

凸优化在多机编队控制中的应用

姓	名：方尧
学	号 190410102
专	业：自动化
学	院：机电工程与自动化学院

哈尔滨工业大学

2023 年 01 月

摘 要

本文第一部分引入了多智能体系统，阐述了多智能体系统中的研究重点问题以及发展趋势。在第二部分中，以二维平面三无人机系统的协同编队为例阐述凸优化、对偶规划在多智能体系统中的应用。建立多无人机编队队形保持模型后，推导出对偶函数中原变量与对偶变量之间的关系，将原来的约束优化问题简化为一个只有单变量的无约束的对偶优化问题，采用梯度投影算法来解决对偶优化问题。结果表明，三架无人机都可以实现跟踪参考轨迹的目标。迭代次数为 50 次时，梯度投影算法终止，迭代过程取得了稳定收敛，总体上取得了很好的效果。

关键词：凸优化；对偶规划；多智能体；多机编队控制；

1 多机编队控制问题

1.1 多智能体系统

大自然群体现象启发多智能体协同控制理论研究,理论研究指导工程应用,工程应用需求启发新的理论研究。



图 1-1 大自然集群现象

大自然中多智能体系统具有以下特点^[1]: 多个个体,个体间存在信息交流;具有自主行为;没有中央“领导者”;仅能感知到邻居行为;呈现一定的群体行为。

多智能体系统发展迅速,研究重点内容为:无人机分布式空中作战;无人舰艇编队;多无人机协同搬运;智能电网。多智能体协同控制前沿问题为:一致性问题;蜂拥问题;编队问题;领导跟随问题;多领导-跟随者包含控制问题;二分一致性问题。

多智能体协同控制将会以 5S(小型、安全、智能、敏捷、集群)为发展要求,电脑动画制作、无人机编队及协同搬运、灾难现场搜救、人无人机地面机器人协同作战及探测、将会是将来的发展趋势。

1.2 多无人机协同编队

多无人机编队的协同控制问题是其关键技术和研究重点之一。多无人机编队控制是指在任务过程中,如何形成和保持一定的几何形状,以适应平台性能、战场环境和战术任务。多无人机编队控制主要有两个问题需要解决。一个是编队队形形成,另一个是编队队形保持。编队形成包括如何在飞行前生成地层。

队形保持包括在不同几何形状下的转换问题。此外，编队保持另外一个主要问题是在保持几何形状不变的同时收缩或者扩大队形形状。

一般来说，多目标在执行各自的任務过程中考虑不同的约束，通过结合目标和多种约束，得到了一个优化问题。最后考虑选择某些合适的算法来求解该优化问题^{[2]-[4]}，如粒子滤波算法、多目标优化的蚁群算法、共识遗传算法等等。

本文以二维平面三无人机系统的协同编队为例阐述凸优化、对偶规划在多智能体系统中的应用。

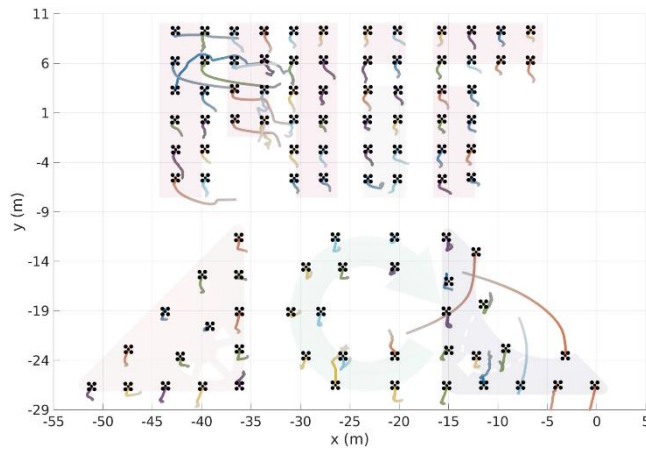


图 1-2 无人机编队控制示例^[5]

2 凸优化在多机编队中应用

2.1 多机编队保持模型

这里直接给出问题建模模型^[5]，模型如下：

$$\begin{aligned}
 & \min_{u_i(t), s_i(t), \tilde{s}_i, \tilde{\tilde{s}}_i} \sum_{i=1}^T [J_i(s_i, u_i) + \sum_{j=1}^T J_{ij}(\tilde{s}_i, \tilde{\tilde{s}}_i)] \\
 & s.t. \quad s_i = E s_i^0 + F u_i \\
 & \quad u_i(t) \in U_i, s_i(t) \in S_i, \\
 & \quad \tilde{s}_i = s_i, \tilde{\tilde{s}}_{ij} = \tilde{s}_j, \forall i, j \in [0, I]
 \end{aligned} \tag{2-1}$$

