



Adaptive Control

《自适应控制》

梅 杰

哈尔滨工业大学深圳

机电工程与自动化学院

2022年11月14日



What is Adaptive Control?

- 一般在生活中，所谓“**自适应**”是指生物能改变自己的习性以适应新的环境的一种特征。
- **自适应控制器**是这样一种控制器，它能够对过程的**动态响应和扰动特性的变化**做出反应，去修改自身的行为。



What is Adaptive Control?

➤ 许多年来，人们都想对自适应控制下一个正式的定义。在1961年的一个专题讨论会上，经过长久的讨论，建议如此来定义：“一个自适应系统是以自适应观点设计而成的、任意的物理系统”。

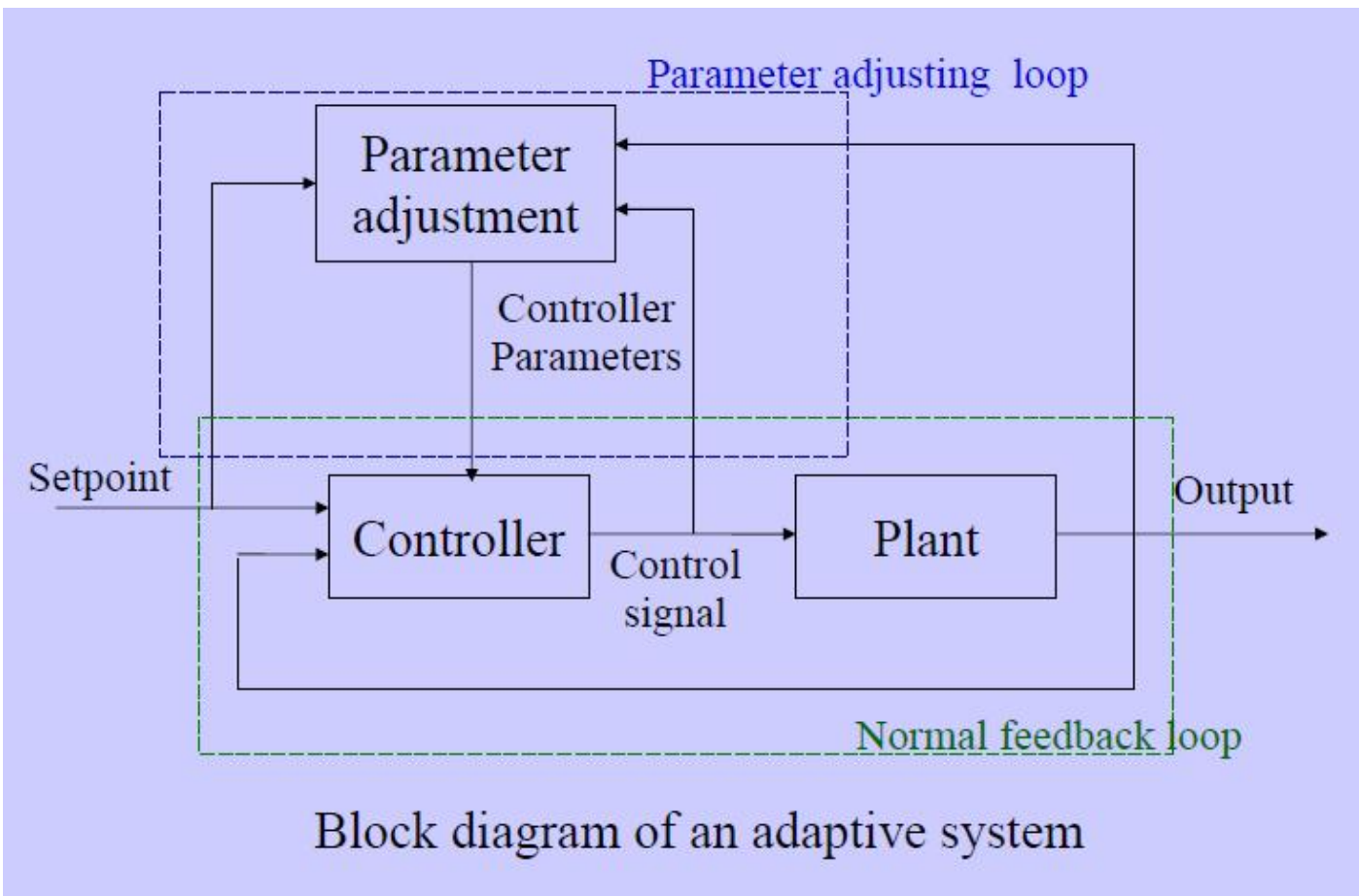
➤ 1973年，一个IEEE委员会提出一些新的词汇，如自组织控制系统、参数自适应、性能自适应、学习控制系统等来修改定义。但是，这些努力未能被广泛地接受。至今仍然缺少一个对自适应控制的合理定义，这个定义要能分辨出一个控制硬件和软件是否是自适应的。



What is Adaptive Control?

- 实际上，对自适应控制器的定义可以是：一个自适应控制器是一个包含可调参数以及参数调节机制的控制器。
- 因为包含参数调节机制，所以自适应控制器是非线性的，是一种特殊结构的非线性控制器。
- 可以想象，一个自适应控制系统拥有两个回路：一个回路是由过程 and 控制器构成的正常反馈回路，另一个回路是参数调整回路。

What is Adaptive Control?





Historical Development

- Mid 1950s: Autopilots for high-performance aircrafts (solved by gain scheduling)
- Later 1950s: Kalman develops the self-optimizing controller
- 1960s: Model reference adaptive control (MIT rule)

上世纪50年代，许多对自适应控制的研究与设计高性能飞机自动驾驶仪有关。这类飞机要在很宽范围的速度和高度下飞行。人们发现，普通的定常增益线性反馈控制在一个运行点可以很好工作，但不能在全部运行区域都很好工作，于是需要一种能够在宽运行范围都很好工作的先进的控制方法。经过研究发现，一种增益调度控制（Gain Scheduling）方法可以适用于飞行控制系统。但因为在那个时期技术限制，自适应控制研究受到局限（主要因为没有数字式电子计算机参与控制器实现，控制算法不可能太复杂）。



Historical Development

- Mid 1950s: Autopilots for high-performance aircrafts (solved by gain scheduling)
- Later 1950s: Kalman develops the self-optimizing controller
- 1960s: Model reference adaptive control (MIT rule)
- Interest diminished due to the crash of the X-15A-3

NASA试验飞机X-15A-3坠毁导致自适应控制的发展中断

Crash of NASA X-15A-3

- The crash of the X-15A-3 (November 15, 1967)



On Nov. 15, 1967, on Michael Adams seventh flight, he entered a spin from which he was able to recover but could not bring it out of an inverted dive because of a technical problem with **the adaptive flight control system**.

Crash due to stable, albeit non-robust adaptive controller!

Crash site of the X-15A-3



Adaptive Control and the NASA X-15-3 Flight Revisited



NASA CRYSTAL FLIGHT RESEARCH CENTER (NASA CFCR)

LESSONS LEARNED AND LYAPUNOV-STABILITY-BASED DESIGN

Decades after the first hypersonic vehicles pushed the boundaries of aerospace technology and research, high-performance aircraft continue to be the subject of considerable research interest. A new generation of hypersonic vehicles offers a far more effective way of launching small satellites or other vehicles into low-Earth orbit than expendable rockets. Additionally, these aircraft facilitate quick response and global strike capabilities. High-performance missions involving the X-15 in the 1950s and 1960s and the X-43A in the 2000s pushed the boundaries of aircraft speed and altitude, setting world records. These aircraft also served as platforms for cutting-edge research in propul-

sion, hypersonic stability, and control, as well as supporting technologies that enabled the design and operation of subsequent aircraft and spacecraft. This article examines the role of control in NASA's X-15 program and, in particular, the X-15-3, which used adaptive control. The X-15 aircraft is depicted in Figure 1.

ZACHARY T. DYDEK,
ANURADHA M. ANNASWAMY,
and EUGENE LAVRETSKY

Control of hypersonic vehicles is challenging due to the changes in the aircraft dynamics as the maneuver takes the aircraft over large flight envelopes. Three hypersonic planes, the X-15-1, X-15-2, and X-15-3, were flown as a part of the NASA X-15 program. The X-15-1 and X-15-2 were equipped with a fixed-gain stability augmentation system. In contrast, the X-15-3 was one of the earliest aircraft to feature an adaptive control scheme. The Honeywell MH-96 self-adaptive controller adjusted control

In summary, a sudden change in actuator effectiveness, which could have been caused by the electrical disturbance, causes the dynamics to depart significantly from those represented in the model and therefore in the control design. As a result, the control gain choices, despite the flexibility provided by the adaptive feature, are inadequate, causing the overall control system to be unable to recover from the onset of instability leading up to the crash.

The MH-96 adaptive flight control system is an elegant design that accomplished its goal of enforcing performance across all flight conditions. Furthermore, the MH-96 showed that a satisfactory adaptive control system could be designed without having accurate a priori information about the aircraft aerodynamics, and, consequently, aircraft configuration changes could be easily accounted for [40]. However, the MH-96 lacked an analytically based proof of stability, which was highlighted by the fatal crash in 1967. After four decades, the theoretical ground work for applying adaptive control has now made it possible to design adaptive controllers that offer high performance as well as stability guarantees in the presence of uncertainties.

Digital Object Identifier 10.1109/MCS.2010.936292

32 IEEE CONTROL SYSTEMS MAGAZINE ■ JUNE 2010

1056-035X/10/026.0002010IEEE



Historical Development

- Mid 1950s: Autopilots for high-performance aircrafts (solved by gain scheduling)
- Later 1950s: Kalman develops the self-optimizing controller
- 1960s: Model reference adaptive control (MIT rule)
- Interest diminished due to the crash of the X-15A-3
- 1970s: Global stability proofs
- 1980s: Robust adaptive control
- 1990s: Nonlinear adaptive control
- 2000s: Advanced adaptive control
- 2020: Control-oriented meta-learning

70年代末到80年代初，自适应系统的稳定性证明出现了，虽然是在许多限制性的假设条件下进行的。在其中采用鲁棒控制和系统辨识的思想是很合适的。研究假设条件的必要性，引出了对自适应控制鲁棒性和一般稳定性的新且有趣的研究。80年代末到90年代初对自适应控制鲁棒性的研究更加深入了。通过对非线性系统的研究更提高了对自适应控制的认识（超稳定性理论）。后来，人们认识到，自适应控制与计算机科学领域中的学习思想有密切的联系。



Historical Development

- Mid 1950s: Autopilots for high-performance aircrafts (solved by gain scheduling)
- Later 1950s: Kalman develops the self-optimizing controller
- 1960s: Model reference adaptive control (MIT rule)
- Interest diminished due to the crash of the X-15A-3
- 1970s: Global adaptive control
- 1980s: Robust adaptive control
- 1990s: Nonlinear adaptive control
- 2000s: Advanced adaptive control
- 2020: Control-oriented meta-learning

在实验室和工业中已经有许多自适应控制的实际应用。微处理器技术的迅猛发展对此产生了很强的激励作用。理论和实际的结合导致了该领域蓬勃发展，其结果是，自适应控制器出现在80年代早期的市场上。发展势头到90年代中期还在加速。事实上，当今市场上出现的所有单回路控制器几乎都有某种形式的自适应技术（自整定PID等）。最初引入自适应控制的理由是为了得到一个可以适应过程动态和扰动特性改变的控制器，而后来发现自适应技术也可以被利用来自动调整控制器参数。



Why Adaptive Control?

- Systems to be controlled have **parameter uncertainty**(参数不确定性)
 - unknown mass, length of links, and the inertial parameters of the loads in robot manipulation;
 - slowly varying mass of a spacecraft.
- Systems experience **unpredictable parameter variations**(无法预知的参数扰动)
 - The dynamic behavior of an aircraft depends on its altitude, speed, and configuration;
- Unknown **disturbance characteristics**(未知的扰动特性)

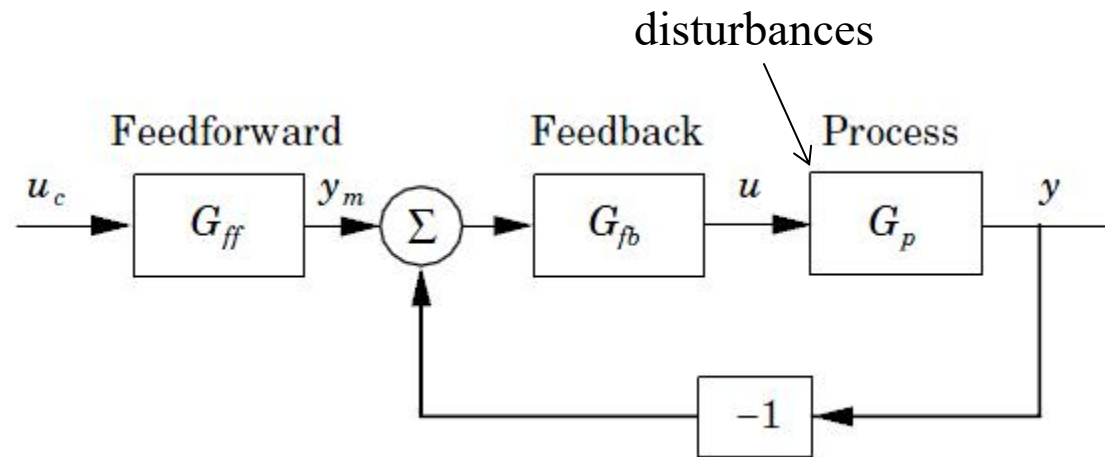
Basic Objective

Maintain consistent performance of a system in the presence of uncertainties and variations in plant parameters. (在有不确定因素的情形下仍然保证系统的良好性能)



鲁棒高增益控制

鲁棒高增益控制不是也可以抑制对象系统和干扰的不确定性吗？



Block diagram of a robust high-gain system

反馈环节 G_{fb} ：抑制干扰，使系统的响应对过程参数不敏感。

前馈环节 G_{ff} ：使过程对给定输入有需要的响应。



鲁棒高增益控制

从 y_m 到 y 的传递函数:

$$T = \frac{G_p G_{fb}}{1 + G_p G_{fb}}$$

Taking derivatives with respect to G_p , we get

$$\frac{dT}{T} = \frac{1}{1 + G_p G_{fb}} \frac{dG_p}{G_p}$$

回路传递函数: $L = G_p G_{fb}$

因此, 如果回路传递函数 L 在一些频率上的增益足够大, 则闭环系统对于过程传递函数在这些频率上的变化是不敏感的。



- 如果回路传递函数 L 在一些频率上的增益足够大，则闭环系统对于过程传递函数在这些频率上的变化是**不敏感的**。
- 为设计一个鲁棒控制器，首先应分析过程传递函数 G_p 在哪个频率段上变化大，然后设计反馈环节 G_{fb} ，使回路增益在这个频率段上的增益足够大。



例1.1 不同的开环响应

Consider systems with the open-loop transfer functions

$$G_0(s) = \frac{1}{(s+1)(s+a)}$$

where $a = -0.01, 0$, and 0.01 .

