Formación para la Investigación
Escuela de Física
Facultad de Ciencias
Universidad Industrial de Santander

Manual de incertidumbres para el laboratorio de física

Método de mínimos cuadrados

Héctor F. Hernández G.

Bucaramanga - Agosto de 2025

Versión 2.0

Resumen

Esta guía ofrece una introducción clara y accesible al tratamiento de la incertidumbre experimental, dirigida a estudiantes que se inician en los laboratorios de física. Se abordan los conceptos fundamentales necesarios para estimar y reportar adecuadamente la incertidumbre en diferentes contextos experimentales, tanto en mediciones directas como indirectas. Además, se incorpora un capítulo completo dedicado al método de mínimos cuadrados, utilizado para el análisis de datos lineales, con un enfoque que considera la influencia de la resolución instrumental en los parámetros ajustados. La guía propone un enfoque práctico, basado en ejemplos detallados y el uso de herramientas computacionales como Python (con bibliotecas como numpy, matplotlib, sympy y statsmodels), que permiten automatizar los cálculos y visualizar los resultados de forma clara y ordenada. Al final del documento se incluyen tablas de fórmulas útiles, criterios para la selección de métodos y recomendaciones para incorporar de manera rigurosa la incertidumbre en los informes de laboratorio.

Palabras clave: error experimental, incertidumbre, desviación estándar, propagación de errores, suma en cuadratura, análisis de datos, mínimos cuadrados, ajuste lineal, laboratorio de física.

Introducción

En toda medición experimental existe una incertidumbre asociada. No importa cuán cuidadoso sea el procedimiento o qué tan sofisticados sean los instrumentos: siempre hay un margen de duda sobre el valor medido. Reconocer y cuantificar esa incertidumbre es una parte fundamental del trabajo experimental.

Esta guía ha sido elaborada como apoyo para estudiantes de primeros semestres que participan en cursos de laboratorio de física. Su propósito es ayudarles a comprender cómo se estiman las incertidumbres experimentales y cómo se deben reportar de forma clara, coherente y fundamentada [1], [2], [3], [4], [5].

Además, se introduce el uso básico de Python como herramienta para automatizar los cálculos y reducir errores de redondeo, utilizando bibliotecas accesibles como **numpy**, **matplotlib**, **sympy** y **statsmodels**. Este enfoque computacional permite automatizar cálculos y visualizar resultados de forma clara, fomentando además el desarrollo de competencias digitales en el contexto de la práctica experimental[1].

La correcta estimación y comunicación de la incertidumbre no es sólo una formalidad académica: es una práctica esencial en la ciencia. Esperamos que esta guía ayude a fortalecer desde el inicio una cultura de rigor, claridad y honestidad en la actividad experimental.

1. Estimación de la incertidumbre en mediciones directas

En física experimental, una medición directa es aquella que se obtiene de un instrumento (ej. medir una longitud o un tiempo). Cuando estas mediciones se utilizan para calcular otra magnitud mediante una relación funcional (como calcular la velocidad a partir de distancia y tiempo), el resultado se denomina **medición indirecta**.

En el caso de una medición directa, la meta de un buen análisis es reportar la medición con un valor central y una incertidumbre[2] total (ΔX) que cuantifique de manera realista nuestra confianza en el resultado.

Esta incertidumbre total proviene de dos fuentes independientes [6], [7]:

- Incertidumbre estadística (Tipo A): Surge de la dispersión aleatoria e inevitable al repetir una medición varias veces. Se evalúa usando métodos estadísticos.

- Instrumental (Tipo B): Es una característica inherente al instrumento, relacionada con su resolución o calibración. No se reduce al repetir mediciones.

1.1. Evaluación de la incertidumbre estadística (Tipo A)

Cuando se realizan n mediciones repetidas de una magnitud X, el mejor estimador de su valor es el promedio ($\bar{X}$). La dispersión de los datos se caracteriza por la desviación estándar muestral (σ).

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \quad ; \quad \sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2},$$

donde las X_i son el conjunto de mediciones realizadas.

[1]La información de cada una de las librerías está disponible en:

- `https://numpy.org/doc/stable/`
- `https://matplotlib.org/`
- `https://www.sympy.org/es/`
- `https://www.statsmodels.org/stable/`

[2]En esta guía usaremos el término *incertidumbre* de manera formal, como el parámetro que caracteriza la dispersión de los valores que podrían ser razonablemente atribuidos a la magnitud medida. Aunque coloquialmente se use el término “error”, preferimos incertidumbre por ser más preciso conceptualmente.

La incertidumbre asociada al promedio debido a esta dispersión estadística es:

$$\Delta X_{\mathrm{estad}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Como se observa, esta incertidumbre disminuye al aumentar el número de mediciones (n). Si se realiza una sola medición, esta componente de la incertidumbre es nula.

1.2. Evaluación de la incertidumbre instrumental (Tipo B)

Esta incertidumbre se estima a partir de la información del instrumento. Para los laboratorios introductorios, una regla común es:

- Instrumentos digitales: la incertidumbre es la menor lectura que muestra el display del apararato de medición, por ejemplo, ±0,01 V para un voltímetro que mide 5,23 V.

