-k^n, n+k^n] \Longrightarrow f(x) = n\Big) \oplus \Big(f(x) = 0\Big)\Big)$$

f n'a pas de limite en $+\infty$ (et n'est même pas bornée) et $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,dt$ converge.

- Soit $k \in]0,1[$ et la fonction f définie ainsi :

$$\Big(\forall x > 0\,,\ \Big(\exists n \in \mathbb{N}^*\ :\ x \in [n-k^n, n+k^n] \Longrightarrow f(x) = \frac{1}{k^n}\Big) \oplus \Big(f(x) = 0\Big)\Big)$$

f n'a pas de limite en $+\infty$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,dt$ diverge.

2.3 Fonctions positives (à partir d'un certain rang)

(ou, de façon similaire, négatives à partir d'un certain rang)

Remarque. D'après le théorème vu en introduction et la relation de Chasles,

$$\int_a^{+\infty} f(t)\,dt \text{ converge si et seulement si il existe } c \in \,]\,a, +\infty\,[\text{ tel que } \int_c^{+\infty} f(t)\,dt \text{ converge.}$$

Cela permet de s'affranchir de certaines irrégularités de la fonction f au début de l'intervalle et de ne travailler que sur un voisinage de $+\infty$ pour établir la convergence.

2.3.1 Primitive croissante majorée

Théorème 2.3.1.

Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a, +\infty[$ $(a \in \mathbb{R})$ et positive (à partir d'un certain rang).
Si F, définie sur $[a, +\infty[$ par : $F(X) = \displaystyle\int_a^X f(t)\,dt$ est majorée, alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ est convergente.

Preuve.

Sous les hypothèses énoncées, F est croissante (à partir d'un certain rang) et comme elle est majorée, elle a une limite finie en $+\infty$. La convergence découle alors de la définition.

Remarque. Cela demande quelques connaissances sur les primitives de f et comme on ne sait pas toujours (et même rarement) les calculer ....
En fait, ce théorème servira surtout de prélude aux théorèmes suivants.

Exemple 2.3.1.1. $f : t \longmapsto \dfrac{\sin^2 t}{1+t^2}$ est continue, sur $[0, +\infty[$.

f est positive sur $[0, +\infty[$, $F(X) = \displaystyle\int_0^X \frac{\sin^2 t}{1+t^2}\,dt \leqslant \int_0^X \frac{1}{1+t^2}\,dt = \arctan X < \frac{\pi}{2}$.

Le théorème permet de conclure : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{1+t^2}\,dt$ converge. (de là à la calculer ...).

2.3.2 Fonction majorante, minorante

Théorème 2.3.2.

Soient f et g, deux fonctions continues par morceaux sur $[a, +\infty[$ $(a \in \mathbb{R})$ et positives (à partir d'un certain rang).
Si $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$ (au voisinage de $+\infty$), alors

- *si $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(t)\,dt$ converge alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ converge.*
- *si $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ diverge alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(t)\,dt$ diverge.*

Preuve. Sous l'hypothèse $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$ (pour $x > c$), on a $\displaystyle\int_c^X f(t)\,dt \leqslant \int_c^X g(t)\,dt$.

1. si $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(t)\,dt$ converge alors $\displaystyle\int_c^X g(t)\,dt \leqslant \int_c^{+\infty} g(t)\,dt$ et $X \longmapsto \displaystyle\int_c^X f(t)\,dt$ est majorée.
   Le résultat résulte du théorème précédent.
2. si $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ diverge alors $\displaystyle\int_c^X f(t)\,dt \xrightarrow[X\to+\infty]{} +\infty$ et $\displaystyle\int_c^X g(t)\,dt$ aussi, donc $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(t)\,dt$ diverge.

Exemple 2.3.2.1.

- $f : t \longmapsto \dfrac{\sin^2 t}{1+t^2}$ et $g : t \longmapsto \dfrac{1}{1+t^2}$. $0 \leqslant f \leqslant g$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)\,dt$ converge. $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ converge.
- $f : t \longmapsto \dfrac{1}{t}$ et $g : t \longmapsto \dfrac{1}{\ln^2 t}$. Sur $[e, +\infty[$, $0 \leqslant f \leqslant g$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,dt$ diverge. $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)\,dt$ diverge.

2.3.3 Fonctions équivalentes

Théorème 2.3.3.

Soient f et g, deux fonctions continues par morceaux sur $[a,+\infty[$ $(a \in \mathbb{R})$ et positives (à partir d'un certain rang).

