



République Tunisienne
Ministère de l'Enseignement Supérieur
et de la Recherche Scientifique
Ecole Supérieure Privée d'Ingénierie et des
Technologies

RAPPORT DE PROJET ACTUARIAT VIE

Sujet 7 : Comparaison de deux modèles de mortalité

Réalisé par

Adam KAAK

Amira CHEHAIBI

Hechem BEN FARHAT

Mohamed JAOUA

Mohamed Yahia BOURGUIBA

Table des matières

1	Contexte général du projet	2
1.1	Motivation	3
1.2	Planification du projet	3
1.2.1	Objectif général	3
1.2.2	Planification prévisionnelle du projet	3
2	Vue d'ensemble des notions actuarielles	5
2.1	Taux de mortalité	6
2.2	Modèle de Lee-Carter	6
2.3	Procédure d'estimation du modèle Lee-Carter	7
2.3.1	Etape 1 : Estimation des paramètres partir des données historiques	7
2.3.2	Etape 2 : Projection de la force de mortalité future	8
2.4	Modèle de Cairns Blake Dowd (CBD)	8
3	Vue d'ensemble des notions actuarielles	10
3.1	Lecture de données	11
3.2	Estimation des paramètres d'un modèle de Lee-Carter à partir des données historiques téléchargées	11
3.3	Estimation des paramètres du modèle de CBD à partir des données historiques téléchargées	15
3.4	Log taux de mortalité estimés par le modèle Lee-Carter	16
3.5	Procédure par défaut de projection des taux mortalité implémentée dans StMoMo . . .	17
3.6	Projection des taux de mortalité à l'aide de la fonction forecast	17

Table des figures

3.1	Taux de mortalité des hommes danois entre 1876 et 2019	11
3.2	Taux de mortalité des femmes danois entre 1876 et 2019	12
3.3	Danemark, Effets principaux et interactions, Homme 1876-2019	12
3.4	Danemark, Effets principaux et interactions, Femme 1876-2019	13
3.5	Le résidus du modèle LCA Pour Homme	14
3.6	Le résidus du modèle LCA Pour Femme	15
3.7	Danemark, modèle principal de CBD, homme de 50 à 98 ans	15
3.8	Danemark, modèle principal de CBD, femme de 50 à 98 ans	16
3.9	log taux de mortalité (Danemark, 2010)	16
3.10	projection de taux de mortalité Danemark, homme sur 25 ans avec LCA	17
3.11	projection de taux de mortalité Danemark, femme sur 25 ans avec LCA	18
3.12	projection de taux de mortalité Danemark, homme sur 25 ans avec CBD	18
3.13	projection de taux de mortalité Danemark, femme sur 25 ans avec CBD	19

Liste des abréviations

- **CBD** = **C**airns **B**lake **D**owd
- **ESPRIT** = **E**cole **S**upérieure **P**rivée d'Ingénierie et de **T**echnologie
- **HMD** = **H**uman **M**ortality **D**atabase
- **LCA** = **L**ee-**C**arter
- **OMS** = **O**rganisation **M**ondiale de la **S**anté

Introduction générale

La population danoise représente environ 5 750 000 habitants, ce qui équivaut à 1,1% de la population européenne. Avec 5 447 000 habitants en 2007 et 5 560 000 en 2011, elle a un taux de croissance de 0,7% et augmente plus rapidement que dans le reste de l'Union européenne. Comme dans l'ensemble de la région nordique, à un vieillissement de la population plus élevé que dans les autres pays de l'Union s'ajoute une ouverture importante à l'immigration.

Avec 19,43% de la population ayant 65 ans ou plus, le Danemark est le onzième pays avec la population la plus âgée dans le monde. La part des 65-79 ans est celle qui a le plus augmenté depuis dix ans, passant de 11.1% de la population en 2006 à 14.6%. Les projections prévoient une augmentation importante de la classe la plus âgée : la part des plus de 70 ans augmenterait de 64% entre 2017 et 2050.

L'espérance de vie des Danoises à la naissance est la plus faible parmi les treize pays européens pour lesquels on dispose de données en 1999 (c'est-à-dire sans l'Italie et la Grèce) et les résultats en termes d'espérance de vie masculine sont relativement peu satisfaisants. On retrouve le même phénomène lorsqu'on analyse l'espérance de vie à 65 ans, à la fois pour les hommes et pour les femmes.

Le Danemark se singularise ainsi des autres pays européens dans la mesure où, entre 1980 et 1995, l'espérance de vie à la naissance des femmes n'a progressé que de 6 mois. Le taux de mortalité infantile et son évolution depuis 1980 confirment ces résultats sanitaires plutôt décevants ; en effet, alors que le taux de mortalité infantile était relativement faible au Danemark en 1980, les progrès réalisés y ont été beaucoup plus lents que dans les autres pays européens.

D'autres éléments, liés aux comportements et aux modes de vie, sont également intéressants à noter. Le taux de mortalité par cancer est, par exemple, largement supérieur à celui observé dans les autres pays (222 décès sur 100 000, contre 159 en Finlande et en Suède), mais l'incidence des cancers y est aussi supérieure (561 cas pour 100 000, contre 420 en Finlande et 483 en Suède). Une étude parue dans le British Medical Journal en 2003 met en évidence la forte mortalité associée au tabac chez les femmes. Si, durant les années cinquante, le tabac était responsable de 1 % des décès des femmes entre 55 et 84 ans, en 1990 ce chiffre s'élevait à un quart des décès. Les chiffres publiés par l'OMS (Organisation mondiale de la santé) sur les causes de décès corroborent cette analyse. Le Danemark arrive en tête des pays européens en ce qui concerne les décès liés à l'alcool pour les femmes et deuxième pour les décès liés au tabac.

CONTEXTE GÉNÉRAL DU PROJET

Plan

1	Motivation	3
2	Planification du projet	3
1.2.1	Objectif général	3
1.2.2	Planification prévisionnelle du projet	3

Introduction

Ce chapitre est consacré à la présentation générale du projet. Nous commençons par l'explication des motivations pour entreprendre ce projet. Ensuite, nous focalisons sur les objectifs de notre sujet et la solution proposée après avoir discuté la problématique à résoudre.

1.1 Motivation

Les Danois vivent plus longtemps que jamais. En 2016, l'espérance de vie à la naissance des Danois a atteint 78,8 ans pour les hommes et 82,8 ans pour les femmes. Depuis 2000, les hommes ont ainsi gagné 4,5 ans d'espérance de vie et les femmes 3,8 ans, grâce notamment à la baisse de la mortalité. Les gains obtenus par les femmes sont moins rapides que ceux des hommes et l'écart entre les sexes se resserre : de 4 ans et 7 mois en 2000, il est passé à 4 ans en 2016.

L'espérance de vie à 67 ans progresse également. Selon les dernières estimations de l'agence nationale Danmarks Statistik, les hommes danois âgés de 67 peuvent espérer de vivre encore 16,6 ans et les femmes 19,1 ans. Cela constitue depuis 2000 un gain de 2,9 ans pour les hommes et de 2,4 ans pour les femmes, donc à nouveau un rétrécissement de l'écart entre les sexes.

