浅谈不定积分的双元法

——不定的对称

虚调子

Die Nibelungen
Castle College

2023 年 9 月 8 日

总目录

章节目录

三角函数换元法

例：使用三角 (函数) 换元求解 $\sqrt{1-x^2}$ 的不定积分：

$$
\begin{aligned}
\int \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x &= \int \cos t\,\mathrm{d}\left(\sin t\right), x=\sin t, t\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\\
&= \int \cos^2 t\,\mathrm{d}t\\
&= \frac{1}{2}\int\left(\cos\left(2t\right)+1\right)\mathrm{d}t\\
&= \frac{1}{4}\sin 2t+\frac{1}{2}t=\frac{1}{2}\sin t\cos t+\frac{1}{2}t\\
&= \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{2}\arcsin x+C
\end{aligned}
$$

思考

不定积分的三条基本性质

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x+\int g(x)\,\mathrm{d}x=\int (f(x)+g(x))\,\mathrm{d}x \tag{1}$$

$$\int f(x)\,\mathrm{d}(g(x))+\int g(x)\,\mathrm{d}(f(x))=\int \mathrm{d}(f(x)\,g(x)) \tag{2}$$

$$\int f'(g(x))\,\mathrm{d}(g(x))=\int \mathrm{d}(f(g(x))) \tag{3}$$

分别对应了加法、乘法和复合运算与微分运算的结合。是求解不定积分的基础。

请思考：

- 我们求解不定积分是否一定需要定义三角函数？哪怕是不含三角函数的积分。
- 倍角公式是否是必要的，在不定积分中起到什么角色？

三角换元法的性质依赖

发现过程依赖于以下性质：

1. $1 - \sin^2 x = \cos^2 x$(正余弦的互相转化)
2. $(\sin x)' = \cos x$(正余弦互导性质)
3. $\cos(2x) + 1 = 2\cos^2 x$(三角函数的倍角公式)

值得注意的是，满足这三条性质的函数并不一定是 $\sin x$。这代表可以进行其他的换元，比如 $t = \cos x$.

经过大量的实践，结果是上面的性质只有一条是必要的，其他都只是这一条的推论。然后基于唯一的这条性质——双元法应运而生。

"*Math rewards you when you retain symmetry.*" ——**Frank Wilczek**

章节目录

引入

公式表里面有这样三个积分 (省略末尾的 +C，后文亦如此)：

$$\int \sqrt{1+x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x\sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2}\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) \tag{4}$$

$$\int \sqrt{x^2-1}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-1} - \frac{1}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) \tag{5}$$

$$\int \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\arcsin x \tag{6}$$

敏锐地观察，不难发现不定积分结果的前半部分很有规律。

定义

双元的定义

满足

$$x^2 \pm y^2 = C \tag{7}$$

的二元组 $\{x, y\}$ 为一对 (二次) 双元。当前面的 $\pm$ 取加号时，方便描述我们称之为 **“实圆 (双元)”**；取减号时，我们称之为 **“虚圆 (双元)”**。

公式表里的那三个积分即可统一成一个更本质的积分：

$$\int y\mathrm{d}x = \frac{1}{2}xy + ?$$

顺便不难发现，三角换元实质是实圆双元中 $C = 1$ 的其中一种情形。

双元第一公式

经过推导，我们得到

$$\int y \mathrm{d}x = \frac{1}{2}xy + \frac{1}{2}\left(y^2 \pm x^2\right)\int \frac{\mathrm{d}x}{y} \tag{8}$$

后面的积分可以写成：

双元第一公式

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{y} = \begin{cases} \ln\left(x+y\right) (\mathrm{Im}) \\ \arctan\dfrac{x}{y} (\mathrm{Re}) \end{cases} \tag{9}$$

其中 Re 表示实圆情形，Im 表示虚圆情形。

例：

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2023-x^2}} = \arctan\frac{x}{\sqrt{2023-x^2}} \tag{10}$$

