一、(20 分) (1) 什么是线性映射? (2)什么是线性映射的矩阵表示? (3) 设 $\mathbb{R}[x]_4$ 表示所有次数小于 4 的实系数多项式的集合, 它是 $\mathbb{R}$ 上的线性空间. 证明下列 4 个多项式

$$x+1, x-1, x^3, (x-1)^2$$

构成 $\mathbb{R}[x]_4$ 的一组基. (4) 定义映射 $\mathcal{A}: \mathbb{R}[x]_4 \to \mathbb{R}[x]_4$ 如下:

$$\mathcal{A}: f(x) \mapsto f'(x) + f(x+1)$$

证明映射 $\mathcal{A}$ 是线性映射, 并求它在(3)中给出的基下的矩阵表示.

解:

（1）设 V_1，V_2 是 $\mathbb{F}$ 上的线性空间，映射 $\mathcal{A}: V_1 \to V_2$ 称为线性映射，如果

$$\begin{cases} \mathcal{A}(\alpha+\beta) = \mathcal{A}(\alpha)+\mathcal{A}(\beta) \\ \mathcal{A}(k\cdot\alpha) = k\cdot\mathcal{A}(\alpha) \end{cases}$$

（2）设 $\mathcal{A}$ 是 V_1 到 V_2 的线性映射，$\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n$ 是 V_1 的基，$\eta_1,\ldots,\eta_n$ 是 V_2 的基，若

$$\mathcal{A}\left(\left[\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n\right]\right) = \left[\eta_1,\ldots,\eta_n\right]\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

则矩阵 $A = \left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ 为 $\mathcal{A}$ 的矩阵表示。

（3）

$$\begin{aligned} &\left[x+1, x-1, x^3, \left(x-1\right)^2\right] \\ &= \left[1, x, x^2, x^3\right]\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

由于矩阵 P 可逆，故 $x+1, x-1, x^3, \left(x-1\right)^2$ 是 $\mathbb{R}[x]_4$ 的一组基。

（4）

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}(x+1) &= (x+1)' + ((x+1)+1) \\
&= x+3 \\
&= (x+1)\cdot 2 + (x-1)\cdot -1 \\
\mathcal{A}(x-1) &= (x-1)' + ((x+1)-1) \\
&= (x+1)\cdot 1 \\
\mathcal{A}(x^3) &= (x^3)' + (x+1)^3 = 3x^2 + x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \\
&= x^3\cdot 1 + (x-1)^2\cdot 6 + (x+1)\cdot 5 + (x-1)\cdot 10 \\
\mathcal{A}((x-1)^2) &= ((x-1)^2)' + [(x+1)-1]^2 = 2(x-1) + x^2 \\
&= (x-1)^2\cdot 1 + (x+1)\cdot \frac{1}{2} + (x-1)\cdot \frac{7}{2}
\end{aligned}
$$

$$
\mathcal{A}\left[x+1, x-1, x^3, (x-1)^2\right] = \left[x+1, x-1, x^3, (x-1)^2\right]\begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 & \frac{1}{2} \\ -1 & 0 & 10 & \frac{7}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 1 \end{bmatrix}
$$

二、(20 分)　(1) 设 $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$,写出 A 的核 $\ker A$ 与像 $\mathrm{im}A$ 的定义. (2) 设

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ 0 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{bmatrix},$$

求 $\ker A$ 的一个基. (3) 将(3)中求出的 $\ker A$ 的基扩张成 $\mathbb{R}^3$ 的一个基. (4) 求 A 所确定的 $\mathbb{R}^3$ 到 $\mathbb{R}^3$ 的线性变换 $x\mapsto y=Ax$ 在(3)中给出的基下的矩阵表示.

解:

（1）

$$\begin{aligned}\ker A&=\left\{x\mid x\in\mathbb{R}^n,\ Ax=0\right\}\\ \mathrm{im}\,A&=\left\{Ax\mid x\in\mathbb{R}^n\right\}\\ &=\left\{y\mid \exists x\in\mathbb{R}^n,\text{使}y=Ax\right\}\end{aligned}$$

（2）

$$\ker A=\mathrm{span}\left\{\begin{bmatrix}-3\\ 1\\ 1\end{bmatrix}\right\}$$

（3）

$$\begin{bmatrix}-3\\ 1\\ 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$$

（4）

$$A\begin{bmatrix}-3 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3}\\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{5}{3}\\ 0 & \frac{4}{3} & \frac{8}{3}\end{bmatrix}$$

故矩阵表示为

$$\begin{bmatrix}0 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3}\\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{5}{3}\\ 0 & \frac{4}{3} & \frac{8}{3}\end{bmatrix}$$

三、(10 分) (1) 什么是单位模阵? (2) 设$U(\lambda)$是n阶λ矩阵. 证明$U(\lambda)$是单位模阵的充要条件是$U(\lambda)$的行列式为非零常数多项式.