C'est pour cela que nous nous intéressons à ce sujet afin d'estimer et de projeter la mortalité de la population danoise (hommes et femmes) pour des âges supérieurs à 50 ans.

1.2 Planification du projet

1.2.1 Objectif général

L'objectif du projet est d'estimer et de prédire le taux de mortalité d'un groupe de danois avec 2 modèles différents :

- * Le modèle de Lee-Carter.
- * Le modèle de Cairns Blake Dowd (CBD).

1.2.2 Planification prévisionnelle du projet

Pour assurer le bon déroulement et l'avancement du travail on a mis en place une planification qui s'étale en 3 étapes selon les besoins spécifiques décrits précédemment.

- * *Du 6-9 Mai* Exploitation et compréhension des données.
- * *Du 10-16 Mai* Compréhension des notations et préliminaires actuariels.
- * *Du 17-30 Mai* Codage sous R et Rédaction du rapport en parallèle.

Conclusion

Dans ce qui précède, nous avons abordées le contexte général de ce projet et plus précisément l'environnement de réalisation. De même, nous avons précisées les objectifs du projet par une planification prévisionnelle qui nous a permis d'assurer le bon déroulement du travail et de garantir le respect des délais.

VUE D'ENSEMBLE DES NOTIONS ACTUARIELLES

Plan

1	Taux de mortalité	6
2	Modèle de Lee-Carter	6
3	Procédure d'estimation du modèle Lee-Carter	7
2.3.1	Etape 1 : Estimation des paramètres partir des données historiques	7
2.3.2	Etape 2 : Projection de la force de mortalité future	8
4	Modèle de Cairns Blake Dowd (CBD)	8

Introduction

Dans ce chapitre, On va introduire le modèle de Lee-Carter, le modèle de Cairns Blake Dowd (CBD) et la notion de taux de mortalité.

2.1 Taux de mortalité

Un taux de mortalité est une mesure de la fréquence des décès dans une population définie au cours d'un intervalle spécifié. Les mesures de morbidité et de mortalité sont souvent les mêmes mathématiquement ; c'est juste une question de ce que vous choisissez de mesurer, la maladie ou la mort.

Le taux de mortalité à l'âge x d'un individu est notée μ_x , La formule de mortalité d'une population définie, sur une période de temps spécifiée, est donnée par **cours** :

$$\mu_{x+t} = \frac{f_x}{S_x} \quad (2.1)$$

Avec ,

- la fonction de répartition $F_x(t) = P(T_x < t | T_x > 0) = tq_x$,
- la fonction de survie $S_x(t) = P(T_x > t | T_x > 0) = tp_x$.

2.2 Modèle de Lee-Carter

Il s'agit d'une méthode d'extrapolation des tendances passées initialement utilisée sur des données américaines, qui est devenue rapidement un standard. La modélisation retenue pour le taux instantané de mortalité est la suivante :

$$\ln \mu_{xt} = \alpha_x + \beta_x \kappa_t + \epsilon_{xt} \quad (2.2)$$

où :

- μ_{xt} représente le taux instantané de mortalité à la date t pour l'âge x .
- α_x est la composante spécifique à l'âge x , elle s'interprète comme la valeur moyenne des $\ln \mu_{xt}$ au cours du temps.
- κ_t décrit l'évolution générale de la mortalité.
- β_x traduit la sensibilité de la mortalité instantanée à l'âge x par rapport à l'évolution générale

κ_t au sens où

$$\frac{\partial \ln(\mu_{xt})}{\partial \kappa_t} = \beta_x \quad (2.3)$$

Ainsi, les âges pour lesquels les β_x sont importants sont les plus sensibles à l'évolution générale de la mortalité. Le modèle de Lee-Carter suppose la constance au cours du temps de cette sensibilité.

- ϵ_{xt} est une variable aléatoire iid distribuée selon une loi $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

L'idée du modèle est donc d'ajuster à la série (doublement indicée par x et t) des logarithmes des taux instantanés de décès une structure paramétrique (déterministe) à laquelle s'ajoute un phénomène aléatoire ; le critère d'optimisation retenu va consister à maximiser la variance expliquée par le modèle, ce qui revient à minimiser la variance des erreurs. Afin de rendre le modèle identifiable, il convient d'ajouter des contraintes sur les paramètres ; on retient en général les contraintes suivantes :

$$\sum_{x=x_m}^{x_M} \beta_x = 1 \quad (2.4)$$

$$\sum_{t=t_m}^{t_M} \kappa_t = 0 \quad (2.5)$$

avec t_m désignant la première année d'observation des taux de mortalité et t_M la dernière année de l'étude. On obtient alors les paramètres par un critère de moindres carrés :

$$(\hat{\alpha}_x, \hat{\beta}_x, \hat{\kappa}_x) = \underset{x,t}{\operatorname{argmin}} \sum (\ln \hat{\mu}_{xt} - \alpha_x - \beta_x \kappa_t)^2 \quad (2.6)$$

Il convient alors de résoudre ce programme d'optimisation, sous les contraintes d'identifiabilité. Le nombre de paramètres à estimer est élevé, il est égal à

$$2(x_M - x - m + 1) + t_M - t_m - 1 \quad (2.7)$$

2.3 Procédure d'estimation du modèle Lee-Carter

2.3.1 Etape 1 : Estimation des paramètres partir des données historiques

Le modèle n'est pas un modèle de régression classique car ni (κ_t) ni (β_x) ne sont des paramètres observables. Le but est l'estimation par méthode des moindres carrés en minimisant :

$$\min_{\alpha_x, \beta_x, \kappa_t} \sum_{t=1}^n \sum_{x=x_m}^{x_M} (\log(\mu_{x,t}) - \alpha_x - \beta_x \kappa_t)^2 \quad (2.8)$$

La procédure est la décomposition en valeur singulière (SVD) :

$$\hat{\alpha}_x = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \log(\mu_{x,t}) \quad (2.9)$$

2.3.2 Etape 2 : Projection de la force de mortalité future

$$\log(\mu(x, t)) = \alpha_x + \beta_x \kappa_t \quad (2.10)$$

Pour projeter la mortalité, il suffit de projeter la série temporelle (κ_t) . Les valeurs de (κ_t) peuvent être modélisées par une série chronologique. Exemple populaire : marche aléatoire avec tendance

$$\kappa_t = d + \kappa_{t-1} + \epsilon_t \quad (2.11)$$

On peut obtenir des intervalles de confiance en simulant les trajectoires de (κ_t) .

