第4章 MATLAB符号计算

本章内容：

学时： 4

什么是符号计算:

- 符号计算是指：解算数学表达式、方程不是在离散化的数值点上进行，而是凭借一系列恒等式，数学定理，通过推理和演绎，力求获得解析结果。。
- 符号计算的操作对象是数学表达式和方程，不是某个具体的数值或矩阵。
- 符号计算的结果也称之为“解析解”，是精确的，没有误差的;
- 数值计算的“数值解”，是近似的，存在误差的。
- MATLAB中有一个专门的“符号数学工具箱（Symbolic Math Toolbox）”，用于进行符号计算。

符号运算的特点：

- （1）符号运算以推理解析的方式进行，计算的结果不受计算累积误差影响；
- （2）符号计算可以得出完全正确的封闭解和任意精度的数值解；
- （3）符号计算命令调用简单；
- （4）符号计算所需要的时间较长。

MATLAB符号运算的基本规则：

- (1) 在进行符号运算前首先要建立符号对象；
- (2) 本符号对象必须借助专门的符号函数指令**sym**或**syms**定义。 基本符号对象包括：符号常量、符号变量、符号矩阵；
- (3) 任何包含符号对象的表达式或方程，将继承符号对象的属性。即，任何包含符号对象的表达式、方程也一定是符号对象。

4.1 符号函数的计算

- 4.1.1 符号变量、矩阵、表达式
- 4.1.2 符号对象的基本运算
- 4.1.3 符号表达式的操作
- 4.1.4 可视化符号函数计算器

4.1.1建立符号变量

(1) sym用于创建单个符号变量

符号变量名=sym（‘表达式’）%创建一个符号变量。

符号变量名=sym('表达式', [n1 ... nM])
%创建符号矩阵，维数为n1*n2…*nM。

符号变量名=sym('表达式',n) %创建符号矩阵，维数为n*n

符号变量名= sym(num,flag)
% 将 num 指定的数字或数值矩阵转换为符号数字或符号矩阵。
num 可以是常量、向量、矩阵， flag可以是'r'、'd'、'e'、'f'，默认为'r'

4.1.1建立符号变量

【例】创建符号变量和符号矩阵

```
>> x=sym('x');
>> y=sym('y');
```

```
>> a = sym('a',[1 4])

a =

[ a1, a2, a3, a4]
```

```
>> A=sym('A',3)

A =

[ A1_1, A1_2, A1_3]
[ A2_1, A2_2, A2_3]
[ A3_1, A3_2, A3_3]

>> A(3,1)

ans =

A3_1
```

4.1.1建立符号变量

x1=sym(3.15,'r') %转换为有理式

x2=sym(3.15,'d') %转换为十进制数

x3=sym(3.15,'e') %转换为带估计误差的有理式

x4=sym(3.15,'f') %转换为与精确值对应的分式

```
x1 =

63/20


x2 =

3.1499999999999999111821580299875
```

```
x3 =

63/20 - (2*eps)/5


x4 =

7093169413108531/2251799813685248
```

4.1.1建立符号变量

(2) syms可以一次定义多个符号变量

函数：syms 变量名1 变量名2 变量名3 …

说明：一次创建多个符号变量，变量之间用空格分隔

```
>> syms x y z
```

函数：syms

说明: 查看当前工作区的所有符号对象。

```
>> syms

Your symbolic variables are:

A      ans    x1     x3     y
a      x      x2     x4     z
```

4.1.1建立符号矩阵

使用已经定义的符号变量组成符号矩阵，方法与建立数值矩阵类似。

【例】创建符号矩阵

```
syms x
A=[sin(x),cos(x);acos(x),asin(x)]
```

```
A =


[  sin(x),  cos(x)]
[ acos(x), asin(x)]
```

4.1.1建立符号矩阵

【例】创建符号矩阵

```
syms a x          %定义多个符号变量
n = 4;
C=(0:n)'*(0:n)
A = x.^C          %符号矩阵
B = log(A)        %符号矩阵
D = diff(B)       %符号矩阵
```

4.1.1建立符号表达式

①使用已经定义的符号变量组成符号表达式

```
syms x y
f=3*x^2+5*y+2*x-6                %建立符号表达式
equ=cos(x^2)-sin(2*x)==0   %建立符号等式（方程）
```

②使用sym函数，将与 MATLAB 句柄关联的匿名函数转换为符号表达式。

- f = @(x)(sin(x) + cos(x))   % f 是关于 x 的函数
- sym_f = sym(f)

③使用str2sym函数，将字符串转换为符号表达式。

```
fx=str2sym('sin(x) + cos(x)')
```

4.1.2 符号对象的基本运算

- 1)算术运算

＋	—	*	\	/	^
.*	.\	./	.^		
'	.'				

- 2)关系运算

<	>	<=	>=	==	~=

- 3)逻辑运算

and	or	not	xor
&	|	~	

- 4). 基本函数
  - 三角函数：包括sin、cos和tan，
  - 反三角函数：包括sinh、cosh和tanh

4.1.3 符号表达式的操作

1. 合并自变量x的同幂系数

- collect(s，x)

- syms x y;
- s = (x+y)*(x^2+y^2+1)
- s = collect(s, x)

```
z =

x^3 + y*x^2 + (y^2 + 1)*x + y*(y^2 + 1)
```

4.1.3符号表达式的操作

2．符号表达式s的展开

- expand(s)

- syms x y;
- s=cos(x+y)
- s=expand(s)

```
s =

cos(x)*cos(y) - sin(x)*sin(y)
```

4.1.3符号表达式的操作

3．因式分解

- factor(s)

- syms x y ;
- s=x^3-y^3;
- s=factor(s)

```
s =

(x - y)*(x^2 + x*y + y^2)
```

- x=sym('12345678901234567890');
- x=factor(x)

```
x =

2*3^2*5*101*3541*3607*3803*27961
```

4.1.3符号表达式的操作

4．符号表达式s的分式通分

- numden(s)

- syms x y ;
- s=x/y + y/x;
- [n,d] =numden(s)

```
n =

x^2 + y^2

d =

x*y
```

4.1.3符号表达式的操作

5. 寻找表达式的最简型

- simplify(s)

- syms x y ;
- s=cos(x)^2-sin(x)^2;
- s=simplify (s)

```
s =

cos(2*x)
```

4.1.3符号表达式的操作

5. 寻找表达式的最简型

- 简化 $f=\sqrt[3]{\frac{1}{x^3}+\frac{6}{x^2}+\frac{12}{x}+8}$

```
syms x
f=(1/x^3+6/x^2+12/x+8)^(1/3);
g1=simplify (f)
```

```
g1 =

((2*x + 1)^3/x^3)^(1/3)
```

4.1.3符号表达式的操作

6. 符号表达式s的嵌套形式

- horner(s)

- syms x y ;
- s=x^3-6*x^2+11*x-6;
- s=horner(s)

```
s =

x*(x*(x - 6) + 11) - 6
```

4.1.3符号表达式的操作

7．替换函数 subexpr()