解:

（1）多项式矩阵的逆如果存在且仍为多项式矩阵，则称为单位模阵

（2）充分性：若$|U(\lambda)|=C\neq 0$ ，则由$U^{-1}(\lambda)=\frac{1}{c}AdjU(\lambda)$知$U^{-1}(\lambda)$为多项式矩阵

必要性: 若有λ矩阵$V(\lambda)$使$U(\lambda)V(\lambda)=I$则由$|U(\lambda)|\cdot|V(\lambda)|=1$知$|U(\lambda)|$及$|V(\lambda)|$均为零次多项式

四、(10 分) (1) 什么是矩阵的初等因子? (2) 设$A\in\mathbb{C}^{10\times 10}$的初等因子为:

$$\lambda,\quad \lambda,\quad (\lambda-2)^2,\quad (\lambda-2)^3,\quad (\lambda-5)^3,$$

写出$\lambda I-A$的 Smith 标准型. (3) 写出A的 Jordan 标准型.

解:

（1） 矩阵A的特征矩阵$\lambda I-A$的不变因子做质因式分解时，所有质因式的方幂称为初等因子。

（2） $$\begin{pmatrix} I_8 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda(\lambda-2)^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda(\lambda-2)^2(\lambda-5)^3 \end{pmatrix}$$

（3） $$\begin{pmatrix} 0 &&&&&&&&& \\ & 0 &&&&&&&& \\ && 2 & 1 &&&&&& \\ && 0 & 2 &&&&&& \\ &&&& 2 & 1 & 0 &&& \\ &&&& 0 & 2 & 1 &&& \\ &&&& 0 & 0 & 2 &&& \\ &&&&&&& 5 & 1 & 0 \\ &&&&&&&& 5 & 1 \\ &&&&&&&&& 5 \end{pmatrix}$$

五、(15)　(1) 写出 $x\in\mathbb{R}^n$ 的 p-范数 $\|x\|_p$ 的定义，这里 $p\geq 1$. (2) 设

$$A=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$$

计算由 1-范数导出的 A 的矩阵范数 $\|A\|_1$. (3) 记 $\mathbb{R}^2$ 中 1-范数意义下的单位圆为

$$S=\left\{x:x\in\mathbb{R}^2,\|x\|_1=1\right\}$$

画出 S 在映射 A 下的像 $A(S)$，并求出 $A(S)$ 上在 1-范数意义下到原点的距离最远的点.

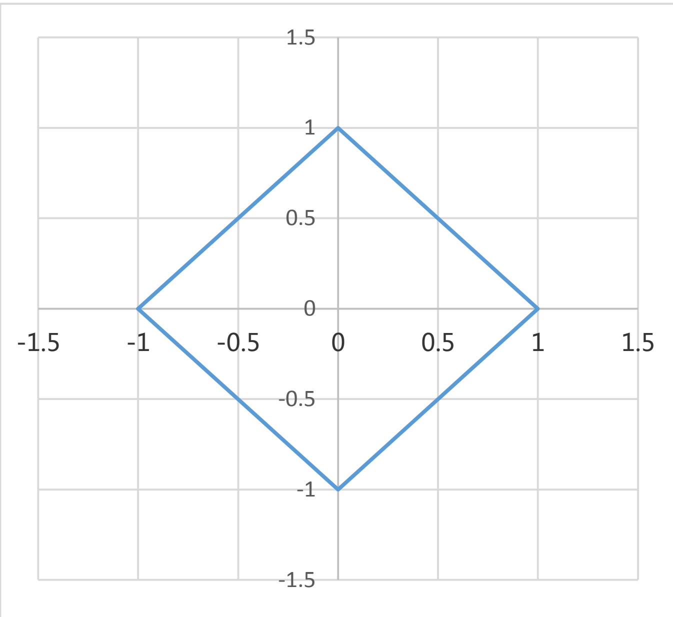
解:

