连续时间信号与系统的时域分析

Briefly Abstract

重点	连续时间信号	时域信号的分解	连续时间系统的相关响应求解
重点1 将任意信号f(t)分解为冲激信号的线性组合	**分类** 复指数信号 单位阶跃信号 单位冲激信号	交直流分解	零输入响应
重点2 用卷积分析法求解线性时不变系统中的零状态响应.	**基本运算** 翻转,尺度变换,平移 导数与积分 相加与相乘	奇偶分解	冲激响应
		实部,虚部分解	零状态响应
		脉冲分解	卷积分析法

典型的连续时间信号

1. 复指数信号

数学表达式:

$$f(t) = Ae^{st} \tag{1}$$

$A, S \in C; A = |A|e^{j\theta}, s = \sigma + j * w_0$,其中,$A$成为复振幅,$s$为复频率.利用欧拉公式:$e^{j\theta} = \cos\theta + j * \sin\theta$,可以将$f(t)$展开为:

$$Ae^{st} = |A|e^{j\theta}e^{st} = |A|e^{\sigma}e^{j*(w_0t+\theta)} = |A|e^{\sigma}[cos(w_0t+\theta) + j * sin(w_0t+\theta)] \tag{2}$$

如果当A与s取值不同时,会有不同的信号:

1.1 直流信号

当$A \in R,$ 且$s = 0$时$,f(t) = |A|$,为直流信号.

1.2 实指数信号

当$A \in R,$ 且$s = \sigma, w_0 = 0$时$, f(t) = Ae^{\sigma t}$,为实指数信号:

1. 当$\sigma > 0$时,信号单调递增
2. 当$\sigma < 0$时,信号单调递减

1.3 正弦信号

当$A \in C, \sigma = 0$时,

$$f(t) = |A|e^{j*(w_0 t+\theta)} = |A|[cos(w_0 t + \theta) + j * sin(w_0 t + \theta)] \tag{3}$$

实部为等幅的余弦信号,虚部为等弦的正弦信号.

2. 单位阶跃信号

数学表达式:

$$u(t) = \begin{cases} 1, & (t > 0) \\ 0, & (t < 0) \end{cases} \tag{4}$$

延时单位阶跃信号:

$$u(t - t_0) = \begin{cases} 1, & (t > t_0) \\ 0, & (t < t_0) \end{cases} \tag{5}$$

单位阶跃信号与延时单位阶跃信号可以表示任意矩形脉冲信号.

3. 单位冲激信号

3.1 冲激函数的定义

1. 工程定义

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0 \\ \infty, & t = 0 \end{cases} \text{并且} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \tag{6}$$

单位冲激函数可以看成**作用时间极短,取值极大,而作用效果有限的一类数学模型**

2. 看成普通信号的极限

$$\delta(t)=\lim_{\Delta\to 0} g_{\Delta}(t) \tag{7}$$

3. 冲激函数的等价性

**单位冲激函数作用于在$t=0$处连续的函数$\varphi(t)$等价于为其赋值*

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)\delta(t)dt=\varphi(0) \tag{8}$$

4.

> 💡 Tip
> **证明:**
>
> $$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)\delta(t)dt=\int_{-\infty}^{0^-}\varphi(t)\delta(t)dt+\int_{0^+}^{\infty}\varphi(t)\delta(t)dt+\int_{0^-}^{0^+}\varphi(t)\delta(t)dt \tag{9}$$
>
> 由冲激函数的定义可知,$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)\delta(t)dt=\int_{0^-}^{0^+}\varphi(t)\delta(t)dt$;又因为$\varphi(t)$在$t=0$处连续,那么$\int_{0^-}^{0^+}\varphi(t)\delta(t)dt=\varphi(0)$,得证□

3.2 冲激函数的性质

- 筛选特性
  - 信号$\varphi(t)$在$t=t_0$处连续,那么有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)\delta(t-t_0)dt=\varphi(t_0) \tag{10}$$

> 💡 Tip
> 证明:
>
> $$\text{令}u=t-t_0;\text{那么}\begin{cases}t=u+t_0\\ t=+\infty\text{时},u=+\infty\\ t=-\infty\text{时},u=-\infty\end{cases} \tag{11}$$
>
> 此时就转化为了:$\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(u+t_0)\delta(u)du$,因为与积分变量无关,再有公式8,可证□

- 加权特性:两个广义函数如果对测试函数$\varphi(t)$具有相同的赋值效果,它们二者等价.
  - 设$f(t)$在$t=t_0$处连续,那么有:

$$f(t)\delta(t-t_0)=f(t_0)\delta(t-t_0) \tag{12}$$

> ☒ INFO
> 左边:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}[f(t)\delta(t-t_0)]\varphi(t)dt=\int_{-\infty}^{+\infty}[f(t)\varphi(t)]\delta(t-t_0)dt=f(t_0)\varphi(t_0) \tag{13}$$

右边:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}[f(t_0)\delta(t-t_0)]\varphi(t)dt=\int_{-\infty}^{+\infty}[f(t_0)\varphi(t)]\delta(t-t_0)dt=f(t_0)\varphi(t_0) \tag{14}$$

左边和右边对$\varphi(t)$的赋值效果相同,所以等价.

- 偶函数
  - 单位冲激函数为偶函数:

$$\delta(t)=\delta(-t) \tag{15}$$

- 尺度变换:同样根据相同的赋值效果,来确定等价关系.
  - $$\begin{cases}\delta(at)=\frac{1}{|a|}\delta(t)\\ \delta(at+t_0)=\frac{1}{|a|}\delta(t+\frac{t_0}{a})\end{cases} \tag{16}$$

- 与单位阶跃函数的关系
  - 关系:

$$\delta(t)=\frac{du(t)}{dt} \tag{17}$$

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)\frac{du(t)}{dt}dt=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)du(t)\\ &=u(t)\varphi(t)|_{-\infty}^{+\infty}-\int_{0}^{+\infty}d\varphi(t)\\ &=\varphi(+\infty)-\varphi(t)|_{0}^{+\infty}=\varphi(+\infty)-(\varphi(+\infty)-\varphi(0))\\ &=\varphi(0)\end{aligned}$$

与8赋值效果相同,所以相等.

连续时间信号的基本运算

1. 翻转
   - $f(t)\rightarrow f(-t)$
2. 尺度变换
   - $f(t)\rightarrow f(at)$
3. 时移
   - $f(t)\rightarrow f(t+b)$

4. 综合:

   - $$f(t) \to f(at+b) \tag{18}$$

所有的运算都是对自变量t而言

5. 导数
6. 积分
7. 相加
8. 相乘

信号的时域分解

1. 交,直流分解
2. 奇,偶分解
3. 实部,虚部分解
4. **脉冲分解**

连续时间信号的零输入响应

冲激响应