第一个选择对应了不穩定传递函数，第二个对应的传函中包含了一个纯积分环节。



例1.1 不同的开环响应

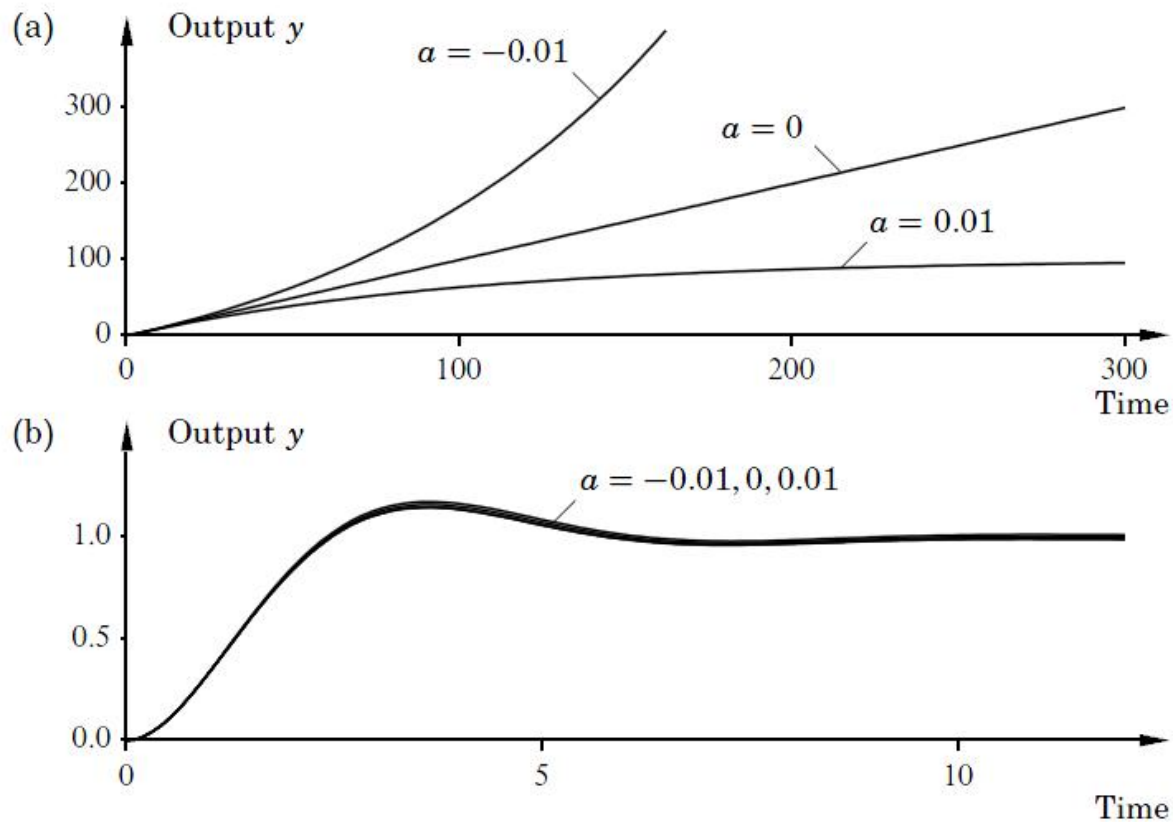


Figure 1.4 (a) Open-loop unit step responses for the process in Example 1.1 with $\alpha = -0.01, 0, 0.01$. (b) Closed-loop unit step responses for the same system with the same α values. Note the difference in time scales.

上图：开环响应(根本没有效果)
下图：闭环响应(效果明显更好)



例1.2 相似的开环响应

Consider systems with the open-loop transfer functions

$$G_0(s) = \frac{400(1 - sT)}{(s + 1)(s + 20)(1 + Ts)}$$

with $T = 0, 0.015$, and 0.03 .

开环传递函数相似。



例1.2 相似的开环响应

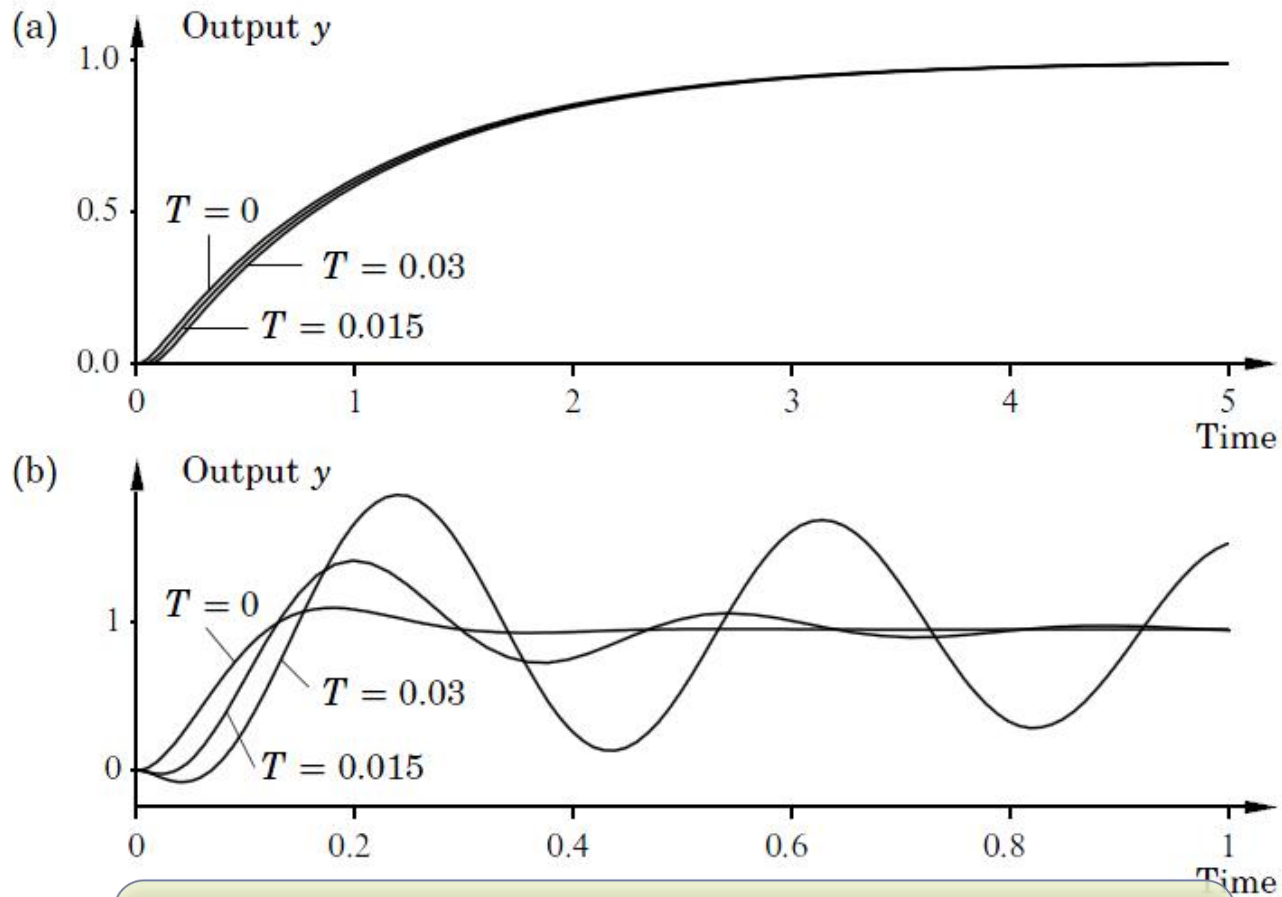


Figure 1.6 (a) Open-loop responses for the process in Example 1.2 with $T = 0$, $T = 0.03$, and $T = 0.015$. Notice the difference in time scales.

上图：开环响应(效果很好)

下图：闭环响应(效果反而比较差?)



例1.3 增益符号未知的积分器

Consider a process whose dynamics is described by

$$G_0(s) = \frac{k_p}{s}$$

where the gain k_p can assume both positive and negative values.

系统相位差了180度，无法用有理传递函数的线性控制进行镇定。

设控制器传递函数为 $S(s)/R(s)$ ，其中 $R(s)$ 和 $S(s)$ 都是多项式。
则闭环传递函数的特征多项式为：

$$P(s) = sR(s) + k_p S(s)$$

$P(s)$ 所有特征值都在左半平面的一个必要条件是其所有系数都是正的。



例1.1-1.3 -小结

- 过程参数的改变，有可能导致开环响应很不相同。
- 采用反馈的方法在一些情况下可以使闭环响应趋于一致（当过程的改变处于回路增益大的频率段上，如低频段），但也可能没有作用，甚至还不如开环时的响应一致性好（当过程的改变处于回路增益小的频率段上）。因此，对于过程的不确定性，鲁棒控制并不总是有效。
- 对于过程参数的某些不确定性（如增益符号不确定），采用传统反馈的方式无法保证系统稳定。



过程的变化

- 控制系统设计的一般方法是：在某些运行条件下为过程建立一个线性模型，然后根据该模型设计具有定常参数的控制器。一般讲，这样的反馈系统对于建模误差和扰动是不敏感的。
- 立足于过程的线性模型建模，所谓过程的变化就是指过不能严格地用线性模型表示的那一部分。比如过程的非线性、参数时变性、参数不确定性等。
- 过程改变对控制系统性能的影响。



例1.4 非线性执行器(nonlinear actuator)

非线性控制阀:

$$v = f(u) = u^4 \quad u \geq 0$$

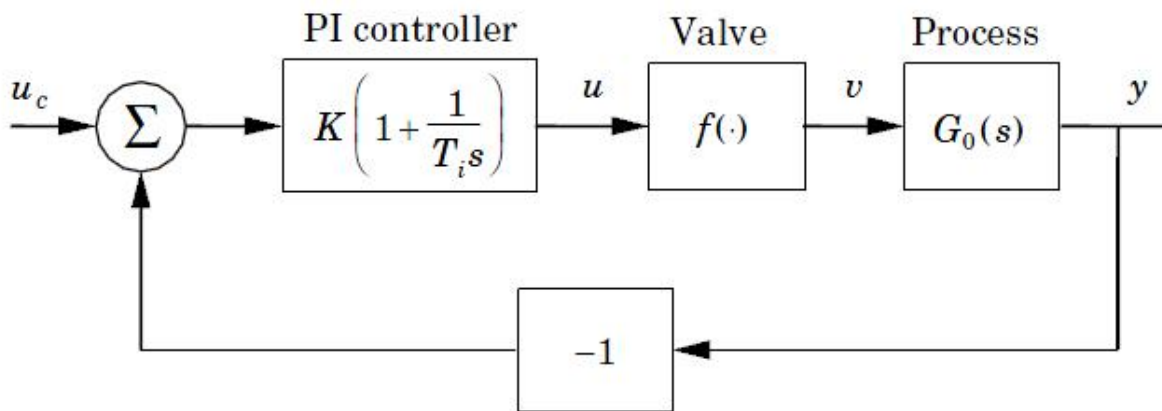
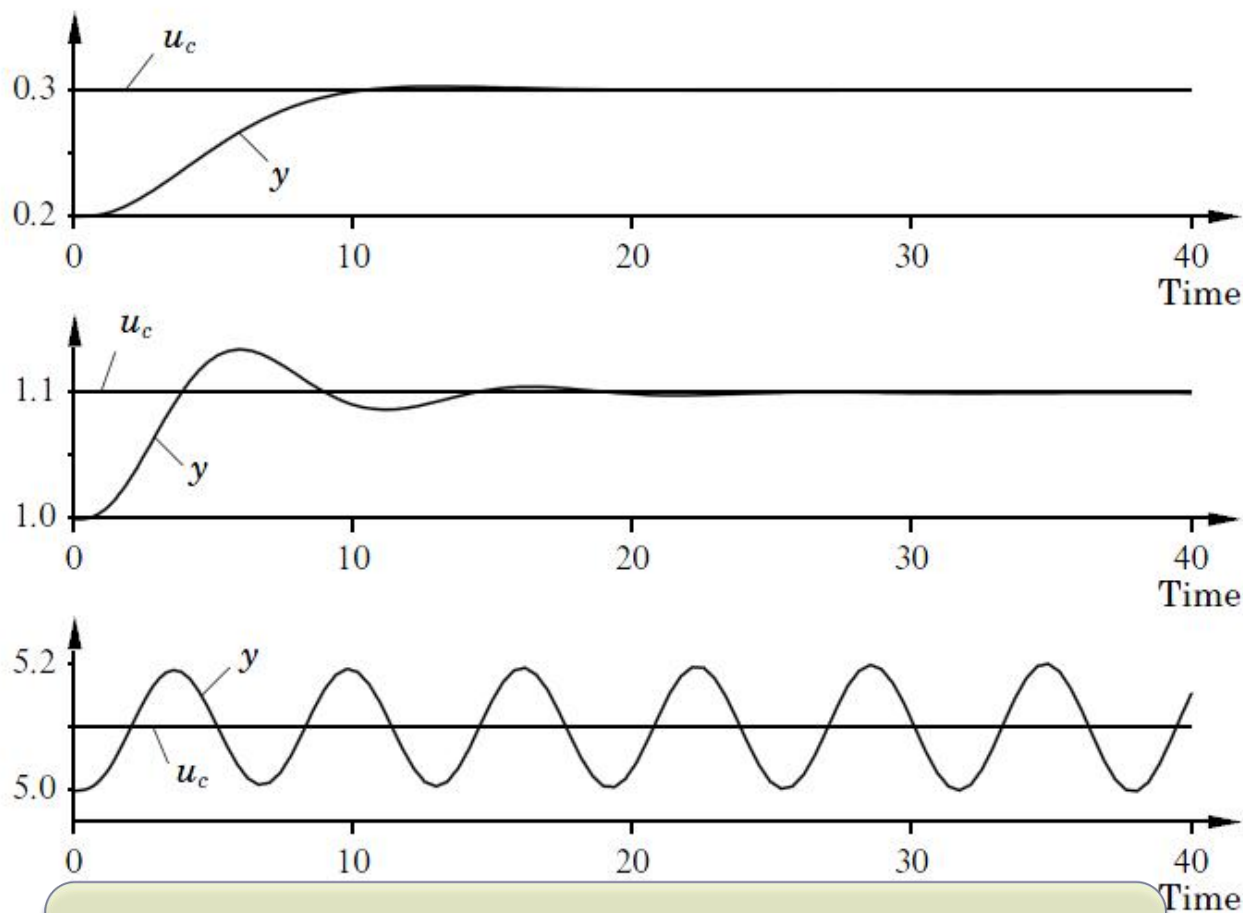


Figure 1.8 Block diagram of a flow control loop with a PI controller and a nonlinear valve.

对非线性控制阀在运行点附近进行线性化，于是可知，闭环系统的回路增益与 $f'(u)$ 成正比。在不同的运行点， $f'(u)$ 的变化很大，从而导致闭环系统特性对信号的幅值特别敏感。这是线性系统所不可能发生的情况。



例1.4 非线性控制阀



上图：对小信号....过阻尼
下图：对大信号....欠阻尼甚至不稳定

Figure 1.4 shows three examples for a nonlinear flow loop with an Ex-amp 1.4 at different operating levels. The parameters of the PI controller are $K = 0.15$, $T_i = 1$. The process characteristics are $f(u) = u^4$ and $G_0(s) = 1/(s + 1)^3$.