函数：[R，SYM]=subexpr（S，‘SYM’）

说明：用变量SYM（字符或字符串）的值代替符号表达式S中重复出现的字符串，R是返回替换后的结果。

4.1.3符号表达式的操作

【例】$ax^3+bx+1=0$

- h = solve('a*x^3+b*x+1 = 0')
- [r,s] = subexpr(h,'s') %拆分表示

```
r =

                                          s^(1/3) - b/(3*a*s^(1/3))
 b/(6*a*s^(1/3)) - s^(1/3)/2 - (3^(1/2)*i*(s^(1/3) + b/(3*a*s^(1/3))))/2
 b/(6*a*s^(1/3)) - s^(1/3)/2 + (3^(1/2)*i*(s^(1/3) + b/(3*a*s^(1/3))))/2


s =

(1/(4*a^2) + b^3/(27*a^3))^(1/2) - 1/(2*a)
```

4.1.3符号表达式的操作

8．替换函数 subs()

函数： R=subs（S，old，new）

说明：该函数是用新的符号变量new替换原来符号表达式S中的变量old，R是替换后的符号表达式。

需要注意的，当变量new是数值形式时，显示的结果虽然是数值，但事实上还是符号变量，可以用vpa函数强制求值

4.1.3符号表达式的操作

【例】求表达式 $\dfrac{3x^3+x^2-1}{x^2+1}$ 在x=1时的代数解

- syms x
- y=(3*x^3+x^2-1)/(x^2+1)
- y=subs(y, x, 1)　　　　　　　%替代函数

```
y =

(3*x^3 + x^2 - 1)/(x^2 + 1)


y =

    1.5000
```

4.1.3符号表达式的操作

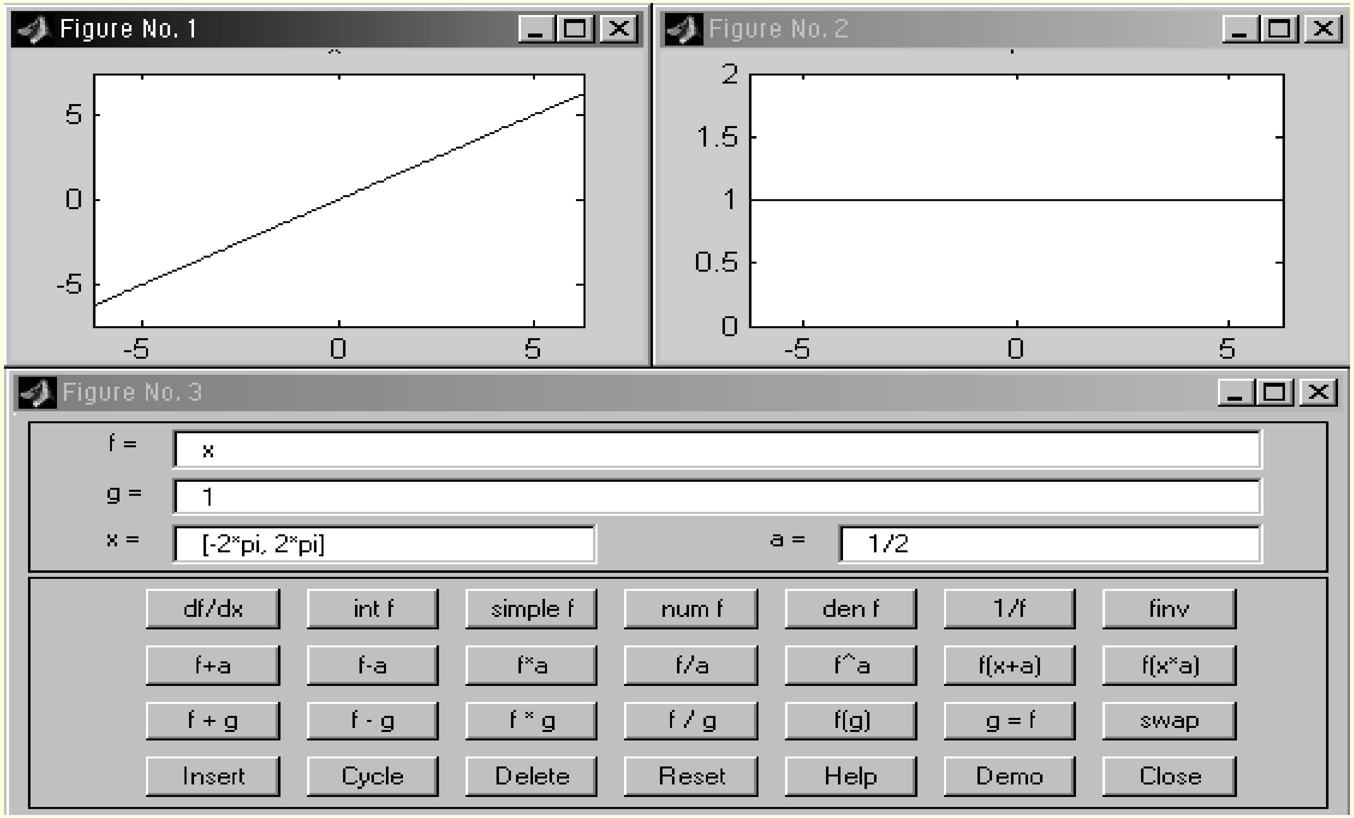
【例】

- clc
- clear
-
- syms a x
- f=a*sin(x)+5
- f1=subs(f,sin(x),sym('y'))
- f2=subs(f,{a,x},{2,pi/3})
- f3=subs(subs(f,a,2),x,0:pi/6:pi)
- f4=subs(f,{a,x},{0:6,0:pi/6:pi})

4.1.4 可视化符号函数计算器

funtool

help funtool



4.2 符号微积分

- 4.2.1 符号极限
- 4.2.2 符号求导
- 4.2.3 符号积分
- 4.2.4 积分变换

4.2.1 符号极限

- limit(s)：s为符号表达式。在默认表达式中的自变量趋向于0时的极限。
- limit(s，x，a)：计算符号表达式s在x趋向于a条件下的极限。
- limit(s，x，a，‘right’)：计算符号s在x趋向于a条件下的右极限
- limit(s，x，a，‘left’)：计算符号s在x趋向于a条件下的左极限

4.2.1 符号极限

【例1】计算$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x)}{x};\ \lim\limits_{x\to -\infty}(1+\dfrac{1}{x})^{x}$

- syms x;
- f= sin(x)/x;
- a=limit(f,0)

- syms x;
- f= (1+1/x)^x;
- a=limit(f,-inf)

4.2.1 符号极限

- 【例2】求函数极限：

$$\lim_{x \to a^+} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}$$

```
ans =

1/(2*a)^(1/2)
```

- syms a x;
- f=(sqrt(x)-sqrt(a)+sqrt(x-a))/sqrt(x*x-a*a);
- limit(f,x,a,'right')

4.2.1 符号极限

- 【例3】求函数极限：

$$\lim_{x \to +\infty} x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$$

- syms x;
- f=x*(sqrt(x^2+1)-x);
- limit(f,x,inf)

```
ans =

1/2
```

4.2.2 符号求导

函数：diff（s，x，n）

说明：其中s为符号表达式，x为自变量，n为求导的阶数。

```
syms x
diff(x^5)

diff(x^5,3)
```

4.2.2 符号求导

- 【例4】求函数导数：

$$y = \sqrt{1+e^{x}}$$

- syms x ;
- f=sqrt(1+exp(x));
- diff(f)

```
ans =

exp(x)/(2*(exp(x) + 1)^(1/2))
```

