



基于凸优化理论的无人机编队自主重构算法研究

王寅^{1*}, 王道波², 王建宏³

1. 南京航空航天大学航天学院, 南京 210016;

2. 南京航空航天大学自动化学院, 南京 210016;

3. 中国电子科技集团公司第二十八研究所, 南京 210007

* E-mail: yinwangee@nuaa.edu.cn

收稿日期: 2016-05-22; 接受日期: 2016-09-28; 网络出版日期: 2017-02-20

国家自然科学基金(批准号: 61503185)资助项目

摘要 针对无人机编队自主重构中的最优重构航迹规划问题开展研究, 通过综合考虑无人机飞行动力学特性和重构航迹代价, 将其转化为多目标组合优化问题进行求解. 为提高寻优效率, 本文首先提出将多目标组合优化问题转换为非线性单目标优化模型进行求解, 并针对两类优化问题等价性进行了理论分析. 通过引入松弛算子和规范参数, 本文所提出的内点优化算法能够改善经典内点法中的矩阵秩亏损现象, 提高了所得解的最优性. 通过仿真验证了本文所提出的自主重构算法的可行性和有效性.

关键词 无人机编队, 编队重构, 内点算法, 多目标优化

1 引言

无人机编队控制是无人机协同执行任务的基础和前提, 其目的是根据各无人机的具体任务为每架无人机规划出从初始点到目标点的可行飞行航迹, 协调处理各架无人机航迹之间的相互关系, 使其在指定的性能指标下达到最优或次优, 以适应平台性能、战场环境、战术任务等要求. 无人机编队控制主要解决两个问题: 一是编队构成或重构, 包括飞行前编队生成问题, 遇到障碍物时的拆分、重建问题, 增加或减少无人机时的编队重构问题等; 二是编队保持, 包括飞行中编队保持问题, 在不同几何形态间的编队切换问题, 保持几何形态不变条件下的编队收缩、扩张、旋转控制问题等. 当编队任务或者战场环境时刻发生变

化时, 整个无人机编队需要进行调整即重构. 在调整重构过程中, 需要重新调节每架无人机在新编队几何构型中的位置, 并规划出从原初始位置到新终端位置的航迹. 由此所规划的航迹必须确保每架无人机的安全性, 同时考虑无人机的非线性动力学特性, 各种编队重构的无人机代价函数, 以及各类约束条件. 无人机编队自主重构的过程可设计成一个数学优化问题, 其中的优化决策变量是每架无人机的控制输入序列; 代价函数包括侦查无人机代价函数、导弹干扰无人机代价函数、雷达干扰无人机代价函数; 系统的约束条件包括雷达威胁约束、导弹威胁约束、高炮阵地威胁约束、编队防碰撞约束.

目前, 关于多无人机协同与编队控制的研究已成为新的学术焦点与难点. 文献[1]概要地介绍了无人机

引用格式: 王寅, 王道波, 王建宏. 基于凸优化理论的无人机编队自主重构算法研究. 中国科学: 技术科学, 2017, 47: 249–258
Wang Y, Wang D B, Wang J H. A convex optimization based method for multiple UAV autonomous formation reconfiguration (in Chinese). Sci Sin Tech, 2017, 47: 249–258, doi: 10.1360/N092016-00194

编队控制轨迹设计在多基地多无人机协同侦查过程中的辅助作用; 文献[2]在无人机编队建模中引入一种智能化的多Agent系统, 并以此多Agent系统代表各无人机间的通信结构; 文献[3]综述地介绍了无人机路径规划的各种方法, 如蚁群算法、遗传算法、粒子群算法、单元分解法、人工势能场法、路标图法、概率图法等. 所有的这些路径规划方法都有一个共同的特征, 即从不同的角度来刻画单机或多机的任务目标以及在执行各自任务时所需要考虑到的不同限制条件, 从而联合最小化任务目标及众多的约束条件来构成一个最优化问题. 对此最优化问题可采用任何一种智能算法来求解, 目前绝大多数的研究重点都仅仅集中在通过改进智能算法中的某个环节来完成对原最优化问题的求解. 如文献[4]从灰色系统理论来调整智能算法中所涉及的权重值; 文献[5]从信息融合的角度分析怎样对多无人机上的多个传感信息进行融合, 以得到建模过程中的状态融合估计值; 文献[6]将粒子滤波算法应用于非高斯条件下的路径跟踪; 文献[7]提出一种改进的交互式多模型粒子滤波算法, 并将此新算法应用于无人机的目标跟踪; 文献[8]考虑多目标优化的蚁群算法, 通过引入一个权重值使得多目标优化可等价地转换为常见的单目标优化问题; 文献[9]利用一致设计的遗传算法来求解多目标优化问题. 对于无人机编队自主重构问题, 文献[10]运用多目标多人博弈理论将原最优化问题转化为纳什谈判过程, 设计基于纳什谈判的分布式预测控制; 文献[11]在文献[10]的基础上考虑通信延迟的存在, 并设计基于信息滤波算法的信息补偿. 虽都构造了相应的惩罚函数, 但并未详细给出其最优解的求解过程, 仅仅计算惩罚函数关于控制优化变量的若干偏导数.

因绝大多数对单机或无人机编队轨迹规划都是采用智能算法来设计, 智能算法因其简单、易编程而广泛存在于现如今的学术研究中, 从而忽略了最为经典的运筹学优化方法. 因运筹学中的所有优化方法都是来源于数学规划学科领域, 虽然其公式推导特别复杂, 但运筹学优化方法的众多特性如算法的一致性、收敛性、复杂度、迭代步骤次数、满意度等都可以在表现结构上给出一个显式形式, 此显式形式不仅可用于衡量整个算法的性能, 还可供编程设计参考, 这些优点是智能算法所不能相比的.

