

Abitur 2025 – Nachprüfung im Fach Mathematik (LK)

Datum der Prüfung:

Raum:

Prüflinge: Name, Vorname				
Uhrzeit:				
Prüfer:				
Protokoll:				
Vorsitz:				

Thema: Analysis und Stochastik

Hilfsmittel:

- ein Wörterbuch der deutschen Rechtschreibung
- eine Liste der fachspezifischen Operatoren
- Wissenschaftlicher Taschenrechner

Der Schwerpunkt der Prüfungsaufgaben liegt im Halbjahr Q1 (Thema: Analysis) und im Halbjahr Q3 (Thema: Stochastik).

Analysis

1. Dietzenbach ist mit ca. 36000 Einwohnern auf Platz 23 der größten Städte Hessens. Während eines Volksfestes wurde ein selteses Zombievirus in die Stadt eingeschleppt. Aktuell sind bereits 1000 Einwohner erkrankt. Man geht davon aus, dass sich wöchentlich 10% der bisher noch nicht infizierten Einwohner anstecken.

Drei Mathematiklehrer der Heinrich-Mann-Schule schlagen die folgenden drei Funktionen zur Modellierung der Gesamtzahl der erkrankten Einwohner (t in Wochen) vor:

$$f(t) = 1000 \cdot 1,10^t$$

$$g(t) = 36000 - 35000 \cdot e^{-0,105t}$$

$$h(t) = \frac{36000}{1 + 35e^{-0,25t}}$$

- 1.1 In Material 1 sind die drei Graphen der Funktionen f , g und h gezeichnet. Ordnen Sie die Graphen begründet der jeweiligen Funktionsgleichung zu. **(6BE)**
- 1.2 Erklären Sie die den drei Funktionen zugrundeliegenden Wachstumsmodelle und gehen Sie dabei auf alle Parameter ein. **(6BE)**
- 1.3 Entscheiden Sie begründet, welche der beiden Funktionen die Ausbreitung des Virus gemäß obiger Beschreibung am besten beschreibt. **(2BE)**
2. Im weiteren Verlauf soll nur noch die Funktion $g(t)$ betrachtet werden.
 - 2.1 Berechnen Sie den Zeitpunkt, zu dem die Hälfte der Bevölkerung erkrankt ist. **(4BE)**
 - 2.2 Begründen Sie, dass für $t = 0$ die Ausbreitungsgeschwindigkeit am größten ist. **(4BE)**
 - 2.3 Berechnen Sie den Wert des Integrals $0,1 \cdot \int_0^{10} g(t) dt$ und deuten Sie das Ergebnis im Sachkontext. **(5BE)**
 - 2.4 Zeigen Sie, dass die Gleichung $g(t) = 36000$ keine Lösung besitzt und deuten Sie dieses Ergebnis im Sachzusammenhang. **(5BE)**
 - 2.5 Bestimmen Sie den Zeitpunkt, zu dem die Bevölkerung vollständig erkrankt ist. **(2BE)**

