CLP Lab 1 Report

Albert Aparicio Isarn
albert.aparicio.isarn@alu-etsetb.upc.edu

Héctor Esteban
hect.esteban@gmail.com

Nota: Al final del documento se encuentra la resolución del estudio previo.

1. Análisis de curvas ROC

En las tablas 1 y 2 se muestran las probabilidades de error para los clasificadores Lineal y Cuadrático, respectivamente.

SNR / Clase	**3 dB**	**0 dB**	**-3 dB**	-10 dB
Clase 1	$5 \cdot 10^{-3}$	0,042	0,107	0.3
Clase 2	$8 \cdot 10^{-3}$	0,034	0,106	0.31

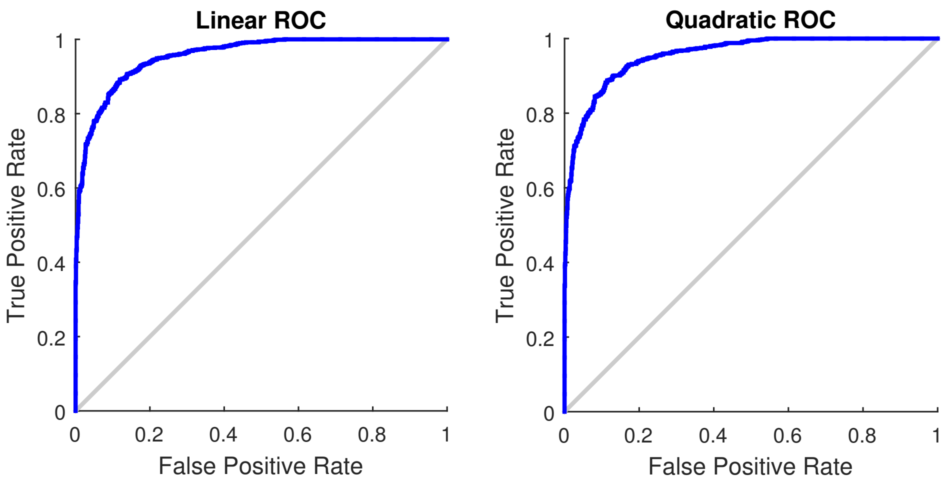
Cuadro 1: Probabilidades de error para el clasificador Lineal (LC)

SNR / Clase	**3 dB**	**0 dB**	**-3 dB**	-10 dB
Clase 1	$7 \cdot 10^{-3}$	0,041	0,114	0.292
Clase 2	$3 \cdot 10^{-3}$	0,036	0,118	0.306

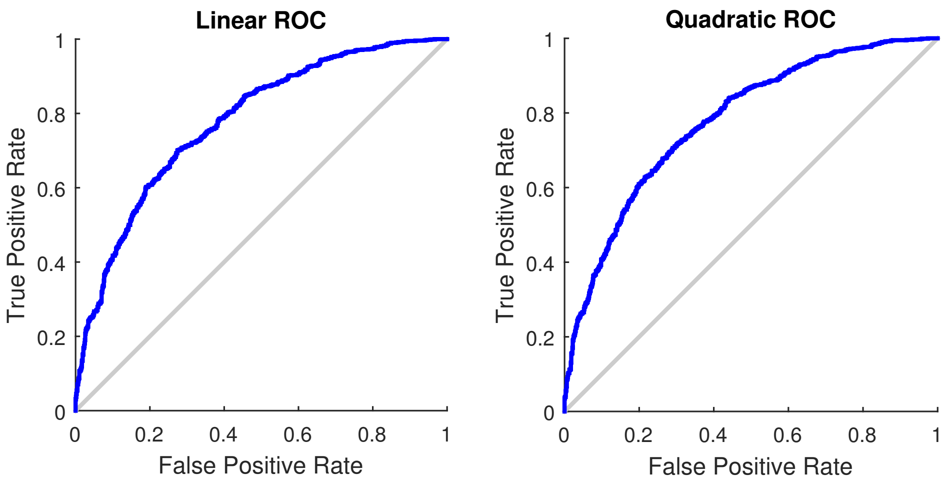
Cuadro 2: Probabilidades de error para el clasificador Cuadrático (QC)

En las figuras 1a y 1b se muestran las curvas ROC para los casos de -3 y -10 dB, respectivamente.