本文将内点算法应用于无人机编队自主重构的

控制轨迹优化之中. 在文献[10]所建立的无人机编队自主重构的优化模型之中, 建立了3类不同的代价函数, 将各架无人机的动力学方程视为等式约束, 联合雷达威胁、导弹威胁、高炮阵地威胁和编队防碰撞为4类不等式约束, 从而构成一个带有等式和不等式约束条件的多目标优化问题. 对此复杂的多目标优化问题进行求解即可得到航迹规划过程中所需要的控制输入向量. 本文的思路就在于如何从经典的运筹学优化理论角度出发来分析此多目标优化问题. 对于此多目标优化问题, 利用加权和策略可将多目标优化转化为单一的目标优化, 并从理论上证明加权和策略的可行性. 为将原始的最优化问题改写成标准的非线性优化形式, 将各架无人机的动力学等式方程作进一步的拓展, 采用某些形式来描述状态变量集和控制输入集. 对于改写后的标准非线性优化形式, 给出其详细的内点算法求解过程, 归纳内点算法的主要步骤. 当用内点算法计算出来该非线性优化问题的最优控制输入向量时, 可采用文献[12]中的非线性滚动时域预测控制的思想, 仅取该最优控制输入向量中的第一项作用于原系统, 而舍去后面的其余最优项, 依次重复上述优化、选取、滚动过程直至得到无人机编队自主重构的最优或次优控制输入向量. 整个无人机编队自主重构的轨迹设计过程可按照如下的循环过程进行: 实际模型建立→非线性优化→非线性滚动时域预测控制; 在非线形优化过程中又穿插着内点算法的迭代循环过程. 两循环过程犹如控制结构中的外环和内环共同相互作用.

2 无人机编队自主重构的数学模型

无人机编队自主重构指的是在初始考虑时刻时, 多无人机以一种编队模式飞行. 当编队执行任务或周围的战场环境发生改变时, 此时的无人机群能够自主地改变之前正在飞行的编队模式, 而应重新选择新的编队模式. 在两种编队模式重构过程中, 每架无人机在新编队模式中的位置需要重新规划设计, 从而生成一条新的飞行轨迹. 此新飞行轨迹的设计需要考虑各架无人机的动力学特性、飞行代价函数及约束条件等. 无人机编队在执行任务过程中的自主重构过程如图1所示. 图1中绘制了4种不同的编队模式, 表明该多无人机群依次地按照战场周围环境的变化选择下一

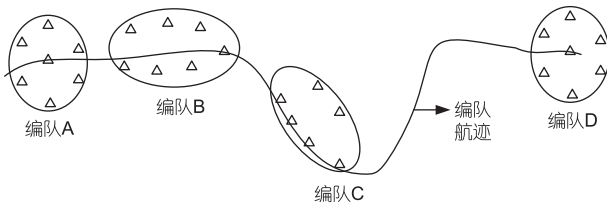


图1 无人机编队自主重构过程

一个新的编队模式。

设定有 n 架无人机在编队中飞行,且整个自主重构过程完成时所需的时间长度为 N 。由于编队中的各架无人机之间是相互解耦的,即不存在动力学耦合现象。记第 i 架无人机在整个编队自主重构任务过程中的状态向量为

$$x_i = [x_i(1) \ x_i(2) \ \cdots \ x_i(N)]^T.$$

对应的控制输入向量为

$$u_i = [u_i(1) \ u_i(2) \ \cdots \ u_i(N)]^T.$$

第 i 架无人机的时不变离散状态方程为

$$\begin{cases} x_i(k+1) = f_i(x_i(k), u_i(k)), \\ x_i \in \Xi_i, u_i(k) \in \Theta_i, \end{cases} \quad (1)$$

式中, f_i 为一个非线性映射,其联合 k 时刻的状态向量 $x_i(k)$ 和控制向量 $u_i(k)$ 映射到 $k+1$ 时刻的状态变量, Ξ_i 和 Θ_i 是第 i 架无人机的可行状态集和控制输入约束集。

本文的主要研究工作在于怎样将无人机编队自主重构的多目标优化问题转化为标准的非线性优化问题,并利用运筹学中的内点算法来求解,且分析转化过程中多目标优化与加权和下的单目标优化之间的等价性。对于无人机编队自主重构建模过程中各种代价函数和各个不等式约束条件的确定请参考文献[10],此处为体现全文理论部分的完整性,以下简要地介绍无人机编队自主重构优化模型的建立。

当无人机编队飞跃战场环境时,对于执行不同任务的无人机所涉及的代价函数也各有区别,设 k 时刻领航的虚拟长机位置为

$$p_l(k) = [x_l(k) \ y_l(k)]^T.$$

第 i 架执行侦查任务的无人机 v_i 的位置为

$$p_i(k) = [x_i(k) \ y_i(k)]^T.$$

则在执行任务过程中侦查无人机 v_i 的代价函数为

$$F_i^1(x_i, u_i) = \sum_{k=1}^N \left(\|p_i(k) - p_l(k)\|^2 + \|u_i(k)\|_{R_i}^2 \right), \quad (2)$$

式中, R_i 表示一个正定加权矩阵,该项的主要作用是起着规范化原优化问题,以保证在最小化运算过程中所得到的最优解不会偏离真实解。类似可定义导弹干扰无人机代价函数和雷达干扰无人机代价函数各自为

$$F_i^2(x_i, u_i) = \sum_{k=1}^N \left(\|p_{a1}(k) - p_i(k)\|^2 + \|u_i(k)\|_{R_i}^2 \right), \quad (3)$$

$$F_i^3(x_i, u_i) = \sum_{k=1}^N \left(\|p_{a2}(k) - p_i(k)\|^2 + \|u_i(k)\|_{R_i}^2 \right), \quad (4)$$

式中,代价函数 $F_i^2(x_i, u_i)$ 是以导弹干扰第 i 架无人机的当前位置 p_i 与其理想位置 p_{a1} 间的距离差构造的, p_{a1} 为理想的导弹干扰位置,代价函数 $F_i^3(x_i, u_i)$ 是在为实现对编队飞行通道最大保护下,以雷达干扰无人机当前位置 p_i 与其理想位置 p_{a2} 间的距离差构造的。

