Lecture 10 局域化.

参考: 教材 Chap. 13; "Gang of four" paper

E. Abrahams, P. W. Anderson, D. C. Licciardello, T. V. Ramakrishnan.

Phys. Rev. Lett. 42 673 (1979).

1) 局域化: 模型与基本图象.

* 杂质 (Disorder) 模型.

Site disorder: $\hat{H} = \sum_i \epsilon_i c_i^\dagger c_i - V \sum_{\langle ij \rangle} (c_i^\dagger c_j + h.c.)$

$\langle \epsilon_i \rangle = 0$; $\langle \epsilon_i^2 \rangle = W$.

Disorder parameter: W/V.

$W/V = 0$: no disorder $W/V = \infty$: localized.

* Disorder average.

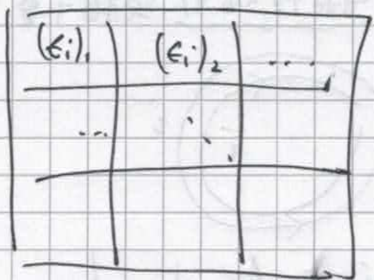
- ϵ_i 服从某随机分布.
- $\langle A \rangle \leftarrow$ 对 ϵ_i 的分布求平均.

实际体系: 热力学极限; 某一个特定的 ϵ_i.

理论/数值分析: disorder average

假设: disorder average = 热力学极限下的平均性质.

Self averaging:



* Green's functions: 为什么一个两体(无相互作用)问题会出现在固体理论中??

$\hat{H} = \sum_{ij} (\epsilon_i \delta_{ij} - V_{ij}) c_i^\dagger c_j$.

$G_{ij}^{-1}(\omega_n) = \omega_n + V_{ij} - \epsilon_i \delta_{ij}$.

微扰展开 + disorder average: 类似多体系统的技术.

(本课程不讲.

2) Weak localization: Part 1.

W/V << 1，定义 $\gamma = \frac{1}{\pi k_F l} << 1$　l: 平均自由程.

$\gamma \to 0$ 极限：单杂质散射. Drude 公式

$l = v_F \tau = \frac{\hbar k_F}{m}\tau$.

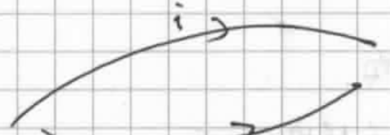
$$\sigma_0 = \frac{e^2 n_e}{m}\tau.$$

$\gamma << 1$：　$\sigma = \sigma_0 + \delta\sigma + O(\gamma^2)$.

$$\delta\sigma \sim \gamma \cdot \sigma_0$$

σ_0：经典极限，不同散射事件之间的经典叠加.

$\delta\sigma$：量子修正.



$$P = \left|\sum_i A_i\right|^2 = \sum_i |A_i|^2 + \sum_{i,j} A_i^* A_j.$$

一般来讲，$\langle \sum_{ij} A_i^* A_j \rangle \to 0$

但对于一种情况有对称性保护的相干叠加，

$P_{i\to i} =$ 

$= |A_i + A_{\bar i} + \cdots|$　　时间反演不变 ⇒ $A_i = A_{\bar i}$

$$A_i = t_{i_1 i_2} t_{i_2 i_3} \cdots t_{i_N i_1}$$

$$A_{\bar i} = t_{i_1 i_N} t_{i_N i_{N-1}} \cdots t_{i_2 i_1}$$

$$= t^*_{i_1 i_2} t^*_{i_2 i_3} \cdots t^*_{i_N i_1}.$$

时间反演不变 $t_{ij} = t_{ij}^* = t_{ji}$ ⇒ $A_i = A_{\bar i}$

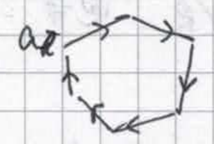
$$|A_i + A_{\bar i}|^2 = 4|A_i|^2 > |A_i|^2 + |A_{\bar i}|^2 = 2|A_i|^2.$$

∴ 相较于 σ_0 中的非相干贡献，量子干涉效应增大 $P_{A\to A}$ 概率；减小 σ.

$\sigma = \sigma_0 + \delta\sigma$,　$\delta\sigma < 0$.　$\delta\sigma \propto P_{A\to A}$.

3) Weak localization: Part II.

* 计算 $P_{a\to a}$

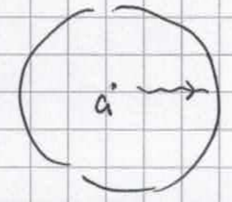


- 电子 $t=0$ 处于 a 点.

