第一章 向量与矩阵的范数

本章数域$\mathbb{F}$指实数域$\mathbb{R}$或复数域$\mathbb{C}$.

1.1 向量范数

1.1.1 定义

定义 1.1.1 (向量范数)

设V是$\mathbb{F}$上的线性空间. V上的实值函数

$\|\cdot\|: V \to \mathbb{R}^+$

称为V上的一个范数, 如果它满足

(1) 正定性: 对任意非零向量x, $\|x\| > 0$.

(2) 正齐性: 对任意向量x及任意数k, $\|xk\| = \|x\| \, |k|$.

(3) 三角不等式: 对任意两个向量x和y, $\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$.

定理 1.1.1 (向量范数的性质)

(1) $\|0\| = 0$.

(2) $\|-x\| = \|x\|$.

(3) $\|x-y\| \ge |\,\|x\| - \|y\|\,|$.

(4) $\|x+y\| \ge |\,\|x\| - \|y\|\,|$.

例 1.1.1 (内积空间中向量的长度是范数)

以下约定, 凡是说到长度, 都是专指内积空间中由内积定义的长度.

问题: 范数何时是长度?

定理 1.1.2 (范数何时是长度?) (必要性易证,且已证; 充分性证明要用到极限过程, 不宜讲授)

范数是长度的充要条件是它满足平行四边形公式.

设$\|\cdot\|$是线性空间V上的一个范数. 如果它满足平行四边形公式, 即对任意两个向量x和y,

$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$, (1.1.1.1)

则存在唯一的V上的一个内积$\langle\cdot\rangle$, 使得对任意向量x

$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$.

证明: 不妨假设数域为实数域. 定义

$\langle x, y\rangle = \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right)$.

以下我们只考虑标准线性空间$\mathbb{R}^n$或$\mathbb{C}^n$上范数.

例 1.1.2 ($\mathbb{C}^n$上的p-范数)

对任意$x \in \mathbb{C}^n$, $1 \le p \le \infty$, 定义

$$\|x\|_p = \begin{cases} \left(|x_1|^p + |x_2|^p + \cdots + |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}, & 1 \le p < \infty, \\ \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\}, & p = \infty. \end{cases}$$

可以证明, $\|\cdot\|_p$是$\mathbb{C}^n$上的范数, 称为p-范数.

以下事实

$$\lim_{p\to\infty}\left(|x_1|^p + |x_2|^p + \cdots + |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\}$$

解释了记号$\|\cdot\|_\infty$的合理性.
最常用的是 $p=1,2,\infty$ 三种情形, 其中$\|\cdot\|_2$就是标准酉空间中向量的长度.

例 1.1.3 (p -范数中只有 2-范数是长度)
只需证明, 当 $p\neq 2$ 时, p -范数不满足平行四边形公式. 例如, 在$\mathbb{C}^2$ 中, 取
$x=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$, $y=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$,
分别计算四个范数
$\|x\|_p=\|y\|_p=1$, $\|x+y\|_p=\|x-y\|_p=2^{\frac{1}{p}}$.
$\|x\|_\infty=\|y\|_\infty=\|x+y\|_\infty=\|x-y\|_\infty=1$.

易见, $\left(\|x+y\|_p\right)^2+\left(\|x-y\|_p\right)^2\neq 2\left(\|x\|_p{}^2+\|y\|_p{}^2\right)$.

问题: 既然已经有了长度, 为什么还要考虑不是长度的范数?
引入范数使得我们可以考虑两个向量的距离. 而距离好处有两个, 分别是定性的和定量的. 定性的方面是可以考虑极限, 进而引入连续, 导数与积分等数学分析的方法. 定量的方面是可以为最优逼近问题提供逼近性能指标. 定性的角度来说, 各种范数的作用是等价的(范数的等价性); 但就提供符合实际需求的逼近性能指标来说, 不同的范数起着不同的作用, 给出的 “最优解”也不同.

定义 1.1.2 (范数定义距离)
设$\|\cdot\|$是向量空间V 上的范数. 对任意 $x,y\in V$, 记 $\mathrm{d}(x,y)=\|x-y\|$. 如此决定了V 上的二元函数
$\mathrm{d}(\cdot,\cdot):V\times V\to\mathbb{R}^+$,
称为由范数$\|\cdot\|$定义的距离.

例 1.1.4 (中位数作为最小一乘估计)

1.1.2 范数的等价性

1.2 矩阵范数

1.2.1 定义与例

定义 1.2.1 (矩阵范数)
设对任意的正整数 m 和 n , 及任意的 $m\times n$ 矩阵 A , 都有一个对应的实数$\|A\|$. 若该对应关系满足
(1) 正定性: 对任意 $m\times n$ 的任意非零矩阵 A , 都有$\|A\|>0$.
(2) 正齐性: 对任意矩阵 A 及数 k , $\|kA\|=|k|\|A\|$.
(3) 三角不等式(加法相容性): 若矩阵 A 和 B 可以相加, 则$\|A+B\|\leq\|A\|+\|B\|$.
(4) 乘法相容性: 若矩阵 A 和 B 可以相乘, 则$\|AB\|\leq\|A\|\|B\|$
则称对应关系$\|\cdot\|$是一个矩阵范数.

其实, 严格地说, $\|\cdot\|$应理解为一个映射
$\|\cdot\|:\bigcup_{m,n\geq 1}\mathbb{F}^{m\times n}\to\mathbb{R}$.

例 1.2.1 (Hilbert-Schmidt 范数)

1.2.2 向量范数导出矩阵范数

观察：由于具体向量$x \in \mathbb{F}^n$其实也就是$n\times 1$的矩阵，因此任一矩阵范数也就同时给出了标准向量空间$\mathbb{F}^n$，也就是$\mathbb{F}^{n\times 1}$，$n=1,2,\ldots$，上的向量范数.
反之，也可以从已知的标准向量空间$\mathbb{F}^n$，$n=1,2,\ldots$，上的向量范数，决定出一个矩阵范数.

定理 1.2.1 (向量范数诱导矩阵范数)
设对任意的正整数$k=1,2,\ldots$，给定了标准向量空间$\mathbb{F}^k$上的向量范数$\|\cdot\|_{\alpha_k}$. 对任意的正整数m和n，及任意的$m\times n$矩阵A，定义

$$\|A\| := \max\left\{\frac{\|Ax\|_{\alpha_m}}{\|x\|_{\alpha_n}} : x\in\mathbb{F}^n, x\neq 0\right\} = \max\left\{\|Ax\|_{\alpha_m} : x\in\mathbb{F}^n, \|x\|_{\alpha_n}=1\right\},$$

则$\|\cdot\|$为一矩阵范数，称为由向量范数$\|\cdot\|_{\alpha_k}$，$k=1,2,\ldots$，导出的矩阵范数.

注意，当$\|\cdot\|_{\alpha_1}$是$\mathbb{F}^1$(即实数域或复数域)上的绝对值时，如上导出的矩阵范数限制在$\mathbb{F}^k=\mathbb{F}^{k\times 1}$上，才与$\|\cdot\|_{\alpha_k}$重合.

注 1.2.1 (向量范数诱导矩阵范数的几何意义)
最大增益(信号与系统的观点)；长度最大放大率(几何的观点).
因此矩阵范数是许多系统设计指标的要利用的工具.

例 1.2.2 (向量的p-范数导出的矩阵范数)

1.3 范数应用举例

1.3.1 矩阵值序列与函数
1.3.2 矩阵指数函数
1.3.3 范数控制特征值
1.3.4 可逆性的范数条件
1.3.5 矩阵的条件数