

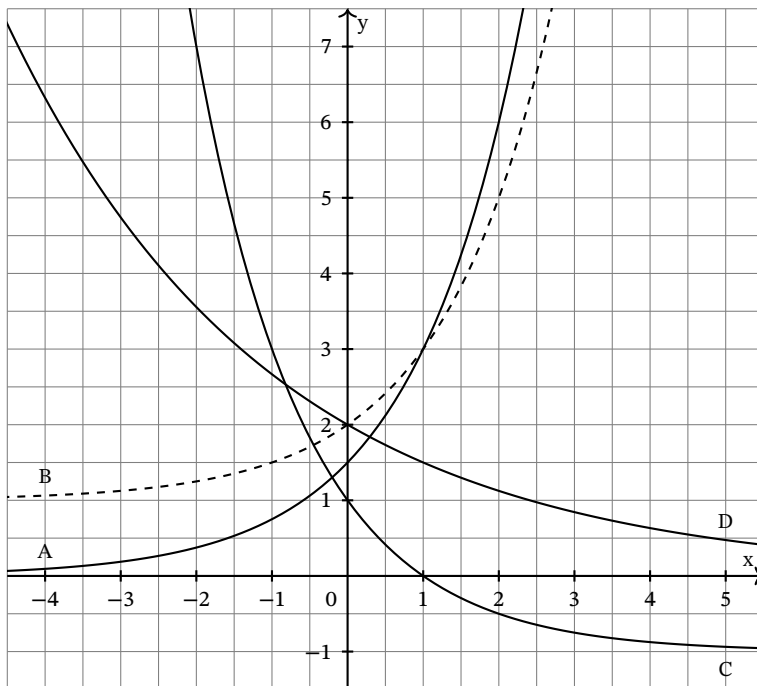
|            |  |              |       |             |            |
|------------|--|--------------|-------|-------------|------------|
| Schuljahr: | 2024   | Klasse/Kurs: |       | Datum:      | 2025-05-23 |
| Fach:      | Mathematik   | Nummer:      | 2 / 2 | Zeit:       | 90 min     |
| Lehrer:    |  | BE:          | 52    | BE Sprache: | 8          |
| Thema:     | Einf. i. d. Analysis, Exponentialfunktionen, Kettenregel |              |       |             |            |
| Name:      |  |              |       |             |            |
| Wortzahl:  |  | Sprachl. F.: |       | Abzug: (BE) |            |
| Summe BE:  |  | Note:        |       | Mündlich:   |            |

|    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |   |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|---|
| 15 | 14 | 13 | 12 | 11 | 10 | 09 | 08 | 07 | 06 | 05 | 04 | 03 | 02 | 01 | 00 | Ø |
|    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |   |

## 2. Klausur

**Zugelassene Hilfsmittel:** WTR, Formelsammlung, Geodreieck

### Aufgabe 1 ( / 10 BE):



Geben Sie für die fünf Graphen A, B, C, D und E jeweils eine Funktionsgleichung an.

### Aufgabe 2 ( / 5 BE):

Berechnen Sie die Ableitung der folgenden Funktionen und vereinfachen Sie. Das Ausmultiplizieren der Potenzen ist nicht erforderlich.

a)  $f(x) = 3^x$

b)  $f(x) = (x^3 - 4x)^4$

c)  $f(x) = \sqrt{x^2 + e^x}$

**Aufgabe 3 ( / 5 BE):**

Gegeben ist die Funktion  $f$  mit  $f(x) = e^{(x^2)}$ . Zeigen Sie, dass die Tangente  $t$  an den Graphen der Funktion im Punkt  $P(1|f(1))$  durch die Gleichung  $t(x) = 2ex - e$  beschrieben werden kann.

**Aufgabe 4 ( / 20 BE):**

In einem Labor wird die Wirksamkeit eines neuen Mittels gegen die Ausbreitung von Stechmücken untersucht. Bei einem ersten Versuch beschreibt die Funktion  $N(t) = 150 \cdot e^{0,25t}$  ( $t$  in Tagen) modellhaft die Population von Stechmücken.  $N(t)$  ist die Anzahl der Stechmücken zum Zeitpunkt  $t$ . Die Beobachtung beginnt bei  $t = 0$ .

