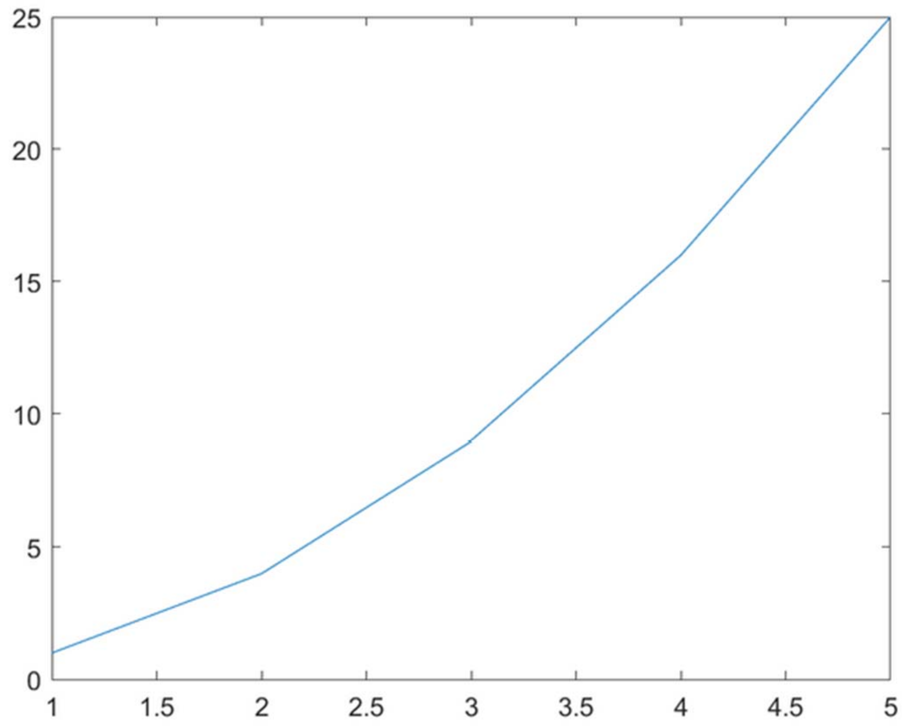
5.3.2 数值积分

【例25】采用单位间距对数据向量[1 4 9 16 25]求积分.

- Y = [1 4 9 16 25];
- plot(Y)
- Q = trapz(Y)

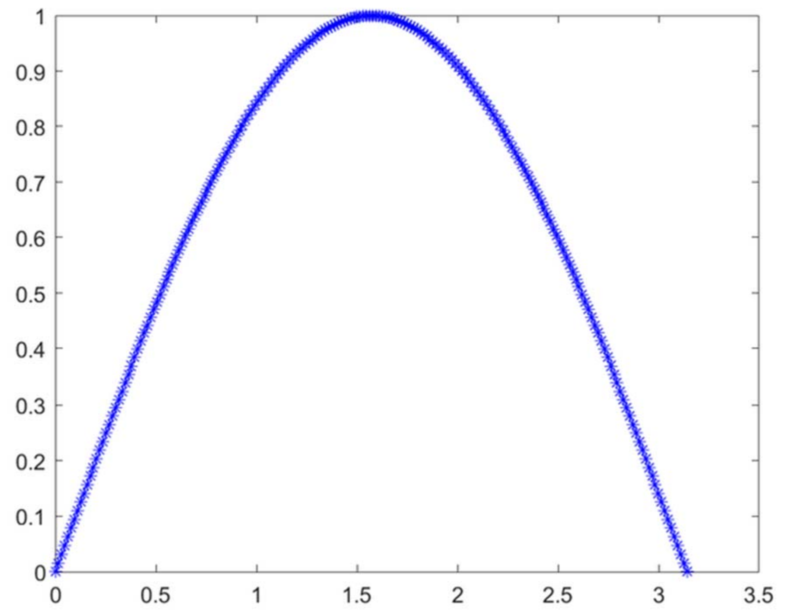


Q = 42

5.3.2 数值积分

【例25】采用非单位间距求积分 $I=\int_0^{\pi}\sin\left(x\right)dx$

- x = linspace(0,pi,200);
- y = sin(x);
- plot(x,y,'b-*');
- Q = trapz(x,y)




```
Q = 2.0000
```

5.3.2 数值积分

对二重积分进行数值计算，格式：

q = integral2(fun,xmin,xmax,ymin,ymax)

在平面区域 xmin ≤ x ≤ xmax 和 ymin ≤ y ≤ ymax 上逼近函数fun(x,y) 的积分。

$$q=\int_{y\min}^{y\max}\int_{x\min}^{x\max} fun(x,y)\,dxdy$$

对三重积分进行数值计算，格式：

q = integral3(fun,xmin,xmax,ymin,ymax, zmin,zmax)

在平面区域 xmin ≤ x ≤ xmax 、 ymin ≤ y ≤ ymax 、 zmin ≤ z ≤ zmax 上逼近函数fun(x,y,x) 的积分。

$$q=\int_{z\min}^{z\max}\int_{y\min}^{y\max}\int_{x\min}^{x\max} fun(x,y,z)\,dxdydz$$

5.3.2 数值积分

- 【例25】求以下的二重定积分

$$I=\int_0^2\int_0^1 e^{-x^2}\sin(x+y)dxdy$$

- **fun=@(x,y)exp(-x.^2).*sin(x+y);**
- **d=integral2(fun,0,1,0,2)**

5.3.2 数值积分

- 【例26】求以下的二重定积分

- $\int_0^{1-x}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(x+y)(1+x+y)^2}}dxdy$

```
d = 0.2854
```

- **fun=@(x,y)1./(sqrt(x+y).*(1+x+y).^2);**
- **ymax=@(x)1-x;** %为 y 的上限定义一个函数。
- **d=integral2(fun,0,1,0,ymax)**

5.3.2 数值积分

- 【例25】求以下的二重定积分

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}}\frac{r}{\sqrt{r\cos\theta+r\sin\theta}\left(1+r\cos\theta+r\sin\theta\right)^2}drd\theta$$

```
q = 0.2854
```

- fun = @(t,r)r./(sqrt(r.*cos(t)+r.*sin(t)).*(1+r.*cos(t)+r.*sin(t)).^2);
- %为 r 的上限定义一个函数。
- rmax = @(theta) 1./(sin(theta) + cos(theta));
- %对 0≤*θ*≤*π*/2 和 0≤*r*≤*rmax* 限定的区域计算积分。
- q = integral2(fun,0,pi/2,0,rmax)

5.3.2 数值积分

- 【例25】求以下的三重定积分

$$\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{1} 4xze^{-x^2y-z^2}dxdydz$$

```
d = 1.7328
```

- fun=@(x,y,z)4*x.*z.*exp(-x.^2.*y-z.^2);
- d=integral3(fun,0,1,0,pi,0,pi)

5.4 线性方程组求解

设线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

若记 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$

则上述方程组可写成向量方程

$$Ax = b.$$

5.4 线性方程组求解

- 线性方程组 $Ax = b$ 的直接解法

当系数矩阵 A 是一个满秩方阵时，方程 Ax =b称为恰定方程，方程有唯一解。

利用左除运算符\

格式： x=A\b

等同于x=A^(-1)*b

matlab自动用高斯消元法求解线性方程组。

需要注意的是，如果矩阵 A 是奇异的或接近奇异的，则 MATLAB 会给出警告信息。

5.4 线性方程组求解

- 【例26】求解下列线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = 13 \\ x_1 - 5x_2 + 7x_4 = -9 \\ 2x_2 + x_3 - x_4 = 6 \\ x_1 + 6x_2 - x_3 - 4x_4 = 0 \end{cases}$$

```
x =

  -66.5556
   25.6667
  -18.7778
   26.5556
```

5.4 线性方程组求解

【例26】求解下列线性方程组

```
%数值解法
A=[2,1,-5,1;1,-5,0,7;0,2,1,-1;1,6,-1,-4];
b=[13,-9,6,0]';
x1=A\b
x2=A^(-1)*b
%符号解法
syms x1 x2 x3 x4
s1=2*x1+x2-5*x3+x4-13;
s2=x1-5*x2+7*x4+9;
s3=2*x2+x3-x4-6;
s4=x1+6*x2-x3-4*x4;
[x1 x2 x3 x4] = solve(s1,s2,s3,s4) % 求解方程组
```