在总共有 n 架无人机位于无人机编队的几何构型之中,联合式(2)~(4)可得需要同时考虑的代价函数为

$$\begin{cases} \min_u [F_i^1(x_i, u_i) \ F_i^2(x_i, u_i) \ F_i^3(x_i, u_i)]_{i=1}^n, \\ u = [u_1 \ u_2 \ \cdots \ u_n]^T, \end{cases} \quad (5)$$

式中,代价函数矢量中共有 $3n$ 项元素需要取最小化运算,要能保证同时使所有的 $3n$ 项元素都最小化的最小解 u 是不存在的,只能在其中寻找一个折中解,此解即为多目标优化理论中的有效解^[13]。在没有任何约束条件下,式(5)所示的最优化问题可采用加权和策略求解,而在无人机编队自主重构中却存在4类需要考虑的不等式约束条件,从而只能使用下文的内点算法来得到一个有效解。

在无人机编队自主重构中需要考虑的各类约束条件有雷达威胁约束、导弹威胁约束、高炮阵地威胁约束和编队防碰撞约束^[14]。其各自的不等式形式依次如下:设雷达 r_j 的位置和探测半径分别为 $p_{r_j} = [x_{r_j} \ y_{r_j}]^T$ 和 $R_{r_j}(k)$,则无人机 v_i 的雷达威胁约束为

$$g_i^1(x_i(k), u_i(k)) = R_{r_j}(k)^2 - \|p_i(k) - p_{r_j}(k)\|^2 \leq 0, \quad (6)$$

设导弹 m_j 的位置为 $p_{m_j} = [x_{m_j} \ y_{m_j}]^T$, 导弹 m_j 受干扰后的安全距离和安全角度余弦分别为 d_{m_j} 和 $cs_{m_j}(k)$, 则无人机 v_i 的导弹威胁约束为

$$g_i^2(x_i(k), u_i(k)) = cs_{m_j}(k) - \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \leq 0. \quad (7)$$

设高炮阵地的辐射半径不受干扰影响, 设定其为常值, 阵地 n_j 的位置和辐射半径分别为 $p_{n_j} = [x_{n_j} \ y_{n_j}]^T$ 和 $R_{n_j}(k)$, 则无人机 v_i 的高炮阵地威胁约束为

$$g_i^3(x_i(k), u_i(k)) = R_{n_j}(k)^2 - \|p_i(k) - p_{n_j}(k)\|^2 \leq 0. \quad (8)$$

设编队无人机间的最小安全距离为 d_{\min} , 则无人机 v_i 的编队防撞威胁约束为

$$g_i^4(x_i(k), u_i(k)) = d_{\min}^2 - \|p_i(k) - p_j(k)\|^2 \leq 0. \quad (9)$$

联合以上关于无人机的多目标代价函数式(5), 无人机的非线性动力学方程式(1), 4类不等式约束式(6)~(9), 可得到无人机编队自主重构的建模为一个非线性的多目标优化问题:

$$\begin{cases} \min_u [F_i^1(x_i, u_i) \ F_i^2(x_i, u_i) \ F_i^3(x_i, u_i)]_{i=1}^n, \\ \text{subject to } x_i(k+1) = f_i(x_i(k), u_i(k)), \\ x_i \in \mathcal{X}_i, u_i(k) \in \mathcal{U}_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, k = 1, 2, \dots, N, \\ g_i^1(x_i(k), u_i(k)) \leq 0, g_i^2(x_i(k), u_i(k)) \leq 0, \\ g_i^3(x_i(k), u_i(k)) \leq 0, g_i^4(x_i(k), u_i(k)) \leq 0. \end{cases} \quad (10)$$

将式(10)中所有的不等式合并成矢量形式为

$$g_i(x, u) = \begin{bmatrix} g_i^1(x_i(k), u_i(k)) \\ g_i^2(x_i(k), u_i(k)) \\ g_i^3(x_i(k), u_i(k)) \\ g_i^4(x_i(k), u_i(k)) \end{bmatrix}, g(x, u) = \begin{bmatrix} g_1(x, u) \\ \vdots \\ g_n(x, u) \end{bmatrix} \leq 0, \quad (11)$$

其中的状态变量和控制输入矢量为

$$x = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^T, u = [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_n]^T. \quad (12)$$

类似有无人机的非线性动力学方程也可合并为

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ \vdots \\ x_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x_1(k), u_1(k)) \\ f_2(x_2(k), u_2(k)) \\ \vdots \\ f_n(x_n(k), u_n(k)) \end{bmatrix}$$

$$= f(x(k), u(k)). \quad (13)$$

利用式(11)~(13)的矢量化, 式(10)所示的非线性多目标优化问题可简化为

$$\begin{cases} \min_u [F_i^1(x_i, u_i) \ F_i^2(x_i, u_i) \ F_i^3(x_i, u_i)]_{i=1}^n, \\ \text{subject to } x(k+1) = f(x(k), u(k)), \\ x_i \in \mathcal{X}_i, u_i(k) \in \mathcal{U}_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, k = 1, 2, \dots, N, \\ g(x, u) \leq 0. \end{cases} \quad (14)$$

在对式(14)利用内点算法之前, 需要事先将式(14)中的多目标最小化转化为常见的单目标优化, 并且还要将式(14)转化为标准的带有等式和不等式约束条件的非线性优化问题.

3 基于内点算法的无人机编队自主重构

3.1 无人机编队自主重构优化问题的转化

对于式(14)中的多目标代价函数矢量:

$$\min_u [F_i^1(x_i, u_i) \ F_i^2(x_i, u_i) \ F_i^3(x_i, u_i)]_{i=1}^n. \quad (15)$$

可采用加权和策略来将其改写为单目标优化问题:

$$\min_u F(u) = \sum_{i=1}^n [\lambda_{1i} F_i^1(x_i, u_i) + \lambda_{2i} F_i^2(x_i, u_i) + \lambda_{3i} F_i^3(x_i, u_i)]. \quad (16)$$

式(16)中的矢量 $\{\lambda_{1i}, \lambda_{2i}, \lambda_{3i}\}_{i=1}^n$ 表示正加权标量值, 且满足如下的条件:

$$\begin{aligned} \lambda_{1i} > 0, \lambda_{2i} > 0, \lambda_{3i} > 0, \\ \sum_{i=1}^n [\lambda_{1i} + \lambda_{2i} + \lambda_{3i}] = 1. \end{aligned} \quad (17)$$

对于最小化问题式(15)与(16)之间的等价性分析在本文第5节内容中, 即在式(17)成立的正加权值条件下, 若式(16)所示的单目标优化问题存在一个最优解, 则该最优解必为多目标优化问题式(15)的一个有效解.