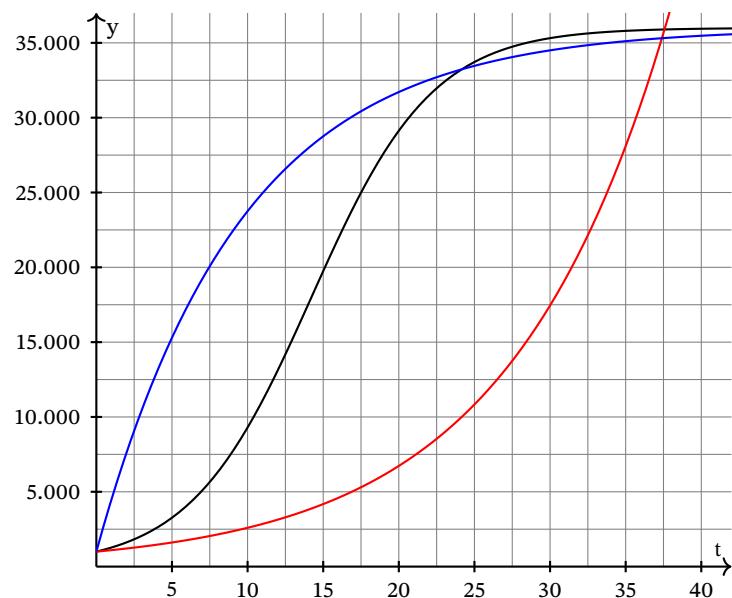
Stochastik

3. In einem Zufallsversuch wird der nebenstehende Würfel zweimal geworfen.
- 3.1 Stellen Sie den o.g. Sachverhalt in einem Wahrscheinlichkeitsbaum mit allen Pfadwahrscheinlichkeiten dar. **(5BE)**
- 3.2 Erläutern Sie an diesem Sachverhalt die Begriffe Ergebnis und Ereignis eines Zufallsversuchs. **(3BE)**
- 3.3 Nennen Sie die Definitionen der Begriffe Zufallsgröße und binomialverteilte Zufallsgröße und geben Sie jeweils eine binomialverteilte bzw. eine nicht-binomialverteilte Zufallsgröße für diesen Zufallsversuch an. **(5BE)**
4. In einem weiteren Zufallsversuch wird der Würfel insgesamt 100-mal geworfen. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten dafür, dass die Augenzahl 3
- A: genau 10-mal
B: höchstens 10-mal
C: mindestens 20-mal
- geworfen wird. **(4BE)**
5. Es soll überprüft werden, ob der o.g. Würfel gezinkt wurde. Ein Mitschüler schlägt vor, den Würfel 50 mal zu werfen. Wird die Augenzahl 3 mindestens 10 mal gewürfelt, entscheidet man, dass der Würfel gezinkt ist. Nehmen Sie Stellung zu diesem Vorschlag. **(9BE)**

	1		
2	1	2	3
	1		

Material

Material 1:



Erwartungshorizont/Protokoll

Nr	Erwartungshorizont	Schülerleistung Vortrag	Schülerleistung Kolloquium
1.1	f-rot: exponentielles (unbeschränktes) Wachstum g-blau: beschränktes Wachstum h-schwarz: logistisches Wachstum		
	BE: 3/3/0		
1.2	<p>f: Es handelt sich um (unbeschränktes) exponentielles Wachstum. Der Anfangsbestand beträgt 1000 und der Wachstumsfaktor 1,1 (Wachstum um 10% auf 110%)</p> <p>g: Es handelt sich um beschränktes Wachstum. Der Anfangsbestand beträgt $36000 - 35000 = 1000$. $e^{-0,105t} \approx 0,9^t$. Die Anzahl der Nichtinfizierten beträgt zu Beginn 35000 und reduziert sich wöchentlich um 10% auf 90% (exp. Zerfall der Nichtinfizierten). Langfristig nähert sich der Bestand der Sättigungsgrenze von 36000.</p> <p>h: Es handelt sich um logistisches Wachstum. Dies hat auch die Sättigungsgrenze 36000. Das Wachstum beginnt beim Anfangsbestand von 1000. Dieser steckt im Term $35 = \frac{36000}{1000} - 1$. Das logistische Wachstum beginnt zunächst mit langsamer Geschwindigkeit, steigert sich bis zum Wendepunkt und flacht dann mit Näherung an die Sättigungsgrenze immer weiter ab.</p>		
	BE: 0/6/0		

Nr	Erwartungshorizont	Schülerleistung Vortrag	Schülerleistung Kolloquium
1.3	Es handelt sich bei der in der Aufgabenstellung beschriebenen Wachstum um ein beschränktes Wachstum $g(t)$. Die 10% der Nichtinfizierten, die jede Woche neu infiziert werden, entsprechen einer Abnahme der Nichtinfizierten auf 90%.		
	BE: 2/0/0		
2.1	$18000 = 36000 - 35000 \cdot e^{-0,105t}$ $18000 = 35000 \cdot e^{-0,105t}$ $\frac{18}{35} = e^{-0,105t}$ $\ln\left(\frac{18}{35}\right) = -0,105t$ $t = -\frac{\ln\left(\frac{18}{35}\right)}{0,105} \approx 6,3331$ <p>Nach 6 Wochen und 3 Tagen (Nach 6,3 Wochen) ist die Hälfte der Bevölkerung erkrankt.</p>		
	BE: 1/3/0		
2.2	$g'(t) = 3675 \cdot e^{-0,105t}$ <p>$g'(t)$ beschreibt einen exponentiellen Zerfall. Die Funktion ist monoton fallend. Daher ist am linken Rand des Definitionsbereichs der Funktionswert maximal.</p>		
	BE: 2/2/0		