例1.4 非线性控制阀

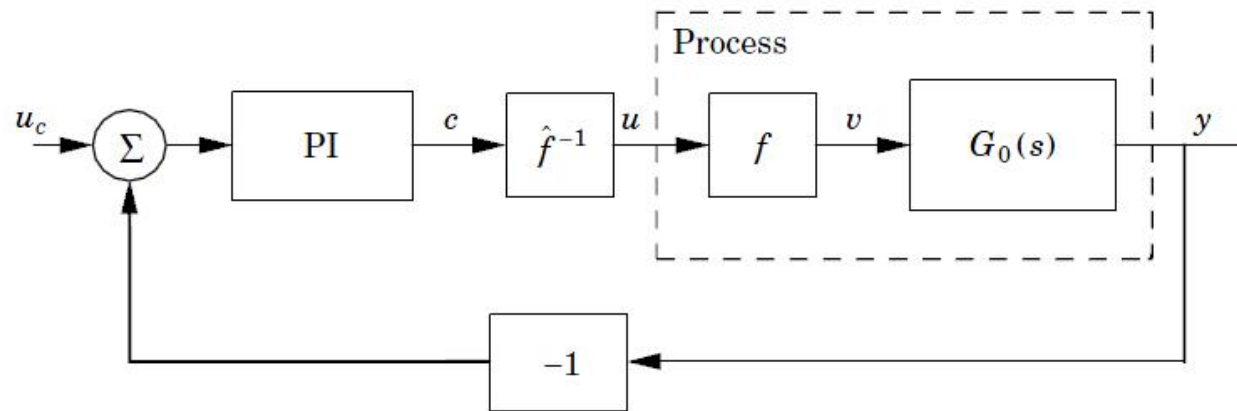
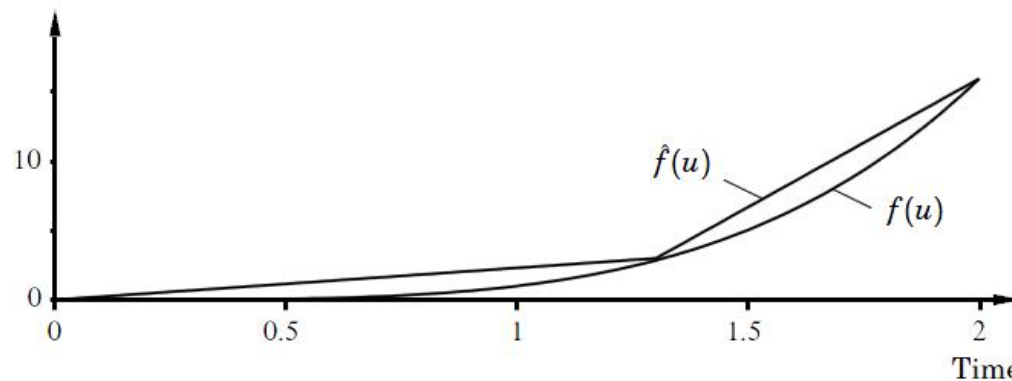


Figure 9.2 Compensation of a nonlinear actuator using an approximate inverse.



$$\hat{f}^{-1}(c) = \begin{cases} 0.433c & 0 \leq c \leq 3 \\ 0.0538c + 1.139 & 3 \leq c \leq 16 \end{cases}$$

Figure 9.3 The nonlinear valve characteristic $v = f(u) = u^4$ and a two-line approximation $\hat{f}(u)$.



例1.4 非线性控制阀

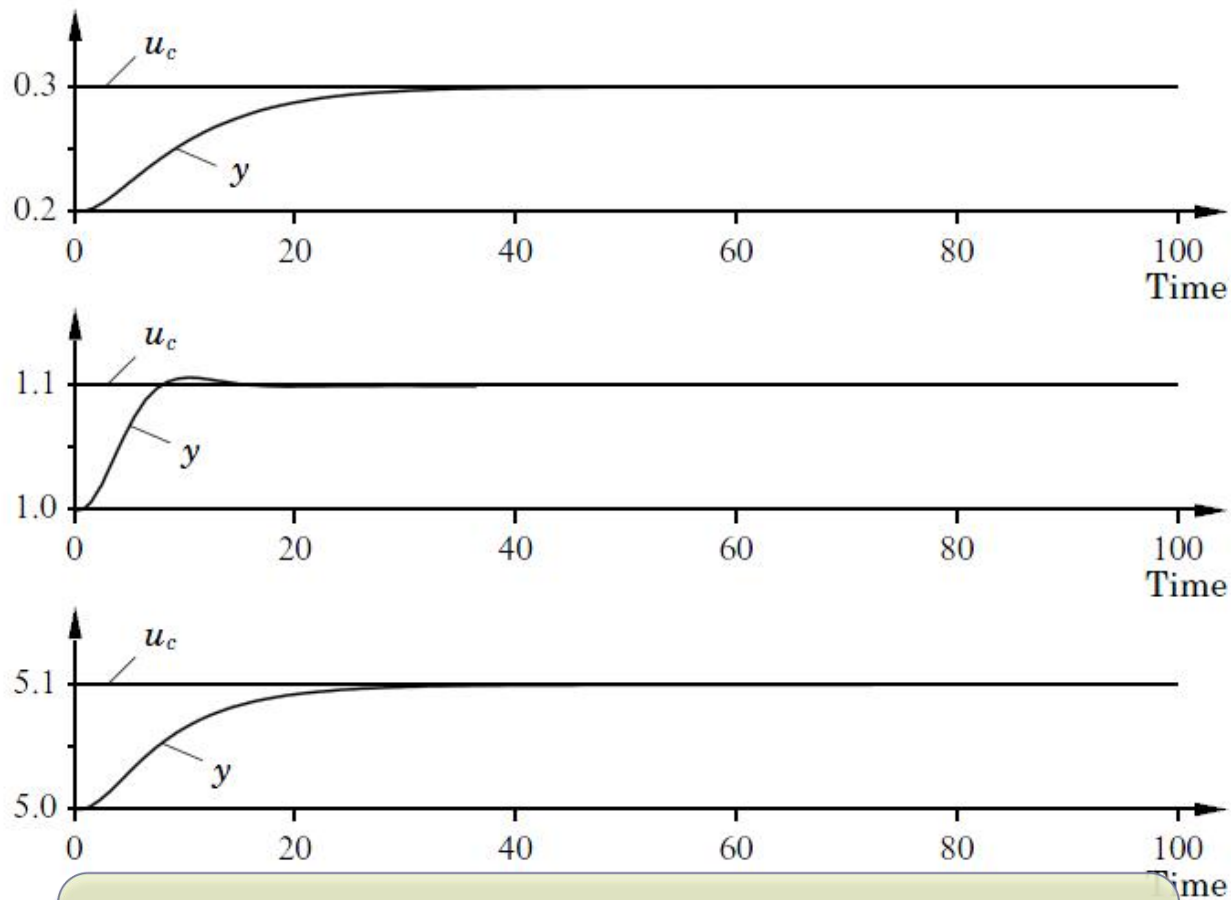


Figure 1.9 对各种幅值信号控制效果良好
Example 9.1 with nonlinear valve and compensation using an approximation of the valve characteristic. Compare Fig. 1.9.



例1.5 流量和速度变化

浓度控制：

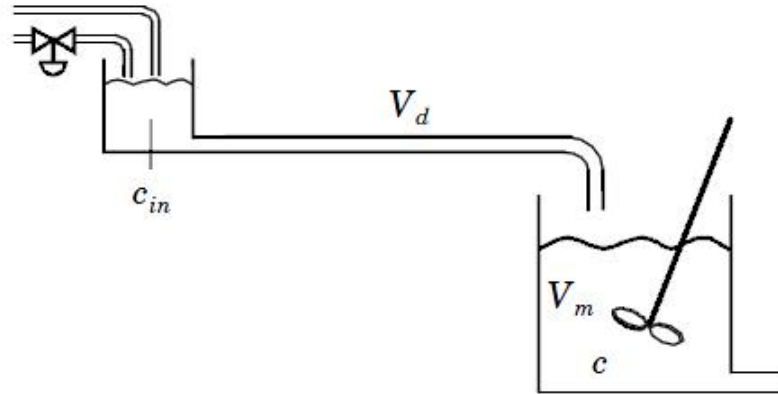


Figure 1.10 Schematic diagram of a concentration control system.

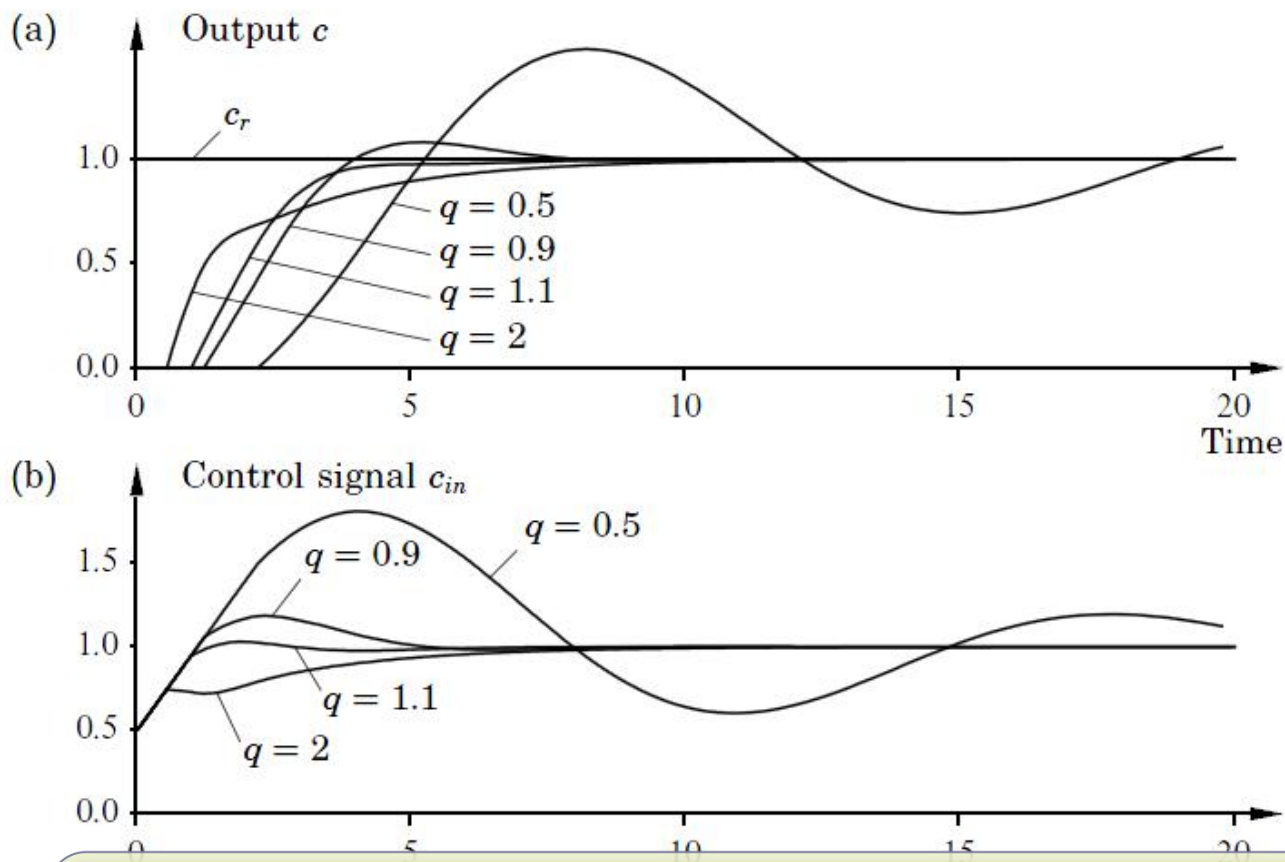
$$V_m \frac{dc(t)}{dt} = q(t) (c_{in}(t - \tau) - c(t))$$

$$\tau = V_d / q(t)$$

对恒流问题，过程的传递函数为： $G_0(s) = \frac{e^{-s\tau}}{1 + sT}$



例1.5 流量和速度变化



采用一组控制参数的控制效果，对于不同的流量差异很大。实验结果表明，流量的变化如果小于 $\pm 10\%$ ，用一组控制参数还可以，流量变化大时控制性能将严重恶化。



例1.6 飞行控制

飞行控制：飞机的**动态特性**随着飞行速度、高度、迎角等的不同而明显改变。早期飞机上使用的自动驾驶仪和增稳系统都基于定参数线性反馈。当速度和高度都较低时工作良好，但速度和高度增加时就遇到困难了，尤其是在超音速飞行时。

飞机的短期动力学特性：

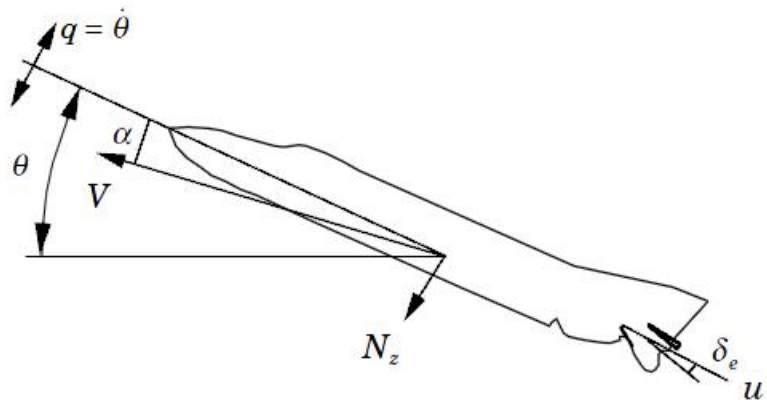


Figure 1.12 Schematic diagram of the aircraft in Example 1.6.

θ : 仰角; N_z : 法向加速度 δ_e : 水平尾翼角
 u : 水平尾翼伺服控制信号。



例1.6 飞行控制

系统线性化状态方程：

$$\frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & -a \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} b_1 \\ 0 \\ a \end{pmatrix} u$$

$$x^T = (N_z \quad \dot{\theta} \quad \delta_e)$$

方程中的参数取决于飞机的运行条件，如马赫数和高度。



例1.6 飞行控制

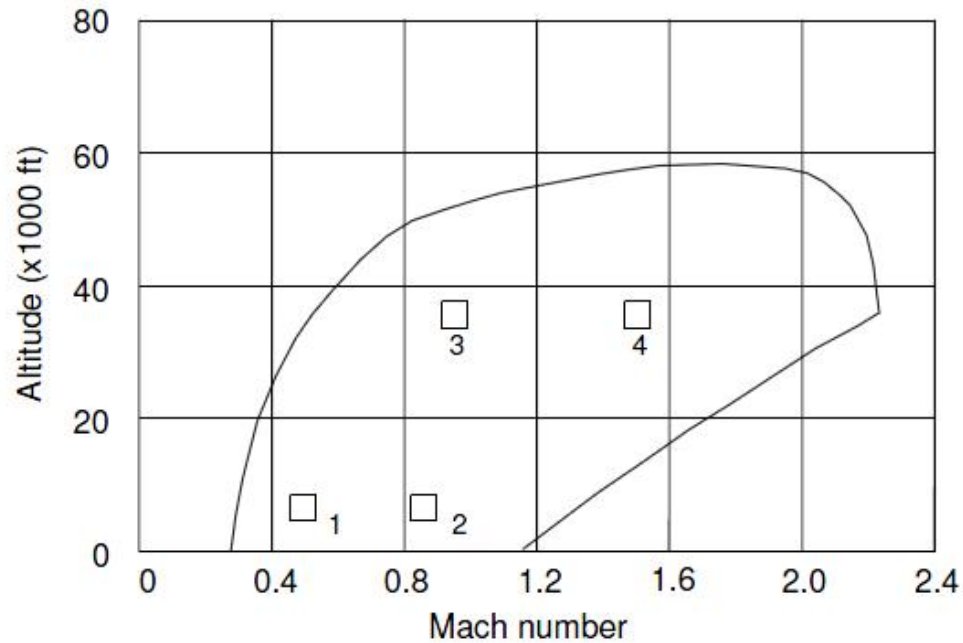


Figure 1.13 Flight envelope of the F4-E. Four different flight conditions are indicated. (From Ackermann (1983), courtesy of Springer-Verlag.)