Las variaciones en las distancias de Mahalanobis son debidas al error en las estimaciones de las medias y covarianzas de los vectores de las clases hechas por la función 'mahal'.

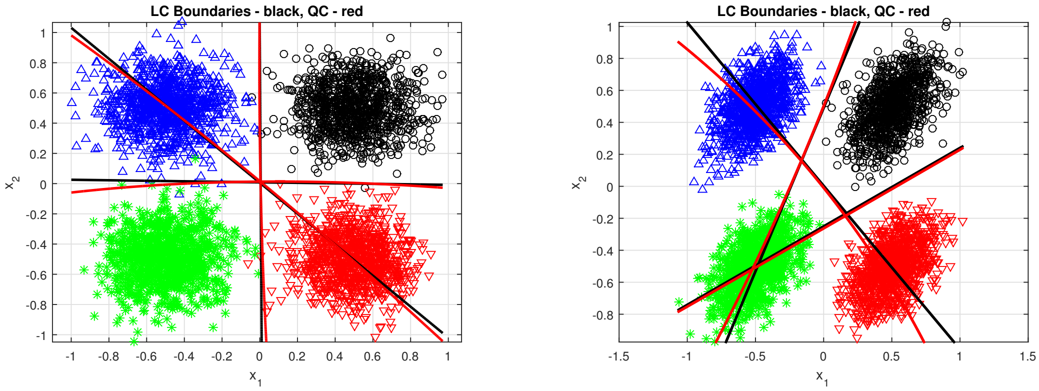


(a) SNR $= -3dB$



(b) SNR $= -10dB$

Figura 1: Curvas ROC de los clasificadores Lineal y Cuadrático



(a) $\rho = 0$ (b) $\rho = 0{,}5$

Figura 2: Diagramas *Scatter* y sus fronteras de decisión para el caso 2.

2. Autovalores de matriz de covarianza y forma de los clusters

2.1. QPSK Caso 2

En las figuras 2a y 2b se muestran los diagramas de scatter y sus fronteras de decisión, para los casos $\rho = 0$ y $\rho = +0{,}5$, respectivamente.

La matriz de confusión para el clasificador lineal en el caso $\rho = 0$ se muestra en (1):

$$\begin{pmatrix} 999 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 999 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 999 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 998 \end{pmatrix} \tag{1}$$

En (2) se muestra la matriz del clasificador cuadrático:

$$\begin{pmatrix} 998 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 999 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 998 \end{pmatrix} \tag{2}$$

Las matrices de confusión para los clasificadores lineal y cuadrático, en el caso $\rho = 0{,}5$ se muestran en (3) y (4), respectivamente:

$$\begin{pmatrix} 999 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1000 \end{pmatrix} \tag{3}$$

$$\begin{pmatrix} 999 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1000 \end{pmatrix} \quad (4)$$

Las probabilidades de error para los casos $\rho = 0$ y $\rho = 0{,}5$ están organizadas en las Tablas 3 y 4, respectivamente:

Clase / **Clasificador**	**1**	**2**	**3**	4
Lineal (LC)	$1 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-3}$	$2 \cdot 10^{-3}$
Cuadrático (QC)	$2 \cdot 10^{-3}$	0	$1 \cdot 10^{-3}$	$2 \cdot 10^{-3}$

Cuadro 3: Probabilidades de error para el caso $\rho = 0$

Clase / **Clasificador**	**1**	**2**	**3**	4
Lineal (LC)	$1 \cdot 10^{-3}$	0	0	0
Cuadrático (QC)	$1 \cdot 10^{-3}$	0	0	0

Cuadro 4: Probabilidades de error para el caso $\rho = 0{,}5$

Observando las matrices de confusión se puede apreciar como los resultados para $\rho = 0$ y $\rho = 0{,}5$ son prácticamente iguales. Cabe destacar que se produce una diferencia en las formas de las Gausianas y de las fronteras en ambos casos debido a que en el caso de $\rho = 0$ los dos autovalores de la matriz coinciden con lo que provocan una gausiana totalmente circular, en cambio para $\rho = 0{,}5$ su forma es parecida a la de una elipse.