Nr	Erwartungshorizont	Schülerleistung Vortrag	Schülerleistung Kolloquium
2.3	$G(t) = 36000t + \frac{1000000}{3} e^{-0,105t}$ $0,1 \cdot \int_0^{10} g(t) dt = 0,1 \cdot (G(10) - G(0)) \approx$ $0,1 \cdot (476645,9 - 333333,3) = 14331,26$ <p>In den ersten zehn Wochen beträgt die durchschnittliche Zahl der Infizierten ca. 14331.</p>		
	BE: 0/5/0		
2.4	$36000 - 35000 \cdot e^{-0,105t} = 36000$ $-35000 \cdot e^{-0,105t} = 0$ $e^{-0,105t} = 0$ <p>Die Exponentialfunktion nimmt nie den Funktionswert 0 an. Daher hat die Gleichung keine Lösung. Die Funktion nähert sich der 0 aber beliebig nah an. Daher ist im Anwendungskontext irgendwann auch der letzte Nichtinfizierte infiziert worden.</p>		
	BE: 0/2/3		
2.5	<p>z.B. Ansatz $g(t) = 36000 - 35000 \cdot e^{-0,105t} = 35999,1$</p> <p>$t \approx 100,6$</p> <p>Nach ca. 100 Wochen.</p>		
	BE: 0/0/2		

Nr	Erwartungshorizont	Schülerleistung Vortrag	Schülerleistung Kolloquium
3.1	<pre> graph LR 0((0)) -- "1/2" --> 1_1((1)) 0 -- "1/3" --> 1_2((2)) 0 -- "1/6" --> 1_3((3)) 1_1 -- "1/2" --> 2_1((1)) 1_1 -- "1/3" --> 2_2((2)) 1_1 -- "1/6" --> 2_3((3)) 2_2 -- "1/2" --> 3_1((1)) 2_2 -- "1/3" --> 3_2((2)) 2_2 -- "1/6" --> 3_3((3)) 3_3 -- "1/2" --> 4_1((1)) 3_3 -- "1/3" --> 4_2((2)) 3_3 -- "1/6" --> 4_3((3)) </pre>		

Nr	Erwartungshorizont	Schülerleistung Vortrag	Schülerleistung Kolloquium
3.2	Die Ergebnisse sind in diesem Experiment die Tupel $S = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3)\}$. Ein Ereignis ist eine Teilmenge der Ergebnismenge und besteht aus keinem, einem oder mehreren Ergebnissen. Ein mögliches Ereignis ist „Pasch“ $E = \{(1,1), (2,2), (3,3)\}$.		
	BE: 0/3/0		
3.3	<p>Eine Zufallsgröße ist eine Funktion, die jedem Ergebnis eine reelle Zahl zuordnet. Beispiel für eine nicht binomialverteilte Zufallsgröße ist die Augensumme. Bei einer binomialverteilten Zufallsgröße müssen die folgenden Eigenschaften gelten:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Ein Experiment wird wiederholt. Die Wahrscheinlichkeiten ändern sich nicht. • Ein Teil der Ergebnisse zählt als „Erfolg“. • Die Zufallsgröße zählt die Anzahl der Erfolge. <p>Beispiel: Anzahl der 3er.</p>		
	BE: 0/5/0		
4.	$P(A) = B(100; 1/6; 10) \approx 0,0214$ $P(B) = F(100; 1/6; 10) \approx 0,0427$ $P(C) = 1 - F(100; 1/6; 19) \approx 0,2197$		
	BE: 0/4/0		