2.4 Modèle de Cairns Blake Dowd (CBD)

Nous avons considéré la formulation originale du modèle fourni par Cairns et al.(2006) avec le équation de modèle suivante :

$$\ln\left[\frac{q_{x,t}}{p_{x,t}}\right] = k_t^{(1)} + k_t^{(2)}(x - \bar{x}) + \epsilon_{x,t} \quad (2.12)$$

où $k_t^{(1)}$ et $k_t^{(2)}$ sont deux processus stochastiques et représentent les deux indices temporels du modèle ; $q_{x,t}$ et $p_{x,t}$ représentent respectivement le décès et la probabilité de survie, au temps t pour un individu âgé de x ;

$$\ln\left[\frac{q_{x,t}}{p_{x,t}}\right] = \ln(\phi_x) = \text{logit} q_{x,t} \quad (2.13)$$

est la transformation logit de $q_{x,t}$, avec ϕ_x représentant les probabilités de mortalité ; \bar{x} est l'âge moyen de l'intervalle d'âge considéré ; et $\epsilon_{x,t}$ est le terme d'erreur qui englobe la tendance historique que le modèle n'exprime pas. La totalité des termes d'erreur sont i.i.d suivant la distribution normale avec moyenne 0 et variance σ^2 .

Le modèle est entièrement identifié, il ne nécessite donc pas de contraintes supplémentaires. De plus, l'indice de temps $k_t^{(1)}$ est l'interception du modèle. Il affecte tous les âges de la même manière, et il représente le niveau de mortalité au temps t . Plus précisément, s'il diminue avec le temps, cela signifie que le taux de mortalité a diminué avec le temps à tous les âges. L'indice de temps $k_t^{(2)}$ représente la pente du modèle : chaque âge est affecté différemment par ce paramètre. Par exemple, si pendant la période d'essayage, les améliorations de la mortalité ont été plus importantes à des âges inférieurs qu'à des âges plus élevés, le terme de période de pente $k_t^{(2)}$ augmenterait avec le temps. Dans un tel cas, le graphique du logit des probabilités de décès par rapport à l'âge deviendrait plus raide à mesure qu'il

se déplaçait vers le bas avec le temps (Pitacco et al.2009)

Conclusion

Au cours de la section précédente, nous avons défini les différentes notions de l'actuariat vie que nous allons utiliser dans ce qui suit.

VUE D'ENSEMBLE DES NOTIONS ACTUARIELLES

Plan

1	Lecture de données	11
2	Estimation des paramètres d'un modèle de Lee-Carter à partir des données historiques téléchargées	11
3	Estimation des paramètres du modèle de CBD à partir des données historiques téléchargées	15
4	Log taux de mortalité estimés par le modèle Lee-Carter	16
5	Procédure par défaut de projection des taux mortalité implémentée dans StMoMo	17
6	Projection des taux de mortalité à l'aide de la fonction forecast	17

Introduction

Dans ce chapitre on va parler de la réalisation des estimations ainsi que nos analyses et remarques.

3.1 Lecture de données

Comme indiqué dans l'énoncé on va travailler sur la population danoise bien évidemment notre pays concerné c'est le Danemark. Pour ce faire nous avons eu recours au site Human Mortality Database (HMD). C'est une base de données qui a été créée pour fournir des données détaillées sur la mortalité et la population aux chercheurs, étudiants, journalistes, analystes des politiques et autres personnes intéressées par l'histoire de la longévité humaine. on a utilisé la commande `hmd.mx()` pour le téléchargement.