5.4 线性方程组求解

线性方程组 $Ax = b$ 的迭代解法

迭代法是一种不断用变量的旧值递推新值的过程。

迭代解法非常适合求解大型稀疏矩阵的方程组。

迭代解法主要包括Jacobi迭代、Gauss-Seidel迭代。

$$\begin{cases} 10x_1 - x_2 = 9 \\ -x_1 + 10x_2 - 2x_3 = 7 \\ -2x_2 + 10x_3 = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 10x_2 - 2x_3 - 7 \\ x_2 = 10x_1 - 9 \\ x_3 = \frac{1}{10}(6 + 2x_2) \end{cases}$$

可以构造方程的迭代公式为

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = 10x_2^{(k)} - 2x_3^{(k)} - 7 \\ x_2^{(k+1)} = 10x_1^{(k)} - 9 \\ x_3^{(k+1)} = \frac{1}{10}(6 + 2x_2^{(k)}) \end{cases}$$

将一组 x代入右端，可以得到另一组x。
如果两组x不相等，则继续迭代。
如果两组x相等，那么它就是方程组的解。

5.4 线性方程组求解

```
function [y,n]=jacobi(A,b,x0,ep)
if nargin==3
  ep=1.0e-6;
elseif nargin<3
  error
  return
end
D=diag(diag(A));
L=-tril(A,-1);
U=-triu(A,1);
B=D\(L+U);
f=D\b;
y=B*x0+f;
n=1;
while norm(y-x0)>=ep
   x0=y;
   y=B*x0+f;
   n=n+1;
end
```

```
function [y,n]=gauseidel(A,b,x0,ep)
if nargin==3
  ep=1.0e-6;
elseif nargin<3
  error
  return
end
D=diag(diag(A));
L=-tril(A,-1);
U=-triu(A,1);
G=(D-L)\U;
f=(D-L)\b;
y=G*x0+f;
n=1;
while norm(y-x0)>=ep
   x0=y;
   y=G*x0+f;
   n=n+1;
end
```

5.4 线性方程组求解

迭代法求解下列线性方程组。设迭代初值为 0，迭代精度为 10^{-6}。

$$\begin{cases} 10x_1 - x_2 = 9 \\ -x_1 + 10x_2 - 2x_3 = 7 \\ -2x_2 + 10x_3 = 6 \end{cases}$$

```
A=[10,-1,0;-1,10,-2;0,-2,10];
b=[9,7,6]';
x0=[0,0,0]';
[x,n]=jacobi(A,b,x0,1.0e-6)

x0=[0,0,0]';
[x1,n]=gauseidel(A,b,x0,1.0e-6)
```

5.4 非线性方程数值求解

（1）单变量非线性方程数值求解

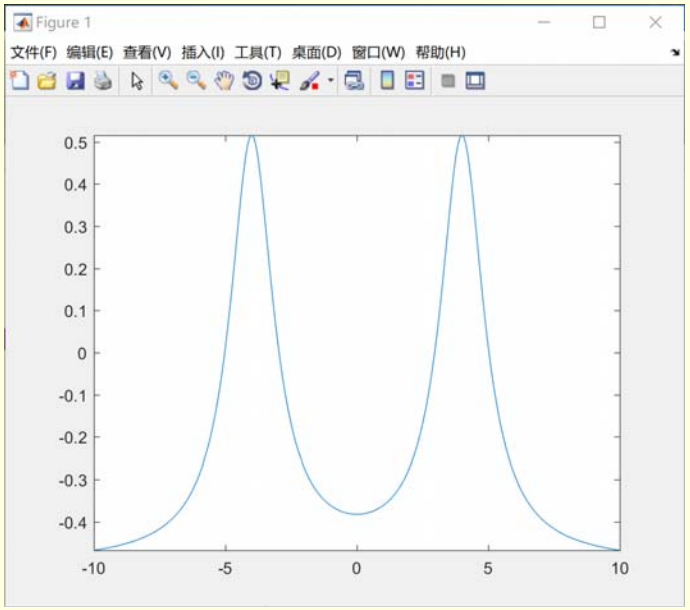
Matlab提供了fzero函数用于求非线性方程 $f(x)=0$ 的根

[x,y]=fzero('fun',a)	寻找fun在a附近的零点。 x为函数零点，y为零点的函数值。
[x,y]=fzero('fun',[a b])	寻找fun在区间[a b]上的零点 x为函数零点，y为零点的函数值。

5.4 非线性方程数值求解

【例22】用fzero求解单变量非线性方程

$$\frac{1}{(x+4)^2+1}+\frac{1}{(x-4)^2+1}=\frac{1}{2}$$




```
xzero =

  -5.0246


xzero =

  -2.9587


xzero =

   2.9587


xzero =

   5.0246
```

5.4 非线性方程数值求解

【例22】用fzero求解方程 $\frac{1}{(x+4)^2+1}+\frac{1}{(x-4)^2+1}=\frac{1}{2}$

- syms x
- f = 1/((x+4)^2+1)+1/((x-4)^2+1)-1/2;
- fplot(f,[-10,10])
-
- y='1./((x+4).^2+1)+1./((x-4).^2+1)-1/2';
- xzero=fzero(y,-5)
- xzero=fzero(y,-3)
- xzero=fzero(y,3)
- xzero=fzero(y,5)

5.4 非线性方程数值求解

（2）非线性方程组数值求解

$$\begin{cases} f_1(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0 \\ f_2(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0 \\ \cdots\cdots \\ f_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0 \end{cases}$$

Matlab提供fsolve函数求非线性方程及方程组的数值解，它采用最小二乘法来求解。

调用格式：[x,fval] = fsolve(fun,x0)

%fun应为函数句柄，从 x0 开始尝试求解方程 fun(x) = **0**。

5.4 非线性方程组求解

【例】求解

$$e^{-e^{-(x_1+x_2)}} = x_2\left(1 + x_1^2\right)$$
$$x_1\cos\left(x_2\right) + x_2\sin\left(x_1\right) = \frac{1}{2}.$$

将方程转换为 $F(x) = \mathbf{0}$ 形式。

$$e^{-e^{-(x_1+x_2)}} - x_2\left(1 + x_1^2\right) = 0$$
$$x_1\cos\left(x_2\right) + x_2\sin\left(x_1\right) - \frac{1}{2} = 0.$$

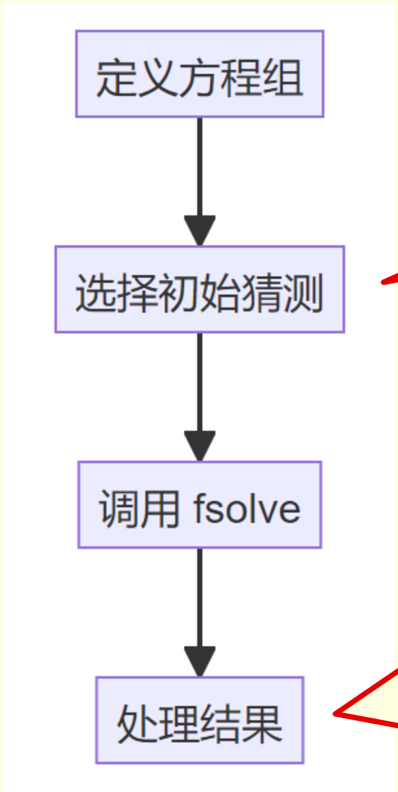
```
fun = @(x)[exp(-exp(-(x(1)+x(2)))) - x(2)*(1+x(1)^2);
x(1)*cos(x(2)) + x(2)*sin(x(1)) - 0.5];

x0 = [0,0];
x = fsolve(fun,x0)
```

```
x = 1×2
      0.3532     0.6061
```

5.4 非线性方程数值求解

fsolve函数求解非线性方程组的流程图



选择一个良好的初始猜测是关键。
如果初始猜测离实际解较远，
可能会导致求解失败或得到错误的解。

1. fsolve依赖于数值迭代方法，所以有时可能无法找到方程组的解，或者找到的解可能是局部最优解，因此要小心验证结果。可以尝试修改初始猜测值或者使用其他的求解算法来提高求解的准确性。
2. 某些方程组可能有多个解，fsolve只会找到一个解。如果需要查找所有解，可能需要采用不同的初始值。

5.5 常微分方程的数值求解

常微分方程：只含有一个自变量的微分方程 。

一阶常微分方程的初值问题的一般形式为：

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \qquad (5-1)$$

- 当难以求得微分方程的解析解时，可以求其数值解。
- 数值解法的基本思想是：先取一系列离散的点，通常取等步长h，使$x_n = x_0 + nh$ 。再求每个点对应的$y(x_n)$，用$y(x_n)$近似常微分方程初值问题的数值解。
- 主要有欧拉法、线性多步法、预估校正法、龙格—库塔法等。这里简单介绍龙格—库塔法及其MATLAB实现。

