排列 $\begin{cases}\text{奇}\\ \text{偶}\end{cases}$ $t(p_1,\cdots,p_n)$ → 两数对换，奇偶性改变

$s\times n \quad s\times m,\ m+n=s$

$|A\vdots B| = (-1)^{mn}|B\vdots A|$

$$\boxed{D=\sum(-1)^{t(p_1\cdots p_n)}a_{1p_1}\cdots a_{np_n}}$$

行列式性质：

①转置不变、②互换变号 ③ ④相同行(列)，行列式为0.

⑤成比例

展开

$\boxed{\text{余子式}}$ M_{ij}. $\boxed{\text{代数余子式}}$ $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$

展开法则

$$\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{jk}=\begin{cases}D, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}$$ (当行，举例，列也可).

$\boxed{\text{范得蒙德}}$ $D_n=\begin{vmatrix}\vdots & & \vdots\\ x_1^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1}\end{vmatrix}=\prod_{1\le j<i\le n}(x_i-x_j)$, $n\geq 2$.

Cramer法则 $\begin{cases}a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\ \vdots \qquad\qquad \vdots\\ a_{n1}x_1+\cdots+a_{nn}x_n=b_n\end{cases}$

$\boxed{D\neq 0}$ $x_1=\frac{D_1}{D}\cdots\cdots$ $D_i=\begin{vmatrix}a_{11}\cdots & b_1 & \cdots a_{1n}\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ a_{n1}\cdots & b_n & \cdots a_{nn}\end{vmatrix}$.

D为系数矩阵

数域是对基本运算封闭的数集(和差积商

下(上)三角形矩阵，对角矩阵(非主对角为0)，对角元相等(对角)

单位矩阵 为对称量矩阵

方阵 → 幂；行列式，逆

$$\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}\cos n\theta & -\sin n\theta\\ \sin n\theta & \cos n\theta\end{pmatrix}$$

矩阵 相等 对应元相等

对称矩阵(反对称矩阵) $A=A'$ ($A=-A'$)

伴随矩阵 $A^{*}=\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$ 行列为 A_{ji}

$|A|=0 \leftrightarrow$ A奇异 $|A|\neq 0$, 非奇异

初等变换	对调	数乘(非0)	相加

单位矩一个初等变换 初等矩阵

$A \xleftrightarrow{\text{行}}$ 行阶梯形 $\xleftrightarrow{\text{行}}$ 行最简形 $\xleftrightarrow{\text{列}} \begin{pmatrix} E & \\ & 0 \end{pmatrix}$

行(列)满秩 $A_{m\times n}$, $R(A)=m(n)$

初等变换不改变矩阵秩

左乘 $\leftrightarrow$ 行变换, 右乘 $\leftrightarrow$ 列变换

矩阵等价 $\leftrightarrow$ $A=PBQ$ PQ可逆

$\begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_n \end{pmatrix}$ $A_1\cdots A_n$为方阵, 则为准对角矩阵, 分块对角矩阵

分块矩阵乘法, 要求左边列分法与右矩行分法相同

$AB=0$, $A+B$ 可逆 $R(A)+R(B)=n$

若AB不平行, $|a\times b|=|a||b|\sin\theta=\langle a,b\rangle$ 右手系, 向量积

混合积 $[a,b,c]=(a\times b)c$

$[abc]=[bca]=[cab]=-[bac]=-[cba]=-[acb]$

方向角 Ox, Oy, Oz, α,β,γ, 方向余弦

$a\times b=\begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$ $[abc]=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$

线性无关 部分 ← 整体

线性相关 ⟺ 至少有一个向量可由其余向量线性表示

矩阵判别，秩 = 列向量个数 ⟺ 线性无关

为方阵 ⟺ $|A| \neq 0$ (是否)

r维线性无关向量组扩为r+s维 仍线性无关，

向量个数大于维数，必线性相关。

向量组等价 ⟺ 相互线性表示

$\underset{r}{(1)}$ 线性无关，$\underset{r}{(1)}$ 可由 $\underset{s}{(2)}$ 线性表示，$r \leq s$

坐标变换，P为基 $\alpha_1 \cdots \alpha_n \to$ 基 $\beta_1 \cdots \beta_n$ 过渡矩阵。

$$(\beta_1 \cdots \beta_n) = (\alpha_1 \cdots \alpha_n) P$$

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$A = (\alpha_1, \cdots \alpha_n)$，$\alpha_1 \cdots \alpha_n$ 构成 R^n 一个规范正交基 ⟺ A正交

$|kA| = k^n|A|$, $|AB| = |A||B|$

$|A| = \sum_{p_1 \cdots p_n} (-1)^{t(p_1 \cdots p_n)} a_{1p_1} \cdots a_{np_n}$

① $(A')' = A$, ② $(A+B)' = A'+B'$ ③ $(kA)' = kA'$ ④ $(AB)' = B'A'$

⑤ $|A'| = |A|$

① $(A^{-1})^{-1} = A$ ② $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$ ③ $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ ④ $(A')^{-1} = (A^{-1})'$

$(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$

$A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$. $|A^*| = |A|^{n-1}$

$$\begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_s \end{pmatrix}^m = \begin{pmatrix} A_1^m & & \\ & \ddots & \\ & & A_s^m \end{pmatrix} \qquad A' = \begin{pmatrix} A_{11}' & \cdots & A_{n1}' \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1t}' & \cdots & A_{nn}' \end{pmatrix}$$

A_i为方阵
上下对角

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s} \\ 0 & A_{22} & & A_{2s} \\ & & \ddots & \\ & & & A_{ss} \end{vmatrix} = |A_{11}| \cdot |A_{22}| \cdots |A_{ss}|$$

降阶公式 $|\lambda E_m - AB| = \lambda^{m-n} |\lambda E_n - BA|$

$A_{m\times n}$, $B_{n\times m}$, $(m>n, \lambda \in R)$

$$\begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_s \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A_1^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & A_s^{-1} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} & & A_1 \\ & ⋰ & \\ A_s & & \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} & & A_s^{-1} \\ & ⋰ & \\ A_1^{-1} & & \end{pmatrix}$$

分块矩阵秩. $R\begin{pmatrix} A & C \\ & B \end{pmatrix} \geq R(A)+R(B)$.