Si $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} g(x)$ alors les intégrales $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ et $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(t)\,dt$ sont de même nature.

Preuve.

Si $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} g(x)$ alors $\left(\exists c > a\,,\, \forall x \geqslant c\,,\, 0 \leqslant \frac{1}{2}g(x) \leqslant f(x) \leqslant \frac{3}{2}g(x)\right)$.
Le résultat découle du théorème précédent.

Exemple 2.3.3.1.

- $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t+\ln t}{1+t^3}\,dt$. On remarque que $\dfrac{t+\ln t}{1+t^3} \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^2}$ et on peut conclure.
- $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t+\sin^2 t}\,dt$. On remarque que $\dfrac{1}{t+\sin^2 t} \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t}$ et on peut conclure.

2.3.4 Comparaison à une série

Le critère de comparaison à une série est repris, avec démonstration, dans le cours sur les séries numériques. Si les séries numériques n'ont pas encore été vues, on pourra ignorer cette section en première lecture.

Théorème 2.3.4.

Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a,+\infty[$ $(a \in \mathbb{R})$, continue et positive (à partir d'un certain rang).

Si f est décroissante (à partir d'un certain rang),
alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ et la série $\displaystyle\sum_{n>a} f(n)$ sont de même nature.

Preuve. Voir le cours sur les séries numériques ...

la démonstration s'appuie sur une figure !

Remarque. Ce théorème est utilisé le plus souvent pour prouver la convergence d'une série à partir de la convergence d'une intégrale.

Exemple 2.3.4.1.

- L'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\,\ln^2 x}\,dx$ est convergente (on connaît une primitive de $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x\,\ln^2 x}$).
  Comme la fonction f est continue positive décroissante sur $[2,+\infty[$, on en déduit que la série $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n\,\ln^2 n}$ est convergente.
- L'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\,\ln x}\,dx$ est divergente (on connaît une primitive de $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x\,\ln x}$).
  Comme la fonction f est continue positive décroissante sur $[2,+\infty[$, on en déduit que la série $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n\,\ln n}$ est divergente.

2.4 Fonctions non de signe constant

2.4.1 Intégrale absolument convergente (exemples)

On a vu dans l'introduction qu'une intégrale absolument convergente est convergente, ce qui peut nous ramener au cadre des fonctions positives, où l'on dispose d'outils performants .

Exemples 2.4.1.1.

1. L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx$, lorsque $\alpha > 1$, est absolument convergente : $0 \leqslant \left|\dfrac{\sin x}{x^\alpha}\right| \leqslant \dfrac{1}{x^\alpha}$.
2. L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \sin(\omega\, x)\, e^{-a\,x}\,dx$, lorsque $a > 0$, est absolument convergente :
$$0 \leqslant \left|\sin(\omega\, x)\, e^{-a\,x}\right| \leqslant e^{-a\,x}.$$

2.4.2 Intégrale convergente et non absolument convergente (exemple)

Exemple 2.4.2.1. L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx$, lorsque $0 < \alpha \leqslant 1$, est

- convergente : Il suffit d'intégrer par parties, entre 0 et x :
$$\int_1^x \frac{\sin t}{t^\alpha}\,dt = \left[\frac{-\cos t}{t^\alpha}\right]_1^x - \alpha \int_1^x \frac{\cos t}{t^{\alpha+1}}\,dt$$
puis de conclure à l'existence d'une limite quand x tends vers $+\infty$:
  - $\left[\dfrac{-\cos t}{t^\alpha}\right]_1^x = \dfrac{-\cos x}{x^\alpha} + \cos 1 \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ (cos est borné et $\alpha > 0$)
  - $\displaystyle\int_1^x \frac{\cos t}{t^{\alpha+1}}\,dt$ converge puisque cos est borné et $1 + \alpha > 1$
- non absolument convergente :
Pour $k \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} \left|\frac{\sin x}{x^\alpha}\right| dx \geqslant \int_{2k\pi+\pi/4}^{2k\pi+3\pi/4} \left|\frac{\sin x}{x^\alpha}\right| dx \geqslant \int_{2k\pi+\pi/4}^{2k\pi+3\pi/4} \frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{1}{x^\alpha}\,dx$.
Comme $0 < \alpha \leqslant 1$, on en déduit ...

2.4.3 Intégrale divergente, absolument divergente (exemple)

Exemple 2.4.3.1.

