系统建模与仿真

系统三要素：实体，属性，活动

研究方法：①理论分析法 ②实验法 ③仿真实验法

原则：①可分离性原则（忽略绝大部分联系）

②假设合理性原则 ③因果性原则

系统仿真：模拟真实事物，模仿系统行为.

优：经济、安全、快捷

蒲丰的针. $P=\frac{2l}{\pi a}$

系统建模与分析（LEC3）

数学模型的表示方式.

①微分方程形式，②状态方程 $\begin{cases} \dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t) \\ y(t)=Cx(t)+Du(t) \end{cases}$

③传递 num = B. den = A ④零极点增益形式 $G(s)=k\frac{\prod(s-z_i)}{\prod(s-p_i)}$

逻辑方法：抽象、归纳、推演、类比、移植

频率响应

$M_i\sin(wt+\phi_i) \xrightarrow{LTI} M_o\sin(wt+\phi_o)$

数据、假设模型、准则、三要素

一般流程：明确辨识系统使用目的；预选辨识系统数学模型种类；进行辨识实验设计，记录I/O；野点剔除；模型结构辨识，辨识阶次；参数辨识；模型验证

辨识误差准则 $J(\theta)=\sum f(\varepsilon(k))$

自相关函数 $R_x(t_1,t_2)\triangleq E(x(t_1)x(t_2))=\iint_{-\infty}^{\infty} x_1x_2p_2(x_1,x_2;t_1,t_2)dx_1dx_2$

平稳随机过程 $\mu_x(t_1)=\mu_x(t_2)=\cdots=\mu_x$.

$R_x(t_3,t_4)=R_x(t_1,t_2)=\cdots R_x(\tau)$

各态遍历性（取值等可能）

互相关函数 $R_{xy}(\tau)\triangleq E\{x(t)y(t+\tau)\}$.

互协方差函数 $C_{xy}(\tau)\triangleq Cov\{x(t),y(t+\tau)\}$.

$=E\{[x(t)-\mu_x][y(t-\tau)-\mu_y]\}$.

$=R_{xy}-\mu_x\mu_y$

白噪声过程

$\mu_w=E\{w(t)\}=0$, $R_w(\tau)=E\{w(t)w(t+\tau)\}=\sigma^2\delta(\tau)$

均值为0，脉冲式自相关函数，功率谱密度非0常数~

表示定理

白噪声 → 线性环节（成形滤波器）$H(z^{-1})$ → 有色噪声

乘同余法（产生0-1均匀分布伪随机数）

$\{x_i\}=Ax_{i-1}(\mathrm{mod}\ M)$ 式中 $M=2^k$.

x_0 取正奇数，$A\equiv3(\mathrm{mod}8)$ 或 $A\equiv5(\mathrm{mod}8)$

$\xi_i=\frac{x_i}{M}$，$i=1,2,3,\cdots$ ξ_i 为周期为 2^{k-2} 的伪随机~

正态分布

相关函数法求系统脉冲响应

$R_{xy}(\tau)=\int_0^\infty g(\sigma)R_x(\tau-\sigma)d\sigma$ 维纳霍夫方程

（$x(t)$，$y(t)$ 均为均值为0的平稳随机过程

当 $x(t)$ 为白噪声

$R_x(\tau)=K\delta(\tau)$，$R_x(\tau-\sigma)=K\delta(\tau-\sigma)$

可推出 $g(\tau)=R_{xy}(\tau)/K$

$R_{xy}(\tau)=\frac{1}{T_m}\int_0^{T_m}x(t)y(t+\tau)dt$

$R_{xy}(\tau)=\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1}x_iy_{i+\tau}$

阶跃响应法

测取阶跃响应 → 求传递函数

① 一般取 5%–15% ② 对象处于平衡工况

设用矩形脉冲响应求阶跃响应

$x(t)=x_1(t)-x_1(t-a)$

$y^*(t)=y(t)-y(t-a)$

$y(t)=y^*(t)+y(t-a)$

近似法 $\left(W_0(s)=\frac{k}{Ts+1}\right)$

取图像点，作图可得

面积法 (?)