其中， s_i 为状态变量， u 为输入， $\tilde{\tilde{s}}_i = (\tilde{s}_{i1} \tilde{s}_{i2} \dots \tilde{s}_{il})'$ ，式(2-1)是四决策变量优化问题。

2.2 对偶规划设计

拉格朗日函数为：

$$\begin{aligned}
 L(s_i, u_i, \tilde{s}_i, \tilde{s}_{ij}) &= \sum_{i=1}^T \left[J_i(s_i, u_i) + \sum_{j=1}^T J_{ij}(\tilde{s}_i, \tilde{s}_{ij}) \right. \\
 &\quad \left. + \lambda_i(s_i - Es_i^0 - Fu_i) + \mu_i(s_i - \tilde{s}_i) \right. \\
 &\quad \left. + \gamma_i(\tilde{s}_{ij} - \tilde{s}_j) \right] \\
 &= \sum_{i=1}^T \left[J_i(s_i, u_i) + \lambda_i s_i - \lambda_i Es_i^0 - \lambda_i Fu_i + \mu_i s_i \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{j=1}^T J_{ij}(\tilde{s}_i, \tilde{s}_{ij}) - \mu_i \tilde{s}_i + \gamma_i \tilde{s}_{ij} - \gamma_i \tilde{s}_j \right] \\
 &= \sum_{i=1}^T \left[L_i(s_i, u_i, \lambda_i, \mu_i) + \tilde{L}_i(\tilde{s}_i, \tilde{s}_{ij}, \mu_i, \gamma_i) \right]
 \end{aligned} \tag{2-2}$$

其中

$$L_i(s_i, u_i, \lambda_i, \mu_i) = J_i(s_i, u_i) + \lambda_i s_i - \lambda_i Es_i^0 - \lambda_i Fu_i + \mu_i s_i \tag{2-3}$$

$$\tilde{L}_i(\tilde{s}_i, \tilde{s}_{ij}, \mu_i, \gamma_i) = \sum_{j=1}^T J_{ij}(\tilde{s}_i, \tilde{s}_{ij}) - \mu_i \tilde{s}_i + \gamma_i \tilde{s}_{ij} - \gamma_i \tilde{s}_j \tag{2-4}$$

其对偶问题为：

$$\min_{\{u_i, s_i, \tilde{s}_i, \tilde{s}_{ij}\}} \sum_{i=1}^T \left[L_i(s_i, u_i, \lambda_i, \mu_i) + \tilde{L}_i(\tilde{s}_i, \tilde{s}_{ij}, \mu_i, \gamma_i) \right]$$

这里分为两部分，前一项只包含 $\{u_i, s_i\}_{i=1}^T$ ，后一项只包含 $\{\tilde{s}_i, \tilde{s}_{ij}\}_{i=1}^T$ 。对偶问题为无约束问题。使用最优必要性条件：

$$\begin{cases} \frac{\partial L_i(s_i, u_i, \lambda_i, \mu_i)}{\partial s_i} = \frac{\partial J_i(s_i, u_i)}{\partial s_i} + \lambda_i + \mu_i = 0 \\ \frac{\partial L_i(s_i, u_i, \lambda_i, \mu_i)}{\partial u_i} = \frac{\partial J_i(s_i, u_i)}{\partial u_i} - \lambda_i F = 0 \end{cases} \tag{2-5}$$

其中的偏导数：

$$\frac{\partial J_i(s_i, u_i)}{\partial s_i} = 2\alpha_i \tilde{Q}s_i + \alpha_i \tilde{c} + 2\beta_i G(Gs_i - z_i^{ref}) \tag{2-6}$$

$$\frac{\partial J_i(s_i, u_i)}{\partial u_i} = \frac{\partial J_i(s_i, u_i)}{\partial s_i} \frac{\partial s_i}{\partial u_i} = \left[2\alpha_i \tilde{Q}s_i + \alpha_i \tilde{c} + 2\beta_i G(Gs_i - z_i^{ref}) \right] F \tag{2-7}$$

最优必要性条件如下：

$$\begin{cases} \frac{\partial L_i(s_i, u_i, \lambda_i, \mu_i)}{\partial s_i} = \frac{\partial J_i(s_i, u_i)}{\partial s_i} + \lambda_i + \mu_i = 0 \\ \frac{\partial L_i(s_i, u_i, \lambda_i, \mu_i)}{\partial u_i} = \frac{\partial J_i(s_i, u_i)}{\partial u_i} - \lambda_i F = 0 \end{cases} \quad (2-8)$$