- Instrumentos analógicos: la incertidumbre es la mitad de la menor división de la escala, por ejemplo, una regla milimetrada con una menor división de 1 mm la incertidumbre será ±0,5 mm.

1.3. Combinación de incertidumbres: la incertidumbre total

Un resultado experimental riguroso debe considerar ambas fuentes de error. Como las incertidumbres de Tipo A y Tipo B son independientes, se combinan mediante una suma en cuadratura:

$$\Delta x_{\mathrm{total}} = \sqrt{(\Delta x_{\mathrm{estad}})^2 + (\Delta x_{\mathrm{instr}})^2}\,.$$

Esta incertidumbre total combinada es el valor final que cuantifica la confianza en nuestra medición directa. Es este valor el que se debe usar para reportar el resultado y para "propagar" en cálculos posteriores (como veremos en la Sección 2).

1.4. Procedimiento general

1. Si se tiene una sola medición: La incertidumbre estadistica es nula. La incertidumbre total es simplemente la instrumental ($\Delta x_{\mathrm{total}} = \Delta x_{\mathrm{instr}}$).

2. Si se tienen múltiples mediciones:

   a) Calcular $\Delta x_{\mathrm{estad}}$ a partir de los datos.
   b) Identificar $\Delta x_{\mathrm{instr}}$ a partir del instrumento.
   c) Calcular $\Delta x_{\mathrm{total}}$ usando la fórmula de combinación en cuadratura.

Es importante analizar cuál de las dos contribuciones domina, pues esto indica cómo se puede mejorar el experimento.

- Si $\Delta X_{\mathrm{instr}} \gg \Delta X_{\mathrm{estad}}$: la incertidumbre instrumental domina y hacer más mediciones no mejorará significativamente el resultado

- Si $\Delta X_{\mathrm{estad}} \gg \Delta X_{\mathrm{instr}}$: la dispersión estadística domina y se puede mejorar el resultado aumentando el número de mediciones

- Si ambas son comparables: las dos contribuyen significativamente y ninguna puede ignorarse

1.5. Ejemplo numérico: combinación de incertidumbres

Consideremos la medición de la velocidad de un cuerpo usando un sensor digital con resolución de $\pm 0{,}01\,\mathrm{m/s}$. Se realizaron cinco mediciones de velocidad en m/s:

Medición 1	Medición 2	Medición 3	Medición 4	Medición 5
4,95	5,01	4,98	4,99	5,02

Paso 1: Cálculo del promedio y desviación estándar

$$\bar{v} = 4{,}99\,\mathrm{m/s}, \quad \sigma = 0{,}027\,\mathrm{m/s}\,.$$

Paso 2: Incertidumbre estadística del promedio

$$\Delta_{\text{estad}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{0{,}027}{\sqrt{5}} \approx 0{,}012\,\mathrm{m/s}\,.$$

Paso 3: Combinación con la incertidumbre instrumental

El resultado no puede reportarse solo con la incertidumbre estadística. La incertidumbre instrumental ($\Delta_{\text{instr}} = 0{,}01\,\mathrm{m/s}$) debe combinarse con la estadística usando:

$$\Delta v = \sqrt{\Delta^2_{\text{estad}} + \Delta^2_{\text{instr}}} = \sqrt{(0{,}012)^2 + (0{,}01)^2} \approx 0{,}0158\,\mathrm{m/s}\,.$$

Paso 4: Redondeo y reporte del resultado

La incertidumbre total se redondea a una cifra significativa: $0{,}0158 \to 0{,}02,\mathrm{m/s}$. El valor medido se ajusta al mismo número de decimales que la incertidumbre. Por lo tanto, el resultado final se debe reportar como:

$$v = (4{,}99 \pm 0{,}02)\,\mathrm{m/s}\,.$$

La librería **SymPy** permite realizar cálculos simbólicos en Python, como simplificación de expresiones, derivación, integración y operaciones exactas con fracciones. Ofrece una forma de trabajar con expresiones matemáticas similar al papel, pero con la precisión y automatización del entorno computacional [8].A continuación se muestra una implementación en Python para el ejemplo 1.5.

Note que primero que todo se debe importar la librería **SymPy**[3].

```python
# Librerías
import sympy
from sympy import *
# Datos: mediciones de velocidad en m/s
v = [4.95, 5.01, 4.98, 4.99, 5.02]
# Número de mediciones
n = len(v)
# Valor promedio
v_prom = sum(v) / n
# Desviación estándar muestral
suma_cuadrados = sum((vi - v_prom)**2 for vi in v)
sigma = (sqrt(suma_cuadrados / (n - 1))).evalf(5)
```