例1.6 飞行控制

Table 1.1 Parameters of the airplane state model of Eq. (1.6) for different flight conditions (FC).

	FC 1	FC 2	FC 3	FC 4
Mach	0.5	0.85	0.9	1.5
Altitude (feet)	5000	5000	35000	35000
a_{11}	-0.9896	-1.702	-0.667	-0.5162
a_{12}	17.41	50.72	18.11	26.96
a_{13}	96.15	263.5	84.34	178.9
a_{21}	0.2648	0.2201	0.08201	-0.6896
a_{22}	-0.8512	-1.418	-0.6587	-1.225
a_{23}	-11.39	-31.99	-10.81	-30.38
b_1	-97.78	-272.2	-85.09	-175.6
λ_1	-3.07	-4.90	-1.87	-0.87 ± 4.3i
λ_2	-1.29	-1.78	-0.56	-0.87 ± 4.3i

很显然，在不同飞行状态下，飞行器动力学特性很不相同，因此无法利用一组参数来完成对所有飞行状态的控制。



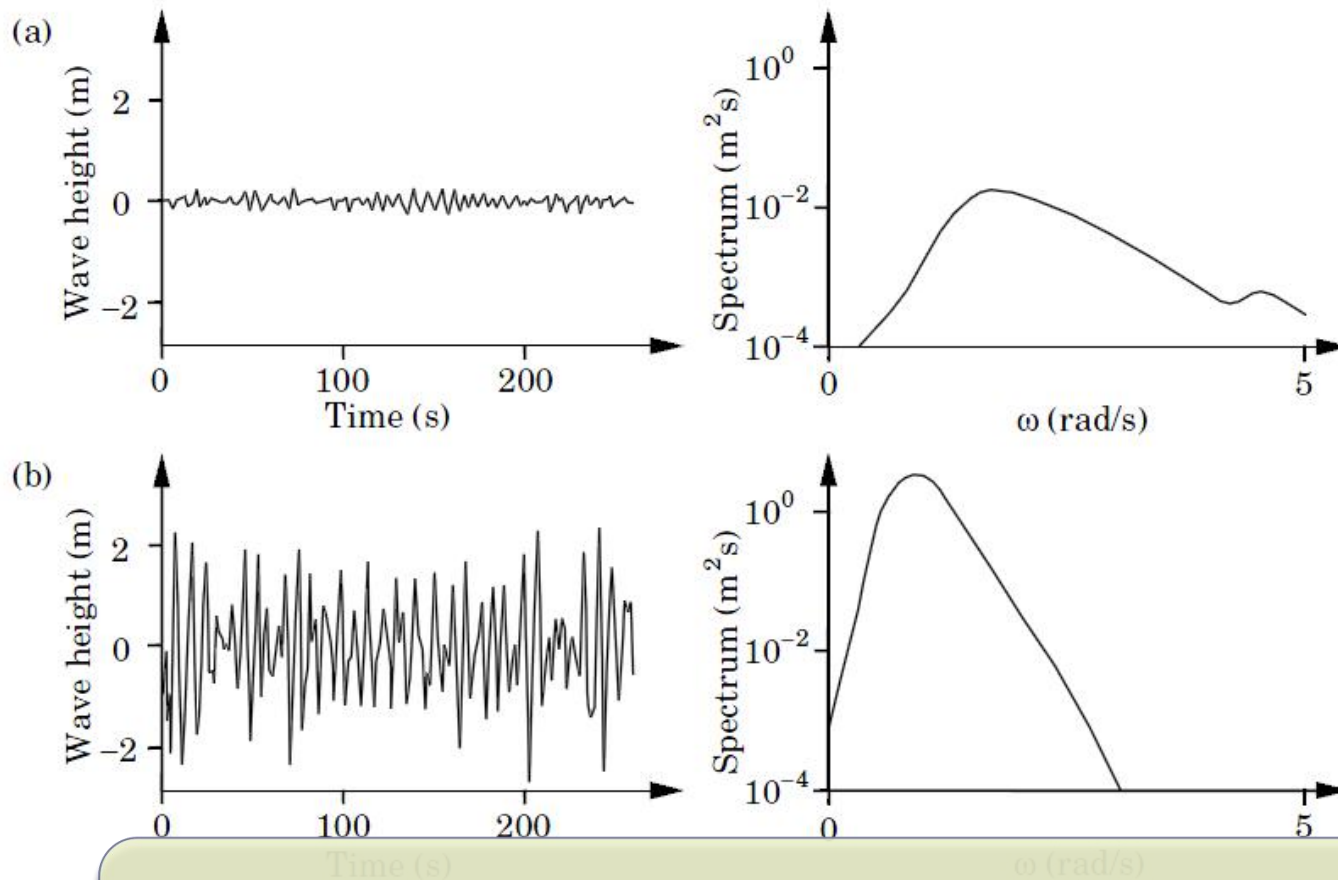
例1.7 扰动特性的变化

船舶驾驶(ship steering)

- 关键问题是设计操纵船只的自动驾驶仪，为了补偿风、波浪和水流对船的扰动力。
- 其中波浪产生的力是最主要的，有很强的周期性成分。当气候条件从微风变到强风，波浪的主导频率将可能变化3倍。
- 由波浪所产生的对船的作用力的变化就更大了，因为它还受到船速和船首形状的影响。



例1.7 扰动特性的变化



上图：3-4米/秒风速时的海浪幅值和能谱

下图：18-20米/秒风速时的海浪幅值(变大)和能谱

Figure 1.7 shows the wave height and spectrum for two different wind speeds. The top plot (a) shows the wave height and spectrum for a wind speed of 3-4 m/s. The bottom plot (b) shows the wave height and spectrum for a wind speed of 18-20 m/s. The wave height is significantly larger in (b) than in (a), and the spectrum peak is also higher in (b).



例1.7 扰动特性的变化

- 在设计船只的自动驾驶仪和抑制摇摆时，很自然地会想到利用波浪干扰的特性。但特性变化得如此大，所以应该**调整控制器的参数**去适应干扰特性的变化。
- 船只和海上平台的定位是与上述问题相似的又一实例。平台在很大程度上要能够“驾驭”波浪，仅对扰动的低频分量进行补偿，这就对**描述扰动模式的模型**有更严格的要求。



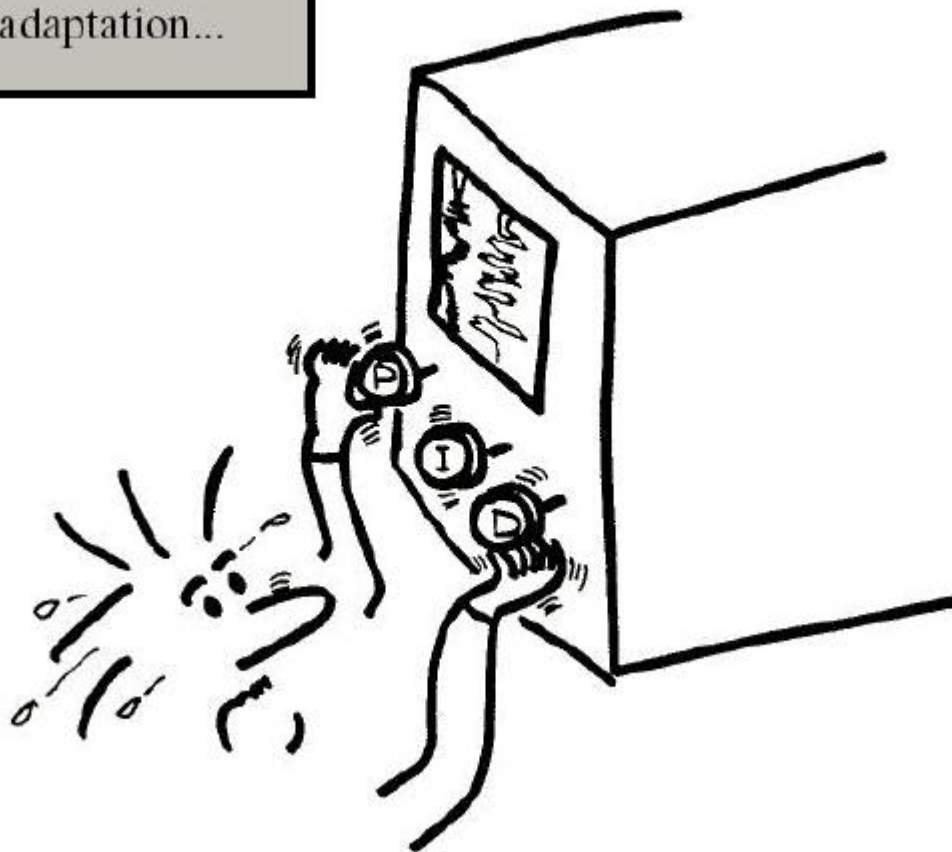
例1.4-1.7 -小结

- 对象或干扰统计特性的不确定性，导致采用参数固定控制器难以获得一致的良好控制效果；
- 追求精良的控制效果，是研究和采用自适应控制的主要原因。

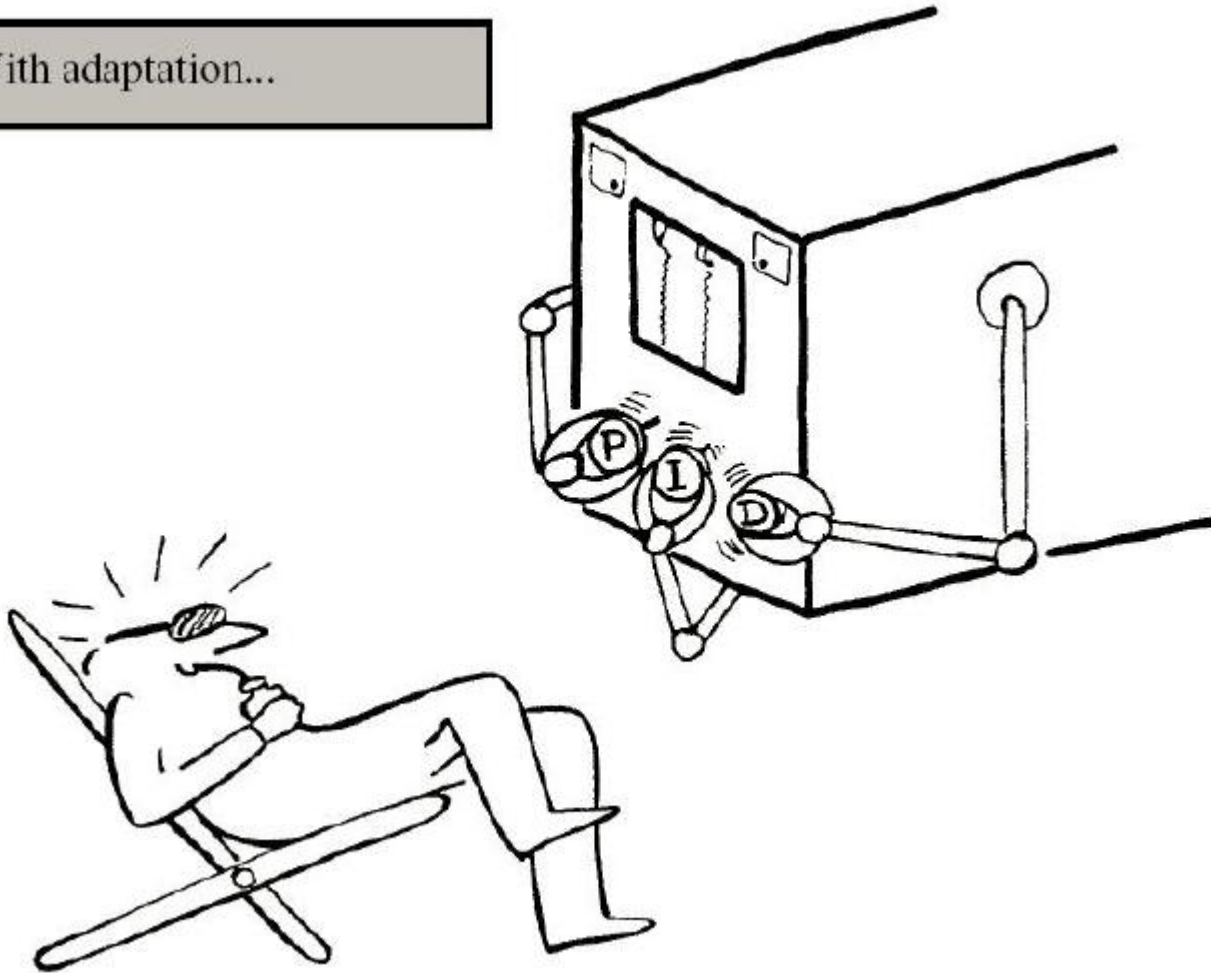


- **模型复杂难以清楚使用自适应**：大部分工业过程都是非常复杂，其物理机理很难定量描述。很多情况下，仔细探究过程变化的原因即无必要也不经济。对此，自适应控制方法就是另一种选择。
- **对模型中未知部分使用自适应**：过程中的一些动态特性已知，但另一些动态特性未知。机器人是一个典型例子，其几何尺寸、电机、齿轮箱等是不变的，而负载是变化的。在这种情况下，要充分运用先验知识，同时对过程中的未知部分进行参数估计和自适应。

Without adaptation...

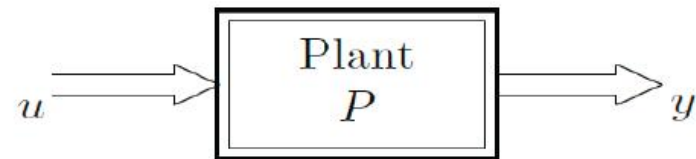


With adaptation...