对于式(14)中的无人机非线性动力学方程可改为

$$\begin{cases} x_0 - x_0 = 0, \\ x(k+1) - f(x(k), u(k)) = 0, k = 1, 2, \dots, N-1. \end{cases} \quad (18)$$

式(18)中的第一个等式表示初始状态, 其在优化设计过程中可根据实验测取. 而对于可行状态集 \mathcal{X}_i 和控制输入约束集 \mathcal{U}_i 可定义如下对应的约束^[14]:

$$\begin{aligned}\Xi_i &= \left\{ x_i / \exists u_i \in \Theta_i, \text{ with } G_i^s(x_i, u_i) = 0, \right. \\ &\quad \left. \text{and } H_i^s(x_i, u_i) \leq 0 \right\}, \\ \Theta_i &= \left\{ u_i / \exists x_i \in \Xi_i, \text{ with } G_i^s(x_i, u_i) = 0, \right. \\ &\quad \left. \text{and } H_i^s(x_i, u_i) \leq 0 \right\}.\end{aligned}\quad (19)$$

由文献[14]可知所定义约束集的函数 $G_i^s(x_i, u_i)$ 和 $H_i^s(x_i, u_i)$ 并不需要同时都依赖于两个变量 x_i 和 u_i ; 当函数 $G_i^s(x_i, u_i)$ 和 $H_i^s(x_i, u_i)$ 不依赖于 u_i 时称为纯状态约束; 当函数 $G_i^s(x_i, u_i)$ 和 $H_i^s(x_i, u_i)$ 不依赖于 x_i 时称为纯控制约束; 当函数 $G_i^s(x_i, u_i)$ 和 $H_i^s(x_i, u_i)$ 同时都依赖于 x_i 和 u_i 时称为混合约束。

至此将所有的等式和不等式分别联立组合在一起, 并利用式(16)可得标准的非线性优化问题为

$$\begin{aligned}\min_u F(u) &= \sum_{i=1}^n [\lambda_{1i} F_i^1(x_i, u_i) + \lambda_{2i} F_i^2(x_i, u_i) + \lambda_{3i} F_i^3(x_i, u_i)], \\ \text{with respect to } u &= [u_1 \ u_2 \ \cdots \ u_n]^T, \\ \text{subject to } G(u) &= \begin{bmatrix} x_0 - x_0 \\ [x(k+1) - f(x(k), u(k))]_{k=1}^{N-1} \\ [G_i^s(x_i, u_i)]_{i=1}^n \end{bmatrix} = 0, \\ H(u) &= \begin{bmatrix} g(x, u) \\ [H_i^s(x_i, u_i)]_{i=1}^n \end{bmatrix} \leq 0.\end{aligned}\quad (20)$$

对于式(16)所示的标准非线性优化问题可采用运筹学中的内点算法来继续求解。

3.2 基于内点算法的无人机编队重构的优化方法

内点算法的目的是生成一组迭代序列 u^j , 此时上标符号 u^j 的书写是为了和 k 时刻的控制输入值 $u(k)$ 相区别开来. 该组序列将紧紧地地位于控制输入集合之内. 在每次生成序列的迭代过程中, 将会使用到不等式约束 $H(u)$ 的每一个元素分量, 利用松弛变量 s 可将这些不等式约束转化为等式约束. 从而将式(20)改写为

$$\begin{aligned}\min_u F(u), \\ \text{subject to } G(u) = 0, H(u) + s = 0, s \geq 0.\end{aligned}\quad (21)$$

式(21)中的松弛变量 s 应该为一个选择适当维数的矢量, 其每一元素都应非负. 此时式(21)对应的拉格朗日函数构造为

$$L(u, s, v, w) = F(u) - v^T G(u) - w^T (H(u) + s). \quad (22)$$

根据最优性必要条件可知, 在最小值处等

式 $H(u) + s = 0$ 必成立, 对式(21)应用广义KKT最优条件可得:

$$\begin{cases} \nabla F(u) - \nabla G^T(u)v - \nabla H^T(u)w = 0, \\ S w - \mu e = 0, \\ G(u) = 0, H(u) + s = 0, \end{cases}\quad (23)$$

式(23)中有 $s \geq 0$, $w \geq 0$, $\mu = 0$, $e = (1 \ 1 \ \cdots \ 1)^T$, 矩阵 $S = \text{diag}(s)$, $W = \text{diag}(w)$. 摄动参数 μ 的引入是为了当选择 $\mu > 0$ 时可保证迭代序列远离控制输入的边界. 通常摄动参数 μ 的选取需保证:

$$\mu_j \rightarrow 0 \text{ as } j \rightarrow \infty.$$

为了改进增强式(23)的最优条件, 采用内点算法来求解式(21), 对式(21)引进障碍函数以消除非负条件 $s \geq 0$ 得到:

$$\begin{aligned}\min_u F(u) - \mu \sum_{i=1}^{n_s} \log s_i, \\ \text{subject to } G(u) = 0, H(u) + s = 0.\end{aligned}\quad (24)$$

障碍项 $-\mu \sum_{i=1}^{n_s} \log s_i$ 的添加是为了阻止 s 的元素接近于0, 同样对增加障碍项的式(24)使用广义KKT(Karush-Kuhn-Tucker)最优条件可得:

$$\begin{cases} \nabla F(u) - \nabla G^T(u)v - \nabla H^T(u)w = 0, \\ \mu S^{-1} e + w = 0, \\ G(u) = 0, H(u) + s = 0. \end{cases}\quad (25)$$

