Schuljahr:	2024	Klasse/Kurs:		Datum:	2025-06-02
Fach:	Mathematik	Nummer:	2 / 2	Zeit:	90 min
Lehrer:		BE:		BE Sprache:	
Thema:					
Name:					
Wortzahl:		Sprachl. F.:		Abzug: (BE)	
Summe BE:		Note:		Mündlich:	

15	14	13	12	11	10	09	08	07	06	05	04	03	02	01	00	∅

2. Klausur

Zugelassene Hilfsmittel: WTR, Formelsammlung, Geodreieck

Teil A (/ 15 BE):

Aufgabe 1 (/ 5 BE):

Gegeben sind die Punkte $P(0|-1|1)$ und $Q(2|5|3)$.

a) Durch Spiegelung des Punktes P am Punkt Q entsteht der Punkt P′. Ermitteln Sie die Koordinaten von P′.

b) Die Ebene E hat die Gleichung $E\colon x_1 + 3x_2 + x_3 = 20$. Weisen Sie nach, dass Q in E liegt und der Vektor $\overrightarrow{PQ}$ ein Normalenvektor von E ist.

Aufgabe 2 (/ 5 BE):

Gegeben ist die Gerade

$$g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ mit } s \in \mathbb{R}.$$

a) Zeigen Sie, dass der Punkt $P(4|3|3)$ nicht auf g liegt.
Geben Sie die Koordinaten eines Punktes Q an, der auf g liegt und sich nur in einer Koordinate von P unterscheidet.

b) Die Gerade h verläuft parallel zur y-Achse und schneidet g im Punkt $(8|3|-3)$.
Untersuchen Sie, ob g und h senkrecht zueinander verlaufen.

Aufgabe 3 (/ 5 BE):

Betrachtet wird das Quadrat, das die folgenden Eigenschaften besitzt:

- Das Quadrat liegt in der x_1x_2- Ebene.
- Ein Eckpunkt liegt im Koordinatenursprung.
- Der Schnittpunkt der beiden Diagonalen des Quadrats liegt auf der Gerade

$$g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; t \in \mathbb{R}$$

Bestimmen Sie die Koordinaten des Schnittpunkts der Diagonalen und berechnen Sie den Flächeninhalt des Quadrats.

Teil B (/ 40 BE):

1. Die „Pyramide Mainz“ (Material 1) ist eine Lokalität, die man für Veranstaltungen mieten kann. Material 2 zeigt einen Planungsentwurf für ein ähnliches Gebäude, das aus einer quadratischen Pyramide mit einer Grundseite der Länge 40 m und einem parallel zur x-Achse ausgerichteten Vorbau mit rechteckiger Grundfläche und symmetrischem Dach besteht. Der Ursprung des Koordinatensystems liegt in der Mitte der Grundfläche der Pyramide. Es sind der Punkt $D(20|-20|0)$ der Grundfläche und die Spitze $S(0|0|30)$ der Pyramide gegeben. Alle Einheiten sind in Meter angegeben.

   1.1 Geben Sie die Koordinaten der Punkte A und C an. **(2BE)**

   1.2 Berechnen Sie das Volumen der Pyramide. **(2BE)**

   1.3 Entlang der vier Seitenkanten der Pyramide werden Lichterketten angebracht.
   Berechnen Sie die Gesamtlänge der Lichterketten. **(3BE)**

   1.4 Berechnen Sie den Winkel an der Spitze eines Seitendreiecks der Pyramide.
   [zur Kontrolle: $\measuredangle DSA \approx 58°$] **(3BE)**

   1.5 Die Spitze der Pyramide ist mit Metall verkleidet. Die Seitenkanten dieser ebenfalls quadratischen Pyramide sind 4 m lang (Material 2).
   Berechnen Sie die Größe der Fläche, die mit Metall verkleidet ist. **(4BE)**

   1.6 Die Seitenfläche der Pyramide mit den Eckpunkten A, S und D liegt in der Ebene E_{ASD}. Geben Sie eine Parameterform der Ebene E_{ASD} an und bestimmen Sie eine zugehörige Koordinatengleichung.
   [zur Kontrolle: Eine mögliche Koordinatengleichung lautet $E_{ASD}: 3x + 2z = 60$.] **(6BE)**

2. Im Folgenden wird das Dach des Vorbaus in Material 2 betrachtet. Von der Vorderseite dieses Daches sind die Punkte $M(40|0|15)$ und $H(40|5|12{,}5)$ gegeben.