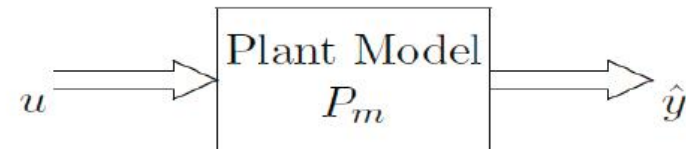




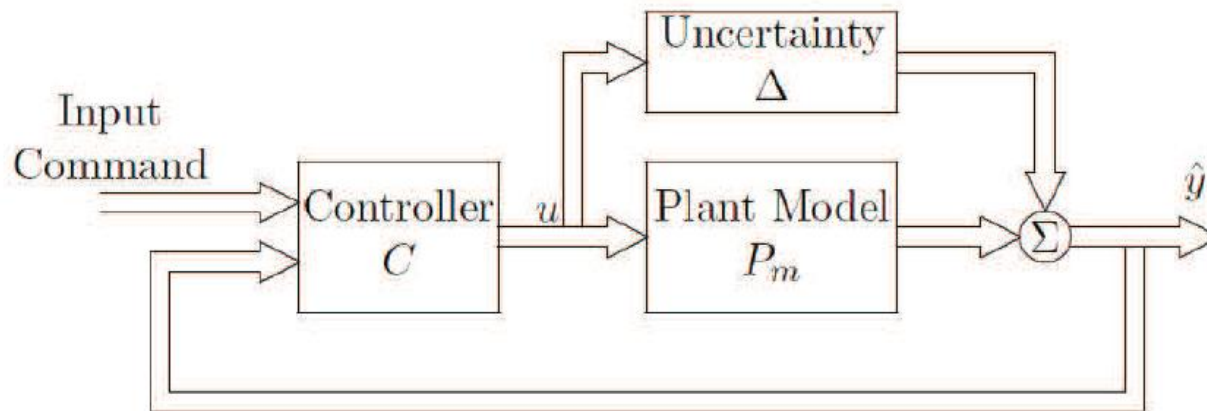
Control System Design(控制系统设计)



Step 1: 建模

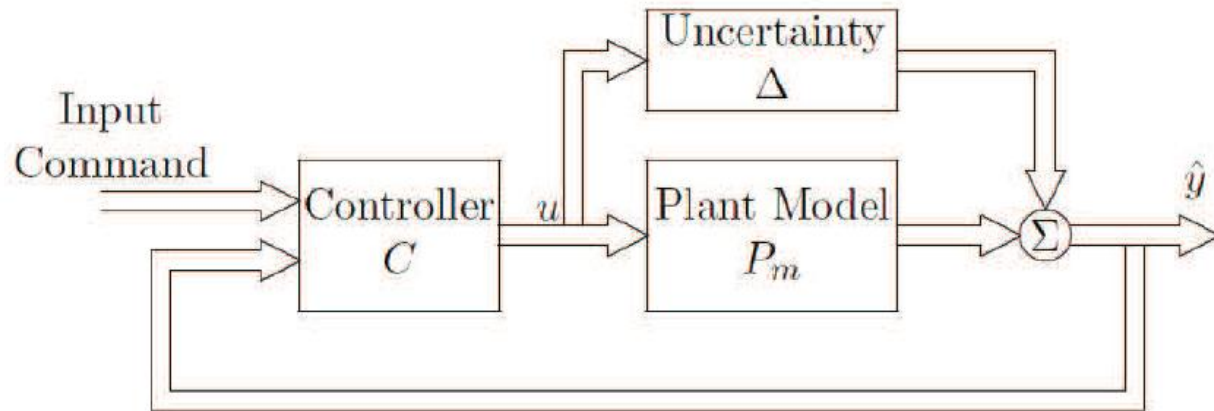


Step 2: 控制系统设计

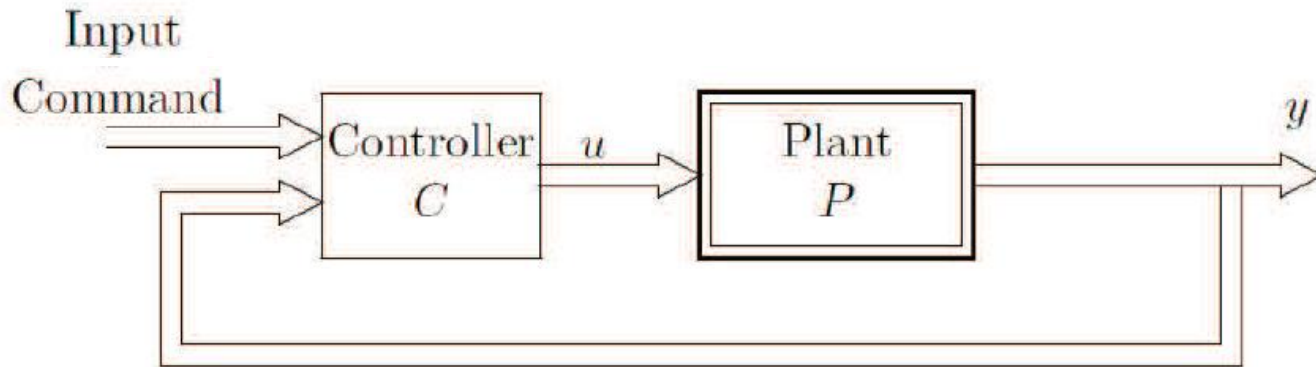




Control System Design(Cont.)(控制系统设计)

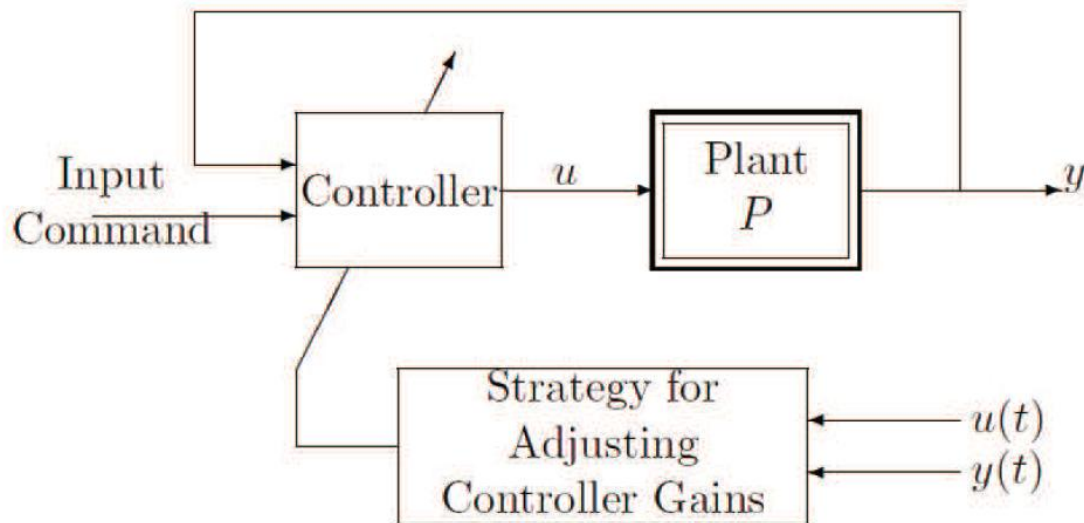


Step 3: 实现





Adaptive Controller (自适应控制器)



- Characterize the desired behavior of the closed-loop systems
(刻画闭环系统的期望特性)
- Determine a suitable control law containing adjustable parameters
(确定具有可调参数的合适控制律)
- Find a mechanism (an adaptation law) for adjusting those parameters
(找到调整参数的机制)
- Analyze the convergence properties and implement the control law
(分析收敛性质并实施控制律)



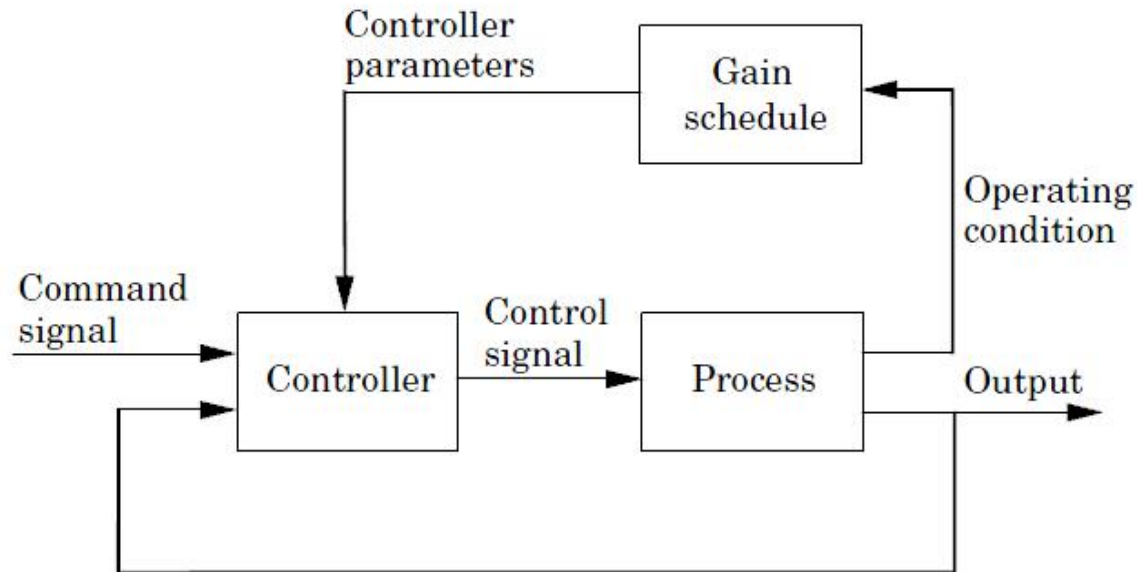
几种自适应控制方法

- 增益调度(Gain Scheduling)
- 模型参考自适应控制(Model Reference Adaptive Control, MRAC)
- 自校正调节器(Self-tuning Regulator, STR)
-



增益调度(Gain Scheduling)

许多情况下，与过程动态密切相关的变量是可以测量的。于是可以依据对这些变量的测量值去改变控制器的参数。这种方法被称为“增益调度”方法，因为开始的时候是通过状态测量，去改变（调度）控制器和补偿过程增益的变化。



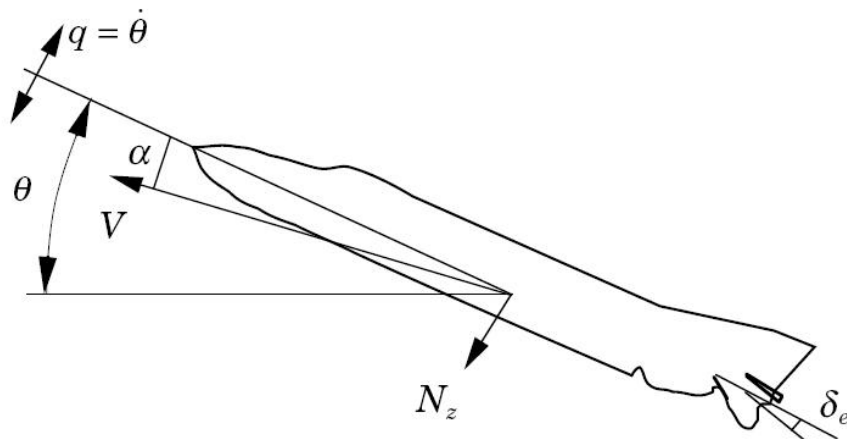


增益调度(Gain Scheduling)

- 系统包含一个控制回路和一个增益调整回路。增益调度方法可以理解为：在过程参数和控制器参数之间形成一个映射关系，这个关系可以表现为函数或表格。
- 增益调度的概念最初与开发飞行控制系统有联系。在飞行控制系统中，测量得到的马赫数和高度被用作调度变量。(CH-47 helicopter, 90 controllers were designed for 30 different horizontal flight velocities and 3 vertical velocities.)
- 优点：控制器参数可以根据对象系统动力学的改变迅速做出相应的变化。
- 缺点：是一个开环的自适应机制，没有真正的“学习”过程。



增益调度(Gain Scheduling)



θ : the pitch angle

N_z : the normal acceleration

δ_e : the elevon angle

u : control input

Fig. Schematic diagram of an aircraft

$$\frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & -a \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} b_1 \\ 0 \\ a \end{pmatrix} u$$

where $x^T = (N_z \quad \dot{\theta} \quad \delta_e)$.



增益调度(Gain Scheduling)

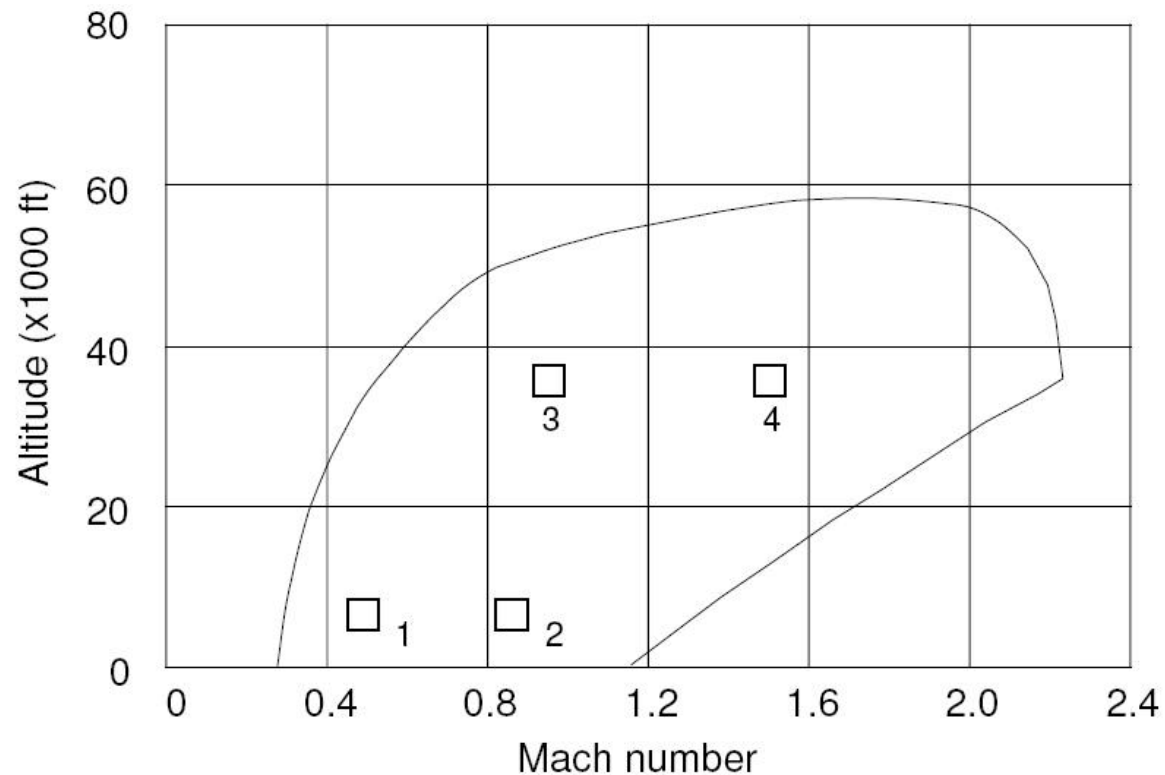


Figure 1.13 Flight envelope of the F4-E. Four different flight conditions are indicated. (From Ackermann (1983), courtesy of Springer-Verlag.)