其中：

$$\frac{\partial J_i(s_i, u_i)}{\partial s_i} = 2\alpha_i \tilde{Q}s_i + \alpha_i \tilde{c} + 2\beta_i G(Gs_i - z_i^{ref}) \quad (2-9)$$

$$\frac{\partial J_i(s_i, u_i)}{\partial u_i} = \frac{\partial J_i(s_i, u_i)}{\partial s_i} \frac{\partial s_i}{\partial u_i} = [2\alpha_i \tilde{Q}s_i + \alpha_i \tilde{c} + 2\beta_i G(Gs_i - z_i^{ref})] F \quad (2-10)$$

带入上式后得到：

$$2\alpha_i \tilde{Q}s_i + \alpha_i \tilde{c} + 2\beta_i G(Gs_i - z_i^{ref}) + \lambda_i + \mu_i = 0 \quad (2-11)$$

解得：

$$\begin{aligned} \mu_i &= -2\lambda_i \\ s_i &= (2\alpha_i \tilde{Q} + 2\beta_i GG)^{-1} (2\beta_i Gz_i^{ref} - \alpha_i \tilde{c} + \lambda_i) \\ u_i &= F^{-1}(s_i - Es_i^0) \end{aligned} \quad (2-12)$$

同理，对三分量和四分量，最优必要性条件：

$$\frac{\partial \tilde{L}_i(\tilde{s}_i, \tilde{s}_{ij}, \mu_i, \gamma_i)}{\partial \tilde{s}_i} = 0, \quad \frac{\partial L_i(s_i, u_i, \lambda_i, \mu_i)}{\partial \tilde{s}_{ij}} = 0 \quad (2-13)$$

带入可以得到：

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^T \eta_i G[G\tilde{s}_i - G\tilde{s}_{ij} - \Delta z_{ij}] = \mu_i + \gamma_i \\ \eta_i G[G\tilde{s}_i - G\tilde{s}_{ij} - \Delta z_{ij}] = \gamma_i \end{cases} \quad (2-14)$$

也就是：

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^T \gamma_i &= \mu_i + \gamma_i \\ \gamma_i &= \frac{\mu_i}{I-1} = -\frac{2}{I-1} \lambda_i \end{aligned}$$

对偶变量 $\{\gamma_i\}_{i=1}^I$ 可以表达成 $\{\lambda_i\}_{i=1}^I$ 的一表达式。

带回到式(2-14)中：

$$\tilde{s}_i = \tilde{s}_{ij} + (\eta_i GG)^{-1} (\gamma_i + \eta_i G\Delta z_{ij}) \quad (2-15)$$

假设 $\tilde{s}_{ij}, \tilde{s}_i$ 间存在线性仿射关系: $\tilde{s}_i = M\tilde{s}_{ij} + m$

带入得到:

$$\tilde{s}_{ij} = (M - I)^{-1} \left[(\eta_i GG)^{-1} (\gamma_i + \eta_i G \Delta z_{ij}) - m \right] \quad (2-16)$$

综上, $\{\tilde{s}_{ij}, \tilde{s}_i\}_{i=1}^I, \{\gamma_i\}_{i=1}^I$ 可以表达成对偶变量 $\{\lambda_i\}_{i=1}^I$ 的表达式。现在的主要问

题转化为求解 $\min_{\lambda} f(\lambda) = \min_{\lambda} \sum_{i=1}^I f_i(\lambda) = \min_{\lambda} \sum_{i=1}^I [L_i(\lambda_i) + \tilde{L}_i(\lambda_i)]$, 求解 $\{\lambda_i\}_{i=1}^I$

采用常用的梯度投影算法:

$$\begin{cases} \theta^k = \lambda^k + \sigma^k (\lambda^k - \lambda^{k-1}) \\ \lambda^{k+1} = P(\theta^k - \alpha \nabla f(\theta^k)) \end{cases} \quad (2-17)$$

其中, $\lambda^{-1} = \lambda^0, \sigma^k \in (0,1)$

迭代复杂度一般为 $O(1/\sqrt{\varepsilon})$, ε 一般为很小正常数。

权重 σ^k 一般用以下公式迭代选取:

$$\sigma^k = \frac{\tau^k (1 - \tau^{k-1})}{\tau^{k-1}}, k = 0, 1, \dots \quad (2-18)$$

2.3 仿真验证

仿真场景包括三架二维平面构成编队的无人机。

通信拓扑结构为:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

队形保持时间设置为 $\Delta T = 1s$, 最大加速度设为 $35m/s^2$, 最大速度设置为 $250m/s$, 参数设置为 $\alpha_i = 0.01, \beta_i = 0.1, \eta_i = 0.1$

