概率论与数理统计

随机试验：①相同条件下可重复进行. ②结果不单一且已知 ③试验前不能确定哪个结果

事件的和 $A\cup B$ / $A+B$　　差 $A-B$　A发生, B不发生

逆 $\bar{A}$, $\bar{\bar{A}}=A$　　积/交 $A\cap B$ / AB

互斥事件 $AB=\phi$　　AB不可能同时发生.（互不相容）

n个事件互斥　$P_iP_j=\phi$　$i\neq j$, $i,j\in\{1,\cdots,n\}$

对立事件　$A\cup B=\Omega$, $AB=\phi$ $\Longleftrightarrow$ AB对立

$\overline{AB}=\bar{A}\cup\bar{B}$

加法公式 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

条件概率 $P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}$ $\Longrightarrow$ $P(AB)=P(A|B)\cdot P(B)$

全概率公式　$A_1\cdots A_n$ 互不相容. 对于事件B, $B\subset A_1+A_2+\cdots+A_n$

$$P(B)=\sum_{k=1}^{n}P(B|A_k)\cdot P(A_k)$$

贝叶斯公式　$A_1\cdots A_n$ 互不相容, $P(A_i)>0$, 对任意事件B, 有 $A_1+A_2+\cdots+A_n\supset B$. $P(B)>0$,

则 $P(A_i|B)=\dfrac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{j=1}^{n}P(A_j)P(B|A_j)}=\dfrac{P(A_i)P(B|A_i)}{P(B)}$　$(i=1,\cdots n)$

独立性　$P(AB)=P(A)\cdot P(B)$ $\Longleftrightarrow$ AB独立.　AB, $A\bar{B}$, $\bar{A}B$, $\bar{A}\bar{B}$ 同独立性

贝努力定理 $X\sim B(n,p)$

泊松定理　$P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k}\xrightarrow[n\to\infty,\,p\to 0]{np=\lambda,}\dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$　$X\sim P(\lambda)$

离散

$X \sim B(n,p)$

二项分布

$P(X=k)=C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$

$(k=0,1,\cdots n)$

$E(X)=np$

$D(X)=np(1-p)$

$X \sim P(\lambda)$

泊松

$P(X=k)=\dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$

$k=0,\cdots$

$E(X)=\lambda$

$D(X)=\lambda$.

$X \sim G(p)$

独立重复，首次成功次数

几何

$P(X=k)=q^{k-1}p$

$E(X)=\dfrac{1}{p}$

$D(X)=\dfrac{1-p}{p^2}$

$X \sim NB(r,p)$

负二项分布

试验至成功r次

$P(X=k)=C_{k-1}^{r-1} p^r (1-p)^{k-r}$

$X \sim$

超几何.

$P(X=k)=\dfrac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}$

N趋向于大时，服从二项分布

连续

$X \sim U[a,b]$

均匀分布

$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a<x<b \\ 0, & 其他\end{cases}$

$F(x)=\begin{cases}0, & x<a \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a \le x<b \\ 1, & x \ge b\end{cases}$

$E(X)=\dfrac{a+b}{2}$

$D(X)=\dfrac{(b-a)^2}{12}$

$X \sim E(\lambda)$

指数

$f(x)=\begin{cases}0, & x \le 0 \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x>0\end{cases}$

$F(x)=\begin{cases}0, & x \le 0 \\ 1-e^{-\lambda x}, & x>0\end{cases}$

$E(X)=\dfrac{1}{\lambda}$

$D(X)=\dfrac{1}{\lambda^2}$

$X \sim N(\mu,\sigma^2)$

正态.

$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

$E(X)=\mu$

$D(X)=\sigma^2$.

$X \sim N(0,1)$

标准正态.

$\varphi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\cdot dt = p(X\le x) \Rightarrow f(x)=\begin{cases} F'(x) & F'(x)存在的点. \\ 0 & 不存在的点. \end{cases}$

$f(x)$ — 概率密度函数 ； $F(x)$ 累积分布函数.

$P(a\le X\le b)=\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$

正态分布的标准化

若 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$F(x)$ 为其分布函数

则 $F(x)=\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$ $\quad p(X\le b)=\Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right)$

欲求 $Y=g(x)$ 概率密度，先求 $F_Y(y)$，再求导 $F_Y'(y)$ 即得概率密度

知 X 的概率密度 $f(x)$. $y=g(x)$ 求 $Y=g(x)$ 的概率密度

(1) $F_Y(y) \longrightarrow p(Y\le y)=p(g(x)\le y)=p(X\in\{x\mid g(x)\le y\})$.

