

随机事件及其概率

Briefly Abstract

基本概念	随机事件	重要概念
随机试验	定义	古典概率模型
基本结果	运算及运算律	条件概率
样本空间	关系	全概率公式与贝叶斯公式
样本点	概率的定义以及性质	伯努利试验

随机事件及其概率

基本概念

- 随机试验与基本结果
- 样本空间与样本点

随机事件

- 随机事件的运算
- 随机事件的关系

随机事件的概率

- 频率与概率
- 概率以及性质
 - 概率的性质

重要概念

- 古典概率模型
- 条件概率
- 全概率公式
- 贝叶斯公式
- 伯努利试验

练习题

基本概念

1. 随机试验与基本结果

随机试验: 简称试验, 一般用大写字母 E (Experiment) 来表示. 满足以下三个特征:

- 重复性: 实验条件等可以复现.
- 多样性: 可能的结果不止一个, 并且所有可能的结果已知.
- 随机性: 每个可能的结果随机出现.

基本结果: 试验中出现的各种可能结果.

2. 样本空间与样本点

Definition:

- 样本空间: 试验中所有可能出现的基本结果所组成的集合称为试验的**样本空间(Sample Space)**,用大写字母 S 来表示.
- 样本点: 样本空间 S 中的基本元素, 试验中的基本结果, 称为样本点.

随机事件

Tip

Definition:

随机事件是样本空间 S 的子集, 一般用大写字母 A, B, C, \dots 来表示. 只包含一个样本点的随机事件称为 **基本事件**. 包含所有样本点的随机事件称为 **必然事件**. 由定义, 事件 \emptyset 不包含任何样本点, 称为 **不可能事件**.

1. 随机事件的运算

对随机事件 A, B, C, \dots 有如下运算关系:

- 事件的和: 称事件 $A \cup B = \{x | x \in A \text{ 或者 } x \in B\}$ 为事件 A 与事件 B 的和事件.
- 事件的积: 称事件 $A \cap B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \in B\}$ 为事件 A 与事件 B 的积事件.
- 事件的差: 称事件 $A - B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \notin B\}$ 为事件 A 与事件 B 的差事件. 事件 A 发生而事件 B 不发生, 即 $A - AB$

运算律:

- 交换律: $A \cup B = B \cup A; A \cap B = B \cap A$
- 结合律: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C; A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
- 分配率: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C); A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- 对偶律: $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}; \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

其中, 分配律和对偶律均可推广到有限个事件.

2. 随机事件的关系

- 包含关系: 称 $\{x | \text{对 } \forall x \in B, x \in A \text{ 成立}\}$ 为 $B \subset A$, 事件 B 为事件 A 的子集.
- 相等关系: 若存在 $A \subset B$ 且 $B \subset A$, 则称事件 A, B 相等.
- 互斥关系: 若存在 $A \cap B = \emptyset$, 则事件 A, B 不可能同时发生, 称为互斥事件.
- 对立关系: 若存在 $A \cap B = \emptyset$, 且 $A \cup B = S$, 即事件 $A = B^c$, 称为对立关系.

随机事件的概率

1. 频率与概率

频率: 在某 n 次试验中, 事件 A 发生的次数为 N , 称比值 $\frac{N}{n}$ 为事件 A 在这 n 次试验的**频率**.

频率的基本性质:

- 非负性: $0 \leq f_n(A) \leq 1$
- 规范性: $f_n(S) = 1$

3. 可加性: 若事件 $A_1, A_2, A_3, \dots, A_k$ 互不相容,那么

$$f_n(A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_k) = f_n(A_1) + f_n(A_2) + f_n(A_3) + \dots + f_n(A_k) \quad (1)$$

当试验次数 n 逐渐增大时,频率 $f_n(A)$ 逐渐趋于某一常数,这个常数称为事件 A 的概率.

2. 概率以及性质

概率:当试验次数 $n \rightarrow \infty$ 时,事件 A 发生的频率 $f_n(A)$ 在一定意义下趋近于事件 A 发生的概率 $P(A)$.

2.1 概率的性质

1. 对于不可能事件 \emptyset ,概率 $P(\emptyset) = 0$

2. 概率的有限可加性:

$$P(A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_k) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \dots + P(A_k) \quad (2)$$

3. 对于对立事件 A, \bar{A} ,其概率有 $P(A) = 1 - P(\bar{A})$

简要证明: $1 = P(S) = P(A \cup \bar{A})$, 根据2, $= P(A) + P(\bar{A})$. \square

4. 对于包含事件: $B \subset A$,其概率 $P(A - B) = P(A) - P(B)$

简要证明:由关系 $B \subset A$,那么 $A = B \cup (A - B)$, $P(A) = P(B \cup (A - B))$, 再有2, $= P(B) + P(A - B)$ \square

此外:由概率的非负性,那么 $P(A) - P(B) \geq 0 \iff P(B) \leq P(A)$

5. 概率的加法公式: 对任意两个事件 A, B ,可以推广到多个事件

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB) \quad (3)$$

对多个事件如 A_1, A_2, A_3 ,

$$P(A_1 + A_2 + A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1A_2) - P(A_1A_3) - P(A_2A_3) + P(A_1A_2A_3) \quad (4)$$

重要概念

1. 古典概率模型

又称为等可能概率模型,事件 A 发生的概率为:

$$P(A) = \frac{k}{n} = \frac{\text{事件}A\text{包含的基本事件}}{S\text{包含的基本事件}} \quad (5)$$

2. 条件概率

3. 全概率公式

4. 贝叶斯公式

5. 伯努利试验

练习题