4.2.2 符号求导

- 【例5】求函数3阶导数：

$$y = x\cos(x)$$

- syms x;
- f=x*cos(x);
- diff(f,x,3)

```
ans =


x*sin(x) - 3*cos(x)
```

4.2.2 符号求导

- 【例6】求函数z对y的偏导数：

$$z = \frac{xe^y}{y^2}$$

- syms x y;
- f=x*exp(y)/y^2;
- diff(f,y)

```
ans =

(x*exp(y))/y^2 - (2*x*exp(y))/y^3
```

4.2.2 符号求导

- 【例7】已知 $f=\begin{bmatrix} a & t^3 \\ t\cos x & \ln x \end{bmatrix}$

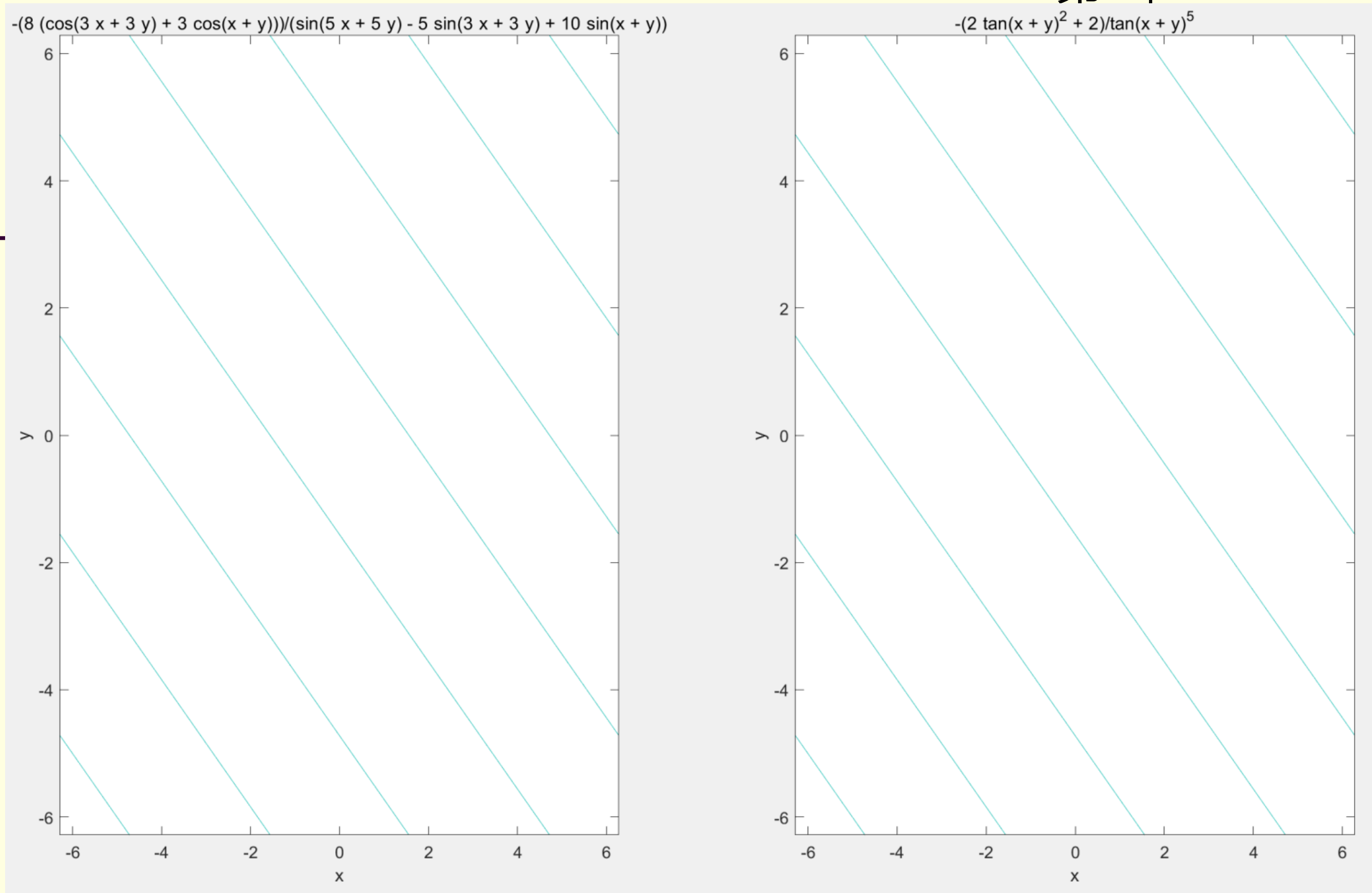
求 $\dfrac{df}{dx},\dfrac{d^2 f}{dt^2},\dfrac{d^2 f}{dtdx}$

```
syms a t x
f=[a,t^3;t*cos(x), log(x)];
df=diff(f)
dfdt2=diff(f,t,2)
dfdxdt=diff(diff(f,x),t)
```

```
df =

[         0,   0]
[ -t*sin(x), 1/x]


dfdt2 =

[ 0, 6*t]
[ 0,   0]


dfdxdt =

[       0, 0]
[ -sin(x), 0]
```

4.2.2 符号求导

- 略【例7】求由方程 $y = \tan(x+y)$ 确定的隐函数的二阶导数
- syms x y
- F = tan(x+y) - y
- dy1 = - diff(F,x)/diff(F,y)
- dy2 = diff(dy1,x) + diff(dy1,y)*dy1;
- dy2 = simplify(dy2)
- subplot(1,2,1); ezplot(dy2)
- y=tan(x+y);
- dy23=-2*(1+y^2)/y^5 %与解析解比较
- subplot(1,2,2);ezplot(dy23)



- dy2 = -(8*(cos(3*x + 3*y) + 3*cos(x + y)))/(sin(5*x + 5*y) - 5*sin(3*x + 3*y) + 10*sin(x + y))
-
- dy23 = -(2*tan(x + y)^2 + 2)/tan(x + y)^5

4.2.2 符号求导

- 略【例8】在曲线y=x^3+3x-2上哪一点的切线与直线y=4x-1平行？

- syms x;
- y=x^3+3*x-2;   %定义曲线函数
- f=diff(y);   %对曲线求导数
- g=f-4
- solve(g)   %求方程f-4=0的根

```
g =

3*x^2 - 1

ans =

 -3^(1/2)/3
  3^(1/2)/3
```

4.2.3 符号积分

- int(s) 符号表达式s对于默认自变量的不定积分
- int(s，x) 符号表达式s对于自变量x的不定积分
- int(s，a，b) 符号表达式s对于默认自变量从a到b的定积分
- int(s，x，a，b) 符号表达式s对于自变量x从a到b的定积分

4.2.3 符号积分

【例9】 $\int (4-3x^2)^2 dx$; $\int_1^3 \frac{x^2}{x+2} dx$

- syms x
- f= (4-3*x^2)^2
- a=int(f,x) %不定积分

- syms x
- f= x^2/(x+2)
- a=int(f,x,1,3) %定积分

4.2.3 符号积分

- 【例10】求 $\int \begin{bmatrix} ax & bx^2 \\ \dfrac{1}{x} & \sin x \end{bmatrix} dx$