对式(25)应用牛顿增量步骤可得系统方程为

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \nabla_{uu}^2 L(u, s, v, w) & 0 & -\nabla G^T(u) & -\nabla H^T(u) \\ 0 & W & 0 & S \\ \nabla G(u) & 0 & 0 & 0 \\ \nabla H(u) & -I & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u \\ \Delta s \\ \Delta v \\ \Delta w \end{bmatrix} \\ = - \begin{bmatrix} \nabla F(u) - \nabla G^T(u)v - \nabla H^T(u)w \\ S w - \mu e \\ G(u) \\ H(u) + s \end{bmatrix}.\end{aligned}\quad (26)$$

当计算出增量 $[\Delta u \ \Delta s \ \Delta v \ \Delta w]$ 后, 新的递推迭代值可计算如下:

$$\begin{aligned}u^{j+1} &= u^j + \alpha_s^{\max} \Delta u, \\ s^{j+1} &= s^j + \alpha_s^{\max} \Delta s, \\ v^{j+1} &= v^j + \alpha_w^{\max} \Delta v,\end{aligned}$$

$$w^{j+1} = w^j + \alpha_w^{\max} \Delta w, \quad (27)$$

其中的两个步长 α_s^{\max} 和 α_w^{\max} 为

$$\begin{aligned} \alpha_s^{\max} &= \max\{\alpha \in (0, 1) / s + \alpha \Delta s \geq (1 - \tau)s\}, \\ \alpha_w^{\max} &= \max\{w \in (0, 1) / w + \alpha \Delta w \geq (1 - \tau)w\}, \end{aligned} \quad (28)$$

式中, $\tau \in (0, 1)$, 常取 $\tau = 0.995$, 为保证式(26)的第2个矩阵具有满行秩, 以使得内点算法并非病态, 即不会表现出奇异性现象, 可将式(26)修改为

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \nabla_{uu}^2 L(u, s, v, w) & 0 & -\nabla G^T(u) & -\nabla H^T(u) \\ 0 & \Sigma & 0 & I \\ -\nabla G(u) & 0 & 0 & 0 \\ -\nabla H(u) & I & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u \\ \Delta s \\ \Delta v \\ \Delta w \end{bmatrix} \\ &= - \begin{bmatrix} \nabla F(u) - \nabla G^T(u)v - \nabla H^T(u)w \\ w - \mu S^{-1}e \\ -G(u) \\ -H(u) - s \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (29)$$

式中, $\Sigma = S^{-1}W$, 为使得赋范函数在迭代过程中是递减的, 即增量矢量 $[\Delta u \ \Delta s \ \Delta v \ \Delta w]$ 是一个下降方向, 可取矩阵 $\begin{bmatrix} \nabla_{uu}^2 L(u, s, v, w) & 0 \\ 0 & \Sigma \end{bmatrix}$ 在 $\begin{bmatrix} -\nabla G(u) & 0 \\ -\nabla H(u) & I \end{bmatrix}$ 的零空间上是正定矩阵。

因根据 Σ 的构造可知 Σ 是一个正定矩阵, 但海赛矩阵 $\nabla_{uu}^2 L(u, s, v, w)$ 有可能是负定的. 为弥补此缺陷, 可在式(29)中取 $\nabla_{uu}^2 L(u, s, v, w) + \delta I$ 来替换海赛矩阵 $\nabla_{uu}^2 L(u, s, v, w)$, 其中的标量 $\delta > 0$ 要选取得充分大, 以保证海赛矩阵的正定性. 另外在内点算法中也要考虑到梯度矩阵 $\nabla G(u)$ 的秩亏损, 即在式(29)所示的基对偶矩阵中做出如下的修改:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \nabla_{uu}^2 L(u, s, v, w) + \delta I & 0 & -\nabla G^T(u) & -\nabla H^T(u) \\ 0 & \Sigma & 0 & I \\ -\nabla G(u) & 0 & \gamma I & 0 \\ -\nabla H(u) & I & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u \\ \Delta s \\ \Delta v \\ \Delta w \end{bmatrix} \\ &= - \begin{bmatrix} \nabla F(u) - \nabla G^T(u)v - \nabla H^T(u)w \\ w - \mu S^{-1}e \\ -G(u) \\ -H(u) - s \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (30)$$

即在式(30)的第1个矩阵中增加了规范参数 $\gamma > 0$. 因迭代式(27)在有限时间段内不会终止, 故可施加一个误差准则函数来判断是否需要终止整个迭代循环

算法.

$$\begin{aligned} & E(u, s, v, w) \\ &= \max \left\{ \|\nabla F(u) - \nabla G^T(u)v - \nabla H^T(u)w\|, \right. \\ & \quad \left. \|\nabla S w - \mu e\|, \|\nabla G(u)\|, \|\nabla H(u) + s\| \right\}. \end{aligned} \quad (31)$$

利用此误差准则函数作为判断终止迭代算法, 可得本节内点算法的基本步骤为:

- (1) 假设给出一对初始值 (u^0, s^0) , 令 $j = 0$;
- (2) 计算拉格朗日乘子 v^0 和 w^0 , 定义参数

$$\mu^0 > 0, \sigma, \tau \in (0, 1);$$

- (3) 检验误差准则函数是否成立

$$E(u^j, s^j, v^j, w^j) \geq \varepsilon,$$

ε 为一个非常小的正数; 若不成立则算法可终止, 此时的迭代优化变量 (u^j, s^j, v^j, w^j) 即可作为非线性优化变量的最优解;

- (4) 求解式(30)计算搜索方向 $[\Delta u \ \Delta s \ \Delta v \ \Delta w]$;

- (5) 利用式(28)确定两步长 α_s^{\max} 和 α_w^{\max} ;

- (6) 利用迭代式(27)求解新的迭代值;

- (7) 令 $\mu^{j+1} = \mu^j, k = k + 1$;

- (8) 转回步3.