   2.1 Zeigen Sie, dass der Punkt $M'(10|0|15)$ auf der Ebene E_{ASD} liegt, und begründen Sie ohne weitere Rechnung, dass es sich bei dem Punkt M' um denjenigen Punkt handeln muss, in dem der (durch den Punkt M verlaufende) Dachfirst des Vorbaus auf die Pyramide trifft. Beschriften Sie den Punkt M' in Material 2. **(4BE)**

   2.2 Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes H', bei dem die Dachkante des Vorbaus (Traufe), die durch den Punkt H verläuft, auf die Pyramide trifft.
   [Kontrolle: $H'\left(\frac{35}{3}\middle|5\middle|12{,}5\right)$] **(4BE)**

   2.3 Untersuchen Sie, um welche Art von Viereck es sich bei der Dachfläche $HH'M'M$ handelt, und bestimmen Sie den Flächeninhalt der Dachfläche $HH'M'M$. **(6BE)**

3. Ein Besucher nähert sich dem Pyramideneingang entlang der x-Achse aus positiver Richtung. Die Augenhöhe des Besuchers ist 1,60 m über dem Boden. Erläutern Sie die Rechnung in den Zeilen (1) bis (3) im untenstehenden Kasten und erklären Sie die Bedeutung des Punktes P aus Zeile (4) im Sachzusammenhang. **(6BE)**

$$M\left(40\,\middle|\,0\,\middle|\,15\right), S\left(0\,\middle|\,0\,\middle|\,30\right) \Rightarrow g_{MS}\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 40 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -40 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix} \qquad (1)$$

$$1{,}6 = 15 + r \cdot 15 \Leftrightarrow r = -\frac{67}{75} \qquad (2)$$

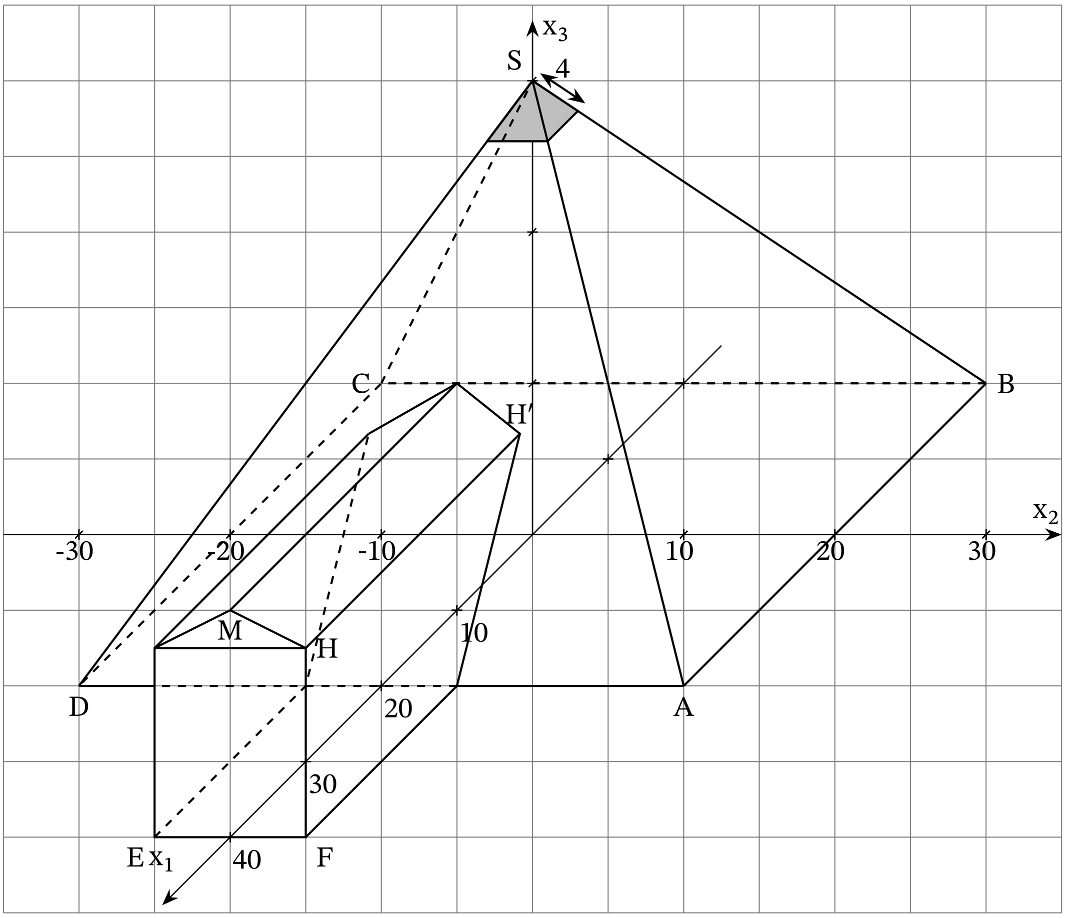
$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 40 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix} - \frac{67}{75} \cdot \begin{pmatrix} -40 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1136}{15} \\ 0 \\ \frac{8}{5} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 75{,}73 \\ 0 \\ 1{,}6 \end{pmatrix} \qquad (3)$$