- syms a b x;
- f=[a*x,b*x^2;1/x,sin(x)];
- int(f)

```
ans =

[ (a*x^2)/2, (b*x^3)/3]
[    log(x),   -cos(x)]
```

4.2.3 符号积分

【例11】（参考第二章例题8，并进行比较）

计算：$s=\int_0^{3\pi} e^{-0.5x}\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)dx$

```
s =

((2*3^(1/2) + 1)*(exp(-(3*pi)/2) + 1))/5
```

```
s1 =

0.900840787818886190953236329238 34
```

4.2.3 符号积分

【例11】（参考第二章例题8，并进行比较）

计算： $s=\int_0^{3\pi} e^{-0.5x}\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)dx$

```
syms x
f= exp(-0.5*x)*sin(x+pi/6);
s=int(f,x,0,3*pi);
s1=vpa(s)
```

4.2.3 符号积分

【例12】计算：

$$\int_1^2 \int_{\sqrt{x}}^{x^2} \int_{\sqrt{xy}}^{x^2 y} (x^2 + y^2 + z^2) dzdydx$$

```
F2 =

(14912*2^(1/4))/4641 - (6072064*2^(1/2))/348075 + (64*2^(3/4))/22


VF2 =

224.92153573331143159790710032805
```

4.2.3 符号积分

【例12】计算：

$$\int_{1}^{2}\int_{\sqrt{x}}^{x^2}\int_{\sqrt{xy}}^{x^2 y}(x^2+y^2+z^2)dzdydx$$

- syms x y z
- F2=int(int(int(x^2+y^2+z^2,z,sqrt(x*y),x^2*y),...
  y,sqrt(x),x^2),x,1,2)
- VF2=vpa(F2)　　　%控制运算精度

4.2.3 符号积分

略【例13】求空间曲线从点(0，0，0)到点(3，3，2)的长度。设曲线的方程是：

$$\begin{cases} x = 3t \\ y = 3t^2 \\ z = 2t^3 \end{cases}$$

- syms t;
- x=3*t;
- y=3*t^2;
- z=2*t^3;
- f=diff([x,y,z],t); %求x,y,z对参数t的导数
- g=sqrt(f*f'); %计算一型积分公式中的根式部分
- l=int(g,t,0,1) %计算曲线c的长度

4.2.4 积分变换(略)

- 积分变换是通过积分运算把原函数f变成像函数F的过程：

$$F(t)=\int_a^b f(x)K(x,t)dx$$

- 基本应用：解微分方程。

假如不容易从原方程直接求得解f，则对原方程进行变换，从变换后的方程中得到解F，再对F进行逆变换，即可求得原方程的解f。

4.2.4 积分变换

- 傅立叶变换： fourier(fx，x，t)
- 傅立叶反变换: ifourier(Fw，t，x)
  - 其中：fx为函数f(x)的符号表达式、x为原函数的自变量、t像函数F(t)的自变量。 Fw为函数F(t)的符号表达式
- 拉普拉斯变换： laplace(fx，x，t)
- 拉普拉斯反变换： ilaplace(Fw，t，x)
- Z变换： ztrans(fx，x，t)
- Z反变换：iztrans (Fw，t，x)

4.2.4 积分变换

$$F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-iwt}\,dt$$

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}[F(\omega)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{iwt}\,d\omega$$

$$F(s) = L\left[f(t)\right] = \int_{0}^{+\infty} f(t)e^{-st}\,dt$$

$$f(t) = L^{-1}\left[F(s)\right] = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(s)e^{st}\,dt$$

4.2.4 积分变换

【例14】求函数 $y = e^{-x^2}$ 的傅里叶变换及其逆变换

- **clc**
- **clear**
- **syms x t**
- **y=exp(-x^2);**
- **Ft=fourier(y,x,t)**
- **fx=ifourier(Ft,t,x)**

4.2.4 积分变换

【例15】求函数 $y=-x^3$ 的拉普拉斯变换及其逆变换

```
clc
clear
syms x t
y=-x^3;
Lt=laplace(y,x,t)
fx=ilaplace(Lt,t,x)
```

4.2.4 积分变换

【例16】已知系统冲激响应 $h(t)=\dfrac{1}{T}e^{-t/T}U(t)$

采用Laplace变换和反变换求 $u(t)=e^{-t}U(t)$ 的输出响应

```
yt =

exp(-t/T)/(T - 1) - exp(-t)/(T - 1)
```

4.2.4 积分变换

【例16】已知系统冲激响应 $h(t)=\dfrac{1}{T}e^{-t/T}U(t)$

采用Laplace变换和反变换求 $u(t)=e^{-t}U(t)$ 的输出响应。

```
clc
clear
syms T t s
ut=exp(-t);
ht=exp(-t/T)/T;
yt=ilaplace(laplace(ut,t,s)*laplace(ht,t,s),s,t)
```

4.3 符号方程求解

- 4.3.1 符号代数方程
- 4.3.2 符号常微分方程

4.3.1 符号代数方程

- solve(s)　求解符号表达式s=0的代数方程，自变量为默认自变量
- solve(s，x)　求解符号表达式s=0的代数方程，自变量为x
- [x1,x2,...xn]=solve(s1,s2,…sn) 求解由符号表达式s1,s2,…sn组成的代数方程组，自变量分别为x1,x2,...xn

4.3.1符号代数方程

【例18】求解代数方程 $ax^2+bx+c=0$

- syms x a b c
- x=solve(a*x^2+b*x+c)
- %x=solve(a*x^2+b*x+c==0)

x =

$$\begin{pmatrix} -\frac{b+\sqrt{b^2-4\,a\,c}}{2\,a} \\ -\frac{b-\sqrt{b^2-4\,a\,c}}{2\,a} \end{pmatrix}$$

4.3.1符号代数方程

- 【例20】求解如下方程：

$$x-\sqrt[3]{x^3-4x-7}=1$$

- syms x
- x=solve(x-(x^3-4*x-7)^(1/3)==1)

```
x = 3
```

4.3.1符号代数方程

- 【例21】求解如下方程组：

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x^3}+\dfrac{1}{y^3}=28 \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=4 \end{cases}$$

- syms x y
- [x,y]=solve(1/x^3+1/y^3==28, 1/x+1/y==4)

x =

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

y =

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

4.3.1符号代数方程

- 【练】求解如下方程组：$\begin{cases} 3ty+xz-5=0 \\ -2zy-7tx+7=0 \end{cases}$

```
syms x y z t
[x,y]=solve(3*t*y+x*z-5,-2*z*y-7*t*x+7)
```

x =

$$\frac{21\,t-10\,z}{21\,t^2-2\,z^2}$$

y =

$$\frac{7\,(5\,t-z)}{21\,t^2-2\,z^2}$$

4.3.2符号常微分方程

(1)常微分方程的通解与特解

函数：r =dsolve(eqn,cond,var)

