复变

复数不能比较大小

$z_1=z_2 \Longleftrightarrow x_1=x_2,\ y_1=y_2.$

$z\bar{z}=x^2+y^2$; $\overline{z_1\pm z_2}=\bar{z}_1\pm\bar{z}_2$; $\overline{z_1z_2}=\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2$; $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$

辐角 $\mathrm{Arg}z$ 主辐角 $\arg z \in(-\pi,\pi]$ ($z=0$时, $\mathrm{Arg}z$ 无意义)

复数表示法 $z=x+yi$. $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ $\boxed{z=|z|e^{i\theta}}$

$z_1z_2=|z_1||z_2|\cdot e^{i(\theta_1+\theta_2)}$ $z_1/z_2=\frac{|z_1|}{|z_2|}e^{i(\theta_1-\theta_2)}$

开方 $w=\sqrt[n]{z}=z^{\frac{1}{n}}$ $w=r^{\frac{1}{n}}e^{i\frac{\arg z+2k\pi}{n}}$ $(k=0,1,2,\cdots n-1)$

共轭复数. $z\cdot\bar{z}=|z|^2$ $|z_1z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$

- $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=A \Longleftrightarrow u(x,y)\to \mathrm{Re}[A],\ v(x,y)\to \mathrm{Im}[A]$
- $\lim\limits_{z\to z_0}=f(z_0)$ 称$f(z)$在z_0连续 $\Longleftrightarrow$ $u(x,y)$与$v(x,y)$在(x_0,y_0)连续.

解析函数 z_0可导, z_0邻域可导, 则称$f(z)$在z_0解析

一点解析 $\overset{\Longrightarrow}{\not\Longleftarrow}$ 一点可导

区间可导/解析 $\Longleftrightarrow f(x)=u+iv$, u,v可微,且满足 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$

C-R方程

调和函数: 存二阶连续偏导,且满足拉普拉斯方程 $\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0}$ $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0$

调和 $\overset{\Longleftarrow}{\not\Longrightarrow}$ 解析

$u(x,y)$调和 使$u+iv$解析的v称为u的共轭调和函数

初等函数.

$e^z=e^{z+2\pi i}$

对数 $\mathrm{Ln}z=\ln|z|+i\,\mathrm{Arg}z$

$\ln z=\ln|z|+i\arg z$

$\mathrm{Ln}z=\ln z+i\cdot 2\pi k.\ (k\in\mathbb{Z})$

负数有对数

$\begin{cases}\mathrm{Ln}e^z=z+i2k\pi\\ e^{\mathrm{Ln}z}=z\end{cases}$

$\mathrm{Ln}z^n=n\mathrm{Ln}z$, $\mathrm{Ln}z^{\frac{1}{n}}=\frac{1}{n}\mathrm{Ln}z$ 不一定成立

$(\mathrm{Ln} z)' = (\ln z)' + 0 = \frac{1}{z}$

幂函数

$w = z^a = e^{a\mathrm{Ln} z} = e^{a\ln z}$ 多值函数

$\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$ $\sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$

$|\sin z| \le 1$ $|\cos z| \le 1$ 不再成立

$\mathrm{ch} z = \frac{e^{z}+e^{-z}}{2}$ $\mathrm{sh} z = \frac{e^{z}-e^{-z}}{2}$

$\mathrm{Arccos}\, z = -i\,\mathrm{Ln}(z + \sqrt{z^2-1})$

$\mathrm{Arcsin} z = -i\,\mathrm{Ln}(iz + \sqrt{1-z^2})$

复变积分

$\int_C f(z)dz = \int_C (u+iv)(dx+idy)$

$\oint_C f(z)dz = 0$ C在其解析区间D内 柯西积分定理

复合闭路定理

解析区间内积分与路径无关

柯西积分公式

f(z)在D内解析, C为D内任一条曲线, C内部全含于D.

$$\boxed{f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz}$$

高阶导数公式.(解析函数)

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz \quad (n=1,2,\cdots)$$

级数

$\alpha_n = a_n + i b_n \qquad \lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha \iff \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ 有极限值 S，可称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ 收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n = S$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ 收敛 $\iff \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|$ 收敛 $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ 收敛

阿贝尔定理 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} C_n z^n$ 的收敛域为圆盘且内点绝对收敛

比值法：$\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{C_{n+1}}{C_n}\right| = \rho$，则半径 $R = \frac{1}{\rho} \begin{cases} \frac{1}{\rho} & \cdots \\ +\infty & \rho = 0 \\ 0 & \rho = \infty \end{cases}$

根值法：$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|C_n|} = \rho$，$R = \frac{1}{\rho} \begin{cases} \frac{1}{\rho} & \\ +\infty & , \rho = 0 \\ 0 & , \rho = \infty \end{cases}$

级数加减乘，收敛半径缩小 $|z| < \min\{r_1, r_2\}$

$f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} C_n z^n$ 在收敛域 $|z| < R$ 内解析

逐项可导 $f'(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} C_n \cdot n \cdot z^{n-1}$，$\int_0^z f(z) \cdot dz = \sum\limits_{n=0}^{\infty} C_n \cdot \frac{1}{n+1} z^{n+1}$

泰勒级数

d为 z_0 到D边界的最短距离 $|z - z_0| < d$ 时，$f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n$，$C_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)$

$\sin z = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$	$\frac{1}{1-z} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n$	$\lvert z\rvert<1$	$e^z = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$
$\cos z = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}$	$\frac{1}{1+z} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n$	$\lvert z\rvert<1$	

洛朗~ ☆

洛朗展开定理 $f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{n=+\infty} C_n (z - z_0)^n \qquad C_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z - z_0| = r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta$.