双元第一公式的证明

我们从定义出发，

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{Im})\, x^2 - y^2 = C &\Leftrightarrow x\mathrm{d}x = y\mathrm{d}y \\
&\Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}x}{y} = \frac{\mathrm{d}y}{x} = \frac{\mathrm{d}x + \mathrm{d}y}{y + x}\ (\text{等分性}) \\
&\Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}x}{y} = \mathrm{d}\left(\ln\left(x + y\right)\right)
\end{aligned}
$$

同理

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{Re})\, x^2 + y^2 = C &\Leftrightarrow x\mathrm{d}x = -y\mathrm{d}y \\
&\Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}x}{y} = -\frac{\mathrm{d}y}{x} = \frac{y\mathrm{d}x}{y^2} = -\frac{x\mathrm{d}y}{x^2} = \frac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{y^2 + x^2} \\
&\Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}x}{y} = \mathrm{d}\left(\arctan\frac{x}{y}\right)
\end{aligned}
$$

双元第三公式

我们利用第一公式，

$$\frac{\mathrm{d}x}{y^3}=\frac{1}{y^2}\frac{\mathrm{d}x}{y}=\frac{1}{y^2\pm x^2}\frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{y^2}=\frac{1}{y^2\pm x^2}\mathrm{d}\frac{x}{y} \tag{11}$$

于是可以得到

双元第三公式

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{y^3}=\frac{1}{y^2\pm x^2}\frac{x}{y} \tag{12}$$

对于实圆取加号，对于虚圆取减号，总之使得 $y^2\pm x^2$ 是常数即可。

一些例子

- 求解 $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x.$

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x &= \int \frac{x^2}{y}\mathrm{d}x = \int x\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{2}xy - \frac{1}{2}\ln(x+y) = \frac{1}{2}x\sqrt{1+x^2} - \frac{1}{2}\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\end{aligned}$$

- 求解 $\displaystyle\int \sqrt{\frac{x}{2+x^3}}\mathrm{d}x.$

$$\begin{aligned}\int \sqrt{\frac{x}{2+x^3}}\mathrm{d}x &= \frac{2}{3}\int \frac{\mathrm{d}p}{q}\ (p^2=x^3, q^2=2+x^3) \\ &= \frac{2}{3}\ln(p+q) = \frac{1}{3}\ln\left(1+x^3+x\sqrt{x(2+x^3)}\right)\end{aligned}$$

双元法的求解流程

上面的求解过程正是双元法的基本流程。

- 首先选取合适的双元进行直接代换，使得单元积分转化为 (有理的) 双元积分。
- 再通过双元的微分关系进行化为最简。
- 最简的双元积分被称为**构型**。这些往往是大量重复计算的部分，熟练掌握其结果是有用的。例如上面的第一、第三公式。
- 计算出结果再回代即可。注意保持定义域一致。

最关键的地方即是，**如何找到合适的双元？**这个问题是没有答案的，因为求解不定积分没有通法，或者说“求解不定积分”这一过程本身就相当于“找到合适的双元”。

当然，我们的目标如果不放在所有不定积分，而放在课内、考研或竞赛难度的不定积分，那么下节将列举的常用双元是绰绰有余的。

初等的构型

双元可以进行参数有理化：

双元的参数有理化

$$p^2 - q^2 = c^2 \to \left(\frac{ct}{2} + \frac{c}{2t}\right)^2 - \left(\frac{ct}{2} - \frac{c}{2t}\right)^2 = c^2 \tag{13}$$

$$p^2 + q^2 = c^2 \to \left(\frac{c - ct^2}{1 + t^2}\right)^2 + \left(\frac{2ct}{1 + t^2}\right)^2 = c^2 \tag{14}$$

这代表有理构型均可以转化为一个有理积分，也就是说必有初等结果。

在前面我们介绍了两种构型，$\int \frac{\mathrm{d}x}{y}, \int \frac{\mathrm{d}x}{y^3}$，下面将说明其他所有构型都可以由这两者表达。

诱导新的双元

这部分既可以理解为倒代换的本质，也可以理解为双元的某种镜像。

双元的基本变换

$$p^2 - q^2 = c^2 \to \left(\frac{p}{q}\right)^2 + \left(\frac{c}{q}\right)^2 = 1 \tag{15}$$

$$p^2 + q^2 = c^2 \to \left(\frac{p}{q}\right)^2 + 1 = \left(\frac{c}{q}\right)^2 \tag{16}$$

