Sujet 7 : Comparaison de deux modèles de mortalité

Adam Kaak
Amira Chehaibi
Hechem Ben Farhat
Mohamed Jaoua
Mohamed Yahia Bourguiba

Année Universitaire 2020/2021

Plan

Introduction

L'objectif du projet est d'estimer et de prédire le taux de mortalité des danois agés plus de 50 ans avec 2 modèles différents:

- Le modèle de Lee-Carter.
- Le modèle de Cairns Blake Dowd (CBD).

Taux de mortalité

- RAPPEL : on peut déduire les probabilités annuelles de décès de la force de mortalité μ:

$$q_x(t) = \mathbb{P}(T_x(t) \leq 1) = e^{-\int_0^1 \mu(x+s,t+s)ds}$$

Sous l'hypothèse de constance par morceau de μ, $q_x(t) = e^{-\mu(x,t)}$.

- TABLES DE MORTALITÉ : collection de probabilités annuelles de décès $q_x, \ldots, q_{x+n}$.
- EXEMPLES:
  - Table de mortalité PERIODIQUE: (mortalité de la population en t) :

$$q_x, \ldots, q_{x+n} = q_x(t), \ldots q_{x+n}(t)$$

  - TABLE DE MORTALITÉ D'UNE COHORTE (individus d'âges x en t) :

$$q_x, \ldots, q_{x+n} = q_x(t), \ldots q_{x+n}(t+n)$$

Lecture de données

Comme indiqué dans l'énoncé on va travailler sur la population danoise bien évidemment notre pays concerné c'est le Danemark. Pour ce faire nous avons eu recours au site Human Mortality Database (HMD). C'est une base de données qui a été créée pour fournir des données détaillées sur la mortalité et la population aux chercheurs, étudiants, journalistes, analystes des politiques et autres personnes intéressées par l'histoire de la longévité humaine. on a utilisé la commande hmd.mx() pour le téléchargement.

Modèle:

$$\log(\mu(x,t)) = \alpha_x + \beta_x \kappa_t + \epsilon_{xt}, \quad t = 1,..,n, \ x = x_{min},..,x_{max},$$

avec: exp(ax): comportement moyen de la mortalité.
kt: Évolution temporelle du taux de mortalité.
bx: Vitesse de réduction de la mortalité par age.
Les paramètres ne sont pas identifiables:

$$(\alpha_x, \beta_x, \kappa_t) \to (\alpha_x + c_1\beta_x, \frac{1}{c_2}\beta_x, c_2(\kappa_t - c_1))$$

Contraintes:

$$\sum_x \beta_x = 1, \quad \sum_t \kappa_t = 0.$$

Procédure d'estimation Etape 1

Estimation des paramètres à partir des données historiques.

- BUT: Estimation par méthode des moindres carrés en minimisant:

$$\min_{\alpha_x,\beta_x,\kappa_t} \sum_{t=1}^{n} \sum_{x=x_{min}}^{x_{max}} (\log(\mu_{x,t}) - \alpha_x - \beta_x \kappa_t)^2$$

- PROCEDURE: Décomposition en valeur singulière (SVD):
  1. $\hat{\alpha}_x = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} \log(\mu_{x,t})$.
  2. Pas de formules explicite pour (β_x) et (κ_t): estimation numérique.

Projection de la force de mortalité future.

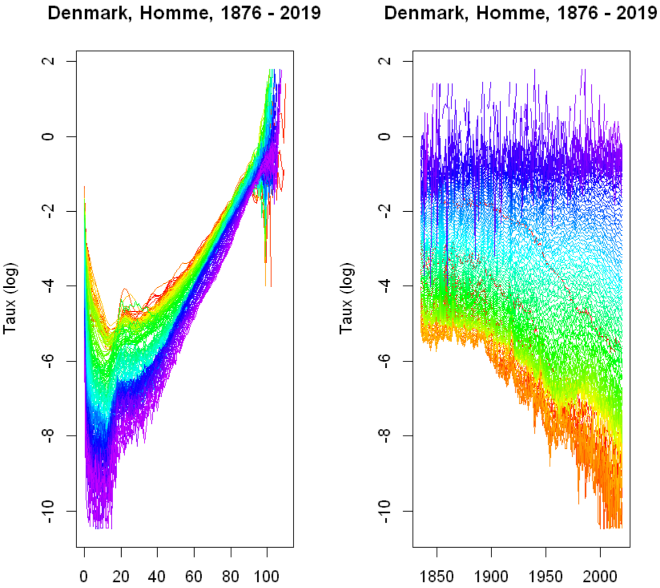
$$\log(\mu(x,t)) = \alpha_x + \beta_x \kappa_t.$$