3.2 Estimation des paramètres d'un modèle de Lee-Carter à partir des données historiques téléchargées

FIGURE 3.1 : Taux de mortalité des hommes danois entre 1876 et 2019

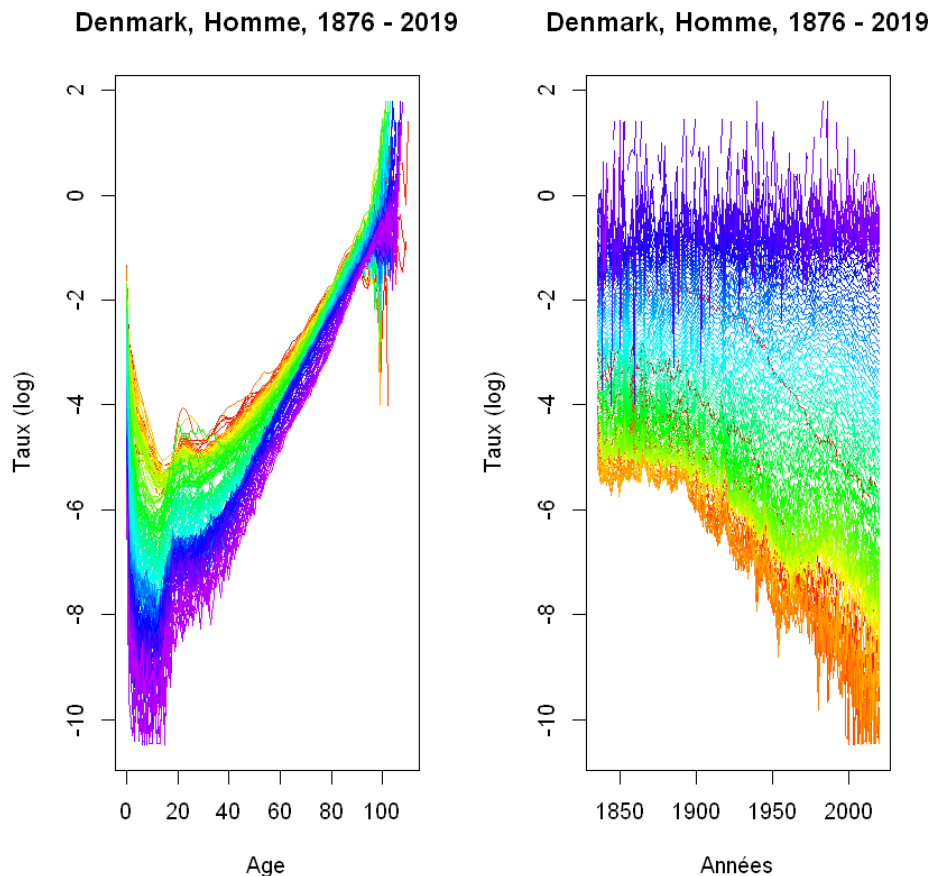


FIGURE 3.2 : Taux de mortalité des femmes danois entre 1876 et 2019

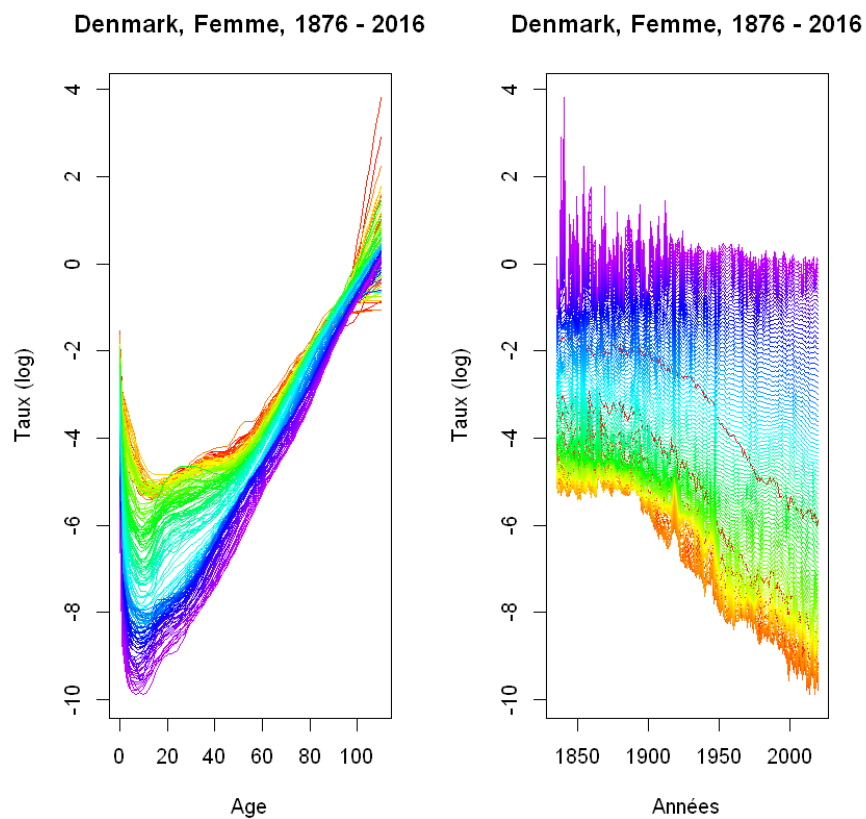


FIGURE 3.3 : Danemark, Effets principaux et interactions, Homme 1876-2019

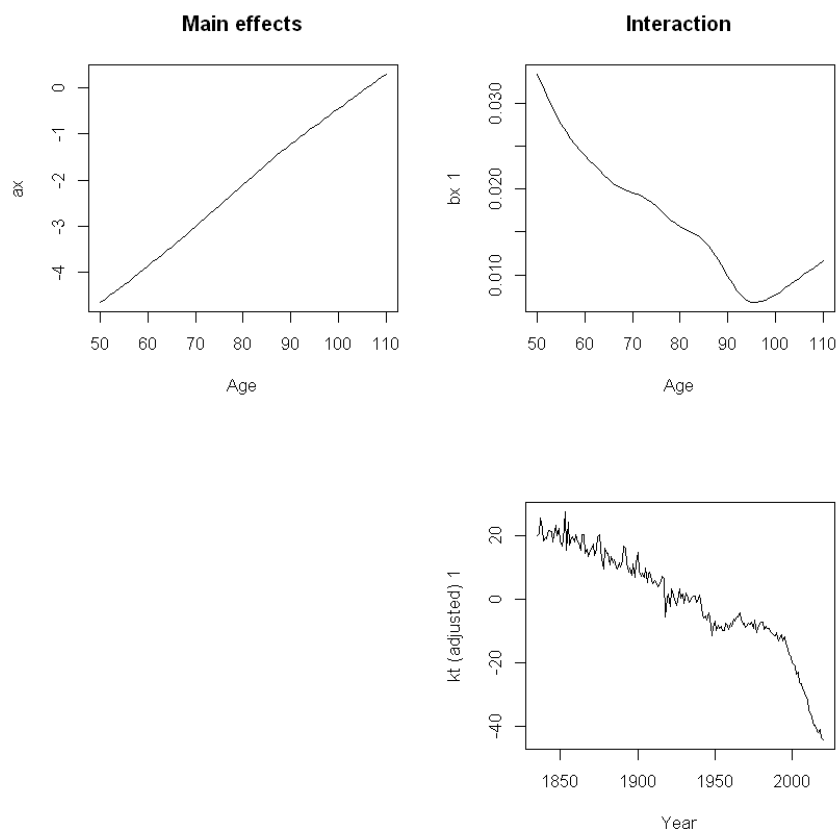
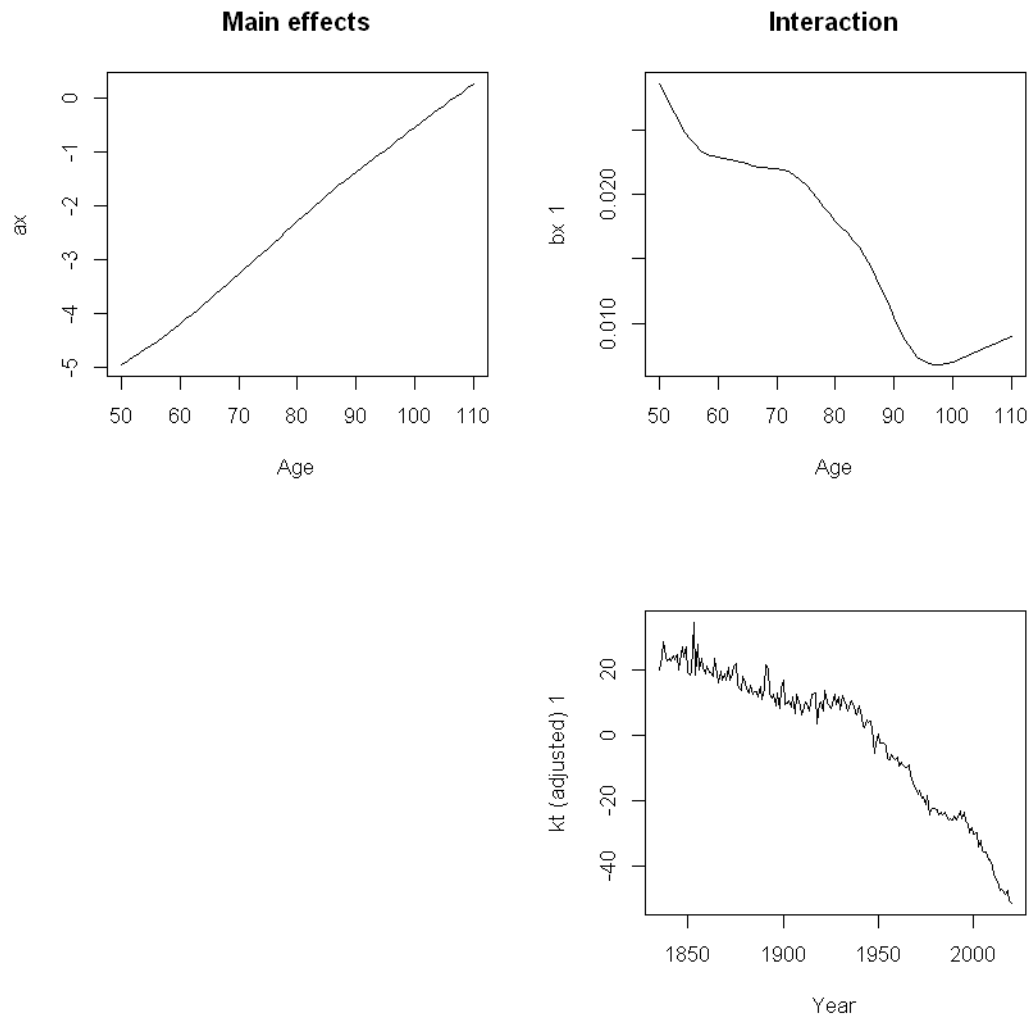


FIGURE 3.4 : Danemark, Effets principaux et interactions, Femme 1876-2019

Analyse des paramètres Pour Femme : ax : la valeur moyenne des logs de la mortalité instantané ($\ln \mu(x,t)$ au cours du temps) elle croît en fonction de l'âge elle varie entre -5 et 0 .

bx indique la sensibilité de la mortalité instantanée par rapport à l'évolution générale de la mortalité. Si on se situe à partir de 55 ans, on constate que les âges les plus sensibles à l'évolution temporelle de la mortalité sont ceux entre 55 et 70 ans . On atteint en effet des stabilités sur ces tranches d'âges.