这样我们可以重构双元，来获得更简的构型。例：

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{y^2} = \int y\frac{\mathrm{d}x}{y^3} = \frac{1}{\sqrt{y^2 \pm x^2}} \int \frac{\mathrm{d}\left(\frac{x}{y}\right)}{\frac{\sqrt{y^2 \pm x^2}}{y}} = \frac{1}{\sqrt{y^2 \pm x^2}} \int \frac{\mathrm{d}m}{n} \tag{17}$$

然后利用第一公式即可。

构型的降次

对于高次的构型，

$$\begin{aligned}
\int x^m y^n \frac{\mathrm{d}x}{y} &= \frac{1}{m+1}\int y^{n-1}\mathrm{d}\left(x^{m+1}\right) \\
&= \frac{x^{m+1}y^{n-1}}{m+1} - \frac{n-1}{m+1}\int x^{m+1}y^{n-2}\mathrm{d}y \\
&= \frac{x^{m+1}y^{n-1}}{m+1} \pm \frac{n-1}{m+1}\int x^{m+2}y^{n-3}\mathrm{d}x \\
&= \frac{x^{m+1}y^{n-1}}{m+1} + \frac{n-1}{m+1}\int \left(y^2 \pm x^2 - y^2\right) x^m y^{n-3}\mathrm{d}x \\
&= \frac{x^{m+1}y^{n-1}}{m+1} + \frac{n-1}{m+1}\left(y^2 \pm x^2\right)\int x^m y^{n-2}\frac{\mathrm{d}x}{y} - \frac{n-1}{m+1}\int x^m y^n \frac{\mathrm{d}x}{y} \\
&= \frac{x^{m+1}y^{n-1}}{m+n} + \frac{n-1}{m+n}\left(y^2 \pm x^2\right)\int x^m y^{n-2}\frac{\mathrm{d}x}{y}
\end{aligned}$$

这样我们总可以利用这个公式反复降次，使得 $n=1$ 或者 $n=0$. 当 $n<0$ 时，升次同理。

当 $m+n=0$ 时，可以直接利用第三公式换元成简单的有理积分。

$$\int \frac{x^n}{y^n}\frac{\mathrm{d}x}{y} = \int \left(\frac{x}{y}\right)^n \frac{y^2}{y^2 \pm x^2}\mathrm{d}\left(\frac{x}{y}\right) = \int \frac{b^n}{1 \pm b^2}\mathrm{d}b \tag{18}$$

当 $n=1$ 时是平凡的. 当 $n=0$ 时，我们固定 n 不变，对 m 再进行降次。

双元点火递推公式

$$\int x^m \mathrm{d}y = \frac{1}{m+1}x^m y + \frac{m}{m+1}\left(x^2 \pm y^2\right)\int x^{m-2}\mathrm{d}y \tag{19}$$

当 $m=1$ 时就是之前从公式表总结的公式 (8) 了。类似地，这样我们最后总可以降次到第一、第三公式，问题得以解决。

值得一提的是，这个思路并不是最快的，实际的最优方案目前仍未知，例如可以利用倍角双元简化构型等。

分式构型

可以简单分为齐次与非齐次，我们设双元 $p^2 \pm q^2 = C$，有：

一次齐次构型

$$\int \frac{\mathrm{d}q}{Ap+Bq} = \frac{1}{A^2 \pm B^2}\left(A\int \frac{\mathrm{d}q}{p} \pm B\ln\left(Ap+Bq\right)\right) \tag{20}$$

二次齐次构型

$$\int \frac{p\mathrm{d}q}{Ap^2 - Bq^2} = \frac{1}{A \pm B}\left(\int \frac{\mathrm{d}q}{p} \pm \int \frac{\mathrm{d}\left(q/p\right)}{A/B - \left(q/p\right)^2}\right) \tag{21}$$

简要的证明思路如下：

$$\int \frac{Ap\mathrm{d}q \pm Bq\mathrm{d}p}{Ap^2 - Bq^2} = \int \frac{\mathrm{d}q}{p}, \int \frac{p\mathrm{d}q - q\mathrm{d}p}{Ap^2 - Bq^2} = \int \frac{\mathrm{d}\left(q/p\right)}{A - B\left(q/p\right)^2} \tag{22}$$