5.5 常微分方程的数值求解

- 在求解（5-1）中的未知数y时，y在x_0点的值$y(x_0)=y_0$是已知的，依据拉格朗日中值定理，应有：

$$\begin{cases} y(x_0+h)=y_1\approx y_0+hf(x_0,y_0) \\ y(x_0+2h)=y_2\approx y_1+hf(x_1,y_1) \end{cases} \qquad (5-2)$$

- 式中：$h>0$,称为步长。
- 将（5-2）推广，在任意点$x_i=x_0+ih$，得到：

$$y(x_0+ih)=y_i\approx y_{i-1}+hf(x_{i-1},y_{i-1}) \qquad i=0,1,\cdots,n$$

- 当x_0，y_0确定后，根据上式能计算出未知函数y在点 $x_i,i=0,1,\cdots,n$ 的一系列数值解 $y_i,i=0,1,\cdots,n$
- 当然，递推过程中有误差累计的问题，实际计算过程中使用改进型递推公式，如4 阶龙格—库塔公式。

5.5 常微分方程的数值求解

- 4 阶龙格—库塔公式：

$$y(x_0+ih)=y_i=y_{i-1}+\frac{1}{6}(k_1+2k_2+2k_3+k_4)$$

式中：$k_1=f(x_{i-1},y_{i-1})$

$$k_2=f(x_{i-1}+\frac{1}{2}h,y_{i-1}+\frac{1}{2}hk_1)$$

$$k_3=f(x_{i-1}+\frac{1}{2}h,y_{i-1}+\frac{1}{2}hk_2)$$

$$k_4=f(x_{i-1}+h,y_{i-1}+hk_3)$$

5.5 常微分方程的数值求解

龙格—库塔法的MATLAB实现

Matlab中求微分方程数值解的函数有七个：ode45，ode23，ode113，ode15s，ode23s，ode23t，ode23tb 。

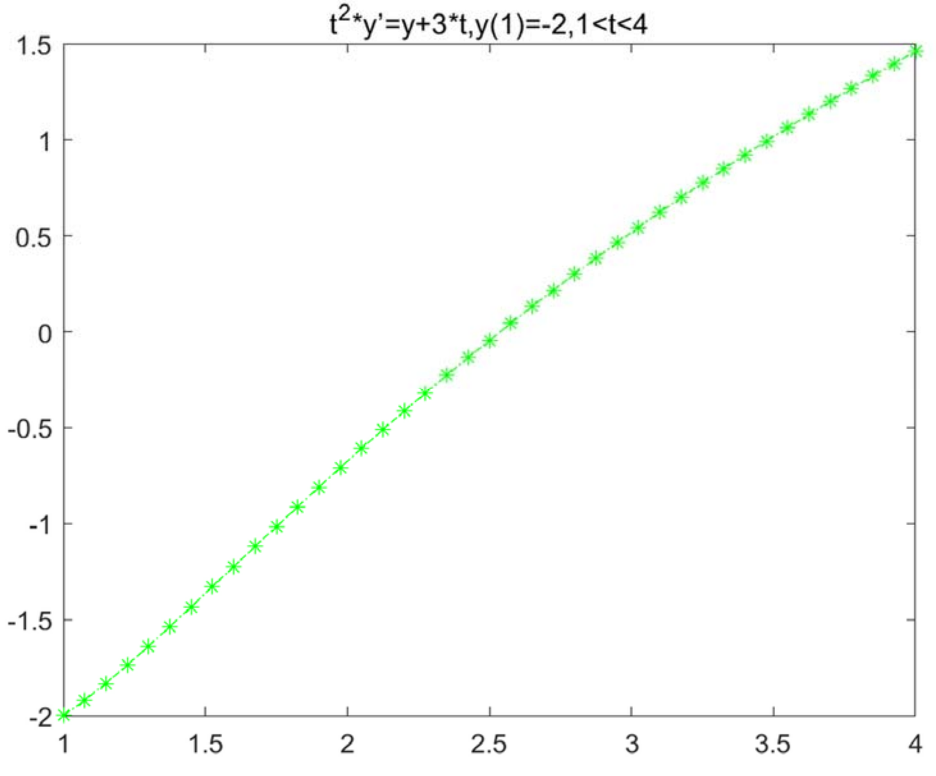
[X，Y]=ode45(f，[x_0,x_n]，y_0)

1. f是一个M函数文件，代表待求解方程。
2. [x_0，x_n]代表自变量的求解区间。
3. y_0=y(x_0)，由方程的初值给定。
4. X对应自变量x在求解区间[x_0，x_n]的一组采样点，其采样密度是自适应的，无需指定；
5. Y是与X对应的一组解。

5.5 常微分方程的数值求解

【例27】求一阶常微分方程 $\begin{cases} t^2 y' = y + 3t \\ y(1) = -2 \end{cases}$ **在[1,4]区间内的数值解，并与符号解进行比较。**

```
df=@(t,y) (y+3*t)/t^2;
[T,Y]=ode45(df,[1,4],-2);
plot(T,Y,'-.*g')
title('t^2*y'=y+3*t,y(1)=-2,1<t<4')
```



- 尝试用符号解法dsolve函数解决以上问题，并绘图进行比较。

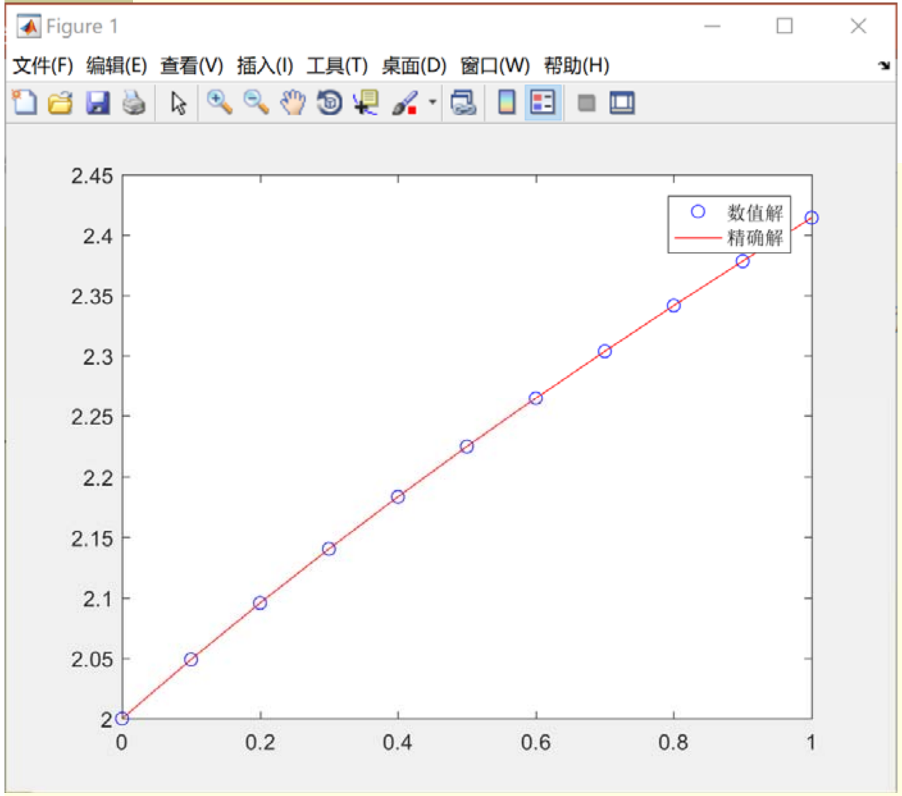
5.5 常微分方程的数值求解

- 【例28】

试求如下函数微分方程的数值解，并与精确解相比较(精确解为 $y(t)=\sqrt{t+1}+1$)

$$y'=\frac{y^2-t-2}{4(t+1)},0\le t\le 1$$

$y(0)=2$



5.5 常微分方程的数值求解

试求如下函数微分方程的数值解，并与精确解相比较(精确解为 $y(t)=\sqrt{t+1}+1$)

$$y'=\frac{y^2-t-2}{4(t+1)},0\le t\le 1$$

y(0)=2

- dy=@(t,y)(y^2-t-2)/4/(t+1);
- [t,y]=ode23(dy,[0,1],2); %求数值解
- y1=sqrt(t+1)+1; %求精确解
- plot(t,y,'b.',t,y1,'r-') %通过图形来比较
- legend('数值解','精确解');