D'après la figure ci-dessus et comme kt indique l'évolution générale de la mortalité dans le temps ; On constate pendant les années 1860 une forte croissance due à la Seconde guerre du Schleswig qui s'est déroulée pendant la même période . On constate une tendance linéaire à la décroissance des entre 1940 et 2010 Cette tendance à la décroissance du paramètre k , qui devient négatif au cours de la période, associée à la positivité moyenne du paramètre β implique d'après la formule de Lee-Carter, une diminution des taux instantanés de mortalité. En conséquence, on assiste à une augmentation de la probabilité de la survie sur la période observée.

Analyse des paramètres Pour Homme : α_x : la valeur moyenne des logs de la mortalité instantané ($\ln \mu(x,t)$ au cours du temps) elle croît en fonction de l'âge elle varie entre -4 et 0 .

β_x indique la sensibilité de la mortalité instantanée par rapport à l'évolution générale de la mortalité. on se situe à partir de 55 ans .

D'après la figure ci-dessus et comme α_t indique l'évolution générale de la mortalité dans le temps ; On constate pendant les années 1860 une forte croissance due à la Seconde guerre du Schleswig qui s'est déroulée pendant la même période . On constate une tendance linéaire à la décroissance des entre 1940 et 2010 Cette tendance à la décroissance du paramètre α_t , qui devient négatif au cours de la période, associée à la positivité moyenne du paramètre β implique d'après la formule de Lee-Carter, une diminution des taux instantanés de mortalité. En conséquence, on assiste à une augmentation de la probabilité de la survie sur la période observée.

FIGURE 3.5 : Le résidus du modèle LCA Pour Homme

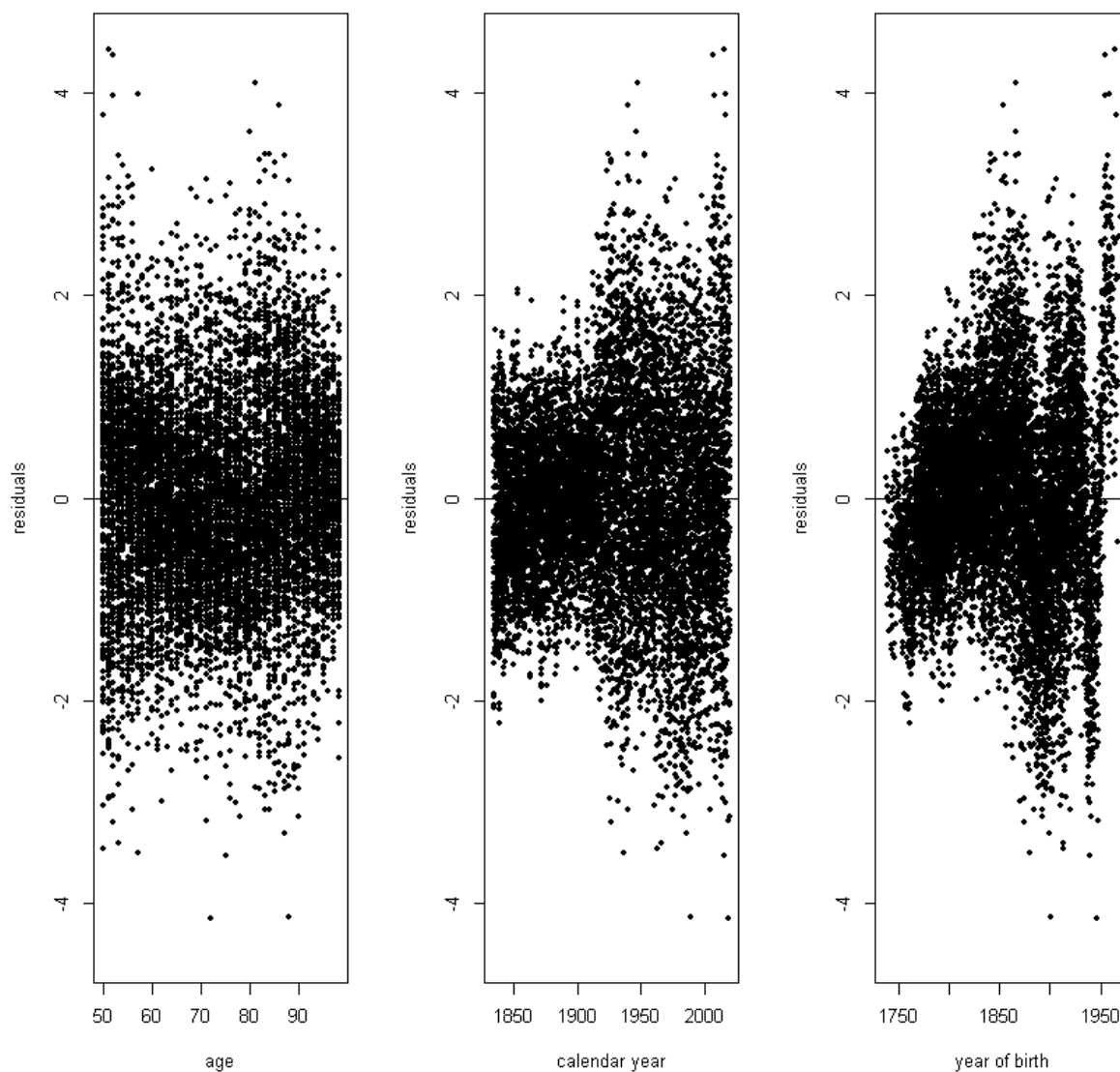
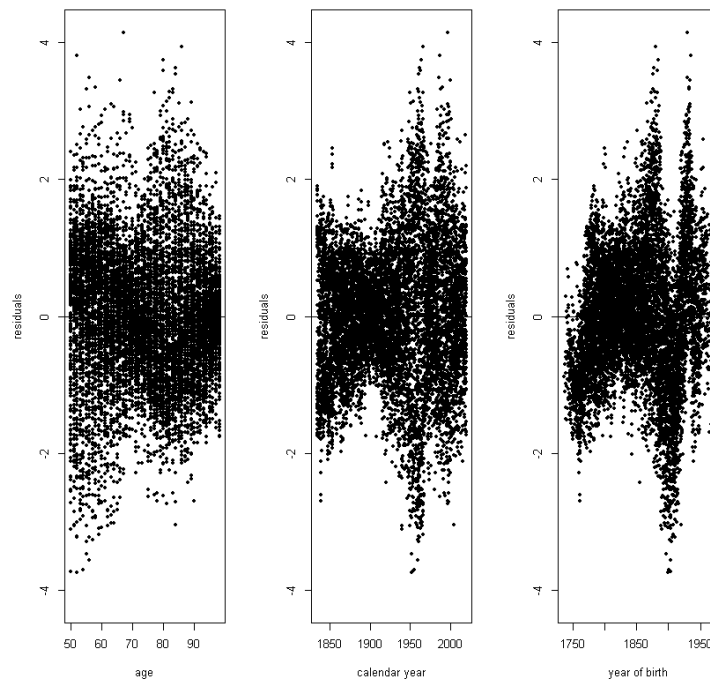


FIGURE 3.6 : Le résidus du modèle LCA Pour Femme

lorsque l'on effectue un ajustement par la méthode de Lee-Carter, on peut analyser la variance des résidus, et confronter les observations à l'hypothèse d'homoscédasticité.