(1) $\|x\|_p=(|x_1|^p+|x_2|^p+\cdots+|x_n|^p)^{1/p}$

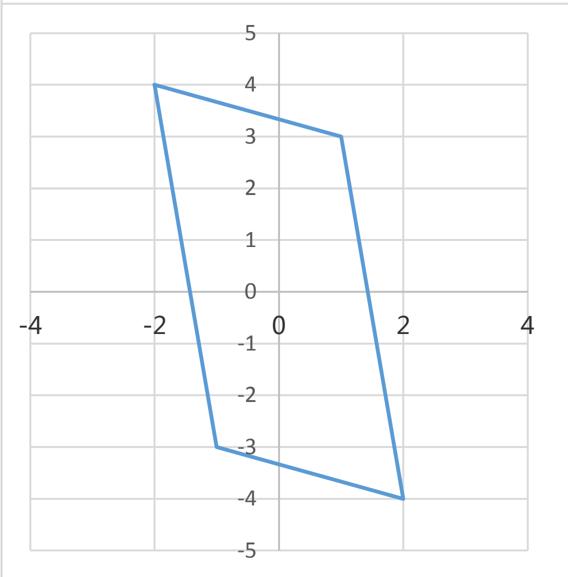
(2) $\|A\|_1=(\text{最大列绝对值和})=\max\{|1|+|3|,|-2|+|4|\}=\max\{4,6\}=6$

(3)

S：



$A(S)$：



最远的点为（−2，4）或（2，4）到原点的距离为 $\left\|\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}\right\|_1=\left\|\begin{pmatrix}2\\-4\end{pmatrix}\right\|_1=6$

六、(15 分)　(1) 什么是实线性空间上的内积?. (2) 定义$\mathbb{R}^2$上的二元函数

$$\langle x,y\rangle = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_2y_2$$

这里

$$x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix},\quad y=\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}$$

是$\mathbb{R}^2$中的两个元素. 用定义证明$\langle\cdot,\cdot\rangle$ 是$\mathbb{R}^2$上的内积. (3) 按(2)中定义内积, 求向量组

$$\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}$$

的 Gram 矩阵.

解:

（1）$\langle\cdot,\cdot\rangle$是实线性空间$V$上的二元函数，若满足

①$\langle x,y\rangle=\langle y,x\rangle$

②$\langle x,yk+zl\rangle=\langle x,y\rangle k+\langle x,z\rangle l$

③$\langle x,x\rangle>0$对$x\neq 0$

则称为内积。

（2）$\langle x,y\rangle=\begin{bmatrix}x_1 & x_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1\\-1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_0\end{bmatrix}=x^TAy$及$A=A^T$，$A$正定

由此易证

①$\langle x,y\rangle=xA^Ty=(xA^Ty)^T=y^TA^Tx=\langle y,x\rangle$

② $\langle x,yk+zl\rangle=x^TA(yk+zl)=(x^TAy)k+(x^TAz)l=\langle x,y\rangle k+\langle x,\mathrm{z}\rangle l$

③ $\langle x,y\rangle=x^TAx>0$（由$A$正定可知）

（3）记为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$，则 Gram 矩阵为

$$\begin{bmatrix}\langle\alpha_1,\alpha_1\rangle & \langle\alpha_1,\alpha_2\rangle & \langle\alpha_1,\alpha_3\rangle\\ \langle\alpha_2,\alpha_1\rangle & \langle\alpha_2,\alpha_2\rangle & \langle\alpha_2,\alpha_3\rangle\\ \langle\alpha_3,\alpha_1\rangle & \langle\alpha_3,\alpha_2\rangle & \langle\alpha_3,\alpha_3\rangle\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -1 & -1\\-1 & 5 & 7\\-1 & 7 & 10\end{bmatrix}$$

七、(10 分) (1) 什么是矩阵的奇异值分解? (2) 求矩阵

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

的奇异值分解.

解:

（1）设 $A\in\mathbb{C}^{m\times n}$，存在 m 阶酉矩阵 U 和 n 阶酉矩阵 V，使

$$U^{\mathrm{H}}AV=\begin{bmatrix}\sigma_1 & & & 0 & \cdots & 0\\ & \ddots & & \vdots & & \vdots\\ & & \sigma_r & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}$$

其中 $r=\operatorname{rank}(A)$，$\sigma_i=\sqrt{\lambda_i(A^{\mathrm{H}}A)}>0,\ i=1,\ldots,r$

（2）

$$A^{\mathrm{H}}A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}$$

$$\left|\lambda I-A^{\mathrm{H}}A\right|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & 1\\ 1 & \lambda-1\end{vmatrix}=\lambda^2-3\lambda+1$$

$$\lambda_1=\frac{3+\sqrt{5}}{2}=2.618,\ \lambda_2=\frac{3-\sqrt{5}}{2}=0.3820$$

$$\therefore\ \sigma_1=\sqrt{\lambda_1}=\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}=1.618,\ \sigma_2=\sqrt{\lambda_2}=\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}=0.618$$

$$V=\begin{bmatrix}0.526 & -0.851\\ 0.851 & 0.526\end{bmatrix},\ U=\begin{bmatrix}-0.526 & -0.851\\ 0.851 & -0.526\end{bmatrix}$$

$$U^{\mathrm{H}}AV=\begin{bmatrix}0.618 & 0\\ 0 & 1.618\end{bmatrix}$$