说明：

eqn代表常微分方程，

cond代表常微分方程的边界条件或初始条件，如果缺省，则求方程的通解。

var代表自变量，缺省取系统默认的自变量。

(2)微分方程组的通解与特解

函数：r =dsolve(eq1, eq2,…eqN, cond1,…condN,var1,…varN)

4.3.2符号常微分方程

- 【例22】求微分方程的通解

$$\frac{dy}{dt}=\frac{t^2+y^2}{2t^2}$$

- **syms t y(t)　　　%声明变量**
- **eqn = diff(y, t) == (t^2+y^2)/t^2/2; %构造微分方程**
- **sol = dsolve(eqn)　%求通解**

```
sol =


                                       t
 -t*(1/(C5 + log(t)/2) - 1)
```

4.3.2符号常微分方程

【例23】求微分方程 $\dfrac{dy}{dx}=2xy^2$ 的通解和当y(0)=1时的特解

- syms x y(x)
- eqn = diff(y, x) == 2*x*y^2;
- sol = dsolve(eqn)
- sols = dsolve(eqn,y(0)==1)

```
sol =

                 0
 -1/(x^2 + C8)

sols =

-1/(x^2 - 1)
```

4.3.2符号常微分方程

- 【例25】求如下微分方程组的通解：

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x - 2y \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x - y \end{cases}$$

- **syms t x(t) y(t)**
- **eqn1 = diff(x, t) == 4*x-2*y;**
- **eqn2 = diff(y, t) == 2*x-y;**
- **[x,y]=dsolve(eqn1,eqn2)**

```
x =

C10/2 + 2*C11*exp(3*t)


y =

C10 + C11*exp(3*t)
```

4.3.2符号常微分方程

- 【练】求如下微分方程的通解：

$$x^2\frac{dy}{dx}+2xy-e^x=0$$

y =

$$-\frac{C_4-e^x}{x^2}$$

- syms x y(x);
- eq = diff(y, x)*x^2+2*x*y-exp(x);
- y=dsolve(eq)

4.4 级数

- 4.4.1 级数的符号求和
- 4.4.2 函数的泰勒级数

4.4.1 级数的符号求和

- symsum(S) 计算符号表达式S（表示级数的通项）对于默认自变量的不定和。
- symsum(S，x，a，b) 计算符号表达式S对于自变量x从a到b的有限和。

4.4.1 级数的符号求和

【例26】计算 $\sum k^2, \sum_0^{10} k^2$

$$s_4 = 1 + 4 + 9 + 16 + \cdots + 10000$$

- syms k
- ss=symsum(k^2)
- ss10=symsum(k^2,0,10)
- ss100=symsum(k^2,1,100)

```
ss =

k^3/3 - k^2/2 + k/6


ss10 =

385


ss100 =

338350
```

4.4.2 函数的泰勒级数

- 计算符号表达式s在自变量x等于a处的n阶Taylor级数展开式

函数：taylor(s,x, a, Order=n)

用法：

x： 可缺省，默认自变量；

a：可缺省，默认值为0；

‘Order’：指定阶段阶，对应值为一个正整数。

n：可缺省，n默认值为6, 即6阶泰勒级数展开，展开式的最高阶为5.

4.4.2 函数的泰勒级数

一、泰勒 (Taylor) 级数

复习: $f(x)$ 的 n 阶泰勒公式

若函数 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内具有 $n+1$ 阶导数, 则在该邻域内有:

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)$$

其中 $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ (ξ 在 x 与 x_0 之间)

称为**拉格朗日余项**.

4.4.2 函数的泰勒级数

【例28】求函数：$f=e^{\left(x^2\right)}$在$x=0$处的6阶和10阶泰勒展开式

- syms x
- f = exp(x^2);
- ft= taylor(f)
- ft= taylor(f, 'order',10)

```
ft =

x^4/2 + x^2 + 1


ft =

x^8/24 + x^6/6 + x^4/2 + x^2 + 1
```

4.4.2 函数的泰勒级数

- 【例29】求如下函数的4次多项式展开

$$\sqrt{1-2x+x^3}-\sqrt[3]{1-3x+x^2}$$

- syms x
- f1=sqrt(1-2*x+x^3)-(1-3*x+x^2)^(1/3);
- taylor(f1,x,'order',5)

```
ans =


(119*x^4)/72 + x^3 + x^2/6
```

4.4.2 函数的泰勒级数

- 在命令行窗口输入taylortool，打开Taylor Tool窗口。用于将符号表达式展开为泰勒级数，并以图形化的方式展现计算时的逼近过程。

- 演示上述例题。

4.5 符号函数绘图

使用plot函数绘图时，先要取得x、y坐标数据。Matlab还可以根据已知函数表达式、参数方程、隐函数来绘制相关图形。

- 1. fplot(f) 函数

调用格式1： **fplot(fun,lims)**

- fun 是所要绘制的函数，可以是定义函数的M 文件名，也可以是以x 为变量的可计算字符串
- lims=[xmin xmax ymin ymax]限定了x,y 轴的范围。

fplot(@(x) sin(x))