L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} x^\beta \sin x\,dx$, lorsque $\beta > 0$, est divergente.

- $x^\beta \sin x$ n'a pas de limite lorsque x tends vers $+\infty$, et on a vu que l'on ne pouvait rien en conclure !
- La preuve de divergence n'est pas immédiate ....
- Pour la preuve d'absolue divergence, on peut s'inspirer de ce qui précède ....

3 Intégrale généralisée en une borne finie

On s'intéresse ici aux fonctions continues par morceaux sur $[a, b[$, avec $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, a < b$.
(le cas des fonctions continues par morceaux sur $]a, b]$ s'en déduit naturellement).

On retrouve des modes opératoires assez semblables (à quelques exceptions près ...) à ce que l'on avait pour les intégrales généralisées à l'infini, d'où un plan identique, avec des énoncés où l'on peut presque partout remplacer $+\infty$ par b.

3.1 Exemples

3.1.1 Exemples de référence (à connaître par cœur !)

Il s'agit des intégrales de fonctions qui sont les équivalents usuels élémentaires de référence.

Intégrales de Riemann $\alpha \in \mathbb{R}$	$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{(b-x)^\alpha}\,dx$ $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{(x-a)^\alpha}\,dx$	convergent ssi $\alpha < 1$
Logarithme	$\displaystyle\int_0^1 \ln x\,dx$ $\displaystyle\int_a^b \ln(b-x)\,dx$ $\displaystyle\int_a^b \ln(x-a)\,dx$	convergentes

Attention aux intégrales de Riemann !

- en $+\infty$, il y convergence seulement pour $\alpha > 1$
- en 0 , il y convergence seulement pour $\alpha < 1$

En particulier, quelque soit α, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ diverge.

3.1.2 Autres exemples (à démontrer à chaque utilisation)

3.1.3 Fonctions dont on connaît une primitive

Dans le cas où l'on connaît une primitive de la fonction , on se ramène directement à la définition de la convergence d'une intégrale.

Exemple 3.1.3.1.

- Les intégrales de Riemann, $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx$
- $\displaystyle\int_0^1 \ln x\,dx$
- $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x\ln^2 x}\,dx$

3.2 Condition Nécessaire de convergence. Couic !

Rien !

3.3 Fonctions positives (à partir d'un certain rang)

(ou, de façon similaire, négatives à partir d'un certain rang)

Remarque. D'après le théorème vu en introduction et la relation de Chasles,

$\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ converge si et seulement si il existe $c \in]\,a, b\,[$ tel que $\displaystyle\int_c^b f(t)\,dt$ converge.

Cela permet de s'affranchir de certaines irrégularités de la fonction f au début de l'intervalle et de ne travailler que sur un voisinage gauche de b pour établir la convergence.

3.3.1 Primitive croissante majorée

Théorème 3.3.1.

Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a, b[$ $(a \in \mathbb{R})$ et positive (à partir d'un certain rang).
Si F, définie sur $[a, b[$ par : $F(X) = \displaystyle\int_a^X f(t)\,dt$ est majorée, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ est convergente.

Preuve. "Copier-coller" et remplacer $+\infty$ par b .

Remarque. Cela demande quelques connaissances sur les primitives de f et comme on ne sait pas toujours (et même rarement) les calculer . . . .
En fait, ce théorème servira surtout de prélude aux théorèmes suivants.

Exemple 3.3.1.1. $f : t \longmapsto \dfrac{\sin^2\left(\dfrac{1}{t}\right)}{1+t^2}$ est continue, sur $]0, +\pi]$.

f est positive sur $]0, \pi]$.

Pour $X \in]0, \pi]$, $F(X) = \displaystyle\int_X^\pi \dfrac{\sin^2\left(\dfrac{1}{t}\right)}{1+t^2}\,dt \leqslant \int_X^\pi \dfrac{1}{1+t^2}\,dt = \arctan\pi - \arctan X < \dfrac{\pi}{2}$.

Le théorème permet de conclure : $\displaystyle\int_0^{+\pi} \dfrac{\sin^2\left(\dfrac{1}{t}\right)}{1+t^2}\,dt$ converge. (de là à la calculer . . .).

3.3.2 Fonction majorante, minorante

Théorème 3.3.2.

Soient f et g, deux fonctions continues par morceaux sur $[a, b[$ $(a \in \mathbb{R})$ et positives (à partir d'un certain rang).