- Berechnen Sie die Populationsgröße zum Zeitpunkt 6 Tage nach Beobachtungsbeginn.
- Berechnen Sie den Zeitpunkt, zu dem die Populationsgröße die Anzahl von 1500 Stechmücken erreicht.
- Berechnen Sie die Verdopplungszeit.
- Erklären Sie, dass die Funktion  $N(t)$  auch durch die Funktionsgleichung  $N(t) = 150 \cdot 1,284^t$  beschrieben werden kann. Erläutern Sie den Wert von 1,284 im Sachzusammenhang.
- Berechnen Sie die durchschnittliche Wachstumsgeschwindigkeit während der ersten 6 Tage.
- Berechnen Sie die momentane Wachstumsgeschwindigkeit am Ende des 6. Tages.
- Von einer anderen Mückenart werden am Ende des zweiten Tages 130 Mücken und am Ende des vierten Tages 300 Mücken gezählt. Berechnen Sie eine geeignete Funktionsgleichung, die dieses Wachstum als exponentielles Wachstum beschreibt.

**Aufgabe 5 ( / 12 BE):**

Der Abiturjahrgang 2025 hat vor Weihnachten heißen Glühwein auf dem Weihnachtsmarkt verkauft, um die Abikasse aufzubessern. Der Glühwein wird auf  $70^\circ\text{C}$  erhitzt. Wenn der Glühwein in eine Tasse gefüllt wird, kühlt dieser bei einer Umgebungstemperatur von  $0^\circ\text{C}$  innerhalb von 10 Minuten um die Hälfte ab.

- Leiten Sie eine Funktionsgleichung  $T(t)$  her, die die oben beschriebene Abkühlung von Glühwein beschreibt.  $T(t)$  gibt hierbei die Temperatur in Grad Celsius und  $t$  die Zeit in Minuten an. Runden Sie auf vier Nachkommastellen.  
[Kontrollergebnis:  $T(t) = 70 \cdot e^{-0,0693t}$ ]
- Bestimmen Sie die Temperatur des Glühweins nach 5 Minuten.
- Berechnen Sie, um wie viel Prozent der Glühwein nach 15 Minuten abgekühlt ist.
- Bei einer Temperatur von  $60^\circ\text{C}$  lässt sich der Glühwein angenehm trinken. Berechnen Sie, wie lange ein Kunde warten muss, bis diese Temperatur erreicht ist.
- Diskutieren Sie, wann der Glühwein eine Temperatur von  $0^\circ\text{C}$  erreicht hat.

**Erwartungshorizont****Lösung Aufgabe 1:**

|                        |   |
|------------------------|---|
| A: $1,5 \cdot 2^x$     | 2 |
| B: $2^x + 1$           | 2 |
| C: $2 \cdot 0,5^x - 1$ | 2 |
| D: $2,0 \cdot 0,75^x$  | 2 |

**Lösung Aufgabe 2:**

|   |   |
|---|---|
| $f'(x) = \ln(3) \cdot 3^x$  | 1 |
| $f'(x) = (3x^2 - 4) \cdot 4 \cdot (x^3 - 4x)^3 = (12x^2 - 16) \cdot (x^3 - 4x)^3$ | 2 |
| $f'(x) = \frac{2x+e^x}{2\sqrt{x^2+e^x}}$  | 2 |

**Lösung Aufgabe 3:**

|                                 |     |
|---------------------------------|-----|
| $f'(x) = 2x \cdot e^{(x^2)}$    | 1   |
| $f(1) = e$                      | 1   |
| $m = f'(1) = 2e$                | 1   |
| $t(x) = 2e \cdot x + b$         |     |
| $e = 2e + b \Rightarrow b = -e$ | 1,5 |
| $t(x) = 2e \cdot x - e$         | 0,5 |