Nr	Erwartungshorizont	Schülerleistung Vortrag	Schülerleistung Kolloquium
5.	<p>Grundsätzlich prüft der Test auf der rechten Seite, ob die Wahrscheinlichkeit für 3 größer ist als 1/6. Eine Verminderung der Wahrscheinlichkeit wäre aber ebenfalls denkbar. Daher müsste ein zweiseitiger Test durchgeführt werden.</p> $P(X \geq 10) = 1 - F(50; 1/6; 9) \approx 0,3170$ <p>Der Fehler 1. Art, also den Würfel fälschlicherweise als gezinkt einzustufen, wäre mit 32% relativ groß.</p> <p>Zweiseitiger Hypothesentest mit $\alpha = 0,05$</p> $F(50; 1/6; 3) = 0,0238$ $F(50; 1/6; 4) = 0,0643$ $F(50; 1/6; 13) = 0,9692$ $F(50; 1/6; 14) = 0,9861$ $P(X \leq k_1) \leq 0,025 \Rightarrow k_1 = 3$ $P(X \geq k_2) \leq 0,025 \Rightarrow k_2 = 14$ <p>Annahmebereich A = 4,5, ..., 13</p>		
	BE: 0/0/9		

Aufgabe	Bewertungseinheiten in den Anforderungsbereichen			Summe
	AFB I	AFB II	AFB III	
1.1	3	3		6
1.2		6		6
1.3	2			2
2.1	1	3		4
2.2	2	2		4
2.3		5		5
2.4		2	3	5
2.5			2	2
3.1	5			5
3.2		3		3
3.3		5		5
4		4		4
5			9	9
Summe	13	33	14	60

Prüfungsergebnis von 5 Punkten (ausreichend) setzt voraus, dass insgesamt 45% der zu vergebenen BE erreicht werden. Der Prüfling stellt seine/ihre Ergebnisse überwiegend in einem verständlichen Vortrag in einfacher Sprache dar. Weiterführende Fragen im Prüfungsgespräch werden in vergleichbaren Umfang in den AFB I-II beantwortet.

Ein Prüfungsergebnis von 11 Punkten (gut) setzt voraus, dass insgesamt 75% der zu vergebenden BE erreicht werden. Der Prüfling stellt seine/ihre Ergebnisse in einem fließenden freien und strukturierten Vortrag mit sicherer und korrekter Verwendung der Fachbegriffe dar. Weiterführende Fragen im Prüfungsgespräch werden in vergleichbaren Umfang in den AFB II-III beantwortet.

Zusatzfrage A

Für das Modell $h(t) = \frac{36000}{1 + 35e^{-0,25t}}$ gilt für die Ableitungsfunktion $h'(t)$ der folgende Zusammenhang:

$h'(t) = r \cdot h(t) \cdot (36000 - h(t))$, wobei r eine positive Konstante ist.

- Bestimmen Sie den Wendepunkt von $h(t)$.
- Geben Sie den Wert von r an.
- Zeigen Sie, dass für die zweite Ableitung $h''(t)$ gilt:

$$h''(t) = r \cdot h'(t) \cdot (36000 - 2 \cdot h(t))$$

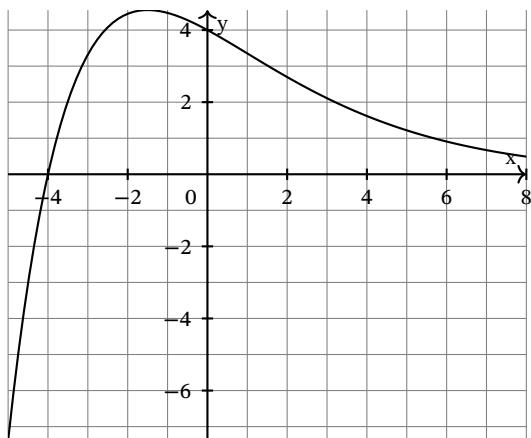
Zusatzfrage B

Die Abbildung zeigt den Graphen einer in \mathbb{R} definierten, differenzierbaren Funktion $g(x)$.

Betrachtet wird eine in \mathbb{R} definierte Funktion $f(x)$, für deren erste Ableitungsfunktion

$$f'(x) = e^{g(x)}$$
 gilt.

- Untersuchen Sie, ob der Graph von f einen Extrempunkt hat.
- Untersuchen Sie, ob der Graph von f einen Wendepunkt hat.



Zusatzfrage C

Skizzieren Sie den Graphen von $f(x) = \cos(\frac{1}{2} \cdot x) + 1$ im Intervall $[0; 4\pi]$.

Begründen Sie ohne Verwendung einer Stammfunktion, dass

$$\int_0^{2\pi} (\cos(\frac{1}{2} \cdot x) + 1) dx = 2\pi \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 2\pi \text{ gilt.}$$