[3]Nota: El lenguaje de programación Python utiliza el punto (.) como separador decimal por defecto. En el texto narrativo de esta guía, se empleará la coma (,) conforme a la convención del español.

```python
# Incertidumbre estadística del promedio
D_estad = (sigma / sqrt(n)).evalf(5)
# Incertidumbre instrumental (Resolución del instrumento de medición)
D_instr = 0.01
# Incertidumbre total combinada (tipo A + tipo B)
D_total = (sqrt(D_estad**2 + D_instr**2)).evalf(5)
# Se Muestran los resultados hasta con seis decimales
print(f"Promedio (v): {v_prom} m/s")
print(f"Desviación estándar (sigma): {sigma} m/s")
print(f"Incertidumbre estadística (D_estad): {D_estad} m/s")
print(f"Incertidumbre instrumental (D_instr): {D_instr} m/s")
print(f"Incertidumbre total combinada (D v): {D_total} m/s")
```

Promedio (v): 4.99 m/s
Desviación estándar (sigma): 0.027386 m/s
Incertidumbre estadística (D_{estad}): 0.012247 m/s
Incertidumbre instrumental (D_{instr}): 0.01 m/s
Incertidumbre total combinada (Dv): 0.015811 m/s

Note que en este ejemplo, ambas contribuciones son comparables:

- Incertidumbre Tipo A: $0{,}012\,\text{m/s} \rightarrow$ contribuye $\sim 59\,\%$ al error total
- Incertidumbre Tipo B: $0{,}010\,\text{m/s} \rightarrow$ contribuye $\sim 41\,\%$ al error total

Importante: Cuando ambas contribuciones son del mismo orden de magnitud, ninguna puede ignorarse. Se combinan cuadráticamente como se mostró en el Paso 3.

1.6. Discrepancia con valores de referencia

Cuando se dispone de un valor teórico o de referencia, es útil calcular la discrepancia o el error porcentual[4]:

$$\text{Error}\,\% = \frac{|x_{\text{exp}} - x_{\text{teórico}}|}{x_{\text{teórico}}} \times 100\,. \tag{1}$$

Este valor permite:

- Comparar la precisión de mediciones de diferentes magnitudes.
- Evaluar si las diferencias son significativas considerando las incertidumbres.
- Identificar posibles errores sistemáticos en el procedimiento experimental.

2. Estimación de la incertidumbre en mediciones indirectas

En la sección anterior, analizamos cómo determinar la incertidumbre en mediciones directas. Sin embargo, frecuentemente necesitamos calcular magnitudes que dependen de varias mediciones directas (por ejemplo, la densidad a partir de masa y volumen). Este proceso requiere **propagar** las incertidumbres de las variables medidas hacia la magnitud calculada.

[4] Preferimos el término el término **discrepancia** al de **error** para evitar la confusión con el concepto de error aleatorio o sistemático inherente a la medición.

2.1. Propagación de incertidumbres: método de suma en cuadratura

Cuando una magnitud M depende de varias variables medidas independientemente:

$$M = M(X, Y, Z, \dots)\,,$$

y estas variables tienen incertidumbres ΔX, ΔY, ΔZ, etc., la **incertidumbre absoluta** en M se calcula mediante:

$$\Delta M = \sqrt{\left(\frac{\partial M}{\partial X}\Delta X\right)^2 + \left(\frac{\partial M}{\partial Y}\Delta Y\right)^2 + \left(\frac{\partial M}{\partial Z}\Delta Z\right)^2 + \cdots}\,. \tag{2}$$

Este método, conocido como **propagación por suma en cuadratura**, es el estándar en física experimental porque:

- Considera que los errores son aleatorios e independientes.
- Proporciona una estimación estadísticamente realista.
- Se basa en el principio de que las varianzas de variables independientes se suman.

Nota importante: Las cantidades ΔX, ΔY, etc. son las **incertidumbres totales** de cada variable. Como vimos en la Sección 1.3, estas pueden ser:

- Solo instrumentales (si hay una única medición)
- Combinadas usando la ecuación fundamental: $\Delta X = \sqrt{(\Delta X_{\text{instr}})^2 + (\Delta X_{\text{estad}})^2}$

La fiabilidad de una medición indirecta está directamente determinada por la rigurosidad con la que se estiman las incertidumbres de las mediciones directas que la componen:

- Los errores son pequeños comparados con los valores medidos.
- Los errores siguen distribuciones aproximadamente normales.
- Las variables son estadísticamente independientes.

2.2. Fundamento matemático

Para una función diferenciable $M(X_1, X_2, \dots, X_n)$, si cada variable tiene un pequeño error aleatorio δX_i, el diferencial total es:

$$\delta M \approx \frac{\partial M}{\partial X_1}\delta X_1 + \frac{\partial M}{\partial X_2}\delta X_2 + \cdots + \frac{\partial M}{\partial X_n}\delta X_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial M}{\partial X_i}\delta X_i\,.$$

Asumiendo errores independientes con media cero, la varianza de M es:

$$\text{Var}(M) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial M}{\partial X_i}\right)^2 \text{Var}(X_i)\,.$$

Como $\text{Var}(X_i) = (\Delta X_i)^2$, obtenemos la fórmula de propagación.

$$(\Delta M)^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial M}{\partial X_i}\Delta X_i\right)^2 \quad \Rightarrow \quad \Delta M = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial M}{\partial X_i}\Delta X_i\right)^2}\,.$$

Condiciones de validez:

- Los errores son pequeños comparados con los valores medidos.
- Los errores siguen distribuciones aproximadamente normales.
- Las variables son estadísticamente independientes.