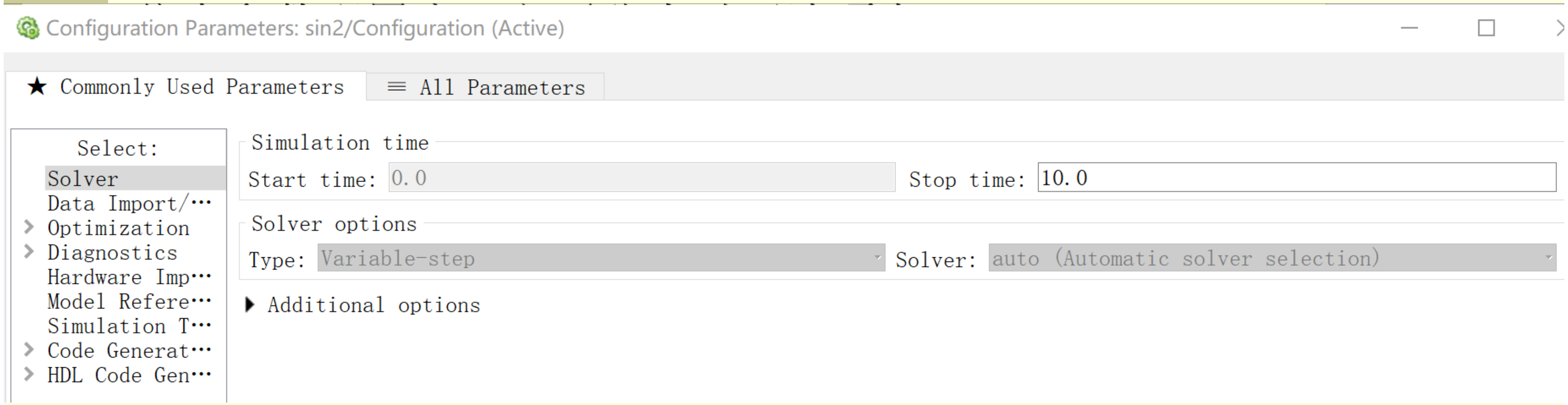
第7章 Simulink仿真

本章要点

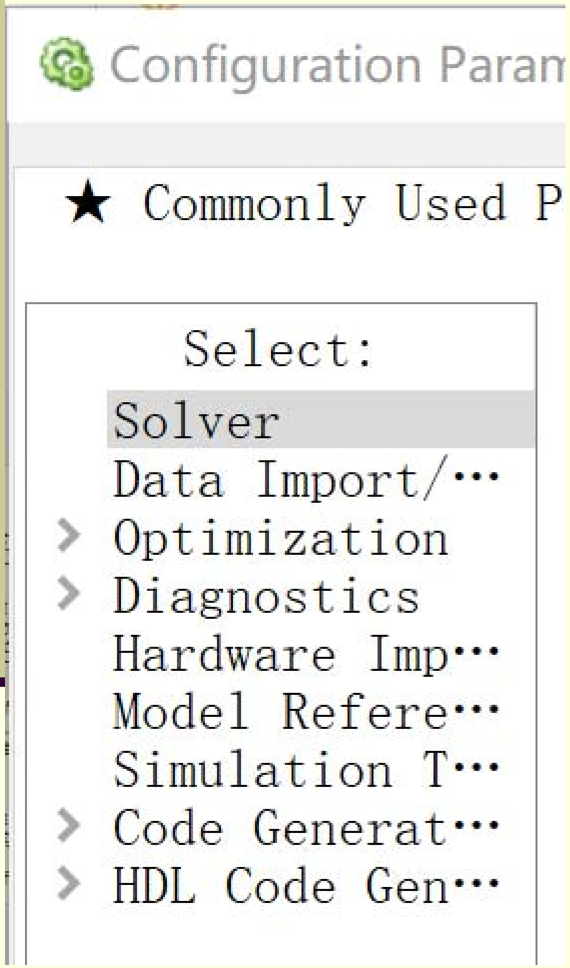
学时：5

7.4设置仿真参数

选择模型窗口，菜单Simulation→Modle Configuration Parameters…选项，将出现仿真参数配置窗口。



7.4设置仿真参数



仿真参数配置窗口主要分为以下选项卡：

Solver（求解器）

Data Import/Export（数据输入/输出）

Optimization（优化）

Diagnostics（诊断）

Hardware Implementation（硬件工具）

Model Referencing（模型引用）

Real-Time Workshop（实时工作空间）

7.4设置仿真参数

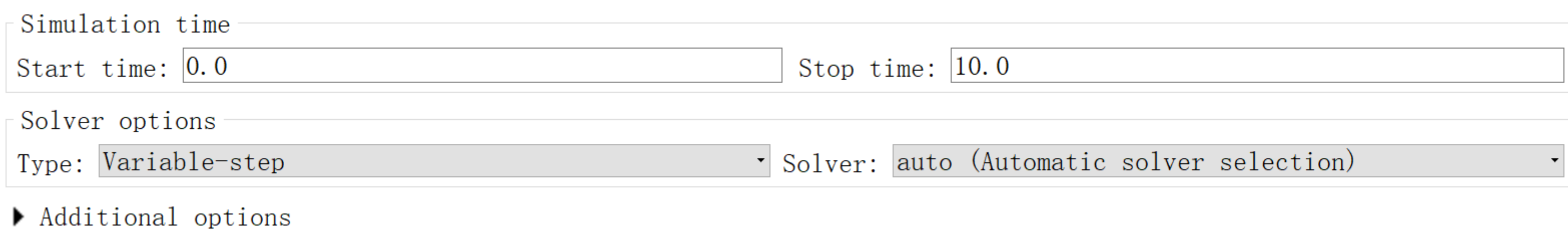
Solver（求解器）选项卡

（1）Simulink time

设置仿真起始时间和停止时间。

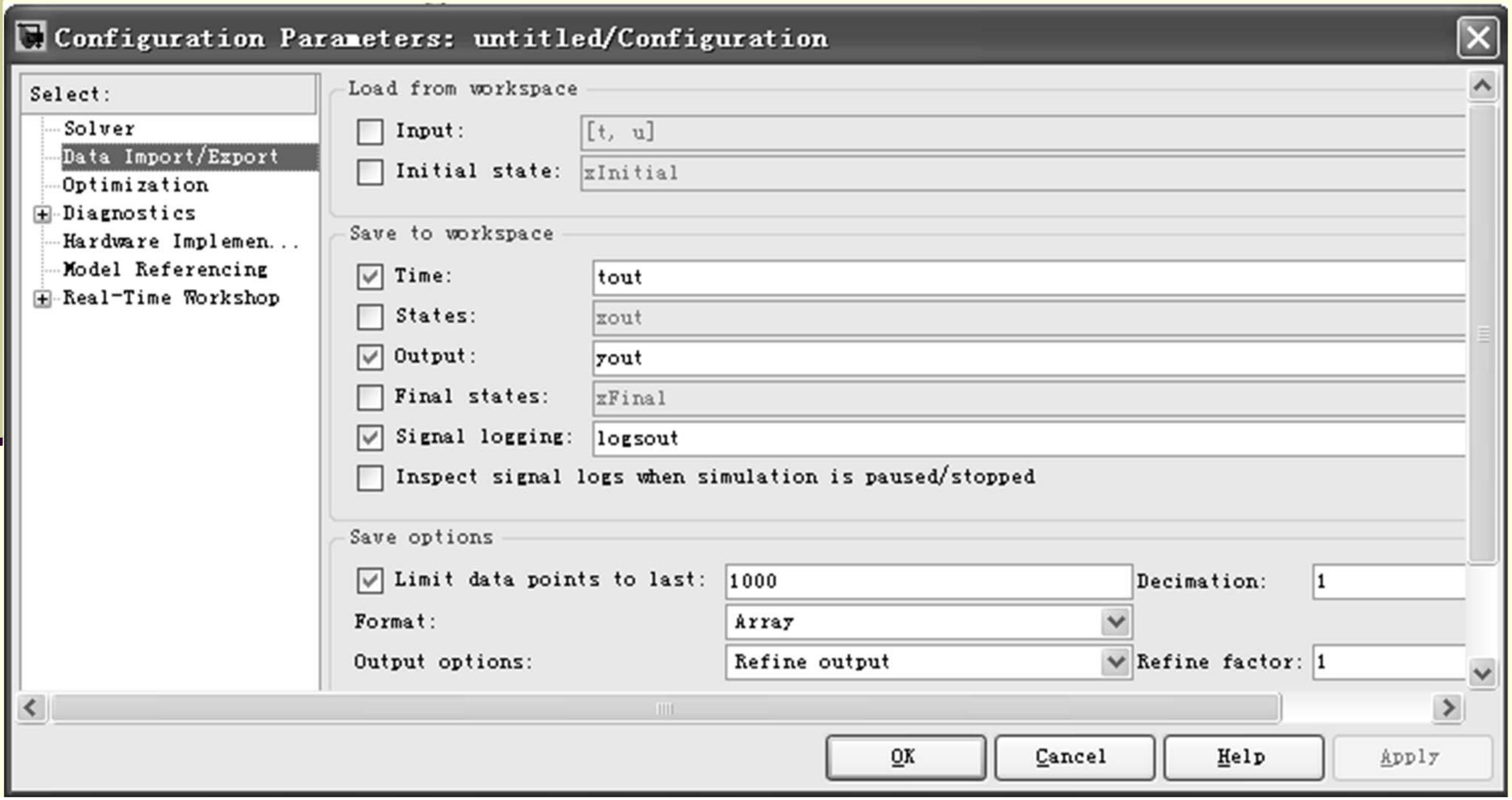
（2）Solver options

仿真解题器的操作。根据类型（Type）的变化分为：Variable-step（变步长算法）和Fixed-step（固定步长算法）。



7.4设置仿真参数

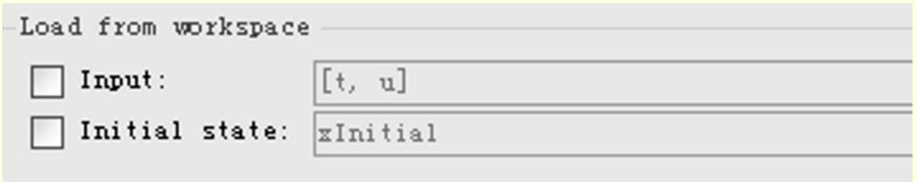
Data Import/Export选项卡主要用来设置Simulink与MATLAB工作空间交换数据的有关选项。



7.4设置仿真参数

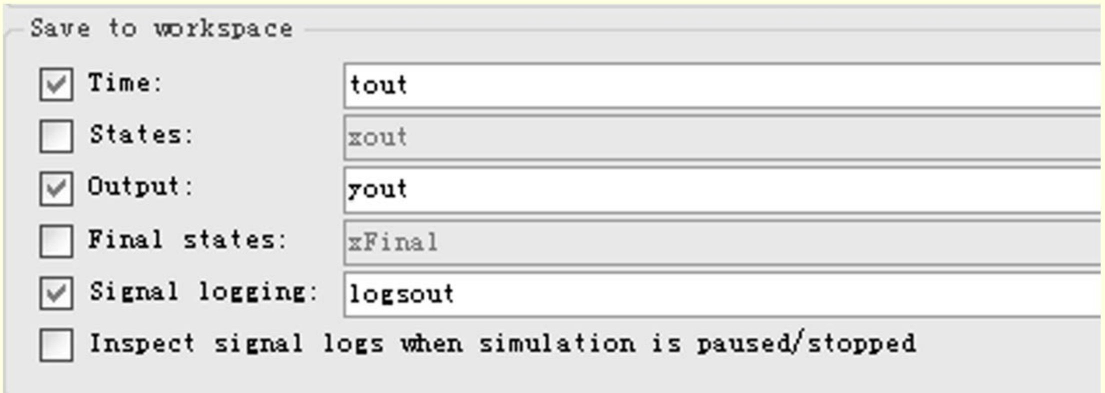
（1）Load from workspace 从工作空间中载入数据。

- Input：选中Input 核选框，在后面的编辑框内输入数据的变量名。