$$P(75{,}73|0|0) \qquad (4)$$

Material 1: Die „Pyramide Mainz“ in Mainz-Hechtsheim

https://www.pyramidemainz.de/die-pyramide (abgerufen am 11.06.2019).

Material 2:



Material 3:

Quelle: https://www.sanier.de/dach/fachbegriffe-rund-ums-dach (abgerufen am 2025-05-31)

Erwartungshorizont

Lösung Aufgabe 1:

Landesabitur Hessen 2025 GK A Aufgabe 2	
$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$	1
$\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 4 \\ 11 \\ 5 \end{pmatrix}$; $P'(4\|11\|5)$	1,5
$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$	1
$\overrightarrow{PQ} = 2 \cdot \vec{n}$	1
$\overrightarrow{PQ}$ ist kollinear zu $\vec{n}$, daher ist $\overrightarrow{PQ}$ ebenfalls ein Normalenvektor der Ebene E	0,5

Lösung Aufgabe 2:

Landesabitur Hessen 2025 GK A Aufgabe 5	
$\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$	1
Für die erste Koordinate folgt $s = 1$ und für die dritte Koordinate folgt $s = 2$. Dies ist ein Widerspruch. P liegt nicht auf Q.	1
$Q(4\|3\|0)$ bzw. $Q(0\|3\|3)$	1
Richtungsvektor der y-Achse ist $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	0,5
Es gilt $\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$	1
Daher verlaufen g und h senkrecht zueinander.	0,5

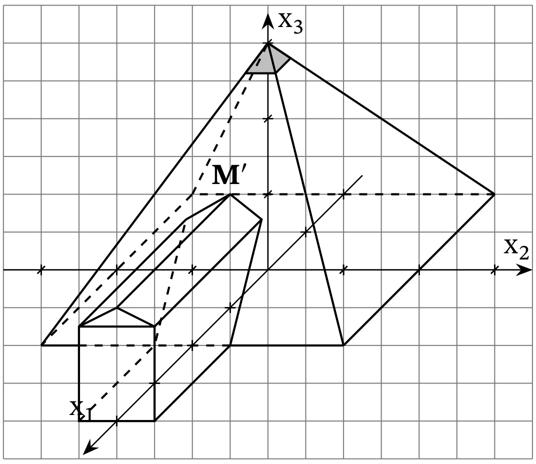
Lösung Aufgabe 3:

IQB Aufgabenpool 2024 GK Teil A - AG/LA A2 Aufgabe 4 https://www.iqb.hu-berlin.de/abitur/pools2024/abitur/pools2024/mathematik/mathematikgrundlegend/2024_M_grundlege_11.pdf	
$S_{1,2} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	1
$t = 2$ und $S_{1,2} = M = (3\|4\|0)$	1

$\left\vert\overrightarrow{OM}\right\vert = \sqrt{3^2+4^2} = 5$	1
$A = 4\cdot\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 5 = 50$	2

Lösung Aufgabe 4:

