一、(20分) (1) 什么是线性映射? (2)什么是线性映射的矩阵表示? (3) 设表示所有次数小于4的实系数多项式的集合, 它是上的线性空间. 证明下列4个多项式



构成的一组基. (4) 定义映射如下:



证明映射是线性映射, 并求它在(3)中给出的基下的矩阵表示.

解：

（1）设，是上的线性空间，映射称为线性映射，如果



（2）设是到的线性映射，是的基，是的基，若



则矩阵为的矩阵表示。

（3）



由于矩阵可逆，故是的一组基。

（4）



二、(20分) (1) 设,写出的核与像的定义. (2) 设

,

求的一个基. (3) 将(3)中求出的的基扩张成的一个基. (4) 求所确定的到的线性变换在(3)中给出的基下的矩阵表示.

解：

（1）



（2）



（3）



（4）



故矩阵表示为



三、(10分) (1) 什么是单位模阵? (2) 设是阶矩阵. 证明是单位模阵的充要条件是的行列式为非零常数多项式.

解:

（1）多项式矩阵的逆如果存在且仍为多项式矩阵，则称为单位模阵

（2）充分性：若，则由知为多项式矩阵

必要性：若有矩阵使则由知及均为零次多项式

四、(10分) (1) 什么是矩阵的初等因子? (2) 设的初等因子为:

,

写出的Smith标准型. (3) 写出的Jordan标准型.

解:

1. 矩阵的特征矩阵的不变因子做质因式分解时，所有质因式的方幂称为初等因子。
2. 
3. 

五、(15) (1) 写出的-范数的定义, 这里. (2) 设



计算由1-范数导出的 的矩阵范数. (3) 记中1-范数意义下的单位圆为



画出在映射 下的像, 并求出上在1-范数意义下到原点的距离最远的点.

解:

(1) 

(2) 

(3)

： ：

最远的点为（-2，4）或（2，4）到原点的距离为

六、(15分) (1) 什么是实线性空间上的内积?. (2) 定义上的二元函数



这里



是中的两个元素. 用定义证明 是上的内积. (3) 按(2)中定义内积, 求向量组



的Gram矩阵.

解:

（1）是实线性空间上的二元函数，若满足

①

②

③对

则称为内积。

（2）及,正定

由此易证

①

1. 
2. （由正定可知）

（3）记为，则Gram矩阵为

=

七、(10分) (1) 什么是矩阵的奇异值分解? (2) 求矩阵



的奇异值分解.

解：

（1）设，存在阶酉矩阵和阶酉矩阵，使



其中，

（2）