以上详细阐述了内点算法在无人机编队自主重构中非线性优化问题的应用, 并逐步在通常的内点算法中做了一些改进策略, 以弥补通常内点算法的不足, 保证能够得到原非线性优化问题的最优解.

3.3 两类优化问题的等价性分析

在求解多目标优化问题时, 本文第3节利用加权和策略将其转化为单目标优化问题, 为说明当正加权标量值满足式(17)条件下, 两优化问题间存在等价性. 因式(15)中共有 $3n$ 项元素, 不妨将式(15)改写为

$$\min_u [F_1(u) \ F_2(u) \ \cdots \ F_{3n}(u)]. \quad (32)$$

则类似式(16)也可方便改写为

$$\min_u F(u) = \sum_{i=1}^{3n} \lambda_i F_i(u). \quad (33)$$

式(32)与(33)虽然在形式上与式(15)和(16)不同, 但实质上是相同的. 只需将式(15)中的 $3n$ 项元素按照顺序全列举出来, 再从头开始排序, 并用式(32)中的符号重新表示. 则式(32)与(33)间等价性的条件归纳为

如下命题.

命题 设 $\lambda_i > 0, i = 1, 2, \dots, 3n$, 且有 $\sum_{i=1}^{3n} \lambda_i = 1$. 若 \hat{u} 为式(33)的一个最优解, 则 \hat{u} 必为式(32)的一个有效解.

证明 设 \hat{u} 为式(33)的一个最优解, 为证明 \hat{u} 是有效的. 设存在某个 u' 满足 $F(u') \leq F(\hat{u})$. 利用正加权值及 $F_i(u') \leq F_i(\hat{u}), i = 1, 2, \dots, 3n$, 可得下式:

$$\sum_{i=1}^{3n} \lambda_i F_i(u') < \sum_{i=1}^{3n} \lambda_i F_i(\hat{u}). \quad (34)$$

选择某充分大正数 M 使得对于加权和问题, 存在一个关于最优解 \hat{u} 的反面结果^[15]. 正数 M 可取:

$$M = (3n-1) \max_{i,j} \frac{\lambda_j}{\lambda_i}. \quad (35)$$

以下利用反证法来继续证明, 设 \hat{u} 不是式(32)的一个有效解, 则存在某个 $i \in \{1, 2, \dots, 3n\}$ 和 u 使得:

$$\begin{aligned} F_i(u) &\leq F_i(\hat{u}), \\ F_i(\hat{u}) - F_i(u) &> M(F_i(u) - F_i(\hat{u})). \end{aligned} \quad (36)$$

对于所有的 $j \in \{1, 2, \dots, 3n\}$ 有 $F_j(u) \geq F_j(\hat{u})$, 则有:

$$F_i(\hat{u}) - F_i(u) > \frac{3n-1}{\lambda_i} \lambda_j (F_j(u) - F_j(\hat{u})), j \neq i. \quad (37)$$

在式(37)的两边同乘以 $\frac{\lambda_i}{3n-1}$ 后取连加运算得:

$$\begin{aligned} \lambda_i (F_i(\hat{u}) - F_i(u)) &> \sum_{j \neq i} \lambda_j (F_j(u) - F_j(\hat{u})) \\ \Leftrightarrow \lambda_i F_i(\hat{u}) - \lambda_i F_i(u) &> \sum_{j \neq i} \lambda_j F_j(u) - \sum_{j \neq i} \lambda_j F_j(\hat{u}) \\ \Leftrightarrow \lambda_i F_i(\hat{u}) + \sum_{j \neq i} \lambda_j F_j(\hat{u}) &> \lambda_i F_i(u) + \sum_{j \neq i} \lambda_j F_j(u) \\ \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{3n} \lambda_i F_i(u) &< \sum_{i=1}^{3n} \lambda_i F_i(\hat{u}). \end{aligned} \quad (38)$$

式(38)中的最后一个不等式与假设 \hat{u} 为式(33)的一个最优解相矛盾, 从而表明 \hat{u} 必为式(32)的一个有效解.

4 仿真与分析

如图2所示, 考虑由4架相同特性的无人机构成编队执行侦查任务, 其中UAV1为长机, 其余3架无人机构为僚机. 无人机长机初始位置为(200 m, 0), 航向90°,

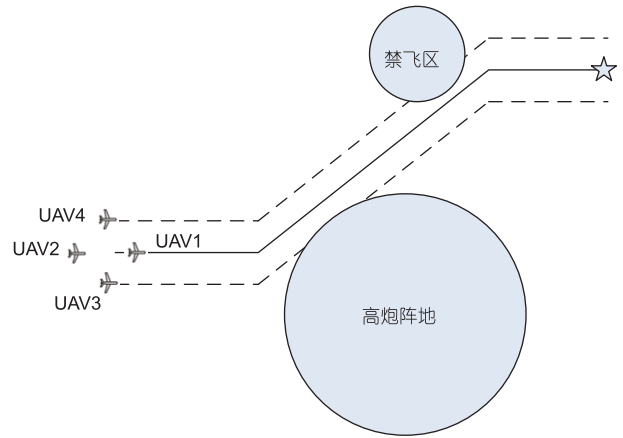


图2 仿真情景示意图

三架僚机与长机构成菱形编队, 对角线距离为400 m.

假设侦查航线已事先规划, 侦查过程中需避开高炮阵地与禁飞区. 禁飞区中心(3400 m, 2100 m), 半径700 m, 高炮阵地中心位置(2800 m, -700 m), 防空半径1200 m. 无人机及编队动力学采用文献[16,17]中的模型, 并假设各无人机已具有航迹、速度和姿态指令的跟踪能力. 无人机的最大转弯坡度为60°, 转弯半径为500 m, 巡航飞行速度50 m/s, 飞行速度可控区间为[40 m/s, 60 m/s].