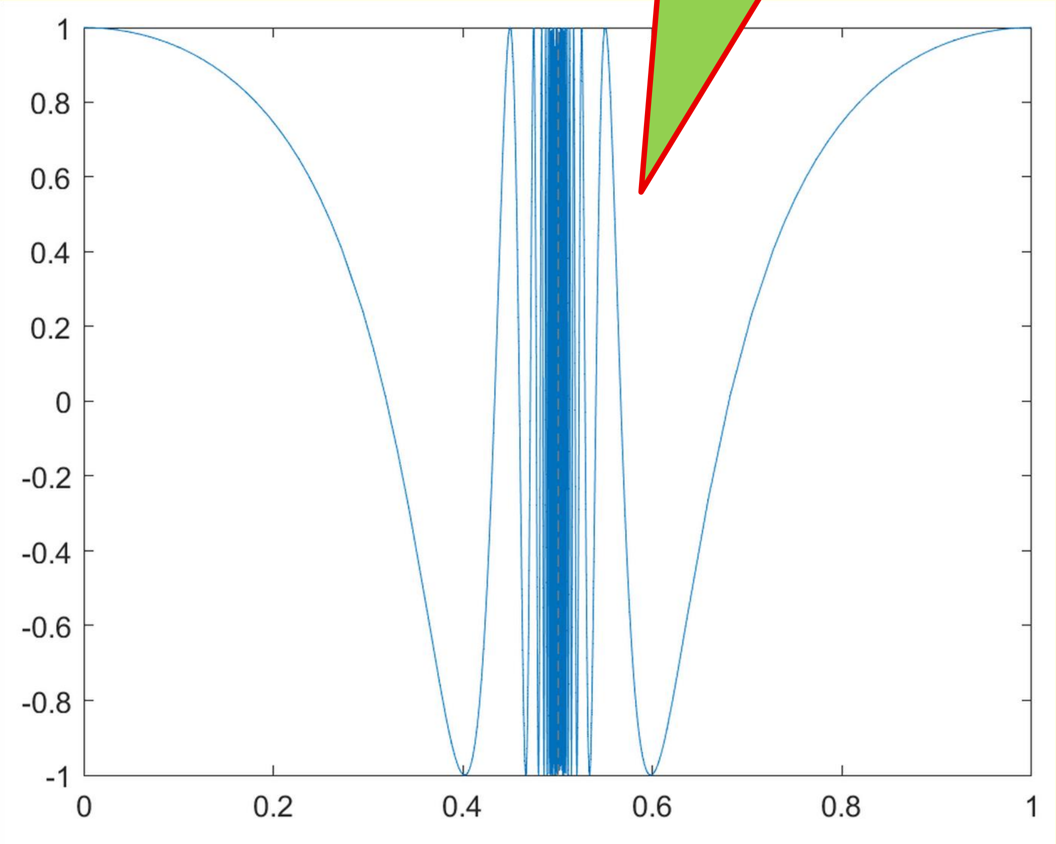
4.5 符号函数绘图

fplot可以根据函数的实际变化特性自适应地设置采样间隔。

- 【例】用fplot函数绘制

$$f(x)=\cos(\tan(\pi x)),\quad x\in[0,$$

- %方法1：
- fplot(@(x)cos(tan(pi*x)),
- %方法2：
- syms x;
- y=cos(tan(pi*x));
- fplot(y,[0,1]);



fplot(@(x) sin(x))

4.5 符号函数绘图

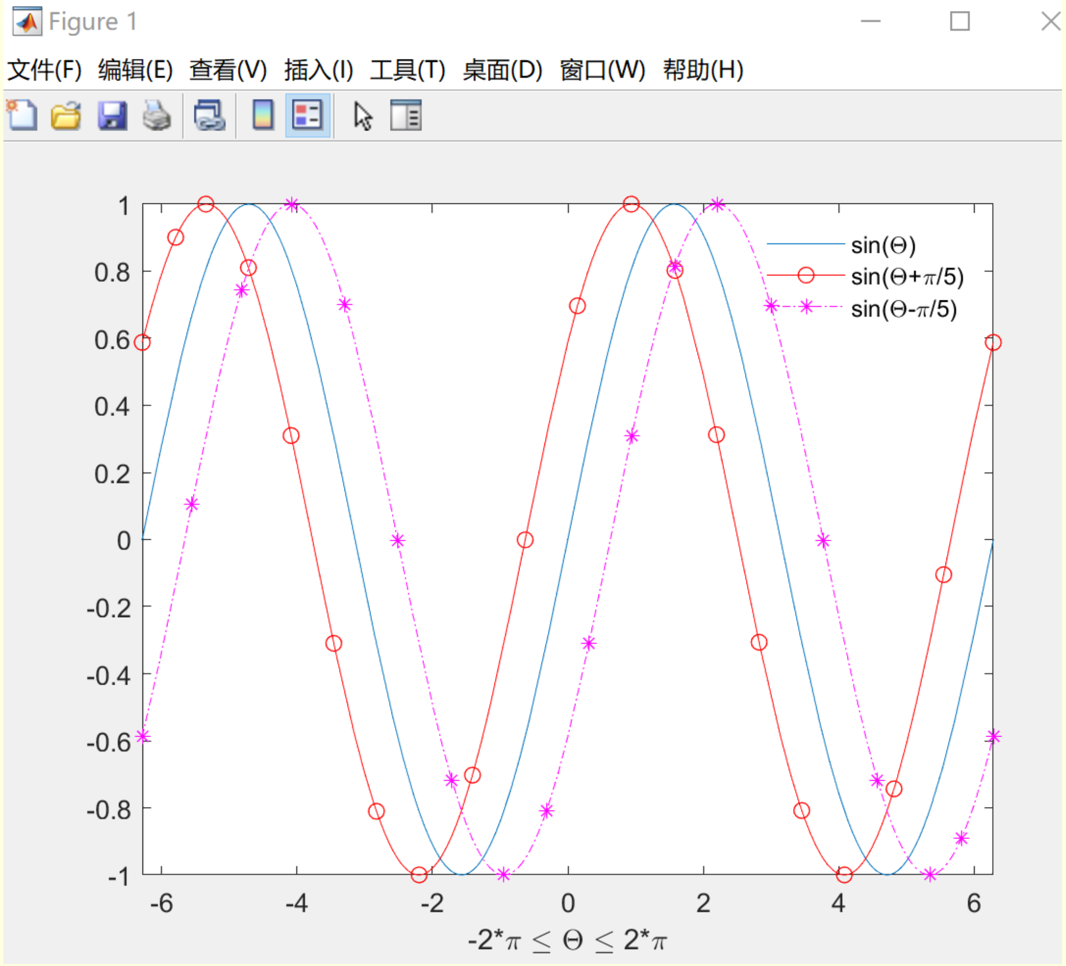
- 绘制 $(-2\pi,2\pi)$ 范围内得正弦函数及其相移 $\pm\frac{\pi}{5}$ 的函数图形。

- fplot(@(x)sin(x),[-2*pi,2*pi]);
- hold on;
- fplot(@(x)sin(x+pi/5),[-2*pi,2*pi],'-or');
- fplot(@(x)sin(x-pi/5),[-2*pi,2*pi],'-.*m');
- hold off;
- xlabel('-2*\pi \leq \Theta \leq 2*\pi') %坐标轴文字标注
- s = legend('sin(\Theta)', 'sin(\Theta+\pi/5)', 'sin(\Theta-\pi/5)'); %图例注解
- set(s,'box','off')

fplot(@(x) sin(x))