Landesabitur Hessen 2020 GK Teil C1	
$A(20\vert 20\vert 0)$, $C(-20\vert -20\vert 0)$	2
$V = \frac{1}{3}\cdot 40^2\cdot 30 = 16000[m^3]$	2
$L = 4\cdot\left\vert\overrightarrow{DS}\right\vert = 4\cdot\sqrt{20^2+20^2+30^2} = 4\sqrt{1700} \approx 164{,}92[m]$	3
$\cos(\alpha) = \frac{\overrightarrow{SD}\cdot\overrightarrow{SA}}{\left\vert\overrightarrow{SD}\right\vert\cdot\left\vert\overrightarrow{SA}\right\vert} = \frac{\begin{pmatrix}20\\-20\\-30\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}20\\20\\-30\end{pmatrix}}{\left\vert\begin{pmatrix}20\\-20\\-30\end{pmatrix}\right\vert\cdot\left\vert\begin{pmatrix}20\\20\\-30\end{pmatrix}\right\vert} = \frac{900}{1700} = \frac{9}{17} \Rightarrow \alpha = 58°$	3
$g = 2\cdot 4\cdot\sin\left(\frac{58°}{2}\right) \approx 3{,}88[m]$ $h = 4\cdot\cos\left(\frac{58°}{2}\right) \approx 3{,}50[m]$ Die Punkte M und M' stimmen in den y- und z-Koordinaten überein. Daher liegen sie auf einer Geraden, die parallel zur x-Achse verläuft. Somit ist M' der Punkt, in dem der Dachfirst des Vorbaus auf die Pyramide trifft. $A = 4\cdot\frac{1}{2}\cdot a\cdot h \approx 27[m^2]$	1 1 2
$E_{ASD}\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}20\\20\\0\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}-20\\-20\\30\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}0\\-40\\0\end{pmatrix}$ mit Weg: $\vec{n} = \begin{pmatrix}3\\0\\2\end{pmatrix}$ mit Weg: $E_{ASD}\colon 3x + 2z = 60$	2 2 2
M' in E_{ASD}: $e\cdot 10 + 2\cdot 15 = 60 \Rightarrow M' \in E_{ASD}$ Die Punkte M und M′ stimmen in den y- und z-Koordinaten überein. Daher liegen sie auf einer Geraden, die parallel zur x-Achse verläuft. Somit ist M′ der Punkt, in dem der Dachfirst des Vorbaus auf die Pyramide trifft.	1 2

	1
Geradengleichung der Dachkante durch Punkt H $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 40 \\ 5 \\ 12{,}5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	2
$h \cap E_{ASD}$: $3(40 - r) + 2 \cdot 12{,}5 = 60 \Leftrightarrow -3r + 145 = 60 \Leftrightarrow r = \frac{85}{3}$	1
In Gerade einsetzen: $H'\left(\frac{35}{3} \middle\| 5 \middle\| 12{,}5\right)$	1
Da die beiden Kanten $\overrightarrow{MM'}$ und $\overrightarrow{HH'}$ parallel zur x-Achse und somit parallel zueinander verlaufen und zudem $\left\|\overrightarrow{HH'}\right\| = \frac{85}{3} \neq 30 = \left\|\overrightarrow{MM'}\right\|$, handelt es sich bei dem Viereck $HH'M'M$ um ein Trapez.	2
$\left\|\overrightarrow{MH}\right\| = \left\|\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -2{,}5 \end{pmatrix}\right\| = \sqrt{31{,}25} \approx 5{,}59[\mathrm{m}]$	1
$A = \frac{1}{2} \cdot \left(\left\|\overrightarrow{MM'}\right\| + \left\|\overrightarrow{HH'}\right\|\right) \cdot \left\|\overrightarrow{MH}\right\| \approx 163{,}05[\mathrm{m}^2]$	3
In Zeile (1) wird eine Gleichung der Gerade g_{MS} durch die Punkte M und S angegeben.	1
In Zeile (2) wird der Wert für den Geradenparameter berechnet, bei dem die z-Koordinate der Gerade den Wert 1,6 hat.	2
In Zeile (3) wird durch Einsetzen des in Zeile (2) berechneten Parameterwertes in die Geradengleichung g_{MS} der Ortsvektor des Punktes bestimmt, der auf der Geraden liegt und dessen z-Koordinate den Wert 1,6 besitzt.	1
Der Punkt P gibt die Position des Besuchers auf dem Boden an, ab der er die Pyrami- denspitze S nicht mehr sehen kann, wenn er sich der Pyramide entlang der x-Achse nähert, weil die Pyramidenspitze durch den Vorbau verdeckt wird.	2