在利用内点算法作用于无人机编队自主重构优化模型中, 各无人机的加权系数 $Q_i = \text{diag}\{10, 10\}$, 代价函数中的加权矩阵 $R_i = \text{diag}\{1, 10\}$. 离散采样周期取为 $\Delta T = 0.05$ s, 仿真时间 $N = 100$ s, 无人机架次为 $n = 4$, 算法的初始估计值选择为

$$(u^0, s^0) = (0.01 \ 0.01 \ 0.01 \ 0.01)^T.$$

摄动参数 $\mu^0 = 0.05$, 正数 $\varepsilon = 0.01$, 规范参数 $\gamma = 0.5$, 标量值 $\delta = 1.5$.

图3为无人机编队执行侦查任务过程的二维航迹图, 可以看到无人机编队在经过高炮阵地(图3(a))和禁飞区(图3(c)~(e))的过程中产生了队形的变化与重构. 在飞跃禁飞区时, 由于UAV4的跟随飞行航线穿越禁飞区域, 因此UAV4需向右规避使得无人机编队队形发生变化.

图4为 $t = 82$ s时刻, 4架无人机的编队控制目标函数收敛曲线, 可以看到采用本文所提出的基于内点算法的寻优方法具有很快的收敛速度, 迭代5~6次即可

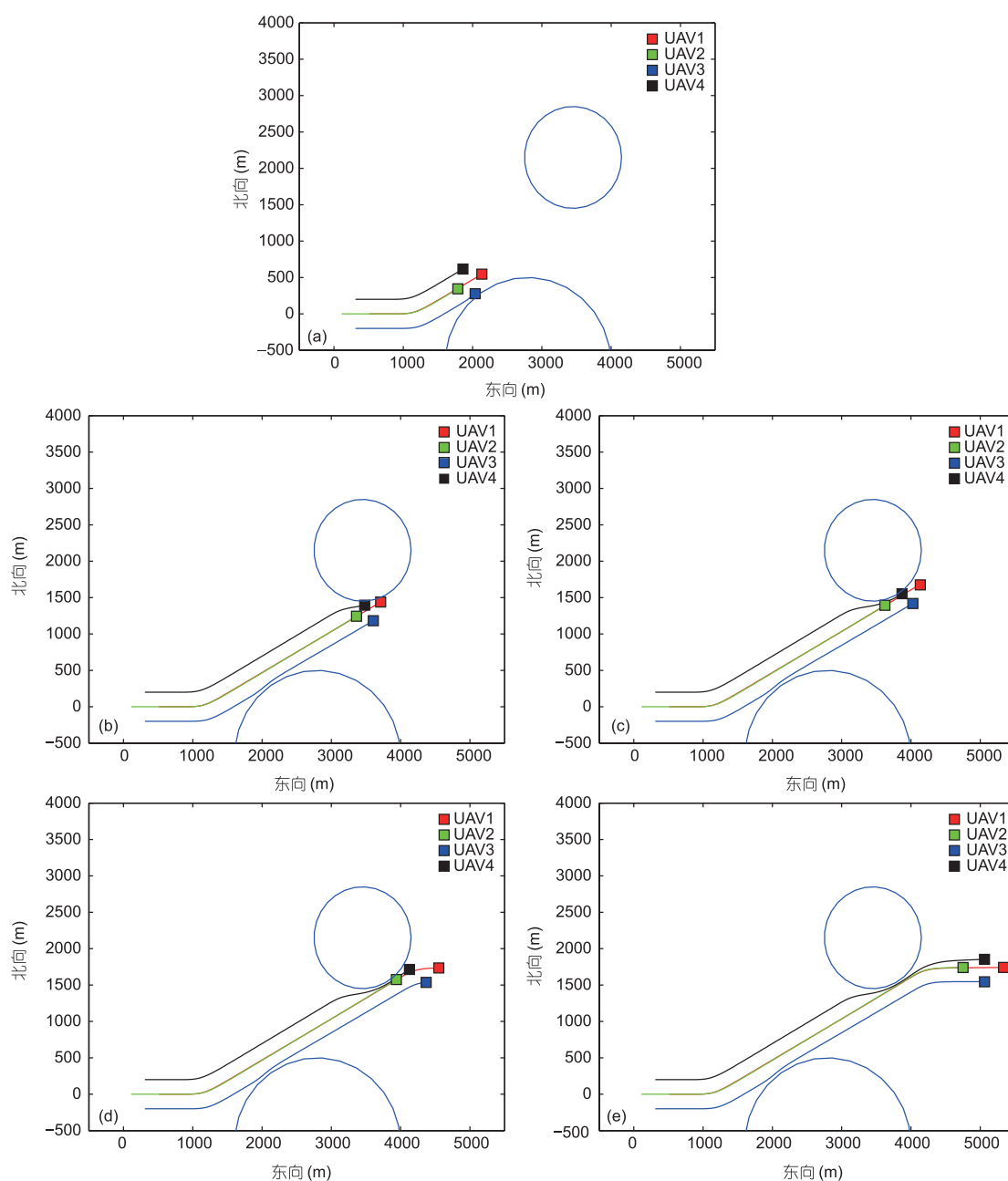


图3 (网络版彩图)无人机编队执行任务过程二维航迹图. (a) 仿真时间 $t=44\text{s}$; (b) 仿真时间 $t=74\text{s}$; (c) 仿真时间 $t=82\text{s}$; (d) 仿真时间 $t=89\text{s}$; (e) 仿真时间 $t=102\text{s}$

收敛. 图5给出了20次仿真中本文所采用的优化算法的平均计算时间曲线(不考虑通信时间), 可以看到本文所提算法的平均单步决策时间约为 0.03 s , 满足一般无人机外回路指令的给定频率, 能够用于无人机的编队控制.