3.3 Estimation des paramètres du modèle de CBD à partir des données historiques téléchargées

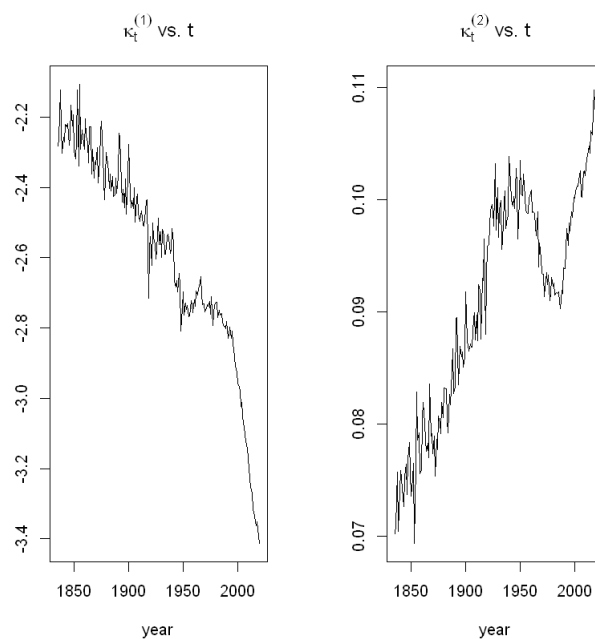
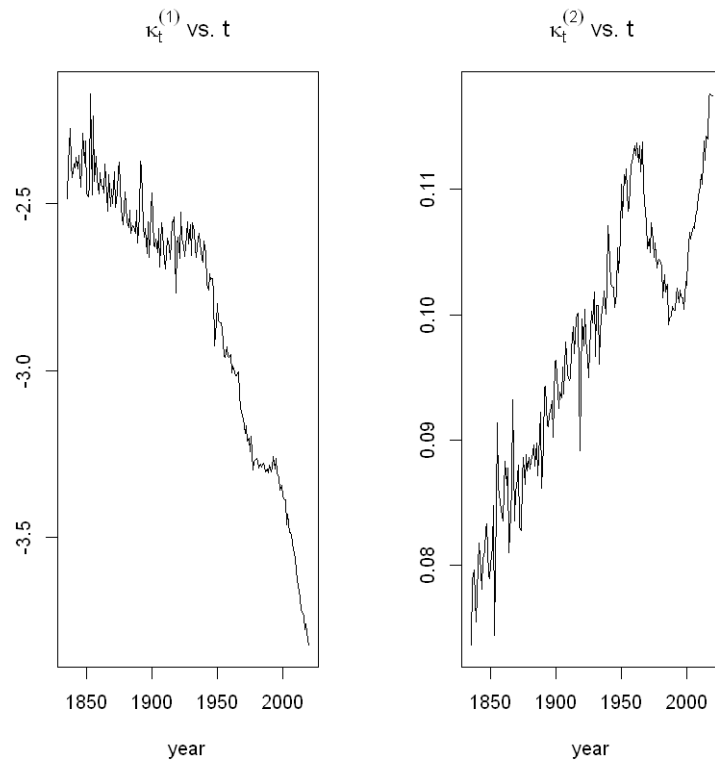
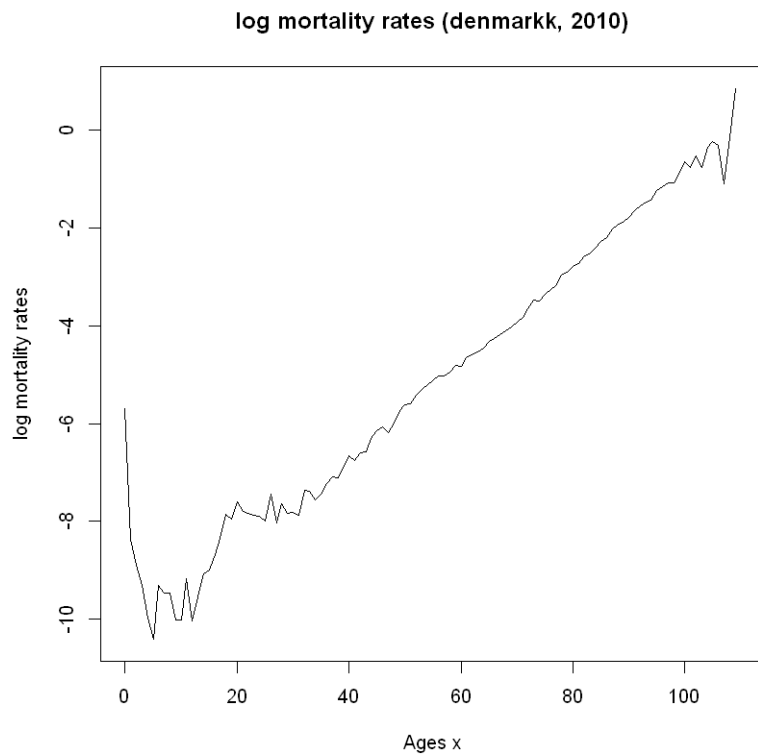
FIGURE 3.7 : Danemark, modèle principal de CBD, homme de 50 à 98 ans

FIGURE 3.8 : Danemark, modèle principal de CBD, femme de 50 à 98 ans



3.4 Log taux de mortalité estimés par le modèle Lee-Carter

FIGURE 3.9 : log taux de mortalité (Danemark, 2010)



3.5 Procédure par défaut de projection des taux mortalité implémentée dans StMoMo

Dans la famille des modèles de mortalité stochastique généralisés par âge, période et cohorte, la dynamique de la mortalité est les indices de période $\kappa_t^{(i)}$, $i = 1, \dots, N$ et l'indice de cohorte γ_t^x . Par conséquent, les prévisions et la simulation des taux de mortalité nécessite la modélisation de ces indices à l'aide de séries chronologiques techniques. Pour les indices de période, nous envisageons deux approches de modélisation alternatives. Une première possibilité est d'utiliser l'approche standard dans la documentation actuarielle et de supposer que les indices de période suivent une multivariée marche aléatoire avec dérive.