$R(A:B) \leq R(A)+R(B)$; $R(A+B) \leq R(A)+R(B)$

$R(AB) \leq \min\{R(A), R(B)\}$, $R(AB) \geq R(A)+R(B)-n$

$Prj_u \overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}| \cdot \cos\theta$ $\qquad Prj_u(a_1+a_2) = Prj_u a_1 + Prj_u a_2$

二阶逆矩阵 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \frac{1}{|A|}$

施瓦茨不等式 $(\alpha,\beta)^2 \leq (\alpha,\alpha)(\beta,\beta)$

施密特正交化.

$$\beta_1=\alpha_1,\quad \beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\cdot\beta_1,\quad \beta_3=\alpha_3-\frac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_1.$$

$$\beta_m=\boxed{\alpha_m}-\frac{(\boxed{\alpha_m},\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\cdots-\frac{(\boxed{\alpha_m},\beta_{m-1})}{(\beta_{m-1},\beta_{m-1})}\beta_{m-1}$$

再规范

一、行列式，①定义. ②消去 ③展开.

二、矩阵.

1. 求A^n / (1)求A^2找规律 (2)乘法结合律. $\alpha=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ $\beta=(1,1,1)$ $(\alpha\beta)^n=\alpha(\beta\alpha)^{n-1}\beta$.

(3)分块阵的幂

$$\begin{pmatrix}A_1&&&\\&A_2&&\\&&\ddots&\\&&&A_n\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}A_1^n&&&\\&A_2^n&&\\&&\ddots&\\&&&A_r^n\end{pmatrix}$$

(4) $A=\begin{pmatrix}2&3&4\\0&2&5\\0&0&2\end{pmatrix}$ A^n. $A=B+2E$. 其中 $B=\begin{pmatrix}0&3&4\\0&0&5\\0&0&0\end{pmatrix}$

$$A^n=(B+2E)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k B^k(2E)^{n-k}$$

2 矩阵的逆,

1. 定义 $A\cdot A^{-1}=A^{-1}A=E$

$|AB|=|A|\cdot|B| \Rightarrow |A|\cdot|A^{-1}|=|A\cdot A^{-1}|=1.$ $\therefore |A^{-1}|=\dfrac{1}{|A|}$

2. 伴随矩阵.

(1)定义 $A^*=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&\cdots&A_{n1}\\A_{12}&A_{22}&\cdots&A_{n2}\\A_{13}&A_{23}&\cdots&A_{n3}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\A_{1n}&A_{2n}&\cdots&A_{nn}\end{pmatrix}=(A_{ji})_{n\times n}=(A_{ij})^T$

(2)性质. $A\cdot A^*=A^*\cdot A=|A|\cdot E$

① $|A|\neq0 \Leftrightarrow A$可逆,且 $A^{-1}=\dfrac{A^*}{|A|}$

② $|A\cdot A^*|=||A|\cdot E|=|A|^n \Rightarrow |A^*|=|A|^{n-1}$

③ $R(A^*)=\begin{cases}n, & R(A)=n\\1, & R(A)=n-1\\0, & R(A)<n-1\end{cases}$

3. 初等变换，秩，初等矩阵

(1) 矩阵等价，A经初等变换可化为B.

① A. B等价，$\Longrightarrow R(A)=R(B)$ 反:

② $R(A)=R(B) \not\Rightarrow A, B$ 等价. 例: $A=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ $B=(1,1,1)$

③. A B 等价 $\Longleftrightarrow \exists$ P Q.(可逆) 使 $PAQ=B$

(2) 秩.

② 性质 $\alpha=(a_1,\cdots,a_n)$ $A=\alpha^T\cdot\alpha$.

$R(A)\leq R(\alpha)\leq 1 \Rightarrow R(A)=0$ 或 1. 公式.

(3) 初等矩阵

左乘 $\Longleftrightarrow$ 初等行变换. 右 $\Leftrightarrow$ 列.

(4) $A \xrightarrow{\text{初行}}$ 行阶梯形 A_1, $R(A)=R(A_1)$.

$A \xrightarrow[\text{初等行变换}]{}$ 行最简形

$(A \vdots E) \xrightarrow[\text{行}]{} (E \vdots A^{-1})$. $(A \vdots B) \xrightarrow[\text{行}]{} (E \vdots A^{-1}B)$

4. 分块阵的运算

5. 降阶公式. $A_{m\times n}$. $B_{n\times m}$. $m>n$.

$\underline{|\lambda E_m - AB| = \lambda^{m-n} |\lambda E_n - BA|}$

三. 几何向量.

1. 向量的坐标运算.

内(积) 外. 混合.

2. 直线平面方程. 3 位置关系.

四 n维向量

1 线性相关与无关.

(1) 定义

(2) 矩阵判别.

2. 找极大无关组