- Initial state：表示模块的初始状态。对模块进行初始化时，先选中Initial state核选框。



（2）Save to workspace 将输出保存到工作空间。

可以选择的输出选项有：Time（时间），States（状态），Output（输出端口）和Final state（最终状态）。



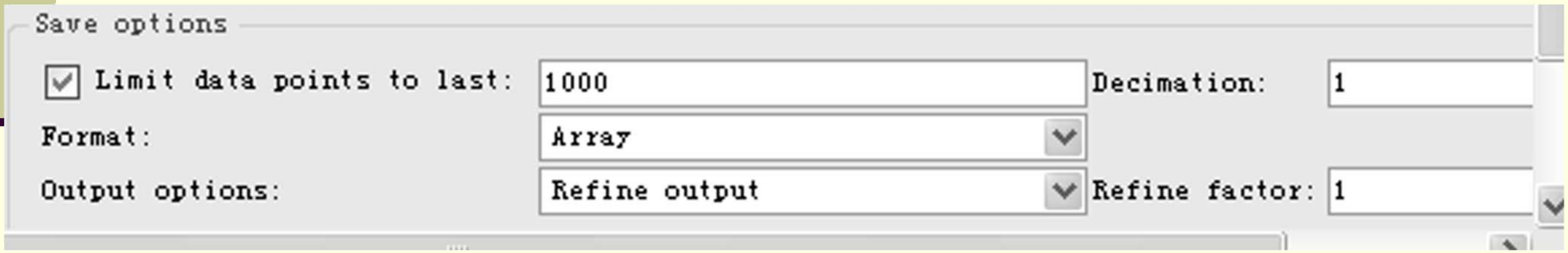
7.4设置仿真参数

（3）Save options保存操作

- Limit data points to last：用来限定保存到工作空间中的数据量。
- Decimation：从几个数据中抽取一个数据输出。
- Format：可以选择数组、结构和包含时间的结构三种形式。
- Output options：输出操作设置，变步长算法独有。有三种输出方式：
  Refine output（细化输出）

  Produce additional output（产生附加输出）

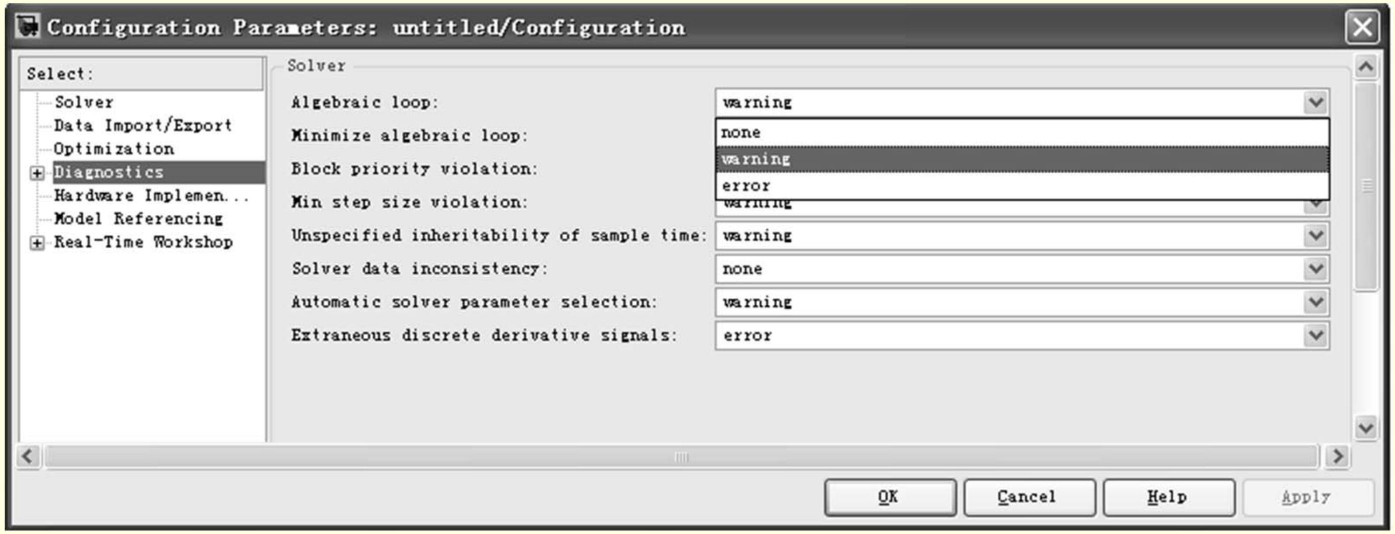
  Produce specified output only（仅在指定的时刻产生输出）。



7.4设置仿真参数

Diagnostics（诊断卡）选项

指定系统对一些事件或仿真过程中可能遇到的情况做出什么反映。



反应的类型有以下几种：

1）None：不做任何反应，不影响程序运行。

2）Warning：显示警告信息，不影响程序的运行。

3）Error：显示错误信息，中止运行的程序。

7.5 Simulink建模过程

基本步骤：

1. 建立系统仿真模型，包括添加模块、设置模块参数、进行模块连接等操作；
2. 设置仿真参数；
3. 启动仿真并分析仿真结果；
4. 分析模型，优化模型架构

一般仿真模型都采用数值积分来仿真的，相邻两个时间点的长度为步长，步长的大小取决于求解器的类型。

7.5 例题讲解

例题1： 建立仿真模型，在同一示波器上输出以下波形

x1(t)=sin(t)