再线性组合即可。充分利用了等分性简化计算。

非齐次构型

一次非齐次构型

$$\int \frac{\mathrm{d}q}{p(\lambda+p)} = f\left(\lambda\frac{q}{p}\right) - f(q)\,, f(q) = \int \frac{\mathrm{d}q}{\lambda^2 - p^2} \tag{23}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}q}{\lambda+p} = \int \frac{\mathrm{d}q}{p} - \lambda\int \frac{\mathrm{d}q}{p(\lambda+p)} \tag{24}$$

例：求解 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{5+\cos x}$.

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{5+\cos x} = \int \frac{\mathrm{d}q}{p(5+p)}, f(q) = \int \frac{\mathrm{d}q}{25-(1-q^2)} = \frac{1}{2\sqrt{6}}\arctan\frac{q}{2\sqrt{6}} \tag{25}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{5+\cos x} = \frac{1}{2\sqrt{6}}\left(\arctan\frac{5\tan x}{2\sqrt{6}} - \arctan\frac{\sin x}{2\sqrt{6}}\right) \tag{26}$$

可以敏锐的注意到，结果的两个反正切可以加和成一个，这暗示了我们可以重构双元，获得更简单的构型，留作思考。

更多的构型

类似有理积分，我们往往可以考虑将有理的构型分解成简单的构型然后用之前的公式计算。也可以重构双元获得构型的简化。限于篇幅，以及课内不会出现更复杂的构型，这里不再过多提到。下面是一个二次齐次分式构型的例子：

$$
\begin{aligned}
&\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x+\cos x+\tan x+\cot x+\sec x+\csc x} \\
=&\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{\mathrm{d}q-\sqrt{2}\mathrm{d}p}{\sqrt{2}p^2-pq+\sqrt{2}q^2}\left(p=\frac{\sqrt{2}}{\sin x-\cos x},\ q=\frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}\right) \\
=&-\sqrt{\frac{2}{7}}\sqrt[4]{\frac{2}{7}}\left(\frac{1}{\sqrt{4-\sqrt{14}}}\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{4+\sqrt{14}}}\frac{1}{2}\right)\operatorname{arth}\sqrt[4]{\frac{2}{7}}\left(\frac{p}{\sqrt{4-\sqrt{14}}}-\frac{q}{\sqrt{4+\sqrt{14}}}\right) \\
&+\sqrt{\frac{2}{7}}\sqrt[4]{\frac{2}{7}}\left(\frac{1}{\sqrt{4-\sqrt{14}}}\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{4+\sqrt{14}}}\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\arctan\sqrt[4]{\frac{2}{7}}\left(\frac{-p}{\sqrt{4+\sqrt{14}}}+\frac{q}{\sqrt{4-\sqrt{14}}}\right)
\end{aligned}
$$

可以看到是课内较少涉及的不定积分。

章节目录

简单的双元

我们最常用的双元实际上，就是前面所提到的 $x, y = \sqrt{a^2 \pm x^2}$，我们还可以灵活地选取

$$p = x + \frac{a}{2}, q = \sqrt{x^2 + ax + b} \tag{27}$$

或者

$$p = \sqrt{x+a}, q = \sqrt{x+b} \tag{28}$$

例：求解 $\displaystyle\int \sqrt{\frac{x-a}{x-b}}\mathrm{d}x.$

$$\begin{aligned}\int \sqrt{\frac{x-a}{x-b}}\mathrm{d}x &= \int \frac{p}{q}\mathrm{d}\left(q^2\right) \left(p^2 = x-a, q^2 = x-b\right) \\ &= 2\int p\mathrm{d}q = pq + (b-a)\ln(p+q) \\ &= \sqrt{(x-a)(x-b)} + \frac{b-a}{2}\ln\left(2x-a-b+2\sqrt{(x-a)(x-b)}\right)\end{aligned}$$

三角系列的双元

三角三元

$$\{p, q, r\} \to \left\{\cos x - \sin x, \cos x + \sin x, \sqrt{\sin 2x}\right\} \tag{29}$$