Este método, conocido como **propagación de errores por suma en cuadratura**, es ampliamente utilizado en física experimental porque refleja mejor la naturaleza estadística de los errores aleatorios, en comparación con la aproximación más conservadora de la suma lineal.

Con **SymPy** se pueden hacer operaciones simbólicas para calcular derivadas, por ejemplo, si tenemos una relación como

$$Z = \frac{X}{Y}\,,$$

el siguiente código muestra la sintaxis a utilizar.

```python
import sympy
from sympy import *
# Variables simbólicas
X, Y, DX, DY = symbols('X Y DX DY')
# Relación entre las variables
Z = X / Y
# Derivadas parciales
dZ_dX = diff(Z, X)
dZ_dY = diff(Z, Y)
# Propagación por suma en cuadratura
delta_Z = sqrt((dZ_dX * DX)**2 + (dZ_dY * DY)**2)
delta_Z
```

$$\sqrt{\frac{DX^2}{Y^2} + \frac{DY^2 X^2}{Y^4}}$$

2.3. Ejemplo: densidad con método de derivadas parciales

Queremos determinar la densidad de una esfera metálica midiendo su masa y radio.

Datos experimentales:

- Masa: $m = (125{,}0 \pm 0{,}1)$ g
- Radio: $r = (2{,}15 \pm 0{,}01)$ cm

Paso 1: Identificar la relación matemática

La densidad se define como masa sobre volumen. Para una esfera:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{\frac{4}{3}\pi r^3} = \frac{3m}{4\pi r^3}$$

Paso 2: Calcular las derivadas parciales

Necesitamos las derivadas parciales de ρ con respecto a cada variable:

$$\frac{\partial\rho}{\partial m} = \frac{\partial}{\partial m}\left(\frac{3m}{4\pi r^3}\right) = \frac{3}{4\pi r^3}$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{3m}{4\pi r^3}\right) = \frac{3m}{4\pi}\cdot\frac{\partial}{\partial r}(r^{-3}) = \frac{3m}{4\pi}\cdot(-3r^{-4}) = -\frac{9m}{4\pi r^4}$$

Paso 3: Aplicar la fórmula de propagación

Usando la ecuación de propagación por suma en cuadratura:

$$\Delta\rho = \sqrt{\left(\frac{\partial\rho}{\partial m}\Delta m\right)^2 + \left(\frac{\partial\rho}{\partial r}\Delta r\right)^2}$$

Sustituyendo las derivadas parciales:

$$\Delta\rho = \sqrt{\left(\frac{3}{4\pi r^3}\Delta m\right)^2 + \left(-\frac{9m}{4\pi r^4}\Delta r\right)^2}$$

Paso 4: Evaluación numérica

Primero calculamos el valor de la densidad:

$$\rho = \frac{3\times 125{,}0}{4\pi\times(2{,}15)^3} = 3{,}0027\ \mathrm{g/cm^3}$$

Ahora evaluamos cada término de la incertidumbre:

$$\frac{\partial\rho}{\partial m} = \frac{3}{4\pi\times(2{,}15)^3} = 0{,}024021\ \mathrm{cm^{-3}} \tag{3}$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial r} = -\frac{9\times 125{,}0}{4\pi\times(2{,}15)^4} = -4{,}1898\ \mathrm{g/cm^4} \tag{4}$$

Por lo tanto:

$$\Delta\rho = \sqrt{(0{,}024021\times 0{,}1)^2 + (-4{,}1898\times 0{,}01)^2} \tag{5}$$

$$= \sqrt{(0{,}0024021)^2 + (-0{,}041898)^2} \tag{6}$$

$$= 0{,}04197\ \mathrm{g/cm^3} \tag{7}$$

Resultado final:

$$\rho = (3{,}00 \pm 0{,}04)\,\mathrm{g/cm^3}$$

La incertidumbre relativa es $\frac{0{,}04}{3{,}00} = 1{,}4\,\%$, lo cual indica una medición de buena calidad.