**Lösung Aufgabe 4:**

|   |   |
|---|---|
| $f(6) = 150 \cdot e^{0,25 \cdot 6} \approx 672,3$   | 1 |
| Nach 6 Tagen gibt es ca. 672 Stechmücken  | 1 |
| $1500 = f(t)$<br>$1500 = 150 \cdot e^{0,25 \cdot t}$<br>$10 = e^{0,25 \cdot t}$<br>$\ln 10 = 0,25 \cdot t$<br>$t = 4 \ln 10 \approx 9,2103$   | 1 |
| Nach 9 Tagen und ca. 5 Stunden beträgt die Population 1500 Mücken   | 1 |
| $2 = e^{0,25 \cdot t}$<br>$t = 4 \ln 2 \approx 2,7726$  | 1 |
| Durch Anwendung der Potenzgesetze $e^{0,25 \cdot t} = (e^{0,25})^t \approx 1,284^t$ . Jedes exponentielle Wachstum kann in der Form $a \cdot b^x$ oder $a \cdot e^{x \cdot \ln b}$ geschrieben werden | 2 |

|  |     |
|--|-----|
| 1,284 entspricht einem prozentualen Wachstum um 28,4% bzw. auf 128,4%.                                   | 1   |
| $m = \frac{f(6) - f(0)}{6 - 0} = \frac{150e^{1,5} - 150}{6} \approx 87,0$                                | 2   |
| Die durchschnittliche Wachstumsgeschwindigkeit in den ersten 6 Stunden beträgt ca. 87 Mücken pro Stunde. | 1   |
| $f'(t) = 37,5 \cdot e^{0,25t}$   | 2   |
| $f'(6) = 37,5 \cdot e^{1,5} \approx 168$   | 1   |
| Die momentane Wachstumsgeschwindigkeit am Ende des 6. Tages beträgt ca. 168 Mücken pro Stunde.           | 1   |
| $130 = f(2) \Rightarrow 130 = a \cdot e^{2c}$  | 0,5 |
| $300 = f(4) \Rightarrow 300 = a \cdot e^{4c}$  | 0,5 |
| $\frac{300}{130} = \frac{e^{4c}}{e^{2c}}$  |     |
| $\frac{30}{13} = e^{2c}$   |     |
| $c = \frac{\ln(\frac{30}{13})}{2} \approx 0,4181$  | 1   |
| $130 = a \cdot e^{0,4181 \cdot 2}$   |     |
| $a = \frac{130}{e^{0,8362}} \approx 56,34$   | 1   |
| $f(t) = 56,34 \cdot e^{0,4181t}$   |     |

### Lösung Aufgabe 5:

|  |   |
|--|---|
| $a = 70; b = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{10}} \approx 0,9330; T(t) = 70 \cdot 0,9330^t$   | 3 |
| $T(5) \approx 49,5$ . Der Glühwein hat nach 5 Minuten eine Temperatur von 49,5°.   | 2 |
| $1 - 0,9330^{10} \approx 0,647$ . Nach 15 Minuten ist der Glühwein um 64,7% abgekühlt.   | 2 |
| $60 = 70 \cdot 0,9330^t \Leftrightarrow \frac{6}{7} = 0,9330^t \Leftrightarrow t = \log_{0,9330}\left(\frac{6}{7}\right) \approx 2,2228$   | 2 |
| Nach 2 Minuten und 14 Sekunden hat der Glühwein Trinktemperatur erreicht.  | 1 |
| Die Gleichung $T(t) = 0$ besitzt keine Lösung, da sich die Exponentialfunktion der 0 nur beliebig nah annähert, aber diese nie erreicht. Im Anwendungskontext sind aber irgendwann Temperaturen erreicht, die faktisch 0 sind. Der Ansatz $0,1 = T(t)$ liefert $t \approx 94,5$ . Nach 95 Minuten hat der Glühwein sicher 0 Grad erreicht. | 2 |