(2) 对 $F_Y(y)$ 求导，得到 $f_Y(y)$ $\quad f_Y(y)=[F_Y(y)]'$

正态函数 $\quad X\sim N(\mu,\sigma^2) \quad Y=aX+b \quad Y\sim N(a\mu+b,\ a^2\sigma^2)$

二维随机～及分布

$F(x,y) \triangleq p(X\le x, Y\le y)$ 称累积分布函数 / 联合累积分布函数

$F_X(x)$，$F_Y(y)$ 称为 (X,Y) 关于 X、Y 的 $\boxed{边缘分布函数}$

$p(x_1<X<x_2,\ y_1<Y<y_2)=F(x_2,y_2)-F(x_1,y_2)-F(x_2,y_1)+F(x_1,y_1)$

$F_X(x)=F(x,+\infty)$，$F_Y(y)=F(+\infty,y)$

边际分布由联合分布确定，反之不成立

$p(X=x_i, Y=y_j)=p_{ij}$

$P_X(x_i)=p_{i\cdot}$ $\quad$ 同理 $P_Y(y_j)=p_{\cdot j}$

二维连续～

$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,du\,dv \Leftrightarrow \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}=f(x,y)$ （连续点处）

$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\cdot dy \quad f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\cdot dx$ 边缘概率密度

二维均匀分布

$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{A}, & (x,y)\in G \\ 0, & 其他\end{cases}$ 则称(X,Y)服从区域G上的均匀分布

二维正态分布 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2;\sigma_1^2,\sigma_2^2;\rho)$

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{1}{1-\rho^2}\left(\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}-\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{2\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}\right)}\quad\left(\begin{array}{l}-\infty<x<+\infty\\-\infty<y<+\infty\end{array}\right)$$

$X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$ $\quad Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$

随机变量的独立性

$F(x,y)=F_X(x)\cdot F_Y(y)$ 则称X Y相互独立

X Y相互独立 $\Longleftrightarrow$ $f_X(x)\cdot f_Y(y)$是(X,Y)的概率密度

$(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$ 相互独立 $\Longleftrightarrow$ $\rho=0$

条件分布

$$P(X=x_i\mid Y=y_j)=\frac{P(X=x_i,Y=y_j)}{P(Y=y_j)}=\frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}\quad(i=1,2,\cdots)$$

$f_{X|Y}(x|y)=\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}$ 为Y=y条件下，X的条件密度.

$F_{X|Y}(x|y)=\int_{-\infty}^{x}f_{X|Y}(u|y)\,du$ 为Y=y条件下，X的条件分布(函数)

$f_{Y|X}(y|x)=\dfrac{f(x,y)}{f_X(x)}$，X=x条件下，y的条件密度，

$F_{Y|X}(y|x)=\int_{-\infty}^{x}f_{Y|X}(v|x)\,dv$ 为 ....

连续情形，全概率公式 $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f_{Y|X}(y|x)f_X(x)dx$

随机变量的分布

① X+Y 分布 $F_Z(z)=P(Z\le z)=P(X+Y\le z)=\iint\limits_{x+y\le z}f(x,y)\,dxdy$

若X,Y独立，Z=X+Y密度函数 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty}f_X(z-y)f_Y(y)\cdot dy$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}f_X(x)f_Y(z-x)\,dx$$

独立正态分布 $X_1,X_2\cdots X_n$ 相互独立，

$X_i\sim N(\mu_i,\sigma_i^2)$ $\quad(i=1,2,\cdots,n)$

对于任意不为零的常数 $a_1X_1+\cdots a_nX_n\sim N\left(\sum_{i=1}^{\infty}a_i\mu_i,\sum_{i=1}^{\infty}a_i^2\sigma_i^2\right)$

离散卷积公式 $Z=X+Y$

$P(Z=k)=P\{X+Y=k\}=\sum_{i=1}^{k}P(X=i)P(Y=k-i)=\sum_{j=1}^{k}P(X=k-j)\cdot P(Y=j)$

和的分布

$X\sim P(\lambda_1)$ $Y\sim P(\lambda_2)$ $X+Y\sim P(\lambda_1+\lambda_2)$

$X\sim B(m,p)$ $Y\sim B(n,p)$ $X+Y\sim B(m+n,p)$

$X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$ $Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$ $X+Y\sim N(\mu_1+\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2)$

极值 $\max(X,Y)$, $\min(X,Y)$ 的分布

$F_{max}(z)=P(\max(X,Y)\le z)=P\{X\le z, Y\le z\}$

若相互独立，$X_i\sim F_{X_i}(x_i)$，$i=1,2,\cdots$

$F_{max}(z)=P\{\max(X_1,X_2,\cdots,X_n)\le z\}=F_{X_1}(z)\cdots F_{X_n}(z)$

$F_{min}(z)=P(\min(X_1\cdots X_n)\le z)=1-\prod_{i=1}^{n}[1-F_{X_i}(z)]$

$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 独立同分布于 $F(x)$ 时

$F_{max}(z)=F^n(z)$ $F_{min}=1-[1-F(z)]^n$.

n个独立同分布，则 $f_{max}=nf(z)[F(z)]^{n-1}$，$f_{min}(z)=nf(z)[1-F(z)]^{n-1}$

第五章 数学期望 E ~.

