第一章 线性规划

三要素：①决策变量 ②目标函数 ③约束条件

最优性判别定理：$C - C_B B^{-1} A \geq 0$

基变量对应分量∃值为0，退化

∃可行解，必存在一基本可行解

∃最优解，必存在一最优基本可行解

单纯形法

① 进基

准则：有不止一个负检验数

① Bland 规则：$q = \min\{ j \mid y_{0j} < 0, j = 1, 2, \cdots, n \}$

② 最负检验数法：$y_{0q} = \min\{ y_{0j} \mid y_{0j} < 0, j = 1, 2, \cdots, n \}$

② 离基

最小非负比值准则

$$\theta = \min\left\{ \frac{y_{i0}}{y_{iq}} \,\middle|\, y_{iq} > 0, 1 \leq i \leq m \right\} = \frac{y_{p0}}{y_{pq}}$$ P，离基变量

对偶单纯形表

迭代原理

1. 确定离基变量

$r = \min(i \mid y_{i0} < 0, 1 \leq i \leq m)$ 最小下标

<0 >0 >0 <0

2. 确定进基变量

1 若对$\forall j \in \{1,2,\cdots,n\} \setminus \{J_1, J_2, \cdots, J_m\}$，都有$y_{rj} \geq 0$，

(D)没有有限的最优解，所以(P)无可行解。

2 若$\exists j \in \{1,2,\cdots,n\} \setminus \{J_1, J_2, \cdots, J_m\}$使$y_{rj} < 0$，

要使 $\bar{\lambda} p_j = c_j - y_{0j} - \varepsilon y_{rj} \leq c_j \Rightarrow -y_{0j} - \varepsilon y_{rj} \leq 0 \Rightarrow \varepsilon \leq \frac{y_{0j}}{-y_{rj}}$

$\Rightarrow \varepsilon = \min\left\{ \frac{y_{0j}}{-y_{rj}} \,\middle|\, y_{rj} < 0 \right\} = \frac{y_{0k}}{-y_{rk}} \Rightarrow x_k$为进基变量，$y_{rk}$为主元

灵敏度分析

表上作业法（运输问题）

匈牙利方法（指派问题）0~1

最速下降法

$f(x^{(k)}+\lambda p^{(k)})$ $\quad p^{(k)}=-\nabla f(x^{(k)})$

$$\lambda_k=\frac{p^{(k)T}\cdot p^{(k)}}{p^{(k)T}Q\,p^{(k)}}$$

牛顿法

$$x-x^{(k)}=-G(x^{(k)})^{-1}g(x^{(k)})$$

$G=\nabla^2,\ g=\nabla$

共轭梯度法

二次函数

$x^{(k)}$

$$p^{(k)}=-g^{(k)}+\beta_{k-1}p^{(k-1)} \qquad \beta_{k-1}=\frac{g^{(k)T}Q\,p^{(k-1)}}{p^{(k-1)T}Q\,p^{(k-1)}}$$

$$x^{(k+1)}=x^{(k)}+\lambda_k p^{(k)} \qquad \lambda_k=\frac{g^{(k)T}g^{(k)}}{p^{(k)T}Q\,p^{(k)}}$$

⋮

n次迭代即可得到最优解

定理4-5 $S \subseteq R^n$ 是非空凸集, $f: S \to R^1$ 二阶连续可导.

f 是S上凸函数充要条件 $\Longleftrightarrow$ $\nabla^2 f(x)$ 在S上是半正定的.

当 $\nabla^2 f(x)$ 在S上正定 $\Longrightarrow$ f 是S上严格凸函数

定理 4-1（Sylvester 定理） 一个 n 阶对称矩阵 Q 是正定矩阵的充分必要条件是：矩阵 Q 的各阶顺序主子式都是正的．对称矩阵 Q 是负定矩阵的充分必要条件是：Q 的各阶顺序主子式负、正相间．

KT点、不等式 $\nabla f(x^*) - \sum u_i \nabla g_i(x^*) = 0$ $u_i^* \geq 0$

不等式+等式 $\nabla f(x^*) - \sum u_i \nabla g_i(x^*) - \sum \lambda_j \nabla h_j(x^*) = 0$

$\lambda_j^* \geq 0$ $u_i^* \geq 0$

外点法 $\min \varphi(x, M) = f(x) + M \cdot \sum [\min(0, g_i(x))]^2$

尽可能靠近0

所以 $g_i(x) < 0$ $\lim_{M \to \infty}$

内点法 $\varphi(x, r_k) = f(x) + r_k \sum \frac{1}{g_i(x)}$ 不等式约束

$= f(x) - r_k \sum \ln(g_i(x))$

$g_i(x) > 0$ $\lim_{r \to 0}$

混合点法 $\varphi(x, r_k) = f(x) - \sum r_k \ln(g_i(x)) + \frac{1}{\sqrt{r_k}} \sum h_j^2(x)$

$r_k \downarrow 0 \to x^*$

乘子法 适用于等式约束

$\varphi(x; u; c) = f(x) + \sum u_j h_j(x) + \frac{c}{2} \sum h_j^2(x)$

求出 $x^* = f(u, c)$

指定c^*使

$u^{(k+1)} = u^{(k)} + c\,h(u^{(k)})$ 收敛到u^*

最优解 $x^* = x^*|_{u=u^*,\ c=c^*}$