2.2. QPSK Caso 3

Las probabilidades de error al aplicar LC y QC, para los dos valores de SNR se muestran en las Tablas 5 y 6:

Clase / **Clasificador**	**1**	**2**	**3**	4
Lineal (LC)	0	$6 \cdot 10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-3}$	0
Cuadrático (QC)	0	$3 \cdot 10^{-3}$	0	0

Cuadro 5: Probabilidades de error para $SNR = 10dB$

Clasificador \ **Clase**	**1**	**2**	**3**	4
Lineal (LC)	0,064	0,094	0,087	0,037
Cuadrático (QC)	0,073	0,064	0,067	0,044

Cuadro 6: Probabilidades de error para $SNR = 5dB$

Los autovalores teóricos y prácticos están dispuestos en las Tablas 7 y 8. Para obtener los valores teóricos, la varianza se ha obtenido de las diagonales de la matriz de covarianza:

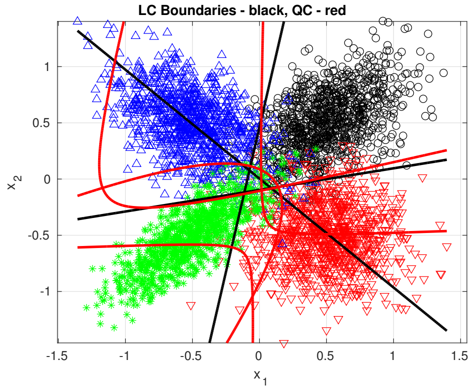
Autovalor \ **Clase**	**1**	**2**	**3**	4
SNR = $10dB$				
λ_1	0,0375	0,0250	0,0125	0,0450
λ_2	0,0125	0,0250	0,0375	0,0050
SNR = $5dB$				
λ_1	0,1187	0,0791	0,0396	0,1424
λ_2	0,0396	0,0791	0,1187	0,0158

Cuadro 7: Autovalores teóricos para los dos valores de SNR

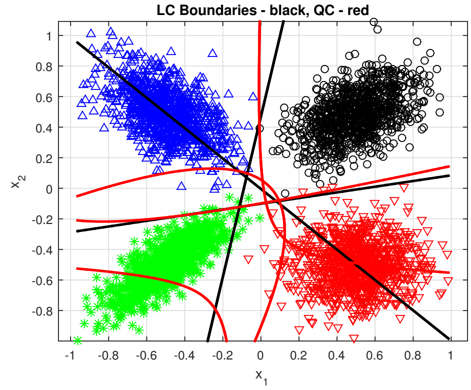
Autovalor \ **Clase**	**1**	**2**	**3**	4
SNR = $10dB$				
λ_1	0,0375	0,0250	0,0375	0,0450
λ_2	0,0125	0,0250	0,0125	0,0050
SNR = $5dB$				
λ_1	0,1187	0,0791	0,0396	0,1424
λ_2	0,0396	0,0791	0,1187	0,0158

Cuadro 8: Autovalores prácticos para los dos valores de SNR

En las figuras 3a y 3b se pueden ver los diagramas Scatter para los dos valores de SNR trabajados:



(a) SNR $= 5dB$



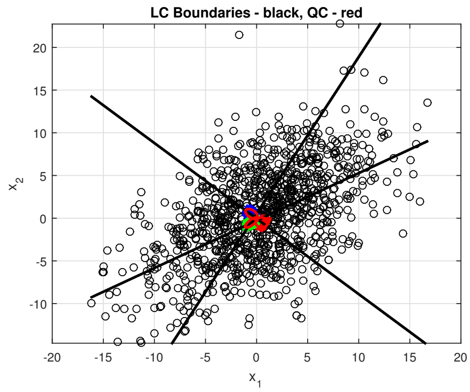
(b) SNR $= 10dB$

Figura 3: Diagramas *Scatter* y sus fronteras de decisión para los dos valores de SNR del caso 3.