- Pour projeter la mortalité, il suffit de projeter la série temporelle (κ_t).
- Les valeurs de (κ_t) peuvent tre modélisées par une **série chronologique**:
- EXEMPLE POPULAIRE: marche aléatoire avec tendance

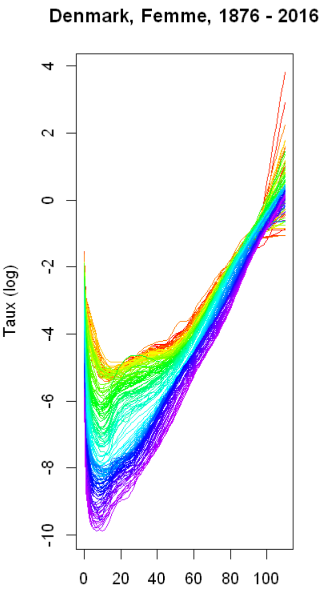
$$\kappa_t = d + \kappa_{t-1} + \xi_t.$$

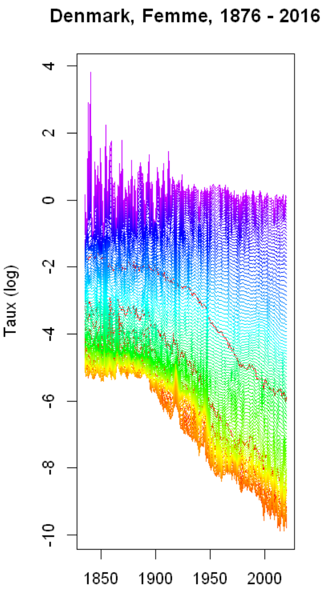
- On peut obtenir des intervalles de confiance en simulant les trajectoires de (κ_t).