- x2(t)=sin(10t)
- x3(t)=sin(t)*sin(10t)

以上: 0<t<10

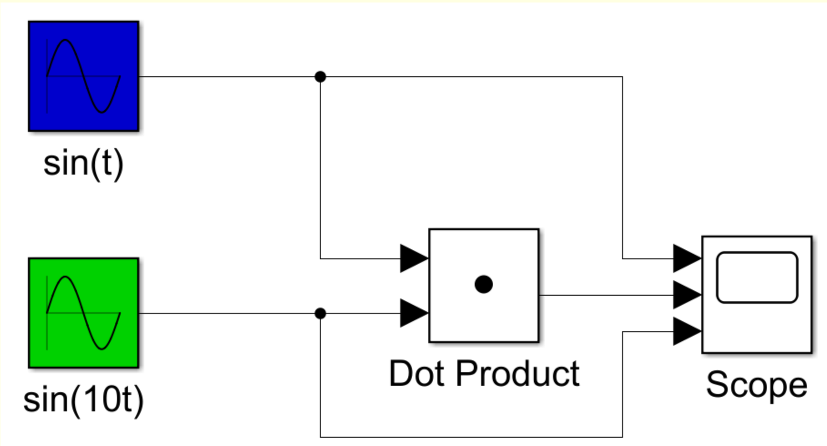
7.5 例题讲解

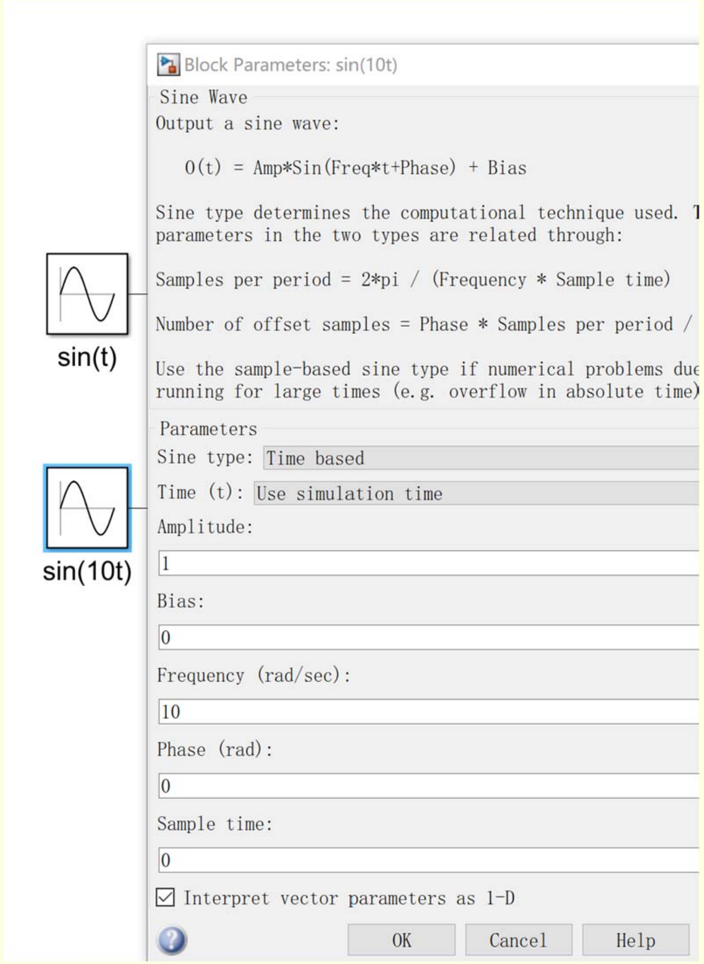
例题1：建立仿真模型，在同一示波器上输出以下波形

$x1(t)=\sin(t)$

- $x2(t)=\sin(10t)$
- $x3(t)=\sin(t)*\sin(10t)$

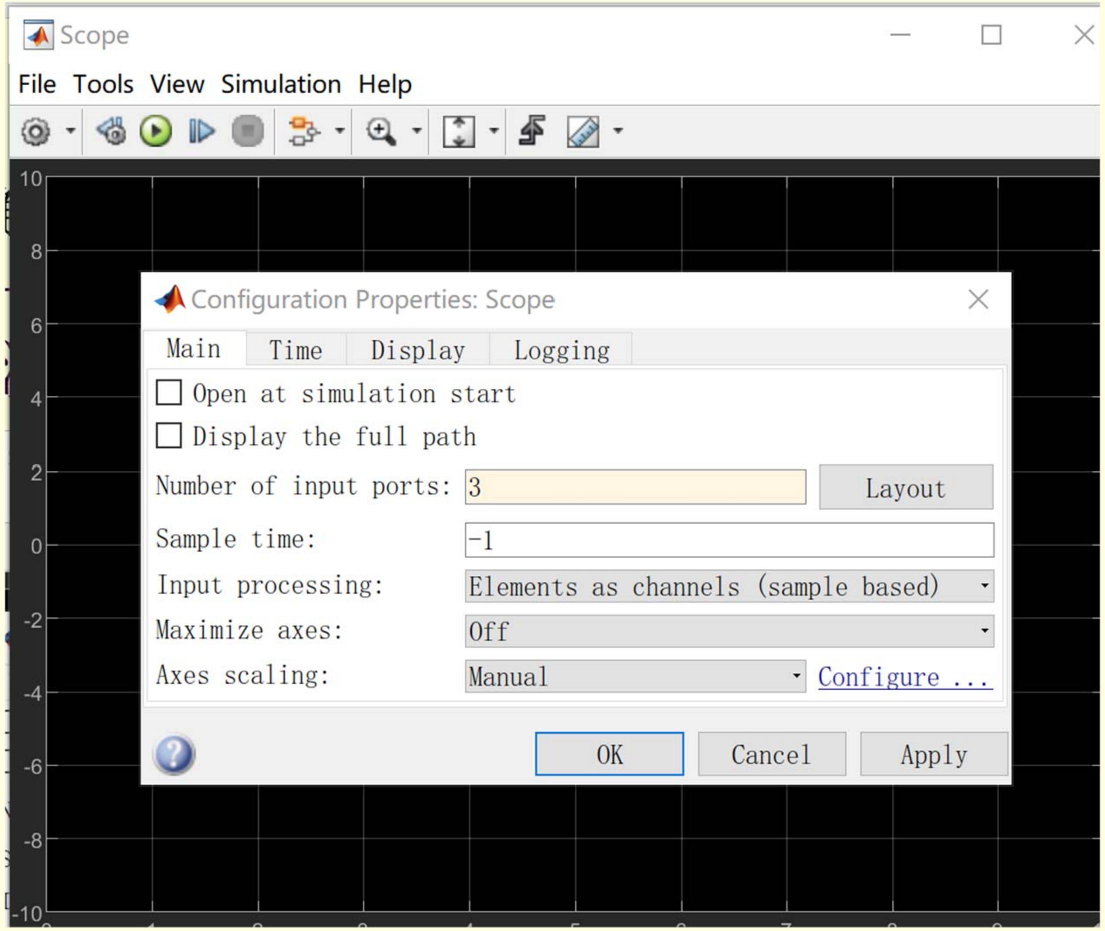