增益调度(Gain Scheduling)

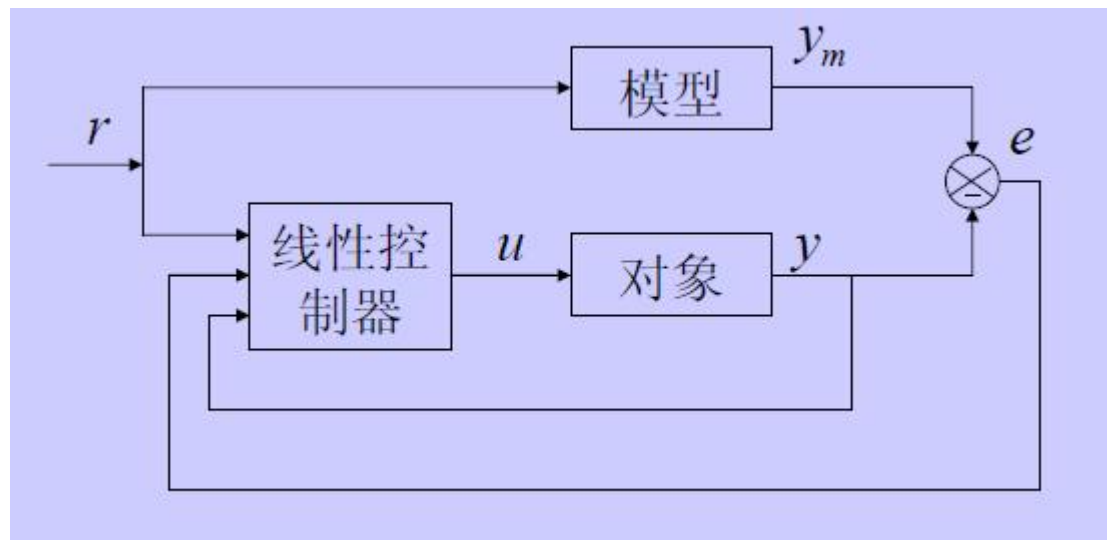
Table 1.1 Parameters of the airplane state model of Eq. (1.6) for different flight conditions (FC).

	FC 1	FC 2	FC 3	FC 4
Mach	0.5	0.85	0.9	1.5
Altitude (feet)	5000	5000	35000	35000
a_{11}	-0.9896	-1.702	-0.667	-0.5162
a_{12}	17.41	50.72	18.11	26.96
a_{13}	96.15	263.5	84.34	178.9
a_{21}	0.2648	0.2201	0.08201	-0.6896
a_{22}	-0.8512	-1.418	-0.6587	-1.225
a_{23}	-11.39	-31.99	-10.81	-30.38
b_1	-97.78	-272.2	-85.09	-175.6
λ_1	-3.07	-4.90	-1.87	$-0.87 \pm 4.3i$
λ_2	1.23	1.78	0.56	



模型参考自适应控制(MRAC)

最早提出MRAS的目的是为了解决这样的问题：由一个参考模型来给出系统的性能。即参考模型告诉我们过程对于给定输入的理想响应应该是什么。这个需求由来以久，如：“线性模型跟随控制”。





模型参考自适应控制(MRAC)

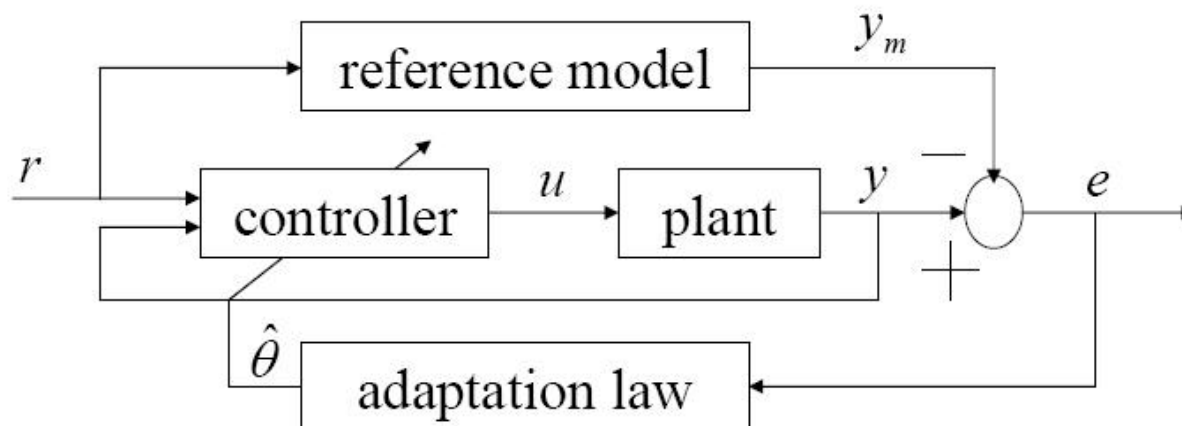
为什么要用参考模型来表示控制性能需求?

- 设计所用的指标数据,如超调、调整时间、振荡次数、稳态精度等很难与控制器的设计联系起来。尤其,很难根据上述指标数据确定最优控制方法中的加权矩阵。控制器设计参数与性能指标之间缺乏对应关系。
- 运行性能的需求有时可以类比,但不易量化提出。
- 参考模型的使用很切合工程实际。

MRAC最早也是为飞行控制提出的,此时,参考模型描述了飞机对于操纵杆控制作用的理想响应。



模型参考自适应控制(MRAC)



- Plant: containing unknown parameters and having a known structure
(控制对象：具有未知参数和确定的结构)
- Reference model: specifying the desired output of the control system
(参考模型：满足理想输出特性)
- Feedback control law: containing adjustable parameters
(反馈控制律：具有未知可调参数)
- Adaptation mechanism: updating the adjustable parameters
(自适应机制：自动更新可调参数)



模型参考自适应控制(MRAC)

- 在模型参考自适应控制方法中，**直接调整控制器的参数**。内环形成一个一般的反馈控制系统，只是其控制器的参数不是固定的，而是由外环进行调整。
- MRAC的关键问题是**确定参数调整机制**，以使**系统是稳定的**(跟踪误差趋于零)。
- **稳定性、稳定过程和鲁棒性**是MRAC的重要研究内容。主要的研究工具为**Lyapunov 稳定性理论**。
- MRAC主要针对**无随机扰动的参数不确定**对象系统，对象系统的数学模型可以是连续时间型或离散型。



自校正调节器 (STR)

- 系统辨识理论和技术的发展，使得人们可以在线定量地了解一个部分未知（甚至完全未知）的对象系统（所谓实时在线建模），即如此，构造自适应控制系统的一个很直接的想法是：
系统辨识+根据辨识的对象实时计算控制器。
- 这类自适应方法也包括两个回路：内部回路包含过程和参数可变的常规控制器；外部回路包含一个过程参数实时估计器和一个控制器参数计算器。
- 可以认为，这种方法是自动地在线完成过程辨识和控制器设计两个步骤。



自校正调节器 (STR)

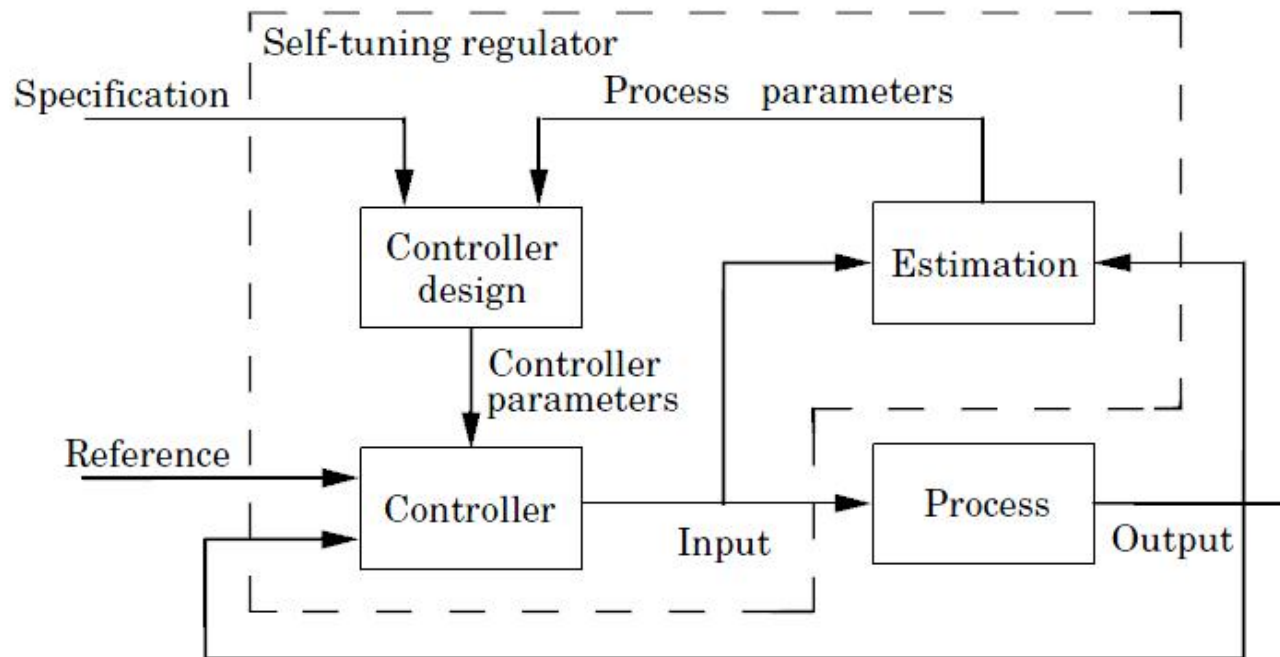
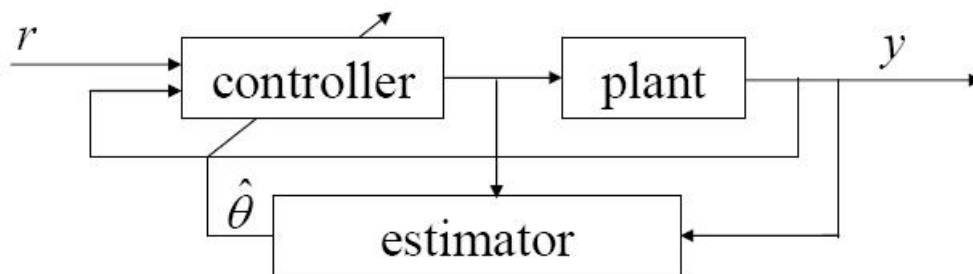


Figure 1.19 Block diagram of a self-tuning regulator (STR).



自校正调节器 (STR)



- Combines a controller with an on-line plant parameter estimator
(控制器和在线参数估计器的结合)
- Performs simultaneous parameter identification and control
(同时在线完成过程辨识和控制器设计)
- Uses Certainty Equivalence Principle (确定性等价原则)
 - controller parameters are computed from the estimates of the plant parameters as if they were the true ones
(把系统的估计参数当作真的参数来设计控制器参数)



自校正调节器 (STR)

- “自校正”一词强调了**控制器自动校正其参数**，以得到所需的闭环系统特性。
- 图中的模块“控制器设计”，表示当参数已知时，在线求解控制系统设计问题。
- 自校正控制研究的思路往往是：先假设参数已知，推导此时的控制算法，然后再构造一个采用共性技术的过程参数估计器，连接起来即成。正因为如此，自校正控制的设计十分灵活，两部分（控制器部分和参数估计部分）几乎可以说是在进行多种组合。



自校正调节器 (STR)

- 将过程参数估计与控制器计算两步分开进行，效果将会如何呢？
- 也就是说，当过程参数已知时工作良好的控制器，变成按实时估计参数计算控制器，其控制效果将会有何改变？是否能够期望有接近甚至等同的性能？
- “确定性等价原理”说明了这个问题，粗略地说，只要参数估计收敛（并不一定收敛到真值），控制效果将随时间趋近于等同。



两个术语

➤ **Indirected Adaptive Control (间接自适应控制):**

The process model and possibly the disturbance characteristics are first determined. The controller parameters are designed on the basis of this information.

(先估计确定过程和干扰的特征，再据此调整控制器参数.)

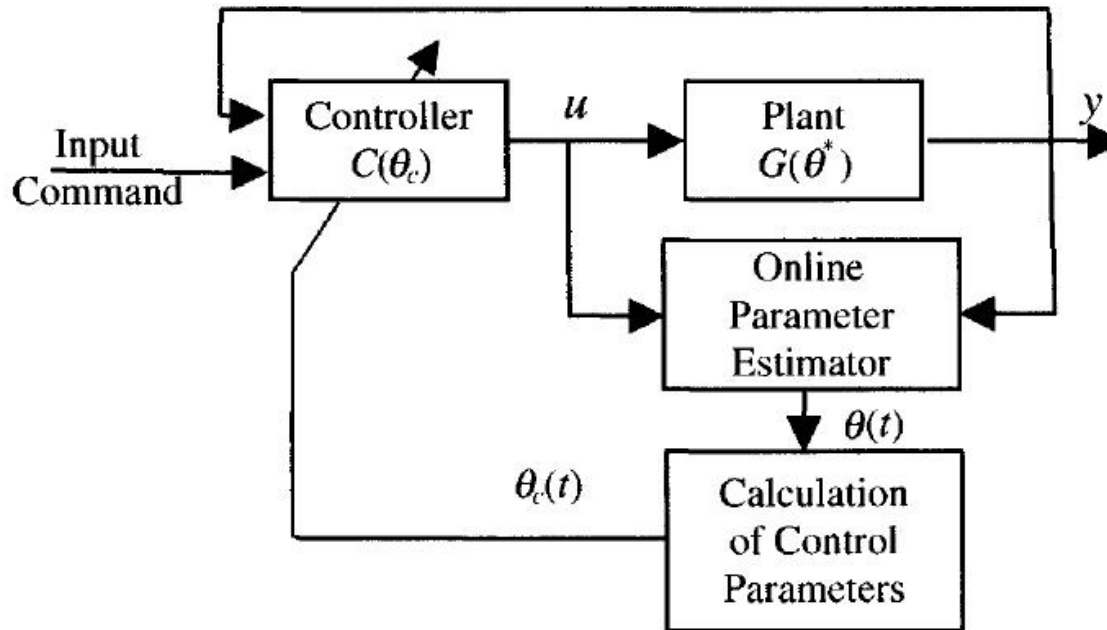
➤ **Directed Adaptive Control (直接自适应控制):**

The controller parameters are changed directly without the characteristics of the process and its disturbances first being determined.

(直接调整控制器参数，而不需先估计过程和干扰的特征.)