离散型，$\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|p_i<+\infty$，则存在 $E(X)=\sum_{i=1}^{\infty}x_ip_i$.

连续型 $E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx$

$Y=g(X)$ 的分布

离散，$E(Y)=E[g(X)]=\sum_{k=1}^{\infty}g(x_k)p_k$

连续 $E(X)$ 存在，$E(Y)=E[g(X)]=\int_{-\infty}^{\infty}g(x)f(x)dx$

$Z=g(X,Y)$ 的分布

离散 $E(Z)=E[g(X,Y)]=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}g(x_i,y_j)p_{ij}$

连续 $E(Z)=E(g(X,Y))=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}g(x,y)f(x,y)\cdot dxdy$

数学期望的性质

① $a \le X \le b$ $\quad a \le E(X) \le b$

② $E(aX+bY) = aE(X)+bE(Y)$，a,b 常数

③ 若 X,Y 相互独立，$E(XY) = E(X)E(Y)$

方差 $D(X)=E[X-E(X)]^2$. 标准差 $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$

$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$.

方差性质

① $X \stackrel{a.e}{=} C$（常数） 则 $D(X)=0$

② C 为常数，$D(CX) = C^2 D(X)$

③ $D(X+Y) = D(X)+D(Y)+2E[(X-E(X))(Y-E(Y))]$

$\boxed{X\,Y\text{独立时}}$. $D(X+Y) = D(X)+D(Y)$

协方差 $\boxed{Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)\cdot E(Y)}$ $=0$ 时，$X\,Y$ 不相关

$D(X \pm Y) = D(X)+D(Y) \pm 2Cov(X,Y)$

协方差性质 $Cov(X,X) = D(X)$

$Cov(aX,bY) = ab\,Cov(X,Y)$

$Cov(X+Y,Z) = Cov(X,Z)+Cov(Y,Z)$

相关系数 $\rho_{XY} = \dfrac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\cdot\sqrt{D(Y)}}$

$(0,1)$ 正相关 $\quad 1$ 正线性

$(-1,0)$ 负相关 $\quad -1$ 负线性 $\quad 0$ 不相关

$\rho_{XY}=0$ $\quad Cov(X,Y)=0$. $\quad D(X+Y) = D(X)+D(Y)$ $\quad E(XY)=E(X)\cdot E(Y)=0$、

大数定理

切比雪夫不等式　$E(X)=\mu, D(X)=\sigma^2$，$\forall \varepsilon>0$

$P(|X-\mu|\geq\varepsilon)\leq\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$　　$P(|X-\mu|\leq\varepsilon)\geq 1-\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$

伯努利大数~　$\lim_{n\to\infty}P(|\frac{Y_n}{n}-p|\geq\varepsilon)=0$　，$\forall\varepsilon>0$.

切比雪夫大数定律，$X_1\cdots X_n$相互独立，存在常数C，使得$D(X_i)\leq C$ $(i=1,2,\dots)$

对$\forall\varepsilon>0$，有 $\lim_{n\to\infty}P[|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n E(X_i)|\geq\varepsilon]=0$　记为服从大数定律

辛钦大数　设随机变量$\{X_n, n=1,2,\dots\}$为独立同分布，具有$EX_i=\mu$，对$\forall\varepsilon$，

$$\lim_{n\to\infty}P\{|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i-\mu|\geq\varepsilon\}=0$$

中心极限~

设$X_1\cdots X_n$独立同分布，有有限$EX_i=\mu$，$DX_i=\sigma^2$，

则 $Y_n=\frac{\sum_{i=1}^n X_i-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}$　$E(Y_n)=0$，$D(Y_n)=1$

n足够大，$Y_n\sim N(0,1)$，$\sum_{i=1}^n X_i\sim N(n\mu,n\sigma^2)$

第六章

抽样，默认简单随机抽样，得到样本称为简单随机样本

独立同分布　联合函数　$F^*(x_1,x_2,\cdots,x_n)=F(x_1)F(x_2)\cdots F(x_n)$

$f^*(x_1,x_2,\cdots x_n)=f(x_1)\cdot f(x_2)\cdots f(x_n)$

直方图：分区间，数区间内个数，区间频率，得到值，区间频率/跨度，画出

（需略大于左右区间端点多取位小数）

χ^2分布 $X_i \sim N(0,1)$ 独立同分布，$Y=\sum_{i=1}^{n} X_i^2$，则 $Y \sim \chi^2(n)$

$E(Y)=n$，$D(Y)=2n$.