以上: 0<t<10





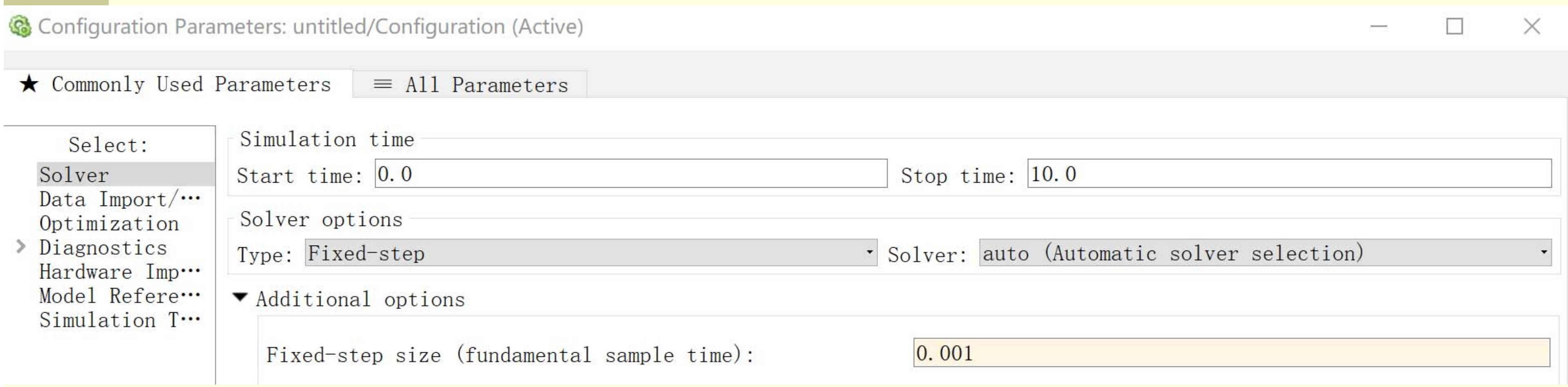
7.5 例题讲解

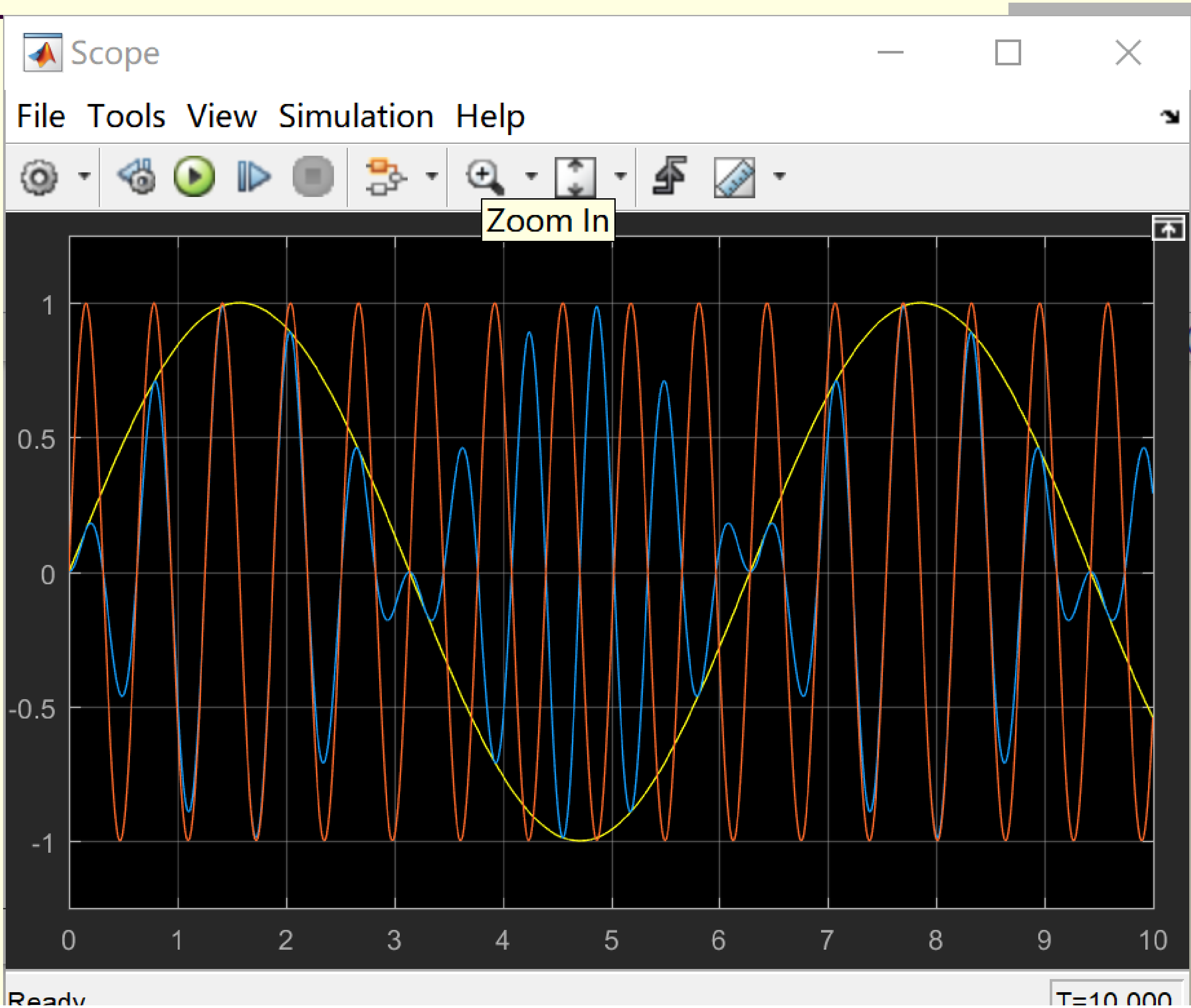
例题1：示波器设置：双击示波器,设置输入端口数



例题1：求解器设置：仿真时间为10秒，计算使用Fixed—step(固定步长)，固定步长0.001秒。

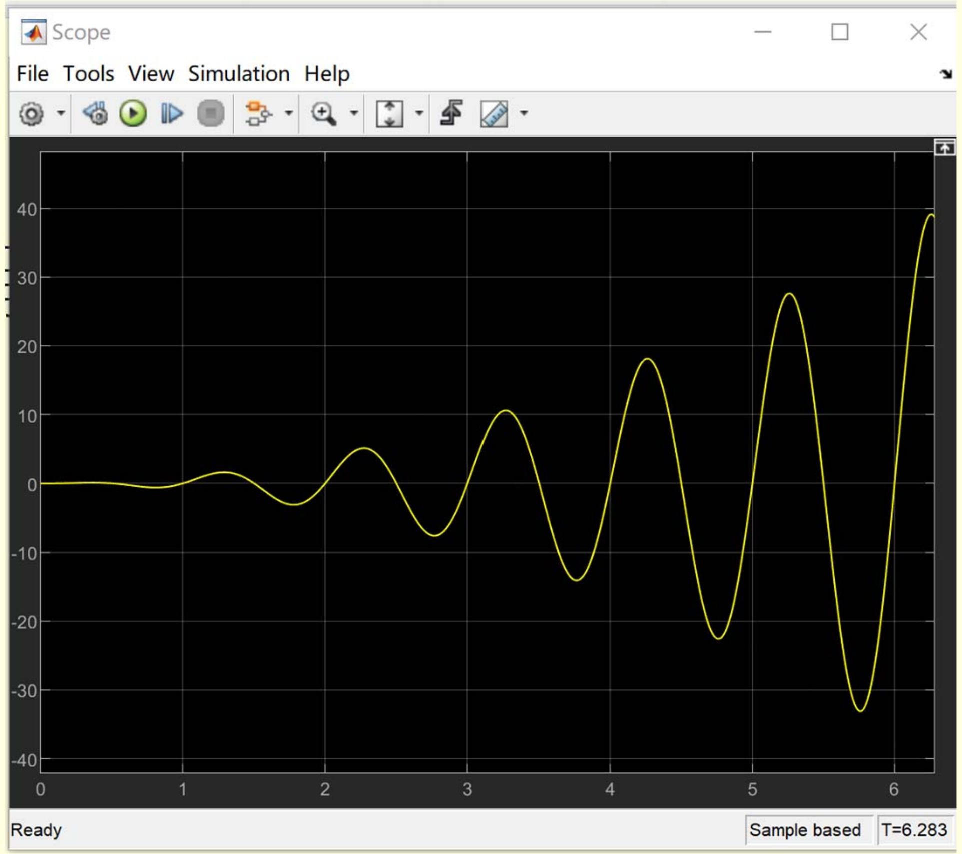
（菜单Simulation→Modle Configuration Parameters选项，将出现仿真参数配置窗口。）