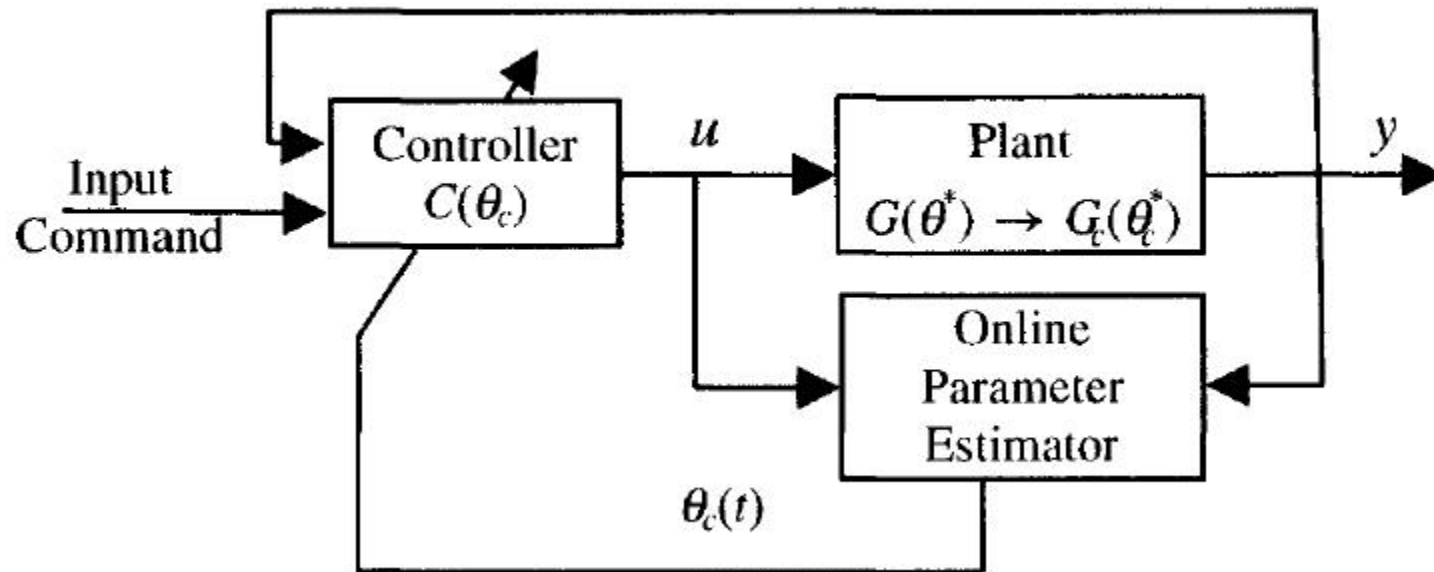
Indirect Adaptive Control (间接自适应控制)



- ❑ estimate plant parameters(估计系统参数)
- ❑ computer control parameters(计算控制器参数)



Direct Adaptive Control (直接自适应控制)



- ❑ no plant parameter estimation (没有系统参数估计)
- ❑ estimate only the control parameters (只估计控制器参数)



Blackborad



Applications (应用)

- 从50年代中期开始就陆续出现许多自适应反馈控制的应用，但实现方面一直受到当时硬件水平（模拟电路）的制约。从70年代开始采用小型计算机实现自适应算法，应用上的突飞猛进是随着微处理器技术出现而开始的，微处理器技术使实现变得既经济又有效。
- 从80年代，自适应技术开始应用到常规工业控制器中，目前，许多工业控制回路都基于自适应控制技术。应用领域主要包括航空航天、过程控制、船只驾驶、机器人、汽车和生物医学等。
 - ❑ 许多情况下，自适应控制非常有用（甚至非它不可）
 - ❑ 另一些情况，自适应控制应用处于边缘（可用可不用）
 - ❑ 再一种情况，自适应控制不适用



2015

中国自动化大会
CHINESE AUTOMATION CONGRESS

航天控制未来发展的思考

基于能力自适应协调的质心/绕心一体化控制理论

近空间复杂空域长时间高速飞行，非定常复杂流场容易诱发面对称飞行器产生横侧向耦合、气动控制耦合等，需要解决飞行器控制能力的自适应协调、基于能力的控制策略选择问题。

关键技术：质心/绕心运动自适应协调策略、横侧向稳定性协调控制、非定常流场脉动压力耦合共振控制等。



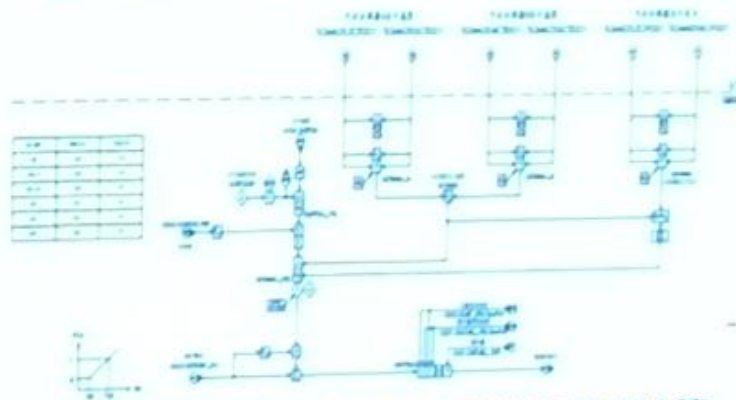
中国航天科技集团公司



4.2 超/超超临界直流锅炉高安全CCS

——主蒸汽压力控制新方法

- 研制出专用液位/压力/温度变送器，提出根据实际压力与压力设定值偏差为前馈参数的主蒸汽压力控制新方法DEB，构建了一整套前馈控制参数自适应更新规则，有效地减小了负荷大范围变动下的控制品质



超临界600MW机组锅炉燃烧率需求计算

- ✓突破传统前馈方法参数固定且未考虑变负荷过程中实际压力与设定值偏差的不足
- ✓高负荷段相对加强燃料与给水的的前馈超前指令强度

有效解决负荷动态变化条件下主蒸汽压力控制的技术难题



避免滥用自适应控制

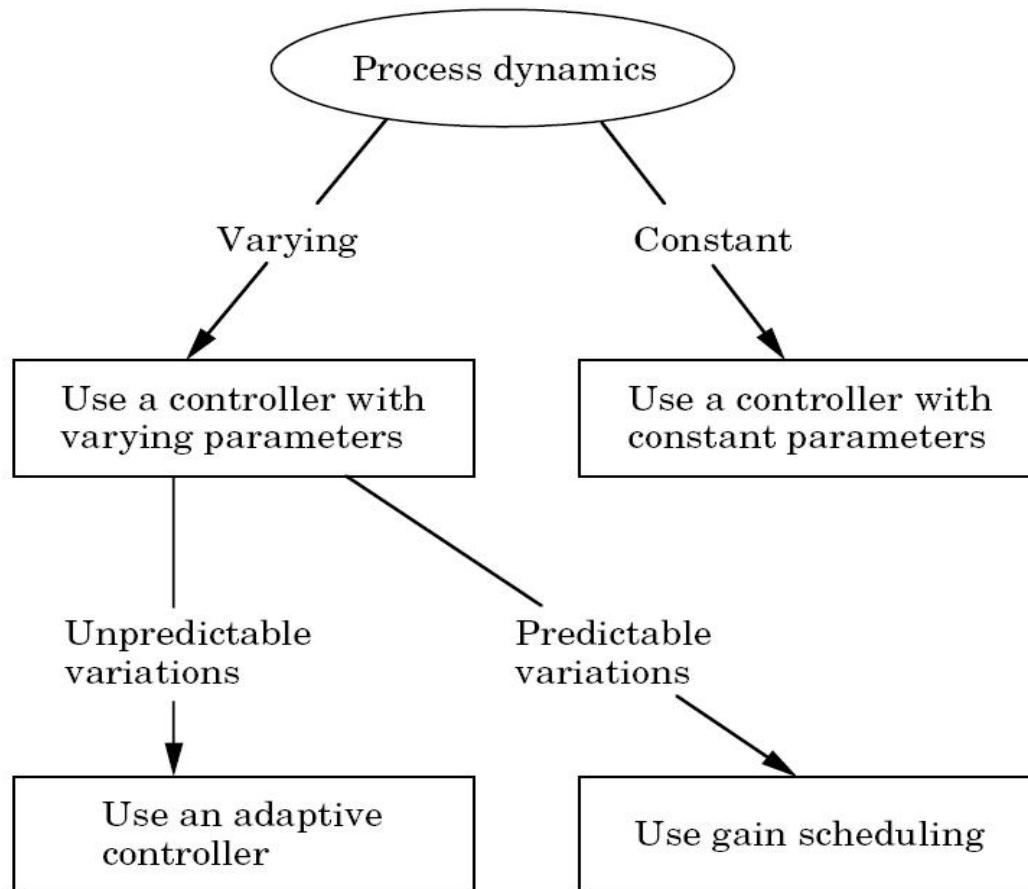
- 自适应控制方法并非总能够取代
- 自适应控制的优点是能够根据过程变化进行参数调整，也正是源于这种调整。
 - ❑ 自适应控制的思想是将过程干扰特性的改变，但实际上（对象非线性、对象未建模等）；
 - ❑ 自适应控制器中一般含有大量积分环节，有时会产生不利影响（考虑一下：在对标准PID控制器进行参数调整时，I的参数是如何调的？增大积分增益会引起什么？）。

参数整定找最佳，从小到大顺序查
先是比例后积分，最后再把微分加
曲线振荡很频繁，比例度盘要放大
曲线漂浮绕大湾，比例度盘往小扳
曲线偏离回复慢，积分时间往下降
曲线波动周期长，积分时间再加长
曲线振荡频率快，先把微分降下来
动差大来波动慢。微分时间应加长
理想曲线两个波，前高后低4比1
一看二调多分析，调节质量不会低



What Kind of Controller?

固定参数控制器要比自适应控制器简单得多。





模型参考自适应系统

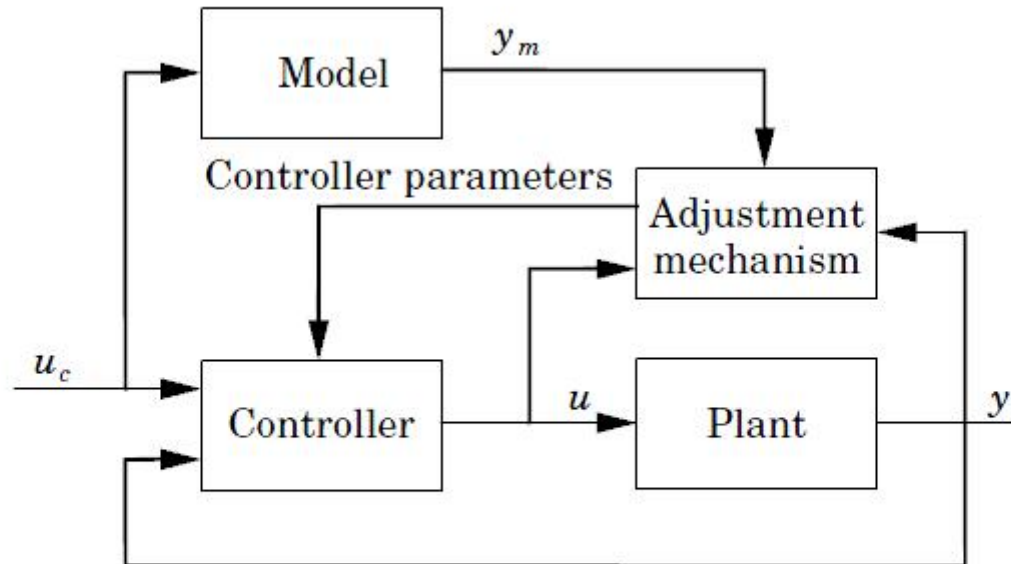


Figure 5.1 Block diagram of a model-reference adaptive system (MRAS).



标量系统：自适应调节

考虑如下一阶标量系统：

$$\dot{x} = ax + u,$$

其中 a 是未知常数。

控制目标：设计控制律 u ，使得系统状态 $x(t)$ 是有界的，且当 $t \rightarrow \infty$ 时， $x(t)$ 逐渐趋于零。

参考模型：
$$\dot{x}_{ref} = -a_{ref} x_{ref}$$

Blackboard



标量系统：自适应跟踪

考虑如下一阶标量系统：

$$\dot{x} = -ax + bu$$

其中 a, b 都是未知常数，且 b 的符号是已知的。

控制目标：设计控制律 u ，使得系统状态 $x(t)$ 是有界的，且当 $t \rightarrow \infty$ 时， $x(t)$ 逐渐跟踪参考信号 x_{ref} 。

参考模型： $\dot{x}_{ref} = -a_{ref}x_{ref} + b_{ref}u_c(t)$

其中 $a_{ref} > 0$ 和 b_{ref} 都是已知常数，且参考输入信号 $u_c(t)$ 是连续有界的。

Blackboard



标量系统：自适应跟踪

Assuming that a and b are known, we propose the control law:

$$u = k_1^* x + k_2^* u_c$$

Then we have

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -ax + bu \\ &= -ax + b(k_1^* x + k_2^* u_c) \\ &= -(a - bk_1^*)x + bk_2^* u_c\end{aligned}$$

To track x_{ref} with $\dot{x}_{ref} = -a_{ref}x_{ref} + b_{ref}u_c$, the matching condition

$$a - bk_1^* = a_{ref} \quad bk_2^* = b_{ref} \quad \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = -a_{ref}x + b_{ref}u_c \\ \Rightarrow \dot{e} = -a_{ref}e \quad e = x - x_{ref} \end{cases}$$
$$k_1^* = \frac{a - a_{ref}}{b}, \quad k_2^* = \frac{b_{ref}}{b}$$



标量系统：自适应跟踪

We then propose the following control law with adjustable parameters:

$$u = \hat{k}_1(t)x + \hat{k}_2(t)u_c.$$

We substitute the above control law into the system dynamics:

$$\dot{x} = -ax + b(\hat{k}_1(t)x + \hat{k}_2(t)u_c)$$

$$= \underline{-a_{ref}x + b_{ref}u_c} + a_{ref}x - b_{ref}u_c - ax + b\hat{k}_1(t)x + b\hat{k}_2(t)u_c$$

$$= -a_{ref}x + b_{ref}u_c + (a_{ref} + b\hat{k}_1(t) - a)x + (b\hat{k}_2(t) - b_{ref})u_c$$

$$= -a_{ref}x + b_{ref}u_c + (b\hat{k}_1(t) - bK_1^*)x + (b\hat{k}_2(t) - bK_2^*)u_c$$

$$= -a_{ref}x + b_{ref}u_c + b\tilde{k}_1(t)x + b\tilde{k}_2(t)u_c$$

$$\text{where } \tilde{k}_1 = \hat{k}_1 - K_1^*, \quad \tilde{k}_2 = \hat{k}_2 - K_2^*.$$



标量系统：自适应跟踪

Define the tracking error

$$e(t) = x(t) - x_{ref}(t)$$

The error dynamics.

$$\dot{e}(t) = \dot{x}(t) - \dot{x}_{ref}(t)$$

$$= -a_{ref} e + \underbrace{b \tilde{K}_1(t)}_{=} x + \underbrace{b \tilde{K}_2(t)}_{=} u_c$$

Consider a Lyapunov function candidate:

$$V(t) = \frac{1}{2} e^2 + \frac{1}{2} \underbrace{\tilde{K}_1^2(t)}_{b} + \frac{1}{2} \underbrace{\tilde{K}_2^2(t)}_{b}$$

The derivative of V along the error dynamics.

$$\dot{V} = e \cdot \dot{e} + \underbrace{\tilde{K}_1}_{\hat{b}} \hat{\dot{K}}_1(t) + \underbrace{\tilde{K}_2}_{\hat{b}} \hat{\dot{K}}_2(t)$$



标量系统：自适应跟踪

$$\begin{aligned}
 &= -a_{ref} e^2 + b \tilde{k}_1(t) x e + b \tilde{k}_2(t) u_c e + \tilde{k}_1 \dot{\hat{k}}_1(t) + \tilde{k}_2 \dot{\hat{k}}_2(t) \\
 &= -a_{ref} e^2 + \tilde{k}_1(t) \left(\dot{\hat{k}}_1(t) + \underline{b x e} \right) + \tilde{k}_2(t) \left(\dot{\hat{k}}_2(t) + \underline{b u_c e} \right)
 \end{aligned}$$

If we select $\dot{\hat{k}}_1(t) = \underline{-b x e}$, $\dot{\hat{k}}_2(t) = \underline{-b u_c e}$, the derivative of V is negative semi-definite.