可以发现它们两两有双元关系。

例：求解 $\displaystyle\int \frac{\sqrt{\sin 2x}}{\sin x + \cos x}\mathrm{d}x.$

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{\sin 2x}}{\sin x + \cos x}\mathrm{d}x &= \int \frac{r}{q}\frac{\mathrm{d}q}{p} = \int \frac{r\mathrm{d}p}{-2r^2 - p^2} \\ &= -\int \frac{\mathrm{d}p}{r} - \int \frac{\mathrm{d}\left(p/r\right)}{-2-\left(p/r\right)^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan \frac{p}{r\sqrt{2}} - \arctan \frac{p}{r} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan \frac{\cos x - \sin x}{\sqrt{2\sin 2x}} - \arctan \frac{\cos x - \sin x}{\sqrt{\sin 2x}}\end{aligned}$$

双元的旋转与耦合

拉格朗日恒等式

$$(mp+nq)^2+(mq-np)^2=\left(m^2+n^2\right)\left(p^2+q^2\right) \tag{30}$$

$$(mp-nq)^2-(mq-np)^2=\left(m^2-n^2\right)\left(p^2-q^2\right) \tag{31}$$

和角公式的本质也就是这个式子。

如果这里 $\{p,q\}$ 和 $\{m,n\}$ 分别是同实虚的双元，那么我们可以构造它们的“耦合”双元。

双元的旋转

$$\{p,q\} \to \begin{cases} \{Ap+Bq, Aq-Bp\}\,(Re) \\ \{Ap-Bq, Aq-Bp\}\,(Im) \end{cases} \tag{32}$$

更退化地，如果某一对双元是常数，那么往往称之为双元的“旋转”。

对勾系列的双元

对勾三元

$$\{p, q, r\} \to \left\{x + \frac{1}{x}, x - \frac{1}{x}, \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2} + \alpha}\right\} \tag{33}$$

可以发现它们两两有双元关系。同理也有它们的旋转：

$$\{p, q\} \to \left\{Ax + \frac{B}{x}, Ax - \frac{B}{x}\right\} \tag{34}$$

按需要选取合适的双元。

对勾双元的例子

例：求解 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\left(x^2-x+1\right)\sqrt{x^2+x+1}}$.

若置双元

$$p=\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{\sqrt{x}},\ q=\frac{\sqrt{x^2-x+1}}{\sqrt{x}},\ r=\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}},\ s=\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}} \tag{35}$$

就有

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{\left(x^2-x+1\right)\sqrt{x^2+x+1}} &= \int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x}q^2p} = \int \frac{\mathrm{d}\left(s-r\right)}{q^2p} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{6}}\operatorname{arth}\frac{\sqrt{3}p}{\sqrt{2}r} - \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{p}{\sqrt{2}s} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{6}}\operatorname{arth}\frac{\sqrt{3}\sqrt{x^2+x+1}}{\sqrt{2}\left(x+1\right)} - \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{\sqrt{2}\left(x-1\right)}\end{aligned}$$

莫比乌斯系列的双元

这个系列同样来自于一个恒等式，或者说不定积分背后往往蕴含一个恒等式。

二次极化恒等式

$$\left({x_0}^2+ax_0+b\right)\left(x^2+ax+b\right)=\left(b-\frac{a^2}{4}\right)\left(x-x_0\right)^2+\left(x_0x+a\left(\frac{x+x_0}{2}\right)+b\right)^2 \quad (36)$$

这意味着我们对于一般的 $\sqrt{x^2+ax+b}$，总可以找到一个有理的式子，从而构成一对双元。从而我们可以将带根号的不定积分转化为有理构型。

直白地说，就是我们有这对双元：

$$p=\sqrt{{x_0}^2+ax_0+b}\frac{\sqrt{x^2+ax+b}}{x-x_0},\ q=\frac{x_0x+\frac{a}{2}\left(x+x_0\right)+b}{x-x_0} \quad (37)$$