4.5 符号函数绘图

- 绘制 $(-2\pi,2\pi)$ 范围内得正弦函数及其相移 $\pm\frac{\pi}{5}$ 的函数图形。



4.5 符号函数绘图

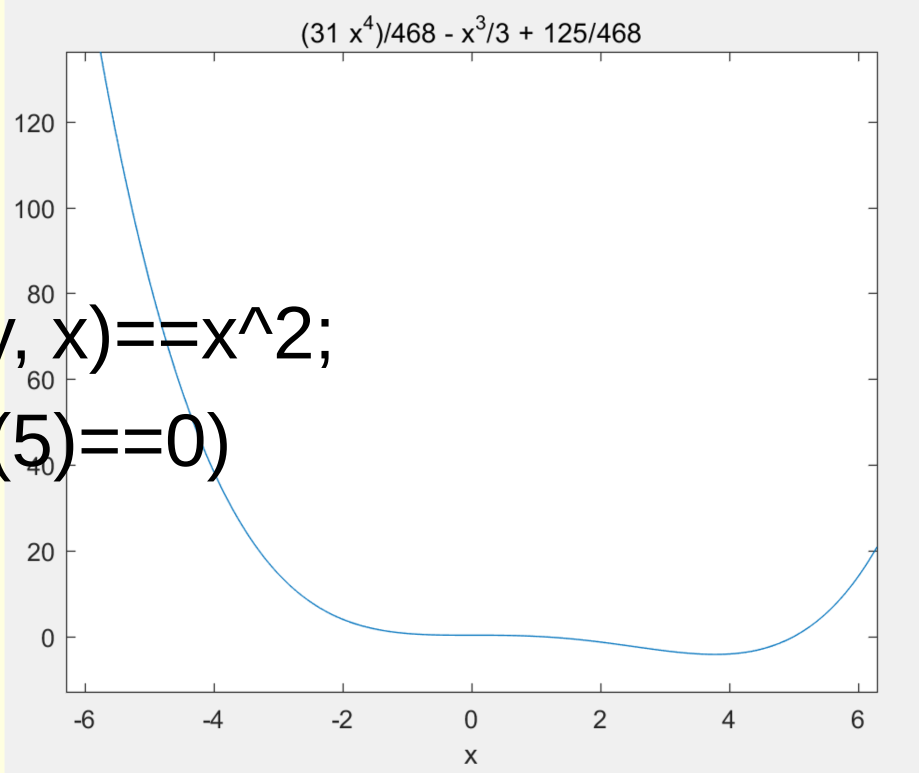
【练】matlab求解微分方程解析解：

（1）$\begin{cases} xy''-3y'=x^2 \\ y(1)=0, y(5)=0 \end{cases}$

y =

$$\frac{31\,x^4}{468}-\frac{x^3}{3}+\frac{125}{468}$$

- syms x y(x)
- eq=x*diff(y, x,2)-3*diff(y, x)==x^2;
- y=dsolve(eq,y(1)==0,y(5)==0)
- fplot(y,[-2*pi,2*pi])



4.5 符号函数绘图

- 1. fplot(f) 函数

绘制由参数方程x= funx(t)和y= funy(t)定义的曲线。

调用格式2： **fplot(funx, funy, lims)**

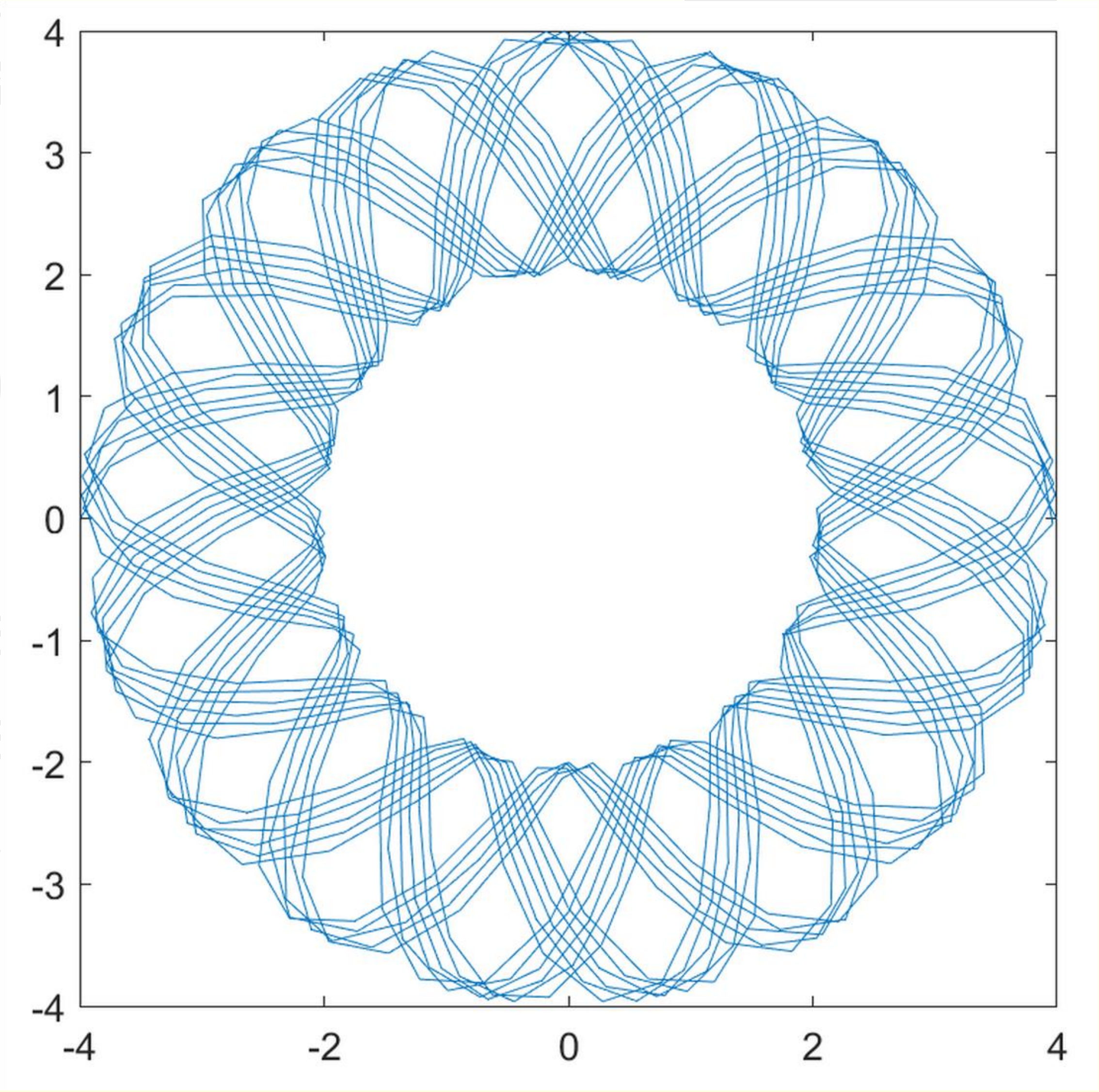
- funx、funy通常采样函数句柄的形式；
- lims=[tmin tmax]限定了参数t的取值范围。

4.5 符号函数绘图

- 采用fplot函数绘

$$\begin{cases} x = \left[3+\cos\left(4\sqrt{2}t\right)\right. \\ y = \left[3+\cos\left(4\sqrt{2}t\right)\right. \end{cases}$$

- fx=@(t)(3+cos
- fy=@(t)(3+cos
- fplot(fx, fy, [0,
- axis equal



4.5 符号函数绘图

- **fimplicit函数**

如果曲线以显示表达式定义，可以用plot或者fplot绘图；

如果曲线以隐函数形式f(x,y)=0定义，则可以用fimplicit函数绘图；

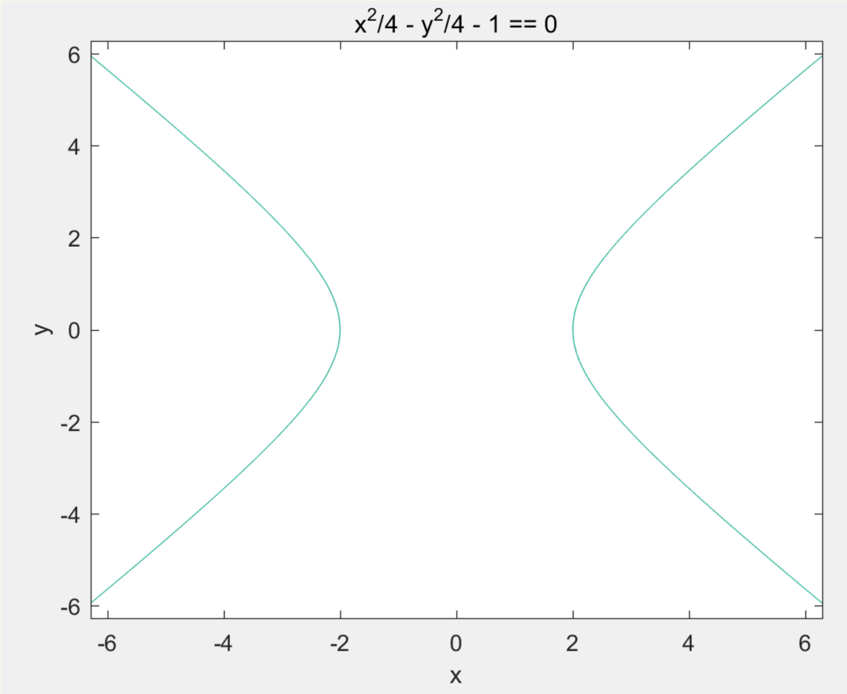
- 调用格式：

  fimplicit(f,[xmin,xmax,ymin,ymax])

- 功能：绘制隐函数 f(x,y) = 0，区间是xmin < x < xmax and ymin < y < ymax.