Another choice is:

$$V = \frac{1}{2} e^2 + \frac{|b|}{2 \underline{g_1}} \tilde{k}_1^2 + \frac{|b|}{2 \underline{g_2}} \tilde{k}_2^2$$

Its derivative is

$$\begin{aligned}
 \dot{V} &= -a_{ref} e^2 + \tilde{k}_1(t) \left(|b| \dot{\hat{k}}_1(t) + \underline{b x e} \right) + \tilde{k}_2(t) \left(|b| \dot{\hat{k}}_2(t) + \underline{b u_c e} \right) \\
 &= -a_{ref} e^2 + |b| \tilde{k}_1(t) \left(\dot{\hat{k}}_1(t) + \underline{\text{sgn}(b) x e} \right) + \tilde{k}_2(t) |b| \left(\dot{\hat{k}}_2(t) + \underline{\text{sgn}(b) u_c e} \right)
 \end{aligned}$$



标量系统：自适应跟踪

Then we choose

$$\begin{aligned}\dot{\hat{k}}_1(t) &= -\text{sgn}(b) x e, & \dot{\hat{k}}_2(t) &= -\text{sgn}(b) u e \\ &\quad - \sigma_1 \text{sgn}(b) x e, & &\quad - \sigma_2 \text{sgn}(b) u e\end{aligned}$$

$$\dot{V} = -\alpha_{\text{ref}} e^2 \leq 0$$

It follows that $V(t)$ is bounded, and thus e , $\hat{k}_1(t)$, $\hat{k}_2(t)$ are all bounded.

Then we can get $\dot{V}(t) = -2\alpha_{\text{ref}} e \cdot \dot{e}$ is bounded. According to Barbalat's lemma,

we can conclude $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{V}(t) = 0$, i.e., $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$.



标量系统：自适应跟踪

Table: Direct MARC design summary for a scalar system

Open-loop plant $\dot{x} = -ax + bu$

Reference model $\dot{x}_{ref} = -a_{ref}x_{ref} + b_{ref}u_c(t)$

Tracking error $e = x - x_{ref}$

Control input $u = \hat{k}_1(t)x + \hat{k}_2(t)u_c(t)$

Direct MRAC laws $\dot{\hat{k}}_1 = -\sigma_1 \text{sgn}(b)xe, \dot{\hat{k}}_2 = -\sigma_2 \text{sgn}(b)u_c e$

The MIT Rule:

$$\dot{\hat{k}}_1 = -\sigma_1 \text{sgn}(b) \frac{a_{ref}}{p + a_{ref}} ye$$

$$\dot{\hat{k}}_2 = -\sigma_2 \text{sgn}(b) \frac{a_{ref}}{p + a_{ref}} u_c e$$



带非线性项的标量系统：自适应跟踪

考虑如下一阶标量系统：

$$\dot{x} = -ax + b(u + f(x))$$

其中 $f(x) = \theta\varphi(x)$ 是Lipschitz连续的， a, b, θ 都是未知常数，且 b 的符号是已知的。

控制目标：设计控制律 u ，使得系统状态 $x(t)$ 是有界的，且当 $t \rightarrow \infty$ 时， $x(t)$ 逐渐跟踪参考信号 x_{ref} 。

参考模型： $\dot{x}_{ref} = -a_{ref}x_{ref} + b_{ref}u_c(t)$

其中 $a_{ref} > 0$ 和 b_{ref} 都是已知常数，且参考输入信号 $u_c(t)$ 是连续有界的。

Blackboard



带非线性项的标量系统：自适应跟踪

We propose the following control law:

$$u = \hat{k}_1(t)x + \hat{k}_2(t)u_c - \hat{\theta}(t)\varphi(x)$$

Then the error dynamics is

$$\dot{e} = -a_{ref}e + b\tilde{k}_1x + b\tilde{k}_2u_c - b\tilde{\theta}\varphi(x)$$

where $\tilde{\theta} = \hat{\theta}(t) - \theta$.

Consider the following Lyapunov function candidate:

$$V = \frac{1}{2}e^2 + \frac{|b|}{2\sigma_1}\tilde{k}_1^2 + \frac{|b|}{2\sigma_2}\tilde{k}_2^2 + \frac{|b|}{2\sigma_3}\tilde{\theta}^2, \quad \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 > 0.$$

The time derivative of V along the error dynamics is



带非线性项的标量系统：自适应跟踪

$$\begin{aligned}\dot{V} &= e \cdot \dot{e} + \frac{|b|}{\sigma_1} \tilde{k}_1 \dot{\hat{k}}_1 + \frac{|b|}{\sigma_2} \tilde{k}_2 \dot{\hat{k}}_2 + \frac{|b|}{\sigma_3} \tilde{\theta} \dot{\hat{\theta}} \\ &= -a_{ref} e^2 + \frac{|b|}{\sigma_1} \tilde{k}_1 (\dot{\hat{k}}_1 + \sigma_1 \text{sgn}(b) x e) + \frac{|b|}{\sigma_2} \tilde{k}_2 (\dot{\hat{k}}_2 + \sigma_2 \text{sgn}(b) u_c e) \\ &\quad + \frac{|b|}{\sigma_3} \tilde{\theta} (\dot{\hat{\theta}} - \sigma_3 \text{sgn}(b) \varphi(x) e)\end{aligned}$$

If we select

$$\dot{\hat{k}}_1 = -\sigma_1 \text{sgn}(b) x e$$

$$\dot{\hat{k}}_2 = -\sigma_2 \text{sgn}(b) u_c e$$

$$\dot{\hat{\theta}} = \sigma_3 \text{sgn}(b) \varphi(x) e$$

We have $\dot{V} = -a_{ref} e^2 \leq 0$.

which implies that $V(t) \leq V(0)$. We can get $e, \tilde{k}_1, \tilde{k}_2, \tilde{\theta}$ are all bounded, and thus x is also bounded. It implies that $\varphi(x)$ is bounded since it is Lipschitz continuous. From the error dynamics, \dot{e} is bounded. $\ddot{V} = -2a_{ref} e \cdot \dot{e}$ is bounded. From Barbalat's Lemma, $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{V} = 0$, i.e., $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$.



标量系统：间接自适应跟踪

考虑如下一阶标量系统：

$$\dot{x} = -ax + bu$$

其中 a, b 都是未知常数，且 b 的符号和 $|b|$ 的一个下界 b_{\min} 是已知的。

控制目标：设计控制律 u ，使得系统状态 $x(t)$ 是有界的，且当 $t \rightarrow \infty$ 时， $x(t)$ 逐渐跟踪参考信号 x_{ref} 。

参考模型： $\dot{x}_{ref} = -a_{ref}x_{ref} + b_{ref}u_c(t)$

其中 $a_{ref} > 0$ 和 b_{ref} 都是已知常数，且参考输入信号 $u_c(t)$ 是连续有界的。

Blackboard



标量系统：间接自适应跟踪

The matching condition is

$$K_1^* = \frac{a - a_{ref}}{b}, \quad K_2^* = \frac{b_{ref}}{b}$$

We propose the following control law.

$$u = \hat{k}_1(t)x + \hat{k}_2(t)u_c.$$

$$\text{where } \hat{k}_1(t) = \frac{\hat{a}(t) - a_{ref}}{\hat{b}(t)}, \quad \hat{k}_2(t) = \frac{b_{ref}}{\hat{b}(t)}$$

which implies that

$$u = \frac{1}{\hat{b}(t)} \left[(\hat{a}(t) - a_{ref})x + b_{ref}u_c \right].$$



标量系统：间接自适应跟踪

The closed-loop system is

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -ax + bu \\ &= -\hat{a}x + \hat{b}u + (\hat{a} - a)x - (\hat{b} - b)u \\ &= -\hat{a}x + (\hat{a} - a_{ref})x + b_{ref}u_c + (\hat{a} - a)x - (\hat{b} - b)u \\ &= -a_{ref}x + b_{ref}u_c + (\hat{a} - a)x - (\hat{b} - b)u. \\ &= -a_{ref}x + b_{ref}u_c + \tilde{a}x - \tilde{b}u \\ &\quad (\tilde{a} \triangleq \hat{a} - a, \tilde{b} \triangleq \hat{b} - b).\end{aligned}$$

Then the error dynamics is

$$\dot{e} = -a_{ref}e + \tilde{a}x - \tilde{b}u.$$



标量系统：间接自适应跟踪

Consider the following Lyapunov function candidate:

$$V = \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{2\sigma_1}\tilde{a}^2 + \frac{1}{2\sigma_2}\tilde{b}^2, \quad \sigma_1, \sigma_2 > 0.$$

Its derivative is

$$\begin{aligned}\dot{V} &= e \cdot \dot{e} + \frac{1}{\sigma_1}\tilde{a} \cdot \dot{\tilde{a}} + \frac{1}{\sigma_2}\tilde{b} \cdot \dot{\tilde{b}} \\ &= -\sigma_1 e^2 + \frac{1}{\sigma_1}\tilde{a}(\dot{\tilde{a}} + \sigma_1 x e) + \frac{1}{\sigma_2}\tilde{b}(\dot{\tilde{b}} - \sigma_2 u e)\end{aligned}$$

In order to make $\dot{V} \leq 0$, we select:

$$\dot{\tilde{a}} = -\sigma_1 x e$$

$$\dot{\tilde{b}} = \sigma_2 u e$$

Then we have $\dot{V} \leq 0$, and thus e , \tilde{a} , \tilde{b} are all bounded.



标量系统：间接自适应跟踪

In order to claim the boundedness of u , we need to modify the adaptation law of $\hat{b}(t)$ and prevent $\hat{b}(t)$ from going through zero. Such modification is achieved using the following a priori knowledge.

★. The $\text{sgn}(b)$ and a lower bound $b_{\min} > 0$ for $|b|$ are known.

Let us consider the following modification.

$$\dot{\hat{b}} = \begin{cases} \sigma_2 u e & \text{if } |\hat{b}| > b_{\min} \text{ or if } |\hat{b}| = b_{\min} \text{ and } \text{sgn}(\hat{b}) u e \geq 0. \\ 0 & \text{otherwise (if } |\hat{b}| = b_{\min}, \text{sgn}(\hat{b}) u e < 0. \end{cases}$$

After the modification, we have to show that

$$\tilde{b}(\dot{\hat{b}} - \sigma_2 u e) \leq 0.$$



标量系统：间接自适应跟踪

Suppose that $\text{sgn}(b) > 0$. Starting with any initial condition $\hat{b}(0) > b_{\min}$, the estimated parameters will satisfy $\hat{b}(t) > b_{\min}$.

1. When $\hat{b}(t) > b_{\min}$, $\dot{\hat{b}}(\hat{b} - \sigma_2 e u) = 0$.

2. Suppose that there exist T such that $\hat{b}(T) = b_{\min}$.

(a) $u(T)e(T) > 0$, $\dot{\hat{b}} = \sigma_2 e u$, $\tilde{b}(\dot{\hat{b}} - \sigma_2 e u) = 0$

(b) $u(T)e(T) < 0$, $\dot{\hat{b}} = 0$. $\tilde{b}(\dot{\hat{b}} - \sigma_2 e u) = -\sigma_2 \tilde{b} e u = -\sigma_2 e u (\hat{b} - b)$
 $= -\sigma_2 e u (b_{\min} - b) \leq 0$.

Therefore $\dot{V} \leq -\alpha_{\min} e^2 \leq 0$. It implies that e , \tilde{a} , \tilde{b} are all bounded and $|\hat{b}(t)| > b_{\min}$.



标量系统：间接自适应跟踪

Integrating both sides of $\dot{V} \leq -a_{\text{reg}} e^2$.

$$V(t) - V(0) \leq -a_{\text{reg}} \int_0^t e^2(\tau) d\tau$$

$$\Rightarrow \int_0^t e^2(\tau) d\tau \leq \frac{1}{a_{\text{reg}}} (V(0) - V(t)) \leq \frac{V(0)}{a_{\text{reg}}}$$

Let $f(t) = \int_0^t e^2(\tau) d\tau$. $\dot{f}(t) = e^2(t) \geq 0$. $f(t)$ has a finite limit.

" $\dot{f} = 2e \cdot \dot{e}$ is bounded. From Barbalat's Lemma, $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{f}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} e^2(t) = 0$.



标量系统：间接自适应跟踪

Table: Indirect MRAC design summary for a scalar system

Open-loop plant	$\dot{x} = -ax + bu$
Reference model	$\dot{x}_{ref} = -a_{ref}x_{ref} + b_{ref}u_c(t)$
Tracking error	$e = x - x_{ref}$
Control input	$u = \frac{\hat{a} - a_{ref}}{\hat{b}} + \frac{b_{ref}}{\hat{b}}u_c(t)$
Indirect MRAC laws	$\begin{aligned}\dot{\hat{a}} &= -\sigma_1 x e \\ \dot{\hat{b}} &= \begin{cases} \sigma_2 e u & \text{if } \hat{b} > b_{min} \text{ or if } \hat{b} = b_{min} \text{ and } \text{sgn}(\hat{b})ue > 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}\end{aligned}$



一般系统

考虑如下一般线性系统：

$$\dot{x} = Ax + B\Lambda u$$

其中 A, Λ 都是未知矩阵， B 是已知矩阵，且 Λ 是对角线元素为正的对角矩阵， $(A, B\Lambda)$ 是可控的。

控制目标：设计控制律 u ，使得系统所有信号都是有界的，且当 $t \rightarrow \infty$ 时， $x(t)$ 逐渐跟踪参考信号 x_{ref} 。

参考模型： $\dot{x}_{ref} = A_{ref}x_{ref} + B_{ref}u_c$

其中 A_{ref} 是 Hurwitz 的，且参考输入信号 $u_c(t)$ 是连续有界的。

Blackboard



Table: Direct MARC design summary for general linear systems

Open-loop plant	$\dot{X} = -AX + BU$
Reference model	$\dot{X}_{ref} = -A_{ref}X_{ref} + B_{ref}U_c(t)$
Tracking error	$e = X - X_{ref}$
Control input	$U = \hat{K}_1X + \hat{K}_2U_c(t)$
Algebraic Lyapunov function	$PA_{ref} + A_{ref}^TP = -Q$
MRAC laws	$\dot{\hat{K}}_1 = -B^TPeX^T\Gamma_1$ $\dot{\hat{K}}_2 = -B^TPeX^T\Gamma_2$



Thank You !