三架无人机的初始位置为 $(0,2500), (0,2300), (0,2200)$

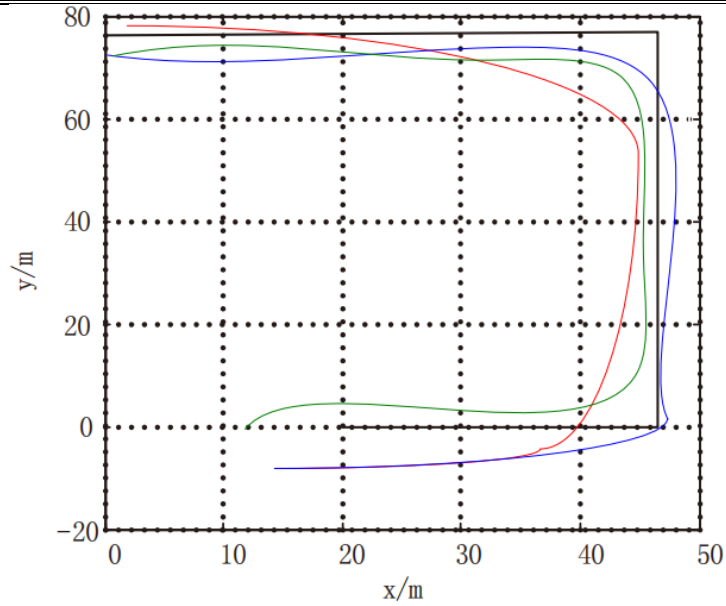


图 2-1 编队飞行路径

黑色曲线表示参考跟踪曲线，三条颜色曲线表示每架无人机的飞行轨迹。从图 2-1 可以看出，三架无人机都可以实现跟踪参考轨迹的目标。目标函数随迭代次数的变化过程曲线如图 2-2 所示。从图 2-2 中我们可以看出，当迭代次数为 50 次时，梯度投影算法终止，迭代过程取得了稳定收敛。

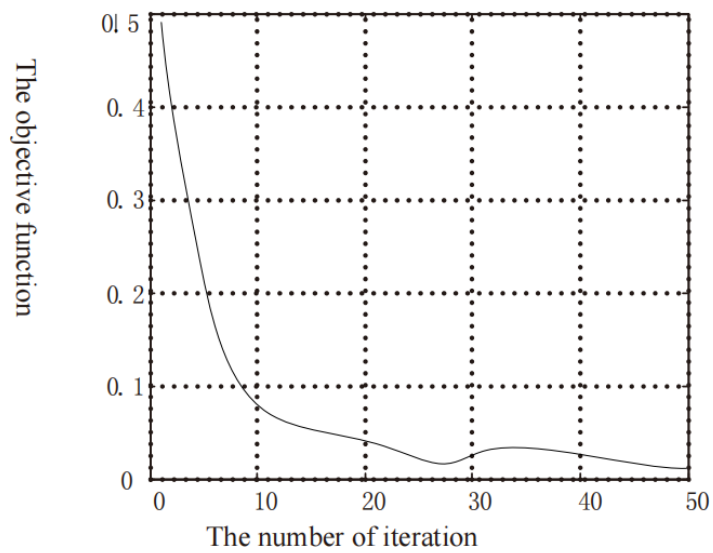


图 2-2 迭代过程

3 参考文献

- [1] Seiler P, Pant A, Hedrick K. Analysis of bird formations[C]//Proceedings of the 41st IEEE Conference on Decision and Control, 2002. IEEE, 2002, 1: 118-123.
- [2] Wang Z, Liu L, Long T, et al. Efficient unmanned aerial vehicle formation rendezvous trajectory planning using Dubins path and sequential convex programming[J]. Engineering optimization, 2019, 51(8): 1412-1429.
- [3] Wang Z, Liu L, Long T. Minimum-time trajectory planning for multi-unmanned-aerial-vehicle cooperation using sequential convex programming[J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2017, 40(11): 2976-2982.
- [4] Xu X, Li H. Adaptive control for a hypersonic vehicle based on evolutionary algorithm and convex optimization[J]. Concurrency and Computation: Practice and Experience, 2021, 33(12): e5555.
- [5] Lusk P C, Cai X, Wadhwania S, et al. A distributed pipeline for scalable, deconflicted formation flying[J]. IEEE Robotics and Automation Letters, 2020, 5(4): 5213-5220.
- [6] Jian-hong W, Yong-hong Z. Dual optimization design in formation keeping trajectory of multi UAV[C]//2015 34th Chinese Control Conference (CCC). IEEE, 2015: 1862-1866.