- $t>0$: 电子开始做随机行走 (random walk): 布朗运动

步长 l, 每步时间 τ. 每步方向随机(与之前运动无关联).

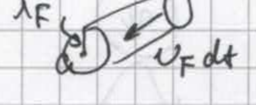
⇒ 扩散运动 $D_0 = l^2/\tau = v_F^2\tau$. (Einstein 关系).



$$\langle \vec r\rangle = \sqrt{D_0 t}$$

$$V(t) \sim \langle \vec r\rangle^d = (D_0 t)^{d/2}$$. —电子在时刻 t 分布的体积.

- 电子在 t 至 $t+dt$ 时刻回到 a 点的概率:



$$dP \propto dV/V, \quad dV = \lambda_F^{d-1} v_F\, dt$$

$$\therefore\ P_{a\to a} \propto \int \frac{dV}{V(t)} = \int \frac{\lambda_F^{d-1} v_F\, dt}{(D_0 t)^{d/2}}.$$

积分上下限: 下限为 τ: $t\gg\tau$ 才满足扩散方程. ($t<\tau$ 不同会有碰撞)

上限为 τ_ϕ, 退相干时间. 来自相互作用: 电-声子散射 或电子-电子相互作用.

$$\frac{|\delta\sigma|}{\sigma_0} \propto P_{a\to a} \propto \int_\tau^{\tau_\phi} \frac{\lambda_F^{d-1} v_F}{D_0^{d/2}} \frac{dt}{t^{d/2}}$$

$$\frac{\delta\sigma}{\sigma_0} = -\gamma_d \begin{cases} \left(\frac{\tau_\phi}{\tau}\right)^{1/2}: & d=1 \\ \frac{1}{k_F} \ln\frac{\tau_\phi}{\tau}: & d=2 \\ \frac{1}{k_F^2}\left(\frac{\tau}{\tau_\phi}\right)^{1/2}: & d=3. \end{cases}$$

$T\to 0$: $\tau_\phi\to\infty$ 退相干来自热涨落.

$\tau_\phi/\tau\to\infty$: $d=1,2$: $\frac{|\delta\sigma|}{\sigma}\to\infty$

局域化 ∅; 微扰论失效.

$d=3$: $\frac{\delta\sigma}{\sigma} \propto -\left(\frac{\tau}{\tau_\phi}\right)^{1/2}\to 0$

微扰理论 OK.

* 磁电阻: $\vec B\neq 0$ 破坏时间反演对称性. 破坏相干性 ⇒ 破坏弱局域化

电导上升.

4) The Thouless # g

定义: $g(L)=\frac{2\hbar}{e^2}G(L)$ $G=1/R$: 电导.

$g(L)$ 为无量纲参数.

$g(L)$ 和微观能级的关系:

$$g(L)=\Delta E\Big/\left(\frac{dE}{dN}\right).$$

$$\Delta E = E_{pbc}-E_{a-pbc}$$

周期性与反周期性边界条件下能量之差.

dE/dN: 能级间隔. (@某个能量 $E=\mu$).

* 局域态: localized state.

不受边界条件影响.

$\Delta E = 0$

$\therefore \Delta E\Big/\left(\frac{dE}{dN}\right)\to 0$ 对应 $G\to 0$.

$\left(\Delta E\sim e^{-L/\xi_L},\ \frac{dE}{dN}\sim L^{-d}\right)$.

* 巡游态/延展态: itinerant / extended state.

$\psi(x)\sim e^{ikx}$

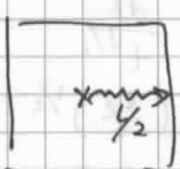
受边界条件影响.

例如: $E=\frac{k^2}{2m}$; k 由 $\frac{2\pi}{L}n$ 变成 $\frac{2\pi}{L}(n+\frac{1}{2})$.

$$\Delta E\sim\frac{1}{L^2}$$

估计: $\Delta E\sim\hbar/t$,

t: 由中心扩散至边界的时间.



$\left(\frac{L}{2}\right)^2 = D_0 t$

$D_0 = l^2/2\tau = \frac{1}{2}v_F^2\tau$.

Drude 公式: $\sigma=\frac{e^2 n_e}{m}\tau=\frac{2e^2 n_e}{m v_F^2}D_0 \Rightarrow D_0=\frac{m v_F^2}{2e^2 n_e}\sigma$

$$\Delta E=\hbar/t=\hbar\frac{4D_0}{L^2}=\hbar\frac{4}{L^2}\frac{m v_F^2}{2e^2 n_e}\sigma=\frac{2\hbar\sigma}{e^2 n_e L^2}m v_F^2.$$

$$\frac{dE}{dN}\sim\frac{m v_F^2}{n_e L^d}$$

$$\therefore \Delta E\Big/\frac{dE}{dN}\sim\frac{2\hbar}{e^2}\sigma L^{d-2}=\frac{2\hbar}{e^2}G(L)$$

5) 重整化群. $g(L)$ 随 L 的变化.