Estimation du Modèle Lee-Carter

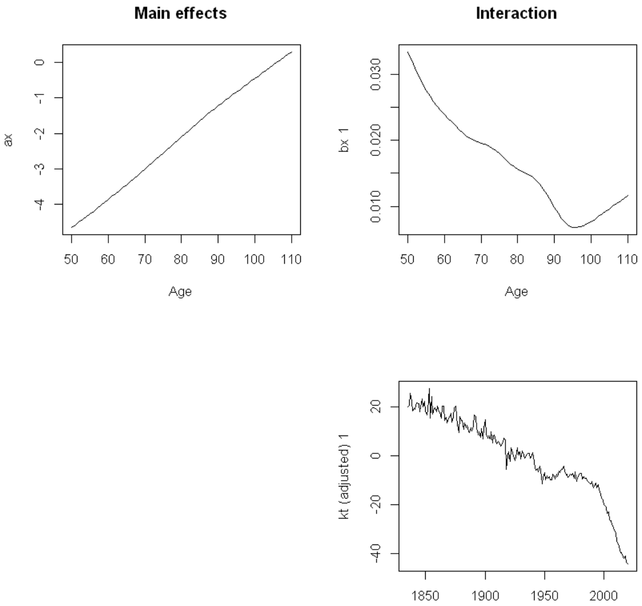


Estimation du Modèle Lee-Carter

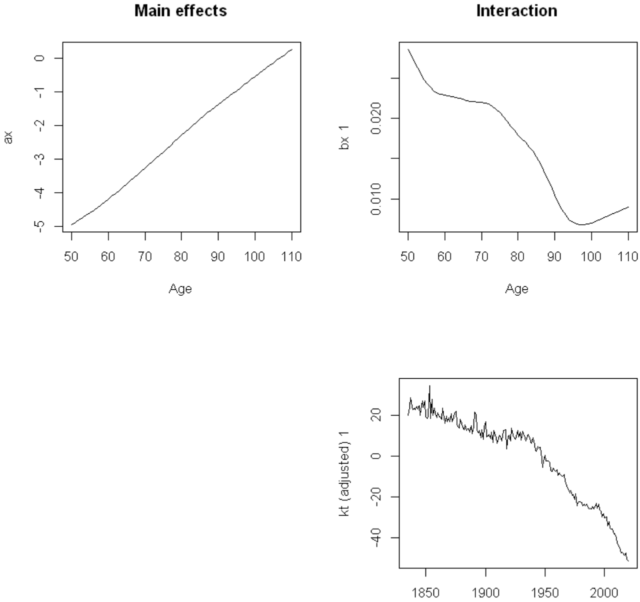




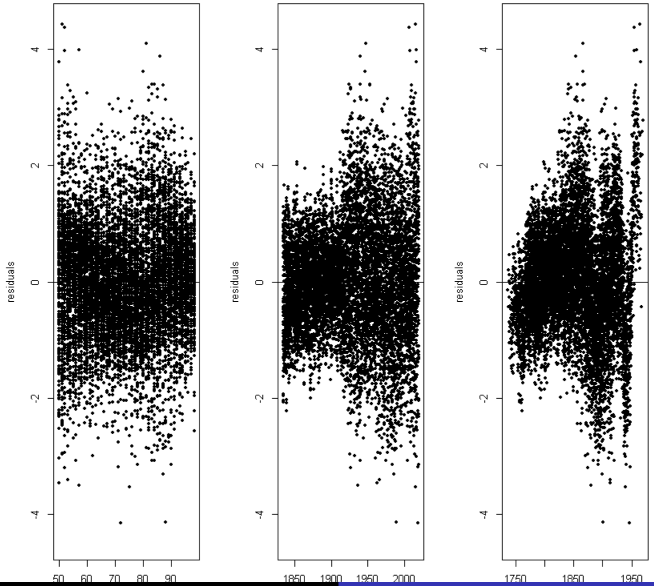
Estimation du Modèle Lee-Carter



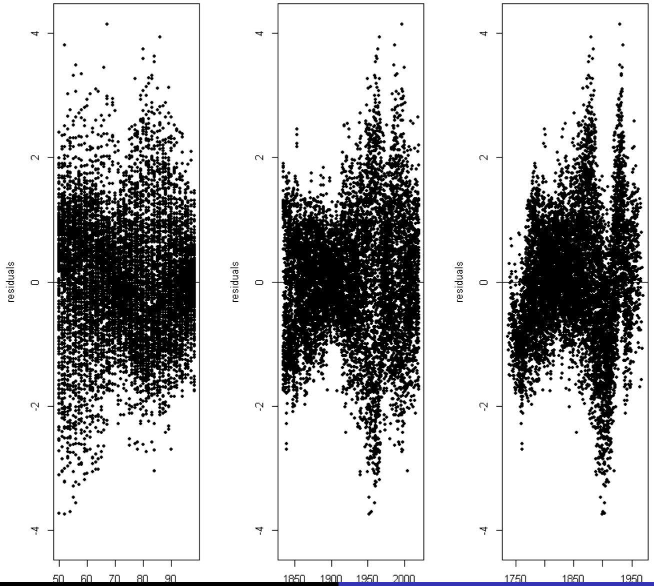
Estimation du Modèle Lee-Carter



Estimation du Modèle Lee-Carter



Estimation du Modèle Lee-Carter



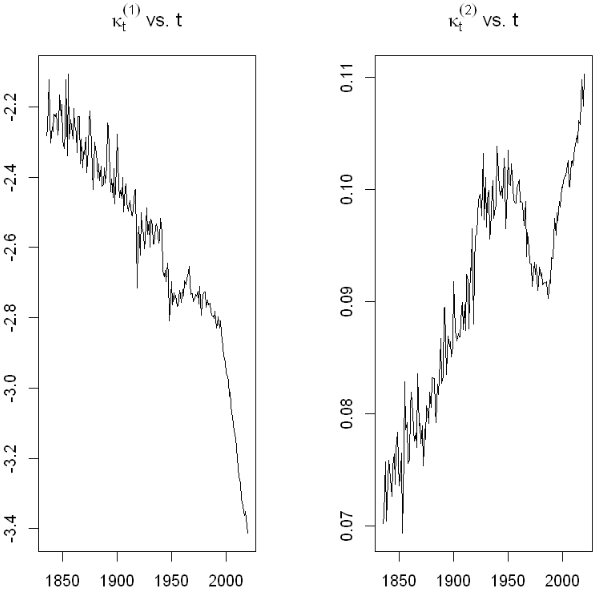
Modèle Cairns Blake Dowd

C'est l'une des variantes les plus importantes du modèle Lee-Carter.Il se repose sur la linéarité de la logit des probabilités de décès d'un an à des âges plus avancés.