Implementación en Python con SymPy

```python
import sympy
from sympy import *
# Definir variables simbólicas
m, r, Dm, Dr = symbols('m r Delta_m Delta_r', positive=True)
# Definir la función densidad
rho = 3*m/(4*pi*r**3)
# Calcular derivadas parciales
```

```
drho_dm = diff(rho, m)
drho_dr = diff(rho, r)
# Mostrar resultados
display(Eq(Derivative(rho, m), drho_dm))
display(Eq(Derivative(rho, r), drho_dr))
```

$$\frac{\partial}{\partial m}\frac{3m}{4\pi r^3} = \frac{3}{4\pi r^3}$$
$$\frac{\partial}{\partial r}\frac{3m}{4\pi r^3} = -\frac{9m}{4\pi r^4}$$

```
# Fórmula de propagación de incertidumbres
Delta_rho = sqrt((drho_dm * Dm)**2 + (drho_dr * Dr)**2)
simplify(Delta_rho)
```

$$\frac{3\sqrt{\Delta_m^2 r^2 + 9\Delta_r^2 m^2}}{4\pi r^4}$$

```
# Evaluación numérica
valores = {m: 125.0, r: 2.15, Dm: 0.1, Dr: 0.01}
rho_num = rho.subs(valores).evalf()
Delta_rho_num = Delta_rho.subs(valores).evalf()
print(f"Resultados numéricos:")
print(f"Densidad: {rho_num:.3f} g/cm\u00B3")
print(f"Incertidumbre: {Delta_rho_num:.3f} g/cm\u00B3")
print(f"Resultado: ({rho_num:.2f} \u00B1 {Delta_rho_num:.2f}) g/cm\u00B3")
```

Resultados numéricos:
Densidad: 3,003 g/cm^3
Incertidumbre: 0,042 g/cm^3
Resultado: $(3{,}00 \pm 0{,}04)$ g/cm^3

Análisis del ejemplo

Observación clave: Podemos analizar las contribuciones relativas a la incertidumbre:

- Contribución de la masa: $\left|\frac{\partial \rho}{\partial m}\Delta m\right| = 0{,}0024$ g/cm^3
- Contribución del radio: $\left|\frac{\partial \rho}{\partial r}\Delta r\right| = 0{,}041898$ g/cm^3

El radio contribuye aproximadamente 17 veces más que la masa a la incertidumbre total. Esto se debe a que la derivada parcial respecto a r contiene un factor r^{-4}, amplificando el efecto de la incertidumbre en el radio.

Principio importante: Las variables que aparecen con exponentes negativos grandes en la función contribuyen más significativamente a la incertidumbre total.

Ventajas del método de derivadas parciales

1. **Universalidad:** Funciona para cualquier función diferenciable.
2. **Claridad:** Las derivadas muestran explícitamente cómo cada variable afecta al resultado.
3. **Automatización:** Con SymPy, el cálculo es automático y sin errores algebraicos.
4. **Análisis:** Permite identificar fácilmente qué variables dominan la incertidumbre.

En el ejemplo anterior, las incertidumbres de masa y radio ya estaban dadas. En situaciones reales, frecuentemente debemos primero determinar estas incertidumbres a partir de mediciones múltiples, como veremos a continuación.

2.4. Ejemplo avanzado: densidad con mediciones múltiples

Este ejemplo integra todos los conceptos vistos: análisis estadístico (Sección 1.1), combinación de incertidumbres (Sección 1.3) y propagación por derivadas parciales (Sección 2.1).

Supongamos que se desea calcular la **densidad** ρ de una esfera midiendo directamente su masa m y su radio r.

La densidad se calcula como:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{\frac{4}{3}\pi r^3} = \frac{3m}{4\pi r^3} .$$

Datos experimentales

- Masa: $m = 125,0$ g (una sola medición con balanza digital de resolución $\pm 0,1$ g)
- Radio: se midió 5 veces con un calibrador: $r = \{2{,}50;\ 2{,}52;\ 2{,}51;\ 2{,}49;\ 2{,}50\}$ cm.
- Resolución del calibrador: $\Delta r_{\text{instr}} = 0{,}01$ cm.

Paso 1: Análisis del radio (medición con repeticiones)

Calculamos el promedio y la incertidumbre estadística:

$$\bar{r} = \frac{2{,}50 + 2{,}52 + 2{,}51 + 2{,}49 + 2{,}50}{5} = \frac{12{,}52}{5} = 2{,}504 \text{ cm} .$$

Desviación estándar:

$$\sigma_r = \sqrt{\frac{\sum (r_i - \bar{r})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{(2{,}50 - 2{,}504)^2 + (2{,}52 - 2{,}504)^2 + \cdots}{4}} .$$

Calculando término por término:

$$\begin{aligned}
(2{,}50 - 2{,}504)^2 &= 0{,}000016 \\
(2{,}52 - 2{,}504)^2 &= 0{,}000256 \\
(2{,}51 - 2{,}504)^2 &= 0{,}000036 \\
(2{,}49 - 2{,}504)^2 &= 0{,}000196 \\
(2{,}50 - 2{,}504)^2 &= 0{,}000016
\end{aligned}$$

$$\sigma_r = \sqrt{\frac{0{,}000520}{4}} = \sqrt{0{,}000130} = 0{,}0114 \text{ cm}\,.$$

Incertidumbre estadística del promedio:

$$\Delta r_{\text{estad}} = \frac{\sigma_r}{\sqrt{n}} = \frac{0{,}0114}{\sqrt{5}} = \frac{0{,}0114}{2{,}236} = 0{,}0051 \text{ cm}\,.$$

Paso 2: Combinación de incertidumbres para el radio

Aplicamos la ecuación de combinación:

$$\Delta r = \sqrt{(\Delta r_{\text{instr}})^2 + (\Delta r_{\text{estad}})^2} = \sqrt{(0,01)^2 + (0,0051)^2}\,.$$

$$\Delta r = \sqrt{0,0001 + 0,000026} = \sqrt{0,000126} = 0,0112 \text{ cm}\,.$$

Por lo tanto, podemos escribir para r el valor de: $r = 2{,}50 \pm 0{,}01$ cm.