4.5 符号函数绘图

- 采用**fimplicit**函数绘制隐函数x^2/4-y^2/4-1=0的图形。
- fimplicit(@(x,y)x.^2/4-y.^2/4-1)

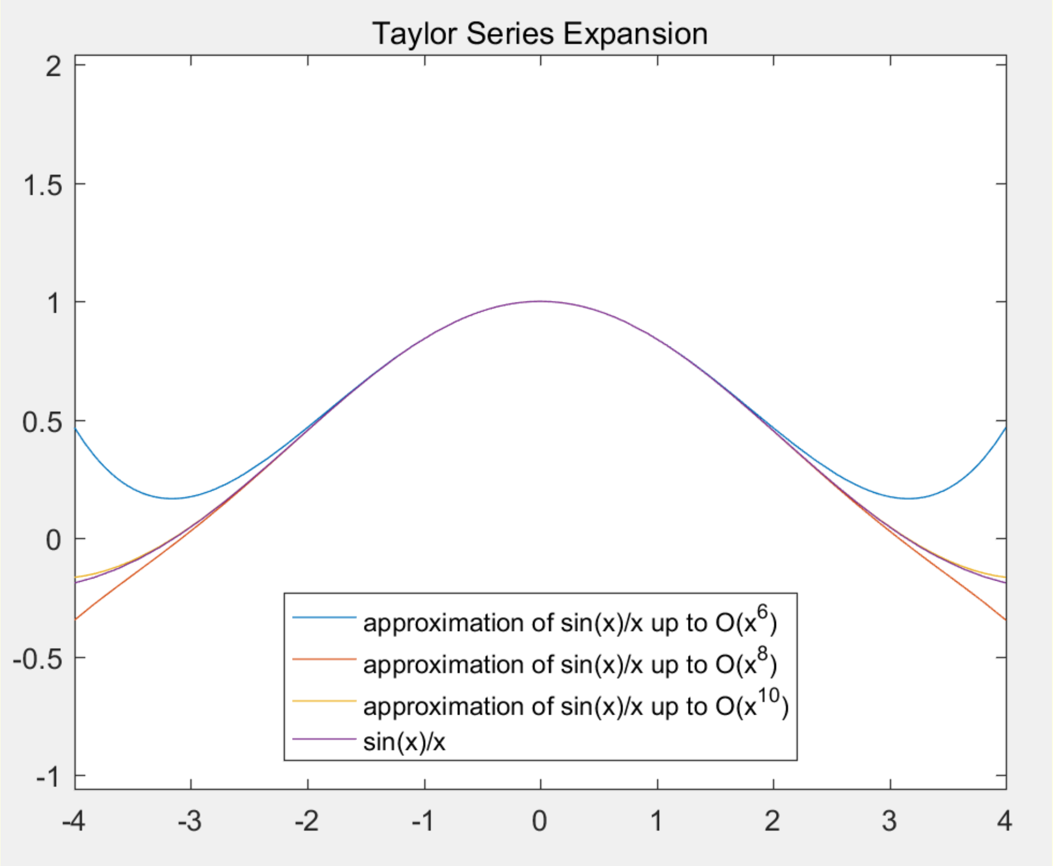


4.5 符号函数绘图

【例30】

求函数：$f=\dfrac{\sin x}{x}$ 在$x=0$处的6、8、10阶泰勒展开式

并画图比较。



- syms x
- f = sin(x)/x;
- t6 = taylor(f, x)
- t8 = taylor(f, x, 'Order', 8)
- t10 = taylor(f, x, 'Order', 10)
- fplot(t6,[-4 4])
- hold on
- fplot(t8,[-4 4])
- fplot(t10,[-4 4])
- fplot(f,[-4 4])
- legend('approximation of sin(x)/x up to O(x^6)',...
- 'approximation of sin(x)/x up to O(x^8)',...
- 'approximation of sin(x)/x up to O(x^{10})',...
- 'sin(x)/x',...
- 'Location', 'South');
- title('Taylor Series Expansion')
- hold off

自己练

1）符号求解方程 $y'' - 10y' + 9y = e^{2x}, y|_{x=0} = \frac{6}{7}, y'|_{x=0} = \frac{33}{7}$

s =

$$\frac{e^{9x}}{2} - \frac{e^{2x}}{7} + \frac{e^{x}}{2}$$

```
syms x y(x);
dy=diff(y,x);
eq=diff(y,x,2)-10*diff(y,x)+9*y==exp(2*x);
s=dsolve(eq,y(0)==6/7,dy(0)==33/7)
```

自己练

2）符号求解方程组 $\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2}+2\dfrac{dy}{dt}-2x=0, x|_{t=0}=1, \dfrac{dx}{dt}\Big|_{t=0}=1 \\ \dfrac{dy}{dt}-x-y=0, y|_{t=0}=0 \end{cases}$

x0 = $e^t\cos(t)$

y0 = $e^t\sin(t)$

```
syms t x(t) y(t);
dx=diff(x,t);
eq1=diff(x,t,2)+2*diff(y,t)-2*x==0;
eq2=diff(y,t)-x-y==0;
[x0, y0]=dsolve(eq1,eq2,x(0)==1,dx(0)==1,y(0)==0)
```

自己练

求极限 $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+5}\right)^{2x+1}$

$$\text{ans} = e^{-2}$$

```
syms x;
f=((2*x+3)/(2*x+5))^(2*x+1);
limit(f,x,inf)
```

求函数 $y=\arctan(e^x)$ 的导数

ans =

$$\frac{e^x}{e^{2x}+1}$$

```
syms x;
f=atan(exp(x));
diff(f,x)
```

自己练

求由方程 $y=\tan(x+y)$ 确定的隐函数的二阶导数

ans = $2\tan(x+y)\ (\tan(x+y)^2+1)$

```
syms x y;
y=tan(x+y);
diff(y,x,2)
```

求由参数方程 $x=\ln(1+t^2), y=t-\arctan t$ 所确定函数的三阶导数

ans =

$$\frac{\frac{1}{t^2+1}-1}{t}-\frac{1}{t\ (t^2+1)}-\frac{(t^2+1)\ \left(\frac{1}{t^2+1}-1\right)}{t^3}$$

```
syms t;
x=log(1+t^2);
y=t-atan(t);
dx=diff(x,t);
dy=diff(y,t);
d=dy/dx
diff(d,t,2)
```