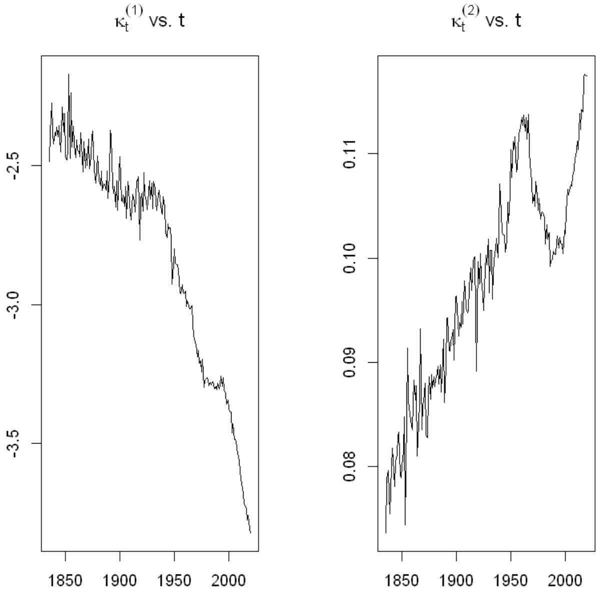
$$\ln[\frac{q_{x,t}}{p_{x,t}}] = k_t^{(1)} + k_t^{(2)}(x - \bar{x}) + \epsilon_{x,t}$$

ou Kt(1) et Kt(2) sont deux processus stochastiques et représentent les deux indices temporels du modèle;
qx,t et px,t représentent respectivement le décès et la probabilité de survie au temps t pour un individu agé de x;