留数.

奇点(孤立) $\begin{cases} \text{可去奇点} & \text{无负幂项} \\ m\text{阶极点} & \text{有限项负幂项} \\ \text{本性奇点} & \text{无穷的负幂项} \end{cases}$

$\lim\limits_{z \to z_0} f(z_0) = a$ 可去　　$\lim\limits_{z \to z_0} f(z_0) = \infty$ 极点　　否则 本性.

$\boxed{z_0 \text{是} f(z) \text{的} m \text{阶极点} \Longleftrightarrow z_0 \text{是} \dfrac{1}{f(z)} \text{的} m \text{阶零点}}$

m阶零点 $\Longleftrightarrow f(z_0)=0 \cdots f^{(m-1)}(z_0)=0,\ f^{(m)}(z_0) \neq 0.$

无穷远点,(为孤立奇点, $R<|z|<+\infty$ 解析.)

$g(z)=f(\frac{1}{z})$ 若 $z=0$ 是 $g(z)$ 的可去~, n阶极点, 本性奇点.

则 $z=\infty$ 是 $f(z)$ 的可去~, n阶~、本性~

或判断 $f(z)$ 的正幂项, ①无,可去 ②m阶, m阶极点 ③无穷.本性.

留数定义为 $\frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)\cdot dz$. C包含孤立奇点 z_0, 其余解析, 记为 $Res[f(z), z_0]$

在 $0<|z-z_0|<R$, 展开洛朗级数. $Res[f(z),z_0] = \frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)dz = \underline{C_{-1}}$

若 ∞ 是 $f(z)$ 孤立奇点, $Res[f(z),\infty] = -\frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)dz = -C_{-1}$

① 可去奇点, $Res[f(z), z_0]=0$

② 若 z_0 为 $f(z)$ 的m阶极点,

$$Res[f(z),z_0] = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z \to z_0}\left[\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}(z-z_0)^m \cdot f(z)\right]$$

一阶极点: $Res[f(z),z_0] = \lim\limits_{z \to z_0}[(z-z_0)f(z)]$

③ 若为本性极点, $Res[f(z),z_0] = C_{-1}$

留数基本定理 $\oint_C f(z)\cdot dz = 2\pi i\sum\limits_{k=1}^{n} Res[f(z),z_k]$, C及C上解析, 内仅含 $z_1 \cdots z_n$ 阶孤立奇点.

扩展留数基本定理 $Res[f(z),z_1] + \cdots + Res[f(z),z_n] + Res[f(z),\infty] = 0$

$$\boxed{Res[f(z),\infty] = -Res\left[f\left(\frac{1}{z}\right)\cdot\frac{1}{z^2}, 0\right]}$$

留数求定积分

① $\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)\cdot d\theta$ （替代 $\sin\theta, \cos\theta$）

$$= \oint_{|z|=1} R\left(\frac{z^2+1}{2z}, \frac{z^2-1}{2iz}\right) \frac{1}{iz} dz.$$

② $\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\,dx$ $R(x)=\dfrac{x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0}{x^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_0}$ $m-n\geq 2$，$R(z)$ 在实轴无孤立奇点。

$$= 2\pi i \sum_{k=1}^{p} \text{Res}[R(z), z_k]$$ ，其中 z_k 为上半平面极点。

③ $\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\, e^{axi}\, dx$ $R(x)=\dfrac{x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0}{x^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_0}$，$m-n\geq 1$. $R(z)$ 在实轴无孤立奇点。

$$= 2\pi i \sum_{k=1}^{p} \text{Res}[R(z)\cdot e^{azi}, z_k].$$ z_k 为 $R(z)$ 在上半平面极点。

$$= \int_{-\infty}^{\infty} R(x)\cdot\cos ax\, dx + i\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\cdot \sin ax\, dx$$

傅里叶变换

傅氏积分定理（$f(t)$ 在任何有限区间满足狄利克雷条件，且绝对可积）

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cdot e^{-i\omega t}\,dt\right) e^{i\omega t}\,d\omega = \begin{cases} f(t), & \text{连续} \\ \dfrac{f(t_+)+f(t_-)}{2}, & \text{间断} \end{cases}$$

傅里叶正变换 $F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cdot e^{-i\omega t}\,dt = \mathcal{F}[f(t)]$