Si $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$ (au voisinage de b), alors

- *si $\displaystyle\int_a^b g(t)\,dt$ converge alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ converge.*
- *si $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ diverge alors $\displaystyle\int_a^b g(t)\,dt$ diverge.*

Preuve. "Copier-coller" et remplacer $+\infty$ par b .

Exemple 3.3.2.1.

- $f : t \longmapsto \dfrac{1}{(1-t^2)^{1/4}}$ et $g : t \longmapsto \dfrac{1}{(1-t)^{1/4}}$. Sur $[0, 1]$, $0 \leqslant f \leqslant g$ et $\displaystyle\int_0^1 g(t)\,dt$ converge. $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt$ converge.
- $f : t \longmapsto \dfrac{1}{t-1}$ et $g : t \longmapsto \dfrac{1}{\ln t}$. Sur $]1, 2]$, $0 \leqslant f \leqslant g$ et $\displaystyle\int_1^2 f(t)\,dt$ diverge. $\displaystyle\int_1^2 g(t)\,dt$ diverge.

3.3.3 Fonctions équivalentes

Théorème 3.3.3.

Soient f et g, deux fonctions continues par morceaux sur $[a, b[$ ($a \in \mathbb{R}$) et positives (à partir d'un certain rang).

Si $f(x) \underset{x \to b^-}{\sim} g(x)$ alors les intégrales $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ et $\displaystyle\int_a^b g(t)\,dt$ sont de même nature.

Preuve. "Copier-coller" et remplacer $+\infty$ par b .

Exemple 3.3.3.1.

- $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{\ln^\beta x}\,dt$. Comme $\displaystyle\frac{1}{\ln^\beta x} \underset{t \to 1}{\sim} \frac{1}{(t-1)^\beta}$, on peut conclure selon les valeurs de β.
- $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{t}}{\sin t}\,dt$. Comme $\displaystyle\frac{\sqrt{t}}{\sin t} \underset{t \to 0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}}$, on peut conclure.

3.4 Fonctions non de signe constant

Exemple 3.4.0.2. $\displaystyle\int_0^1 \sin\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) dt$ est convergente :

Poser $u = \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ dans $\displaystyle\int_X^1 \sin\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) dt$, pour $X \in]0, 1]$ ...

Exemple 3.4.0.3. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x}\,dx$ est convergente :

Exemple 3.4.0.4. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin\left(\frac{1}{t}\right)}{t^2}\,dt$ est divergente :

4 Techniques complémentaires, étude de convergence, calcul

Préalables à l'étude d'une intégrale généralisée :

- Etude de l'intégrande : ensemble de définition, continuité (par morceaux), prolongements continus.
- Décomposition du problème en problèmes d'intégrales généralisées en une seule extrémité.
- ...

> Rappel : Il ne faut jamais mettre en œuvre une intégrale généralisée dans une formule avant d'avoir prouvé sa convergence.
> Les calculs doivent se faire sur des intégrales définies, entre des bornes qui sont éventuellement des variables.
> **Voir (et revoir) les commentaires de l'introduction.**

Une intégrale peut relever de plusieurs techniques, consécutives ou simultanées.

4.1 Utilisation de primitives

Exemple 4.1.0.5. $\displaystyle\int_0^1 \ln x\,dx$ (converge, vers -1) ; $\displaystyle\int_1^{+\infty} \ln x\,dx$ (diverge)

4.2 Comparaison à une intégrale de Riemann

Exemple 4.2.0.6. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{|\ln x|^\beta}\,dx$ (généralisée en 0 et 1, avec intégrande continu sur $]\,0,1\,[$).

Au voisinage de 0 **:** $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}\,\frac{1}{|\ln x|^\beta} = 0 < 1.$

$$\exists\, a>0 \ :\forall x \in]\,0,a\,[\,,\ 0 \leqslant \frac{1}{|\ln x|^\beta} < \frac{1}{\sqrt{x}}$$

L'intégrale est convergente en 0^+, quelque soit β.

Au voisinage de 1 **:** $\displaystyle\frac{1}{|\ln x|^\beta} \underset{x\to 1}{\sim} \frac{1}{|x-1|^\beta}$

L'intégrale est convergente en 1, si et seulement si $\beta < 1$.

Exemple 4.2.0.7. $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha \ln^\beta x}\,dx$ (généralisée en $+\infty$, avec intégrande continu sur $[\,2,+\infty\,[$).