定义, $\beta(\ln g) = \dfrac{d \ln g(L)}{d \ln L}$.

假设: ① $g \to \infty$: 费米液体(金属)行为.

热力学极限下 $\sigma(L \to \infty) \to$ 常数 σ_0.

$$g(L) \to \sigma L^{d-2}.$$

$$\ln g \sim (d-2) \ln L$$

$$\beta(g) = \frac{d \ln g}{d \ln L} = d-2.$$

$\therefore \ \beta(\ln g \to \infty) = d-2$.

② $g \to 0$: 局域化.

$$g(L) \to e^{-L/\xi_L} \quad (L_0^d e^{-L/\xi_L}).$$

$$\ln g(L) = -L/\xi_L \ (+ d \ln L) + \cdots$$

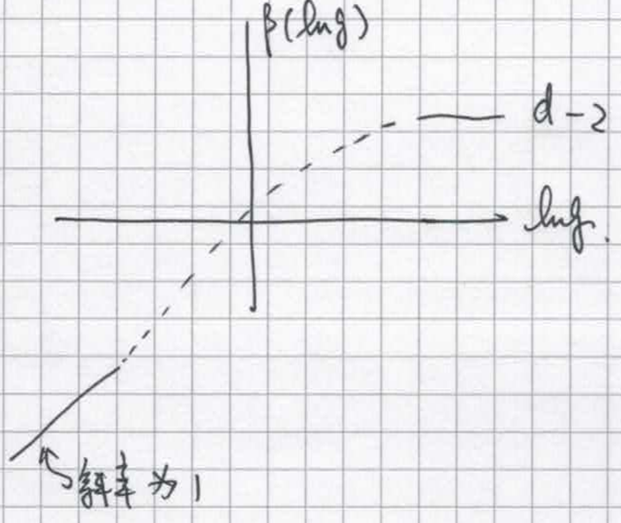
令 $\ln L = x$. $L = e^x$

$$\ln g(L) = -\frac{1}{\xi_L} e^x + \cdots$$

$$\beta(\ln g) = \frac{d \ln g(L)}{d \ln L} = \frac{d\left(-\frac{1}{\xi_L} e^x + \cdots\right)}{dx} = -\frac{1}{\xi_L} e^x + \cdots = \ln g + \cdots$$

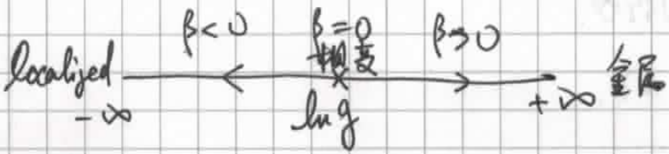
$\therefore \ \beta(\ln g) \sim \ln g$ as $g \to 0$ or $\ln g \to -\infty$.

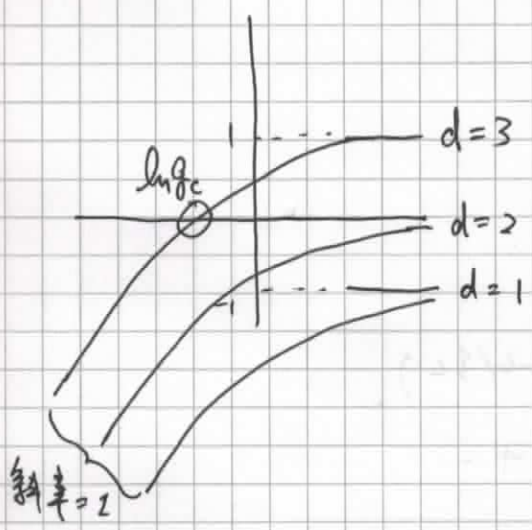
③ 假设 β 为单调函数.



6) 重整化群流: Anderson Localization.

$L\to\infty$: L 变大时 $\beta = \frac{d\ln g}{d\ln L} \begin{matrix} >0 \\ <0 \end{matrix} \Rightarrow \ln g$ 变大 / 变小.





$d=3$: 金属/绝缘体相变

$d<3$: 总是 localize.

实际体系: 被相互作用导致的退相干时间/长度截止.

实际电子体系库仑相互作用太强, 很难看到 Anderson 局域化.

可以在光学体系中看到.