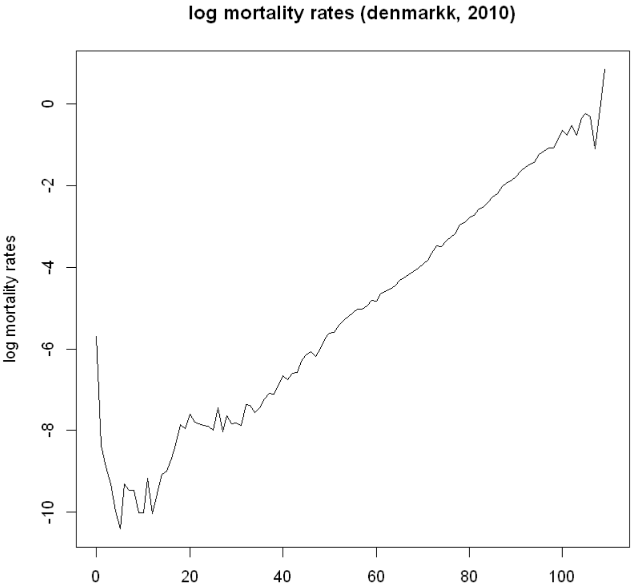
Estimation du Modèle CBD



Estimation du Modèle CBD



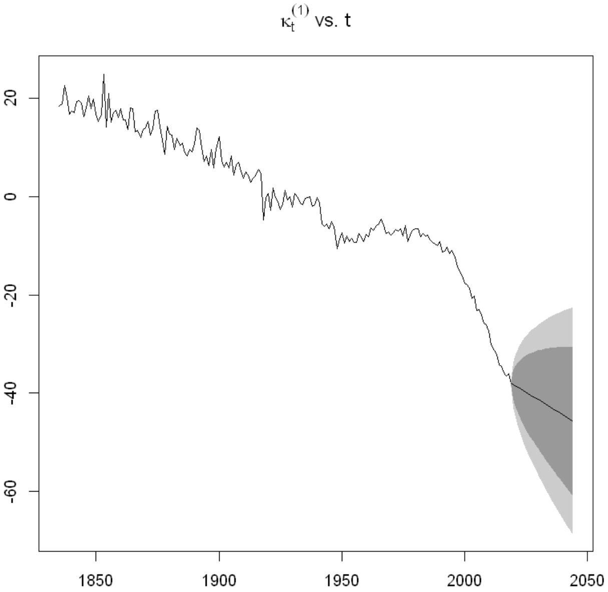
Log taux de mortalité de Lee-Carter



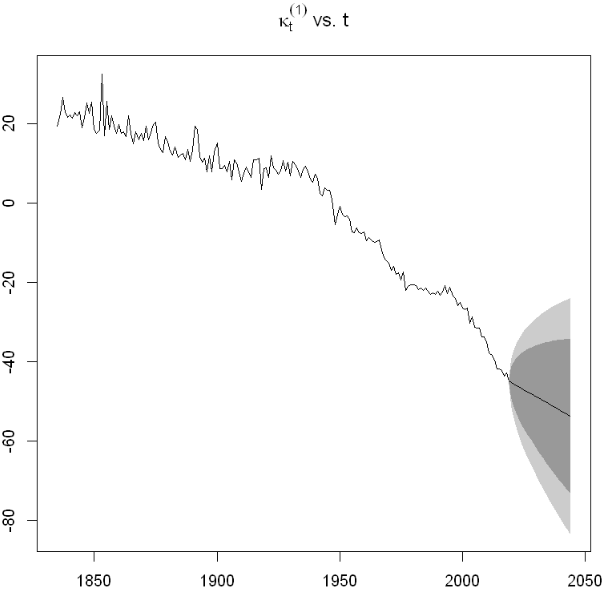
Procédure par défaut de projection des taux mortalité implémentée dans StMoMo

Les prévisions et la simulation des taux de mortalité nécessite la modélisation de ces indices à l'aide de séries chronologiques techniques.
Pour les indices de période, nous envisageons deux approches de modélisation alternatives. Une première possibilité est d'utiliser l'approche standard dans la documentation actuarielle et de supposer que les indices de période suivent une multivariée marche aléatoire avec dérive.

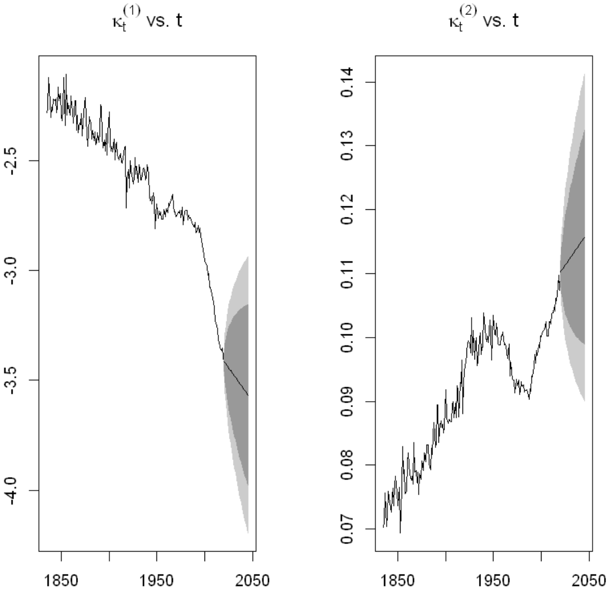
Projection des Taux de mortalité avec forecast



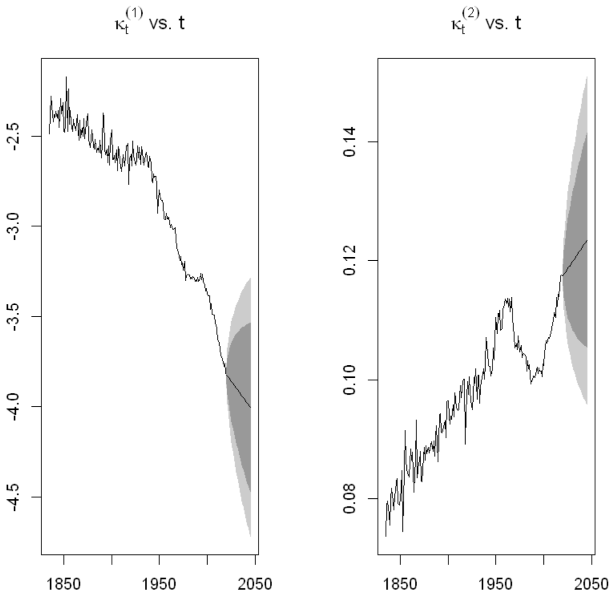
Projection des Taux de mortalité avec forecast



Projection des Taux de mortalité avec forecast



Projection des Taux de mortalité avec forecast



Conclusion

CBD est plus performant pour les cohortes possédant un age plutôt avancé.
Utilisation du modèle CBD pour la projection des taux de mortalité s'il s'agit d'une population agé et la durée de projection n'est pas assez large.
CBD a présenté un intervale de confiance moin large que celui de Lee-Carter, mais cet intervalle couvre une période plus vaste au niveau du CBD que celui du Lee-Carter.