5 总结

本文建立了无人机编队自主重构的非线性多目标优化模型, 利用加权和策略及其合并部分等式和不等式, 从而将非线性多目标优化问题转化为标准的单

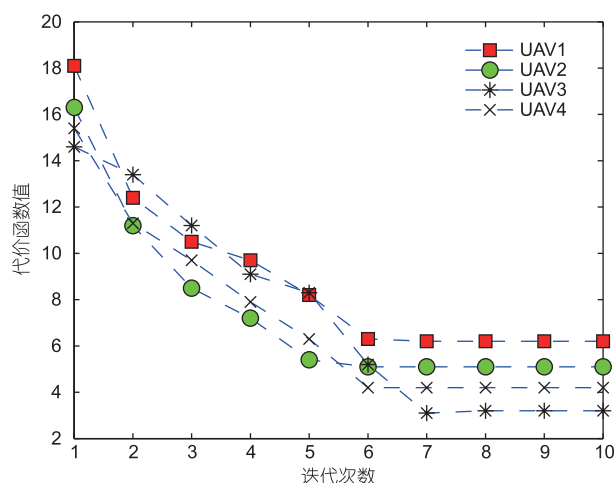
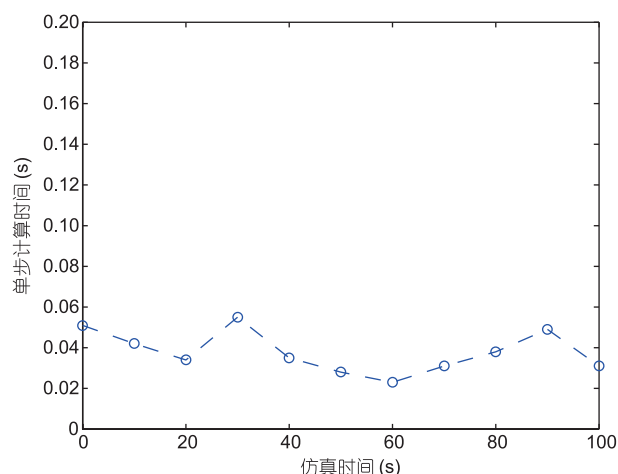
图4 (网络版彩图) $t=82\text{s}$ 时内点优化算法收敛曲线

图5 (网络版彩图)编队控制优化算法平均计算时间

目标非线性优化问题. 进而采用内点算法来求解, 并在内点算法的实现上提出若干改进措施, 以保证得到

原非线性优化问题的最优解. 数值仿真验证了本文所提出的无人机编队自主重构算法的有效性和可行性.

参考文献

- 1 Karimoddini A, Lin H, Chen B M, et al. Hybrid three-dimensional formation control for unmanned helicopters. *Automatica*, 2013, 49: 424–433
- 2 Innocenti M, Pollini L, Giulietti F. Management of communication failures in formation flight. *J Aerospace Comput Inf Commun*, 2004, 1: 19–35
- 3 Rezaee H, Abdollahi F. Motion synchronization in unmanned aircrafts formation control with communication delays. *Commun Nonlinear Sci Numer Simul*, 2013, 18: 744–756
- 4 Triplett B I, Klein D J, Morgansen K A. Cooperative estimation for coordinated target tracking in a cluttered environment. *Mobile Netw Appl*, 2009, 14: 336–349
- 5 Li S, Zhang Y, Zhu Q. Nash-optimization enhanced distributed model predictive control applied to the Shell benchmark problem. *Inf Sci*, 2005, 170: 329–349
- 6 Schoerling D, Van Kleeck C, Fahimi F, et al. Experimental test of a robust formation controller for marine unmanned surface vessels. *Auton Robot*, 2010, 28: 213–230
- 7 Sun H B. Distributed cooperation target tracking for heterogeneous multi-UAV under communication and measurement constraints. *Acta Aeronaut Astronaut Sin*, 2011, 32: 299–310
- 8 Zhang X Q. Research on improved leader-following formation method. *Comput Eng Design*, 2010, 31: 2547–2549
- 9 Innocenti M, Pollini L, Giulietti F. Autonomous formation flight. *IEEE Control Syst Mag*, 2000, 20: 34–44
- 10 茹常剑, 魏瑞轩. 基于纳什议价无人机编队自主重构控制方法. *自动化学报*, 2013, 39: 1349–1359
- 11 茹常剑, 魏瑞轩. 通信延迟条件下无人机编队重构的自主安全控制. *控制理论与应用*, 2013, 30: 1099–1108
- 12 王建宏. 基于先进辨识的控制策略研究及其应用. 博士学位论文. 南京: 南京航空航天大学, 2011
- 13 Ben-Asher Y, Feldman S, Gurfil P, et al. Distributed decision and control for cooperative UAVs using ad hoc communication. *IEEE Trans Contr Syst Technol*, 2008, 16: 511–516
- 14 Chen W H. Nonlinear disturbance observer-enhanced dynamic inversion control of missiles. *J Guid Control Dyn*, 2003, 26: 161–166
- 15 Giulietti F, Mengali G. Dynamics and control of different aircraft formation structures. *Aeronaut J*, 2004, 108: 117–124
- 16 Giulietti F, Innocenti M, Napolitano M, et al. Dynamic and control issues of formation flight. *Aerospace Sci Tech*, 2005, 9: 65–71
- 17 Cook M. *Flight Dynamics Principles*. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2003

A convex optimization based method for multiple UAV autonomous formation reconfiguration

WANG Yin¹, WANG DaoBo² & WANG JianHong³

¹ College of Astronautics, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China;

² College of Automation Engineering, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China;

³ The 28th Research Institute of China Electronics Technology Group Corporation, Nanjing 210007, China

In this paper, we present a novel solution to the multi-UAV formation autonomous reconfiguration problem based on a convex optimization technique. In the proposed method, the UAV formation is maintained under the flight dynamics of the UAV and environmental constraints. A nonlinear multi-objective optimization model is constructed. After applied weighted sum method and separated all equality or inequality constraints, the former nonlinear multi-objective optimization model can be converted into a standard nonlinear single objective optimization model. Then the interior point algorithm which comes from operations research is used to solve the optimization problem. To avoid rank deficiency of some matrix, some improvements in realizing the interior point algorithm are proposed. Further the equivalence property between the multi-objective optimization and single objective optimization model through weighted sum method is proved. Finally, the efficiency of the proposed strategy can be confirmed by the simulation example results.

multi UAV formation, autonomous reconfiguration, interior point algorithm, multi-object optimization

doi: 10.1360/N092016-00194