逆变换 $f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, e^{i\omega t}\,d\omega = \mathcal{F}^{-1}[F(\omega)]$

$$f(t)=\begin{cases} 1, & |t|\leq 1 \\ 0, & |t|>1 \end{cases} \qquad \mathcal{F}[f(t)] = F(\omega) = \frac{2\sin\omega}{\omega}$$

$$f(t)=\begin{cases} 0, & t<0 \\ e^{-\beta t}, & t\geq 0 \end{cases} \qquad \mathcal{F}[f(t)] = \frac{\beta - i\omega}{\beta^2+\omega^2} = \frac{1}{\beta + j\omega}$$

脉冲 $\delta(t)$ $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cdot\delta(t-t_0)\,dt = f(t_0)$ $\mathcal{F}[\delta(t)] = 1$

偶函数. $\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}\,d\omega = 2\pi\delta(t)$

$F(\sin\omega_0 t) = \pi i[\delta(\omega+\omega_0) - \delta(\omega-\omega_0)]$

符号函数 $sgn(t) = \begin{cases} -1, & t<0 \\ 1, & t>0. \end{cases}$ $\mathscr{F}[sgn(t)] = \frac{2}{\omega i}$

阶跃函数 $u(t)$ $\mathscr{F}[u(t)] = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{i\omega}$

傅氏变换性质

① 线性性质. $\mathscr{F}[af(t)+bg(t)] = a\mathscr{F}[f(t)] + b\mathscr{F}[g(t)]$

② 位移性质 $\mathscr{F}[f(t-t_0)] = e^{-i\omega t_0}F(\omega)$

$\mathscr{F}[e^{i\omega_0 t}f(t)] = F(\omega-\omega_0)$

③ 缩放性质 $\mathscr{F}[f(at)] = \frac{1}{|a|}F(\frac{\omega}{a})$ $a\neq 0, a\in R$

拉普拉斯变换

拉普拉斯正变换 $F(s) = L[f(t)] = \int_0^{+\infty} f(t)\cdot e^{-st}dt$.

逆变换 $f(t) = L^{-1}[F(\omega)] = \frac{1}{2\pi i}\int_{\beta-i\omega}^{\beta+i\omega} F(s)e^{st}ds$, $t>0$.

$L[1] = \frac{1}{s}$ $L[e^{k}] = \frac{1}{s-k}$ $(Re S > k, k\in R)$

$L[\sin\omega t] = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$ $L[\cos\omega t] = \frac{s}{s^2+\omega^2}$. $Re S>0$

周期为T的函数拉氏变换 $L[f(t)] = \frac{1}{1+e^{-sT}}\int_0^T f(t)\cdot e^{-st}dt$ $(Re S>0)$

$L[\delta(t)] = 1$

拉普拉斯变换性质

① 线性. $L[af(t)+bg(t)] = aF(s)+bG(s)$

② 位移 $L[f(t)] = F(s)$ 则 $L[e^{at}f(t)] = F(s-a)$

③ 延迟性质 $L[f(t)] = F(s)$ $L[f(t-t_0)] = e^{-t_0 s}F(s)$

④ 相似性 $L[f(at)] = \frac{1}{a}F(\frac{s}{a})$, $a>0$

⑤微分性质

设 $L[f(t)]=F(s)$ $f(t)$连续.

$$L[f'(t)]=sF(s)-f(0)$$

$$L[f^{(2)}(t)]=s^2F(s)-sf(0)-f'(0)$$

$$L[f^{(n)}(t)]=s^nF(s)-s^{n-1}f(0)-s^{n-2}f'(0)-\cdots-sf^{(n-2)}(0)-f^{(n-1)}(0)$$

若 $f(0)=f'(0)=\cdots=f^{(n-1)}(0)=0$ 故 $L[f^{(n)}(t)]=s^nF(s)$

⑥积分性质

$$L\left[\int_0^t f(t)\,dt\right]=\frac{1}{s}F(s)$$

$$L\left[\frac{f(t)}{t}\right]=\int_s^{\infty}F(u)\,du$$

像函数导数 $L[t f(t)]=-F'(s)$

积分

求拉氏逆变换

①留数法 $F(s)$仅有有限个孤立奇点, $\lim\limits_{s\to\infty}F(s)=0$

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty}F(s)e^{st}ds=\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[F(s)e^{st},z_k],\quad t>0$$

②部分分式展开法.

$L[1]=\frac{1}{s}$ $L[e^{kt}]=\frac{1}{s-k}$

$L[\sin\omega t]=\frac{\omega}{\omega^2+s^2}$ $L[\cos\omega t]=\frac{s}{s^2+\omega^2}$

$L[t]=\frac{1}{s^2}$ $L[\delta(t)]=1$ $L[\delta'(t)]=s$

$L[e^{at}f(t)]=F(s-a)$ $L[t^n e^{-\alpha t}]=\frac{n!}{(s+\alpha)^{n+1}}$

解微分方程

$$L[f(t)]=F(s)$$

$$L[f'(t)]=sF(s)-F(0)$$

$$L[f''(t)]=s^2F(s)-sf(0)-f'(0)$$