Nota: Para analizar qué contribución domina, calculamos las contribuciones porcentuales al cuadrado de la incertidumbre total:

- Contribución instrumental: $\frac{(0{,}01)^2}{(0{,}0112)^2} \times 100\,\% = 79,7\,\%$.
- Contribución estadística: $\frac{(0{,}0051)^2}{(0{,}0112)^2} \times 100\,\% = 20,3\,\%$.

La incertidumbre instrumental domina claramente, representando casi el 80 % de la incertidumbre total. Esto sugiere que hacer más mediciones del radio no mejoraría significativamente el resultado.

Paso 3: Análisis de la masa

Para la masa solo tenemos una medición, por lo que:

- $m = 125{,}0$ g.
- $\Delta m_{\text{instr}} = 0{,}1$ g (resolución de la balanza).
- $\Delta m_{\text{estad}} = 0$ (no hay repeticiones).
- $\Delta m = \Delta m_{\text{instr}} = 0{,}1$ g.

Paso 4: Cálculo de la densidad y propagación por derivadas parciales

Valor de la densidad:

$$\rho = \frac{3 \times 125{,}0}{4\pi \times (2{,}504)^3} = \frac{375{,}0}{4\pi \times 15{,}69} = \frac{375{,}0}{196{,}7} = 1{,}901 \text{ g/cm}^3\,.$$

Para la propagación, calculamos las derivadas parciales:

$$\frac{\partial \rho}{\partial m} = \frac{3}{4\pi r^3} \quad \text{y} \quad \frac{\partial \rho}{\partial r} = -\frac{9m}{4\pi r^4}$$

Evaluando numéricamente con los valores medidos:

$$\frac{\partial \rho}{\partial m} = \frac{3}{4\pi \times (2{,}504)^3} = 0{,}01521 \text{ cm}^{-3}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial r} = -\frac{9 \times 125{,}0}{4\pi \times (2{,}504)^4} = -2{,}278 \text{ g/cm}^4$$

Aplicando la fórmula de propagación por suma en cuadratura:

$$\Delta\rho = \sqrt{\left(\frac{\partial\rho}{\partial m}\Delta m\right)^2 + \left(\frac{\partial\rho}{\partial r}\Delta r\right)^2}$$

Sustituyendo valores:

$$\begin{aligned}\Delta\rho &= \sqrt{(0{,}01521 \times 0{,}1)^2 + (-2{,}278 \times 0{,}0112)^2} \\ &= \sqrt{(0{,}001521)^2 + (-0{,}02551)^2} \\ &= \sqrt{0{,}00000231 + 0{,}000651} \\ &= \sqrt{0{,}000653} = 0{,}0256 \text{ g/cm}^3\end{aligned}$$

Resultado final

$$\rho = (1{,}90 \pm 0{,}03) \text{ g/cm}^3 .$$

La incertidumbre relativa es del 1,3 %, lo cual indica una medición de buena calidad.

Análisis de contribuciones usando derivadas parciales

Las derivadas parciales nos permiten analizar cuantitativamente las contribuciones:

- Contribución de la masa: $\left|\frac{\partial\rho}{\partial m}\Delta m\right| = 0{,}001521 \text{ g/cm}^3$
- Contribución del radio: $\left|\frac{\partial\rho}{\partial r}\Delta r\right| = 0{,}02551 \text{ g/cm}^3$

El radio contribuye aproximadamente **17 veces más** que la masa a la incertidumbre total, lo cual se debe al factor r^{-4} en la derivada parcial.