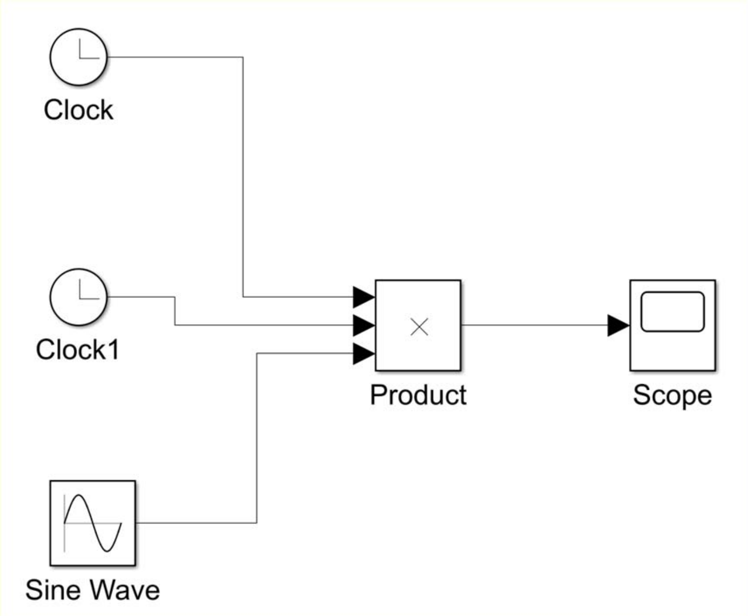


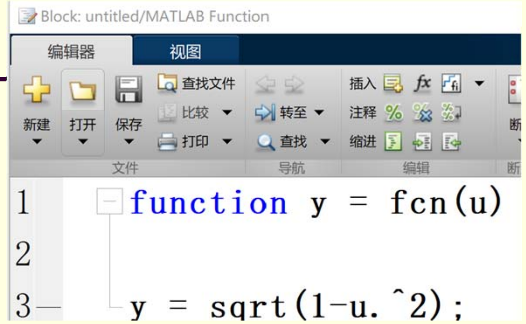

Scope
File Tools View Simulation Help
Zoom In
1
0.5
0
-0.5
-1
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
Ready
T=10.000

【练】利用Simulink仿真曲线

$$y = x^2 \sin(2\pi x)\left(0 \le x \le 2\pi\right)$$

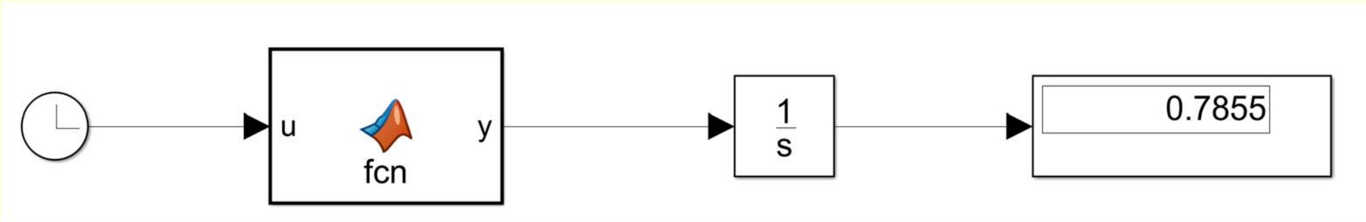


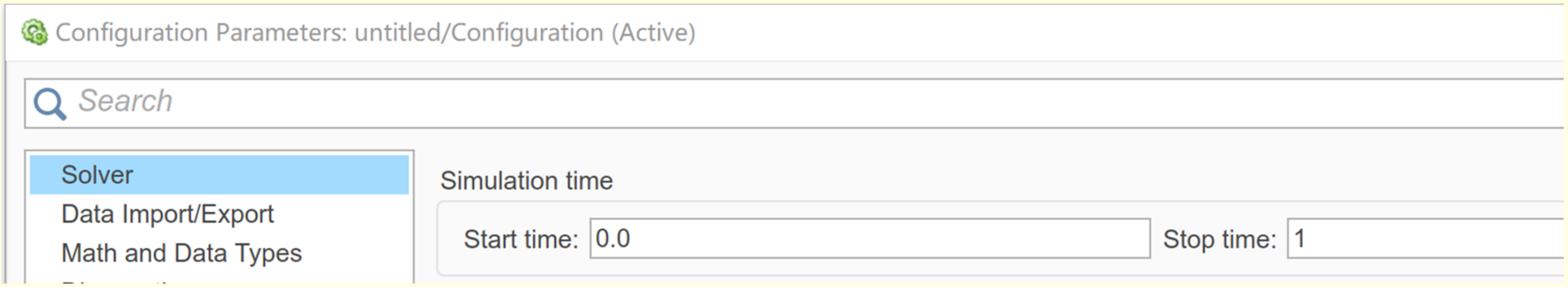




例题2　利用Simulink仿真求

$$I=\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$$





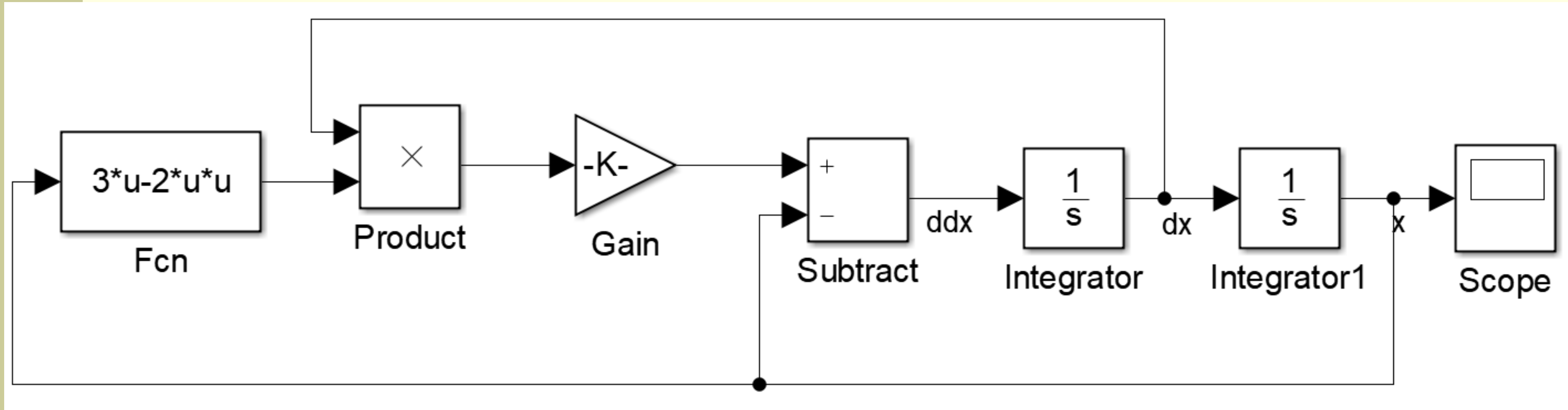
例题3，求解非线性微分方程

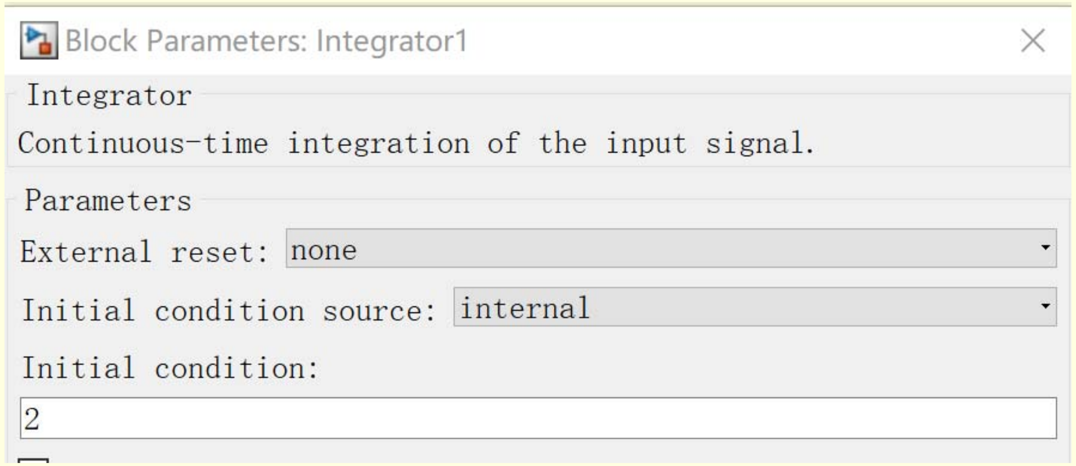
$$\begin{cases}(3x-2x^2)\dot{x}-4x=4\ddot{x}\\ \dot{x}(0)=0, x(0)=2\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=\iint\left[\frac{1}{4}(3x-2x^2)\dot{x}-x\right]dx^2\\ \dot{x}(0)=0, x(0)=2\end{cases}$$

例题3，

$$\begin{cases} x = \iint \left[\dfrac{1}{4}(3x - 2x^2)\dot{x} - x \right] dx^2 \\ \dot{x}(0) = 0, x(0) = 2 \end{cases}$$





例题2，

$$\begin{cases} x = \iint \left[\frac{1}{4}(3x - 2x^2)\dot{x} - x \right] dx^2 \\ \dot{x}(0) = 0, x(0) = 2 \end{cases}$$