其中 x_0, a, b 按所需要的题目合适地取即可。如果单独进行换元 q，就是所谓**莫比乌斯换元**. 极化恒等式，也就是其本质。

章节目录

二次曲线上的双元

定理

满足

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \tag{38}$$

的双元组 $\{x, y\}$ 的有理构型均为初等。

可以联想到: 初始的定义 $x^2 \pm y^2 = C$ 相当于标准的圆和双曲线，那么通过有理变换到一般的圆锥曲线是自然的。这也启发了一类常常被忽视的双元:

乘积双元

满足

$$xy = C \tag{39}$$

的双元组 $\{x, y\}$ 被称为**乘积双元**。

乘积双元的例子

例：求解 $\int \frac{\sqrt{x+\sqrt{x^2+1}}}{x+2\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x.$

$$
\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{x+\sqrt{x^2+1}}}{x+2\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x &= \int \frac{p}{3p^2+q^2}\mathrm{d}\left(p^2-q^2\right) \\
\left(p,q=\sqrt{\sqrt{x^2+1}\pm x}\right) &= 2\int \frac{p^4}{1+3p^4}\mathrm{d}p - 2\int \frac{\mathrm{d}q}{3+q^4} \\
&= \frac{2}{3}p - \frac{2}{3\sqrt[4]{3^3}}\mho_4^+\left(\sqrt[4]{3}p\right) - \frac{2}{\sqrt[4]{3}}\mho_4^+\left(\frac{q}{\sqrt[4]{3}}\right)
\end{aligned}
$$

$\mho$ 函数

其中 $\mho$ 是一种简化记号，是一系列结果较长的初等函数。

$$
\mho_{m,n}^{\pm}(x) = \int \frac{x^{m-1}\mathrm{d}x}{1\pm x^n}, \mho_n^{\pm}(x) \equiv \mho_{1,n}^{\pm}(x) \tag{40}
$$

高次双元

如果我们考虑

高次双元

满足

$$x^n \pm y^n = C \tag{41}$$

的双元组我们便称之为**高次双元**。

与二次双元类似，同样有第一公式和第三公式。

高次双元公式

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{y} = \mho_n^{\pm}\left(\frac{x}{y}\right) \tag{42}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{y^{n+1}} = \frac{1}{y^n \pm x^n}\frac{x}{y} \tag{43}$$

思路以及过程与二次双元类似。

高次双元的初等性

与二次双元不同，高次双元的有理构型就不一定是初等的了。我们有

双元契比雪夫判定

构型

$$(x^n \pm y^n = C) \int x^\lambda \mathrm{d}\left(y^\mu\right) \tag{44}$$

是初等的当且仅当 $\lambda, \mu, \lambda+\mu$ 其中至少一个数整除 n。

这部分比二次双元有更多美妙的结构，一个结论是当 $n = 3, 4$ **时，双元的有理构型均可以用椭圆函数表达。**

一个耐人寻味的初等例子: 求解 $\int \frac{\sqrt[3]{\cos x}}{3+\sin x} \mathrm{d}x$. 可以自然地变换为 6 次双元的有理构型。其结果为

$$\int \frac{\sqrt[3]{\cos x}}{3+\sin x} \mathrm{d}x = -\frac{3}{4} \int \frac{\mathrm{d}t}{1+t^3} = \ldots \left(t = \frac{1-\sin x}{2\sqrt[3]{\cos^2 x}}\right) \tag{45}$$

双元的锁

还可以让初始定义右边不仅仅是常数，是一些存在感被刻意忽略的因子。使得我们求解起来就像开锁一样依赖于钥匙。

例：求解 $\displaystyle\int \frac{\cos x - x}{1 + x^2 + (1 - x^2)\sin x}\mathrm{d}x.$

$$\int \frac{\cos x - x}{1 + x^2 + (1 - x^2)\sin x}\mathrm{d}x = \arctan \frac{x\cos x}{1 + \sin x} \tag{46}$$

甚至我们的双元之间不用有任何联系：

(2022)

$$\int \frac{\sin p\,\mathrm{d}q + \sin q\,\mathrm{d}p}{\cos p + \cos q} = 2\operatorname{arth}\left(\tan\frac{p}{2}\tan\frac{q}{2}\right) \tag{47}$$

除此之外我们还可以推广至三元情形，那将离初等越来越远……

尾言

所有的深刻来自于偏见。