Implementación en Python con derivadas parciales

```python
import sympy
from sympy import *
# Análisis estadístico del radio (datos experimentales)
radios = [2.50, 2.52, 2.51, 2.49, 2.50]  # cm
n = len(radios)
Delta_r_instr = 0.01  # cm
# Cálculo del promedio y desviación estándar
r_prom = sum(radios) / n
suma_cuadrados = sum((r - r_prom)**2 for r in radios)
sigma_r = sqrt(suma_cuadrados / (n - 1))
Delta_r_estad = sigma_r / sqrt(n)
# Combinación de incertidumbres para el radio
Delta_r_total = sqrt(Delta_r_instr**2 + Delta_r_estad**2)
# Datos de la masa
m_valor = 125.0  # g
Delta_m_valor = 0.1  # g (solo instrumental)
# Variables simbólicas para el cálculo de derivadas
m, r, Dm, Dr = symbols('m r Delta_m Delta_r', positive=True)
# Función densidad
rho = 3*m/(4*pi*r**3)
```

```python
# Derivadas parciales
drho_dm = diff(rho, m)
drho_dr = diff(rho, r)
# Fórmula de propagación de incertidumbres
Delta_rho_formula = sqrt((drho_dm * Dm)**2 + (drho_dr * Dr)**2)
# Evaluación numérica
valores = {
    m: m_valor,
    r: r_prom,
    Dm: Delta_m_valor,
    Dr: Delta_r_total
}
rho_num = rho.subs({m: m_valor, r: r_prom}).evalf()
Delta_rho_num = Delta_rho_formula.subs(valores).evalf()
# Cálculo de contribuciones individuales
contrib_masa = abs(drho_dm.subs({m: m_valor, r: r_prom}) * Delta_m_valor)
contrib_radio = abs(drho_dr.subs({m: m_valor, r: r_prom}) * Delta_r_total)
print("\n=== ANÁLISIS DEL RADIO ===")
print(f"Promedio: {r_prom:.3f} cm")
print(f"Desviación estándar: {sigma_r.evalf(4)} cm")
print(f"Deltar_estadística: {Delta_r_estad.evalf(4)} cm")
print(f"Deltar_instrumental: {Delta_r_instr} cm")
print(f"Deltar_total: {Delta_r_total.evalf(4)} cm")
print("\n=== CONTRIBUCIONES A LA INCERTIDUMBRE ===")
print(f"Contribución de la masa: {contrib_masa.evalf(4)} g/cm\u00B3")
print(f"Contribución del radio: {contrib_radio.evalf(4)} g/cm\u00B3")
print(f"Razón radio/masa: {(contrib_radio/contrib_masa).evalf(2)}")
print("\n=== RESULTADO FINAL ===")
print(f"Densidad: {rho_num:.3f} g/cm\u00B3")
print(f"Incertidumbre: {Delta_rho_num:.3f} g/cm\u00B3")
print(f"rho = ({rho_num:.2f} \u00B1 {Delta_rho_num:.2f}) g/cm\u00B3")
```

=== ANÁLISIS DEL RADIO ===
Promedio: 2.504 cm
Desviación estándar: 0.01140 cm
Deltar_estadística: 0.005099 cm
Deltar_instrumental: 0.01 cm
Deltar_total: 0.01122 cm

=== CONTRIBUCIONES A LA INCERTIDUMBRE ===
Contribución de la masa: 0.001521 g/cm^3
Contribución del radio: 0.02556 g/cm^3
Razón radio/masa: 17

=== RESULTADO FINAL ===
Densidad: 1.901 g/cm^3
Incertidumbre: 0.026 g/cm^3
rho = (1.90 ± 0.03) g/cm^3

Conclusiones del ejemplo

1. **Ventaja del método de derivadas**: Las derivadas parciales nos dan información cuantitativa directa sobre cómo cada variable afecta al resultado final.

2. **Dominancia del radio**: La derivada $\frac{\partial \rho}{\partial r} \propto r^{-4}$ explica por qué pequeñas incertidumbres en el radio se amplifican significativamente.

3. **Optimización experimental**: El análisis con derivadas muestra claramente que mejorar la precisión del radio (usando un micrómetro) sería más efectivo que hacer más mediciones.

3. Método de mínimos cuadrados

En la sección anterior, aprendimos a calcular la incertidumbre de una magnitud (como la densidad) cuando conocemos la fórmula explicita que la relaciona con nuestras mediciones. Sin embargo, a menudo en física, el objetivo es precisamente descubrir esa relación a partir de un conjunto de datos (x, y). Cuando sospechamos que la relación es lineal ($y = mx + b$), el método de mínimos cuadrados es la herramienta estadística estándar para determinar los parámetros m y b que mejor describen los datos, junto con sus respectivas incertidumbres (Δm y Δb).

El método busca la recta que minimiza la suma de los cuadrados de las desviaciones verticales entre los puntos experimentales y la recta ajustada. Para n pares de datos (x_i, y_i) se pueden aplicar las siguientes ecuaciones:

1. Parámetros del ajuste:

$$m = \frac{n \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right)^2}, \qquad b = \bar{y} - m\bar{x}\,.$$

2. Incertidumbres:

$$\Delta m = \sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}}, \qquad \Delta b = \sqrt{\hat{\sigma}^2 \left[\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2} \right]},$$

donde $\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (y_i - m x_i - b)^2}{n-2}$.

La deducción de este método se puede consultar en el Apéndice A.

3.1. Consideración de la resolución instrumental

Cuando realizamos un ajuste por mínimos cuadrados, es fundamental considerar que nuestros instrumentos tienen una resolución finita que impone una incertidumbre mínima en las mediciones. Esta limitación física no puede ignorarse, especialmente cuando la dispersión de los datos es pequeña.

¿Por qué es importante? Si los datos experimentales tienen poca dispersión, el ajuste podría sugerir incertidumbres irrealmente pequeñas en los parámetros, menores que las permitidas por la precisión de los instrumentos.