最小二乘辨识

在模型阶次 n 已知情况下，根据 I/O 估计参数

$$\begin{cases} x(k)+a_1x(k-1)+\dots+a_nx(k-n)=b_0u(k)+\dots+b_nu(k-n) \\ y(k)=x(k)+v(k) \end{cases}$$

观测数据有 $(n+N)$ 个

$$\begin{bmatrix} y(n+1) \\ \vdots \\ y(n+N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y(n) & \cdots & -y(1) & u(n+1) & \cdots & u(1) \\ & & & & & \\ -y(n+N-1) & \cdots & & & & u(N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \\ b_0 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \xi(n+1) \\ \vdots \\ \xi(n+N) \end{bmatrix}$$

$$Y_{N\times 1}=\Phi_{N\times(2n+1)}\theta_{(2n+1)\times 1}+\xi_{N\times 1}$$

$\xi=0$ 时，且 $N=2n+1$，$\theta=\Phi^{-1}Y$

存在 ξ，$N>>2n+1$ 时，

$$\hat{\theta}=(\Phi^T\Phi)^{-1}\Phi^TY$$

取极小值 → $\Phi^T\Phi$ 正定 → R 正定 → R_u 正定

若 $u(k)$ 的 $n+1$ 阶方阵 R_u 是正定的，称序列 $u(k)$ 为 $n+1$ 阶持续激励信号。

最小二乘法对输入要求是 $\{u(k)\}$ 为 $(n+1)$ 阶持续激励信号

$u(k)$ 可以是：白噪声序列，伪随机二位式~，有色噪声~

估计是无偏、一致、有效、渐近正态的

递推最小二乘

$$\boxed{\hat{\theta}_{N+1}=\hat{\theta}_N+P_N\psi_{N+1}(1+\psi_{N+1}^TP_N\psi_{N+1})^{-1}(y_{N+1}-\psi_{N+1}^T\hat{\theta}_N)}$$

$\hat{\theta}_0=0$，$P_0=c^2I_{(2n+1)\times(2n+1)}$，（c 充分大数

$$\psi_{N+1}^T=[-y(n+N)\ \dots\ -y(N+1)\ \ u(n+N+1)\ \dots\ u(N+1)]$$

极大似然、辨识法

步骤：

① 总体分布导出样本的联合概率函数.

② 样本中联合概率函数中自变量看成已知常数

③ 求似然函数最大值点（常用对数转换）

线性差分系统

$$y(k)=-a_1y(k-1)-\cdots-a_ny(k-n)+b_0u(k)+\cdots+b_nu(k-n)+\varepsilon(k)$$

$\varepsilon(k)\sim N(0,\sigma^2)$

$$Y=\Phi\theta+e \Rightarrow e=Y-\Phi\theta$$

似然函数：$L=p(e,\theta,\sigma^2)=(2\pi\sigma^2)^{-\frac{N}{2}}\exp\{-\frac{1}{2\sigma^2}(Y-\Phi\theta)^T(Y-\Phi\theta)\}$

同理求得 $\hat{\theta}_{ML}=(\Phi^T\Phi)^{-1}\Phi^TY$

连续系统离散化原理

①稳定性 ②准确性 ③快速性

数值积分法

(1) 原理 $y_{k+1}=y_k+Q_k=y_k+\int_{t_k}^{t_{k+1}}f(t,y)dt$

(2) 欧拉法（矩形面积代替）

$$Q_k=h\cdot f(t_k,y_k),\ y_{k+1}=y_k+h\cdot f(t_k,y_k)$$

欧拉法截断误差是 $O(h^2)$

(3) 梯形法（梯形面积代替）

$$Q_k=\frac{1}{2}h[f(t_k,y_k)+f(t_{k+1},y_{k+1})]$$

由于 y_{k+1} 未知，利用欧拉法迭代一次，构成预估-校正法

$$\begin{cases} y^0_{k+1}=y_k+hf(t_k,y_k) \\ y_{k+1}=y_k+\frac{h}{2}[f(t_k,y_k)+f(t_{k+1},y^0_{k+1})] \end{cases}$$

计算速度慢，截断误差是 $O(h^3)$

二阶龙格库塔 $O(h^3)$

对 $\begin{cases} \dot{y}=f(t,y) \\ y(t_0)=y_0 \end{cases}$

设 $t_{k+1}=t_k+h$，在 t_{k+1} 附近泰勒展开，保留 h^2

$$y_{k+1}=y_k+f(t_k,y_k)h+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}\right)h^2\Big|_{t=t_k}$$

$$RK2\begin{cases} y_{k+1}=y_k+\frac{h}{2}(k_1+k_2) \\ k_1=f(t_k,y_k) \\ k_2=f(t_k+h,y_k+k_1h) \end{cases}$$

同理，四阶龙格库塔法（其中一种）$O(h^5)$

$$RK4\begin{cases} y_{k+1}=y_k+\frac{h}{6}(k_1+2k_2+2k_3+k_4) \\ k_1=f(t_k,y_k) \\ k_2=f(t_k+\frac{h}{2},y_k+\frac{h}{2}k_1) \\ k_3=f(t_k+\frac{h}{2},y_k+\frac{h}{2}k_2) \\ k_4=f(t_k+h,y_k+hk_3) \end{cases}$$