Pour $\alpha>1$ **:** $\displaystyle x^{\frac{\alpha+1}{2}} \times \frac{1}{x^\alpha \ln^\beta x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0<1$

$$\exists\, a>2 \ :\forall x \in [a,+\infty[\,,\ 0 \leqslant \frac{1}{x^\alpha\,|\ln x|^\beta} < \frac{1}{x^{\frac{\alpha+1}{2}}}$$

Comme $\dfrac{\alpha+1}{2} > 1$, cela prouve que l'intégrale est convergente en $+\infty$, quelque soit β.

Pour $\alpha<1$ **:** $\displaystyle x^{\frac{\alpha+1}{2}} \times \frac{1}{x^\alpha \ln^\beta x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty>1$

$$\exists\, a>2 \ :\forall x \in [a,+\infty[\,,\ \frac{1}{x^\alpha\,|\ln x|^\beta} > \frac{1}{x^{\frac{\alpha+1}{2}}} \geqslant 0$$

Comme $\dfrac{\alpha+1}{2} < 1$, cela prouve que l'intégrale est divergente en $+\infty$, quelque soit β.

Pour $\alpha=1$ **:** on sait calculer une primitive de $x \longmapsto \dfrac{1}{x\ln^\beta x}$ ...
ce qui permet de conclure selon les valeurs de β ....

4.3 Intégration par parties

Travailler sur des intégrales définies !

Exemple 4.3.0.8. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,dt$

Avec **deux variables indépendantes** X et Y, telles que $0 < X < Y < +\infty$,

$$\int_X^Y \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,dt = \cdots$$

Il ne reste plus qu'à vérifier qu'il y a une limite quand X tends vers 0, **puis** quand Y tends vers $+\infty$, ce qui prouve la convergence, mais ne donne pas la valeur (on admettra que c'est $\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$).

Exemple 4.3.0.9. $\displaystyle\int_0^1 \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\right)\,dt$ $\begin{cases} 1. \text{ Etablir la convergence.} \\ 2. \text{ IPP entre } 0 \text{ et } X. \end{cases}$

Valeur exacte parmi $\pi \ln 2$, $\dfrac{\pi^2\sqrt{2}}{3}$, $\dfrac{\pi\left(2-\sqrt{2}\right)}{2}$, $\pi + \arctan\dfrac{2}{3}$.

Exemple 4.3.0.10. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{(1+t)^2}\,dt$ $\begin{cases} 1. \text{ Etablir la convergence.} \\ 2. \text{ IPP entre } X \text{ et } 1. \end{cases}$

et on obtient également la valeur exacte, parmi $-\ln 2$; $2\ln 2 + \dfrac{1}{5}$, $\pi - \arctan 1/2$, $\arctan 2$.

4.4 Changement de variable

Travailler sur des intégrales définies et gérer les bornes lors des changements de variables !

Exemple 4.4.0.11. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^3}\,dt = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$ (valeur à vérifier ...)

Convergence puis calcul de $\displaystyle\int_0^X \frac{1}{1+t^3}\,dt$ $\begin{cases} \text{avec le changement de variable : } u = 1/t, \\ \text{ou par décomposition en éléments simples (dans } \mathbb{R}\text{).} \end{cases}$

Exemple 4.4.0.12. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{(1+t)\sqrt{1-t^2}}\,dt = \ln 2 - \frac{\pi}{2}$ (valeur à vérifier ...)

Convergence et ensuite calcul de $\displaystyle\int_X^Y \frac{\ln t}{(1+t)\sqrt{1-t^2}}\,dt$ avec les changements de variables successifs $u = \arcsin t$ puis $x = \tan\dfrac{u}{2}$.

4.5 Décomposition de l'intégrande

La décomposition de l'intégrande est une très bonne idée ... à condition qu'elle ne se transforme pas en **une très mauvaise écriture ....**

Exemple 4.5.0.13. $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{x^2+x+1}{x(x-1)(x^2+1)}\,dx = ?$ $\begin{cases} 1. \text{ Etablir la convergence.} \\ 2. \text{ Calculer la valeur exacte } \ldots . \end{cases}$

Ici, si on ne prends pas de précautions, on risque d'obtenir une somme d'intégrales divergentes !

Exemple 4.5.0.14. $\displaystyle\int_0^1 \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\,dx = ?$ $\begin{cases} 1. \text{ Etablir la convergence.} \\ 2. \text{ Calculer la valeur exacte } \ldots . \end{cases}$

< $\mathcal{FIN}$ >