卡方可加性 $X \sim \chi^2(m)$，$Y \sim \chi^2(n)$. $X\,Y$相互独立 $X+Y \sim \chi^2(m+n)$

分位点 $P(\chi^2 \geq \chi_\alpha^2(n))=\alpha$. $\chi_\alpha^2(n)$称为上侧α分位数

t分布 X, Y相互独立，$X \sim N(0,1)$，$Y \sim \chi^2(n)$,

则$T=\frac{X}{\sqrt{Y/n}} \sim t(n)$

F分布 $X \sim \chi^2(n_1)$ $Y \sim \chi^2(n_2)$ $\underbrace{\text{则}}_{\text{相互独立}}$ $F=\frac{X/n_1}{Y/n_2} \sim F(n_1,n_2)$

三级公式 $F_{1-\alpha}(n_1,n_2)=\frac{1}{F_\alpha(n_2,n_1)}$ — F分布

$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ 样本均值，$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2=\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2-n\overline{X}^2\right)$ 样本方差.

样本均值分布 $X_1 \cdots X_n$ 为总体$N(\mu,\sigma^2)$一个样本.

$\overline{X} \sim N(\mu,\frac{\sigma^2}{n})$ $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N(\frac{1}{n}\cdot n\mu, \frac{1}{n^2}\cdot n\sigma^2) \sim N(\mu, \frac{1}{n}\sigma^2)$

$\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}=\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma}\sqrt{n} \sim N(0,1)$

方差分布 $\frac{n-1}{\sigma^2}S^2 \sim \chi^2(n-1)$ $\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2 \sim \chi^2(n-1)$

$\boxed{\frac{(\overline{X}-\mu)}{S}\sqrt{n} \sim t(n-1)}$，总体为$N(\mu,\sigma^2)$

$\frac{\overline{X}-\overline{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} \sim t(n_1+n_2-2)$，其中$S_w=\sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}$.

$X_1 \cdots X_{n_1}$和$Y_1 \cdots Y_{n_2}$分别是总体$N(\mu_1,\sigma_1^2)$和$N(\mu_2,\sigma_2^2)$两样本，相互独立.

$\frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} \sim F(n_1-1, n_2-1)$

$\hat{\mu}=\bar{X}$, $\hat{\sigma}^2=\hat{S}^2=\frac{n-1}{n}S^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$.

矩估计 用未知参数表示总体k阶矩 / 总体方差 or 总体均值

用样本矩A_k估计总体矩α_k. ($\boxed{\text{若总体矩未知}}$)

最大似然估计

总体概率密度为$f(x;\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m)$ $\theta_1,\theta_2\cdots\theta_m$为未知参数 $x_1,\cdots x_n$为样本值.

似然函数 $L=L(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m)=\boxed{\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m)}$

使得 $L=\max\limits_{\theta_1\cdots\theta_m}L$ 即得$\theta_1\cdots\theta_m$的最大似然估计量

一般取对数 $\ln L=\max\limits_{\theta_1\cdots\theta_n}L(\theta_1,\cdots\theta_m)$

似然函数直接用 ~~该式得到~~

无偏估计量 $E_\theta[\hat{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)]=\theta$ 无偏估计量, 用$E_\theta(T)$,$D_\theta(T)$表示参数为θ时 T的数学期望和方差

$A_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^k$ 均是总体k阶原点矩$\alpha_k=E(X^k)$的无偏估计

样本方差$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$是总体$\sigma^2=D(X)$的无偏估计

有效性 $\hat{\theta}$,$\hat{\theta}'$都为θ的无偏估计, 若对任何可能的参数值θ都有 $D_\theta(\hat{\theta})\le D_\theta(\hat{\theta}')$
且有θ_0使小于成立, 称$\hat{\theta}$较$\hat{\theta}'$有效

相合性 $\hat{\theta}_n$依概率收敛于θ, 对任意$\varepsilon>0$, 有$\lim\limits_{n\to\infty}P(|\hat{\theta}_n-\theta|\ge\varepsilon)=0$
称$\hat{\theta}_n$是θ的相合(一致)估计量。