3.6 Projection des taux de mortalité à l'aide de la fonction forecast

FIGURE 3.10 : projection de taux de mortalité Danemark, homme sur 25 ans avec LCA

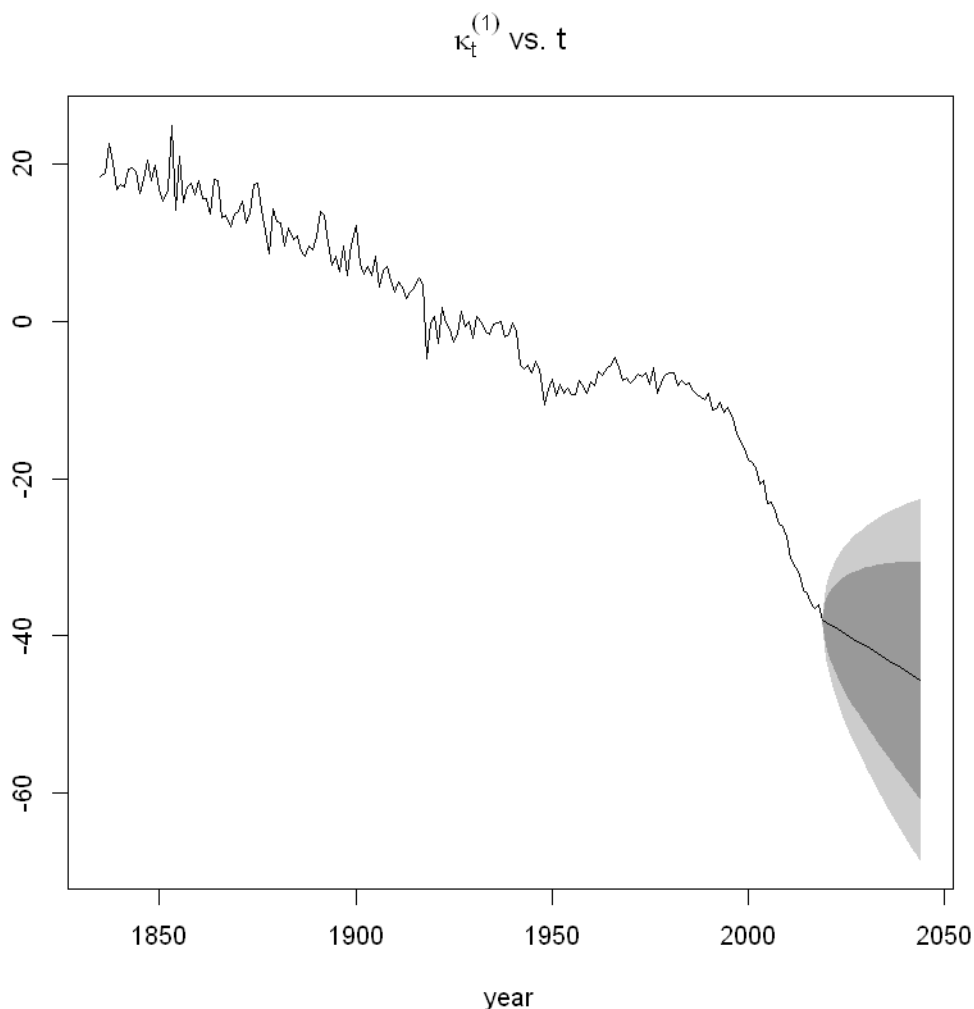


FIGURE 3.11 : projection de taux de mortalité Danemark, femme sur 25 ans avec LCA

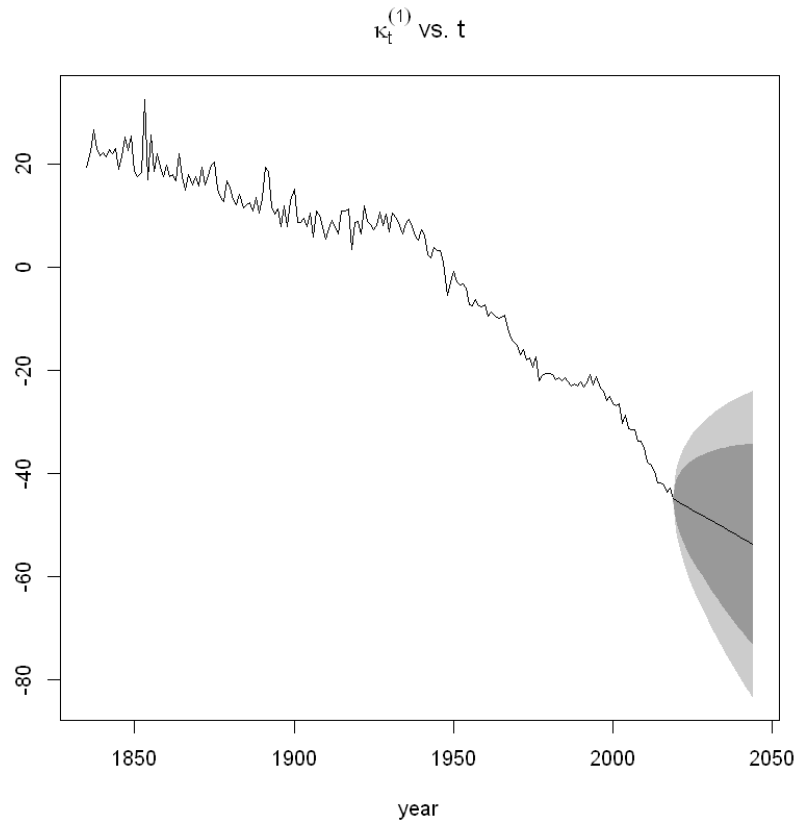


FIGURE 3.12 : projection de taux de mortalité Danemark, homme sur 25 ans avec CBD