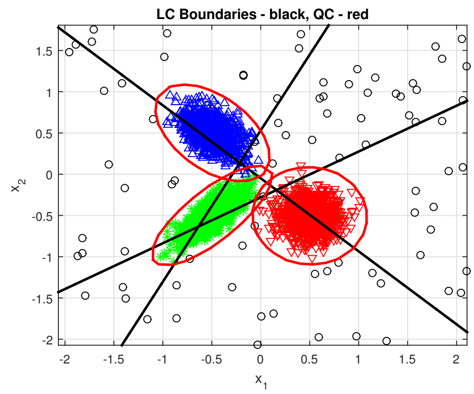
2.2.1. Multiplicar covarianza de la 1ra clase

Al aumentar el valor de σ de la clase 1 hemos aumentado su rango de afluencia por todo el plano, con lo que resulta imposible separarla de las demás clases por lineas rectas. En cambio, si utilizamos clasificadores cuadráticos estos nos permiten envolver de una manera determinada las clases y así conseguir la separación deseada. En nuestro ejemplo obtuvimos un error provocado por el clasificador lineal de 0,2075 y de 0,005 para el clasificador cuadrático. También se aprecia que debido a los valores no nulos de ρ en los símbolos 1,3 y 4, sus formas no son totalmente circulares.

El resultado se muestra en la figura 4:



(a) Diagrama *Scatter* con las fronteras de decisión a tamaño original



(b) Diagrama *Scatter* con la zona central ampliada, mostrando las fonteras cuadráticas elípticas

Figura 4: Diagramas *Scatter* con la covarianza de la 1ra clase ampliada

Albert Aparicio Isarn 39410923D

CLP Lab 1. Estudio Previo

2 $\underline{\underline{C}} = \frac{1}{d}\sigma^2 \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}$. Obtener autovalores teóricos en función de ρ y σ^2

$d=2$ $\quad \det(A-\lambda I)=0$

$$\det(\underline{\underline{C}}-\lambda \underline{\underline{I}}) = \det\left(\frac{1}{2}\sigma^2\begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\right) = \begin{vmatrix} \frac{1}{2}\sigma^2 - \lambda & \frac{\rho\sigma^2}{2} \\ \frac{\sigma^2\rho}{2} & \frac{\sigma^2}{2}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\left(\frac{\sigma^2}{2}-\lambda\right)^2 - \left(\frac{\sigma^2\rho}{2}\right)^2 = 0$$

$$\frac{\sigma^4}{4} + \lambda^2 - \lambda\cdot 2\frac{\sigma^2}{2} - \frac{\sigma^4\rho^2}{4} = 0$$

$$\lambda^2 - \lambda\cdot\sigma^2 + \left(\frac{\sigma^4}{4} - \frac{\sigma^4\rho^2}{4}\right) = 0$$

$$\underline{\lambda^2 - \lambda\cdot\sigma^2 + \frac{\sigma^4}{4}(1-\rho^2) = 0}$$

$$\lambda = \frac{\sigma^2 \pm \sqrt{(-\sigma^2)^2 - \cancel{4}\cdot 1\cdot\left(\frac{\sigma^4}{\cancel{4}}(1-\rho^2)\right)}}{2\cdot 1}$$

$$\lambda = \frac{\sigma^2 \pm \sqrt{\sigma^4 - \sigma^4(1-\rho^2)}}{2} = \frac{\sigma^2 \pm \sqrt{\sigma^4\cdot\rho^2}}{2}$$

$$\underline{\lambda = \frac{\sigma^2 \pm \sigma^2\rho}{2}}$$

$$\boxed{\lambda_1 = \frac{\sigma^2 + \sigma^2\rho}{2} = \frac{\sigma^2}{2}(1+\rho)}$$

$$\boxed{\lambda_2 = \frac{\sigma^2 - \sigma^2\rho}{2} = \frac{\sigma^2}{2}(1-\rho)}$$

Obs.: relación entre ejes de las elipses (cortes horizontales de la pdf gaussiana) es la relación entre los $\underline{\lambda_i}$