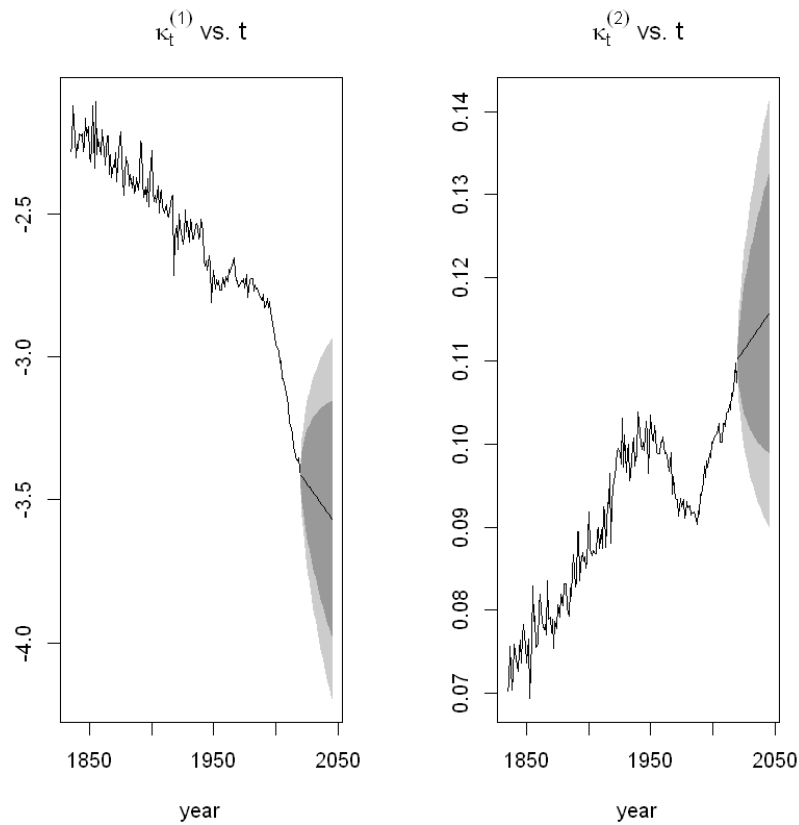
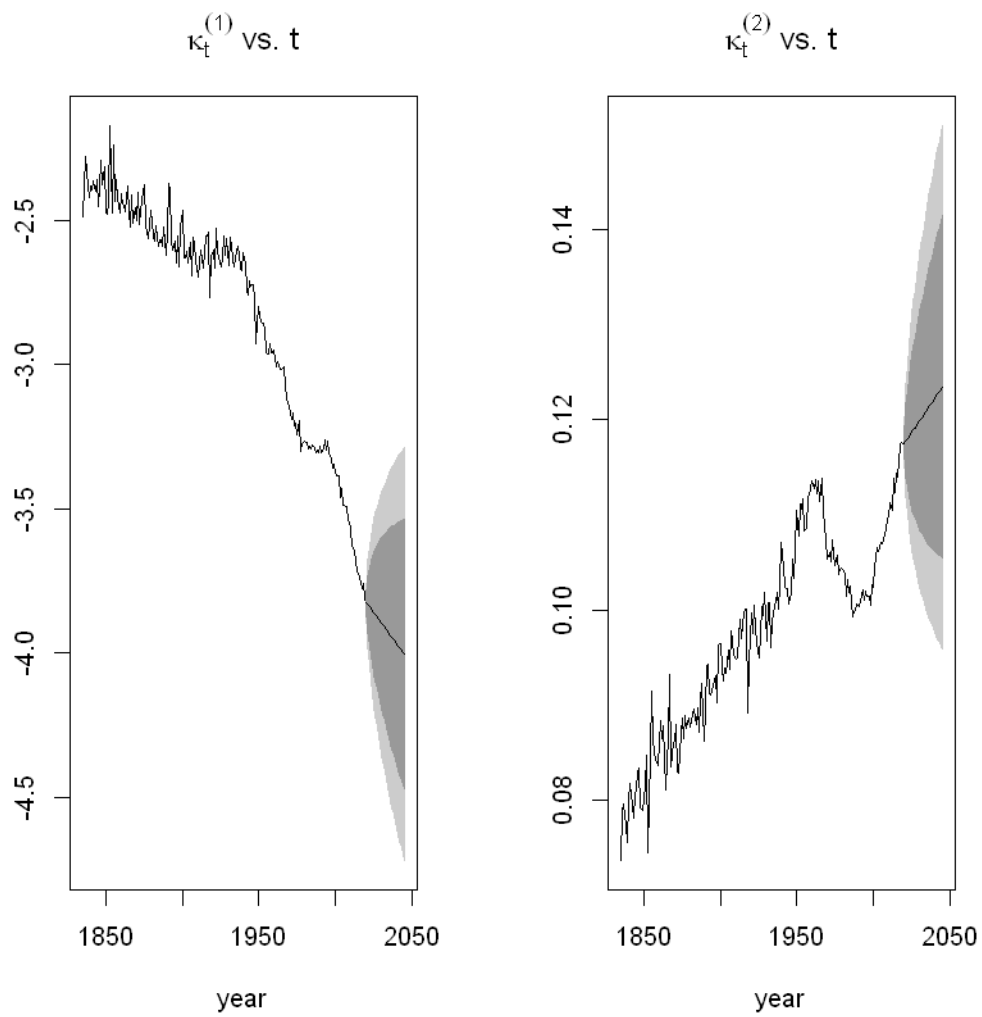


FIGURE 3.13 : projection de taux de mortalité Danemark, femme sur 25 ans avec CBD



Conclusion générale

L'objectif de ce sujet était d'estimer et de projeter le taux de mortalité avec les méthodes Lee-Carter et CBD. Notre étude a été effectuée sur une population venant exactement de « Danemark » qui est une population assez spéciale dans le monde par ce qu'elle est caractérisée par plusieurs guerres d'où la baisse de taux de mortalité. Durant la période du projet on a essayé de traiter le sujet en répondant à des questions bien spécifiques permettant de résoudre des problèmes d'actualités, on a estimé les taux de mortalité des hommes et des femmes en utilisant le modèle de Lee-Carter et CBD qui sont des références dans le domaine de prévision de mortalité qu'on a déjà estimé ses paramètres ; à la fin notre groupe a essayé de comparer les deux modèles. Durant l'exploitation du taux de mortalité de la population danoise pour la période allant de 1876 jusqu'à 2019 nous avons constaté quelques instabilités pour des durées où le pays a vécu des guerres, soit civile ou externe, cela avait un impact sur la variation du taux de mortalité de la Danemark. Pour notre étude de cas et puisqu'on s'intéresse à la population âgée de plus que 50 ans nous avons opté à l'utilisation du modèle Cairn Blake Dowd qui est plus performant pour les cohortes possédant un âge plutôt avancé. Selon la documentation fournie par la vignette de StMoMo, il est conçu d'utiliser le modèle CBD pour la projection des taux de mortalité s'il s'agit d'une population âgée et la durée de projection n'est pas assez large. Dans notre cas nous avons constaté que le modèle CBD a présenté un intervalle de confiance moins large que celui du modèle de Lee-Carter, mais cet intervalle couvre une période plus vaste au niveau du CBD que celui du Lee-Carter. Pour conclure le projet a été très bénéfique pour tous les membres de l'équipe et nous a permis de découvrir de plus proche le monde d'actuariat vie en travaillant sur des données réelles.

Bibliographie

- [1] BusinessFrance ; lien : <https://www.businessfrance.fr/danemark-l-esperance-de-vie-continue-a-augmenter>.
- [2] Ressources Actuarielles. lien : [http://www.ressources-actuarielles.net/EXT/ISFA/1226-02.nsf/9c8e3fd4d8874d60c1257052003eced6/ff3077c1f701b9b0c1257705004878f7/\\$FILE/Namtchueng.pdf](http://www.ressources-actuarielles.net/EXT/ISFA/1226-02.nsf/9c8e3fd4d8874d60c1257052003eced6/ff3077c1f701b9b0c1257705004878f7/$FILE/Namtchueng.pdf).
- [3] A. Matoussi. (Année 2017-2018). Actuariat - Assurance vie chapitre 2 - Mortalité stochastique, Université Le Mans (Maine) - Institut du Risque et de l'Assurance du Mans.
- [4] S.Kaakai - A. Matoussi (Année 2020-2021). Actuariat vie chapitre 3 - Mortalité stochastique, ESPRIT (École Supérieure Privée d'Ingénierie et de Technologie).