Métodos para incorporar la resolución instrumental:

1. Ajuste ponderado (método preferido)

- Asignar a cada medición una incertidumbre que incluya la resolución: $\sigma_i = \sigma_{\text{instr}}$.
- Usar estas incertidumbres como pesos en el ajuste: $w_i = 1/\sigma_i^2$.
- Ventaja: El ajuste considera automáticamente las limitaciones instrumentales.

2. Corrección a posteriori (método alternativo)

   - Realizar el ajuste estándar y obtener Δm_{ajuste} .
   - Calcular la incertidumbre mínima permitida: $\Delta m_{\text{min}} = \frac{\text{resolución}}{\text{rango de } x}$.
   - Si $\Delta m_{\text{ajuste}} < \Delta m_{\text{mín}}$, corregir usando:

$$\Delta m_{\text{real}} = \sqrt{(\Delta m_{\text{ajuste}})^2 + (\Delta m_{\text{min}})^2} \, .$$

Criterio de decisión: Cuando la incertidumbre calculada por el ajuste es menor que la resolución instrumental dividida por el rango de medición, es señal de que la precisión aparente excede las capacidades físicas del instrumento y debe aplicarse la corrección.

3.2. Ejemplo completo: Ley de Ohm

Se midieron pares corriente-voltaje con instrumentos de resolución ±0,01 A y ±0,05 V:

Medición	I (A)	V (V)
1	0.20	1.05
2	0.40	2.10
3	0.60	3.08
4	0.80	4.15
5	1.00	5.00

Paso 1: Calcular las sumas necesarias

$$n = 5, \ \sum I_i = 3{,}00, \ \sum V_i = 15{,}38, \ \sum I_i^2 = 2{,}20, \ \sum I_i V_i = 11{,}22, \ \sum I_i \sum V_i = 46{,}14.$$

Paso 2: Calcular los parámetros

$$\begin{aligned} m = R &= \frac{5 \times 11{,}22 - 3{,}00 \times 15{,}38}{5 \times 2{,}20 - (3{,}00)^2} \\ &= \frac{56{,}10 - 46{,}14}{11{,}00 - 9{,}00} = \frac{9{,}96}{2{,}00} = 4{,}98 \, \Omega \, , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b &= \frac{15{,}38}{5} - 4{,}98 \times \frac{3{,}00}{5} \\ &= 3{,}076 - 2{,}988 = 0{,}088 \, \text{V} \, . \end{aligned}$$

Paso 3: Calcular las incertidumbres

Primero calculamos los residuos y $\hat{\sigma}^2$:

I_i	V_i	$\hat{V}_i = 4{,}98 I_i + 0{,}088$	$(V_i - \hat{V}_i)^2$
0.20	1.05	1.084	0.00116
0.40	2.10	2.080	0.00040
0.60	3.08	3.076	0.00002
0.80	4.15	4.072	0.00608
1.00	5.00	5.068	0.00462
		$\sum$	0.01228

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{0{,}01228}{5-2} = 0{,}00409\,\mathrm{V}^2\,.$$

Calculamos $\sum (I_i - \bar{I})^2 = 0{,}40\ \mathrm{A}^2$, por lo tanto:

$$\Delta R = \sqrt{\frac{0{,}00409}{0{,}40}} = 0{,}101\,\Omega\,,$$

$$\Delta b = \sqrt{0{,}00409\left[\frac{1}{5} + \frac{(0{,}60)^2}{0{,}40}\right]} = 0{,}067\,\mathrm{V}\,.$$

Paso 4: Verificar la resolución instrumental

La incertidumbre mínima detectable en la resistencia está limitada por:

- Resolución del voltímetro: $\pm 0,05$ V
- Rango de corriente medido: $I_{\text{máx}} - I_{\text{mín}} = 1,00 - 0,20 = 0,80$ A

Por lo tanto:

$$\Delta R_{\text{mín}} = \frac{\text{resolución en voltaje}}{\text{rango de corriente}} = \frac{0,05\ \mathrm{V}}{0,80\ \mathrm{A}} = 0,0625\ \Omega \tag{8}$$

Como $\Delta R = 0,101\ \Omega > 0,0625\ \Omega$, la incertidumbre calculada es mayor que el mínimo físico permitido, por lo que es realista y no requiere corrección.

Interpretación: El ajuste tiene suficiente dispersión estadística para determinar la resistencia con una precisión mejor que la limitada por la resolución instrumental.

Resultado final (con redondeo apropiado):

$$R = (5{,}0 \pm 0{,}1)\,\Omega\,, \qquad b = (0{,}09 \pm 0{,}07)\,\mathrm{V}\,.$$

En la figura 1 se muestran los datos experimentales y el ajuste lineal usando el método de mínimos cuadrados. En el Apéndice B están disponibles dos códigos diferentes para obtener el ajuste lineal.

Análisis del ajuste

1. Significado del intercepto:

- Intervalo de confianza: $b \pm \Delta b = [0{,}02, 0{,}16]$ V.
- Como incluye valores cercanos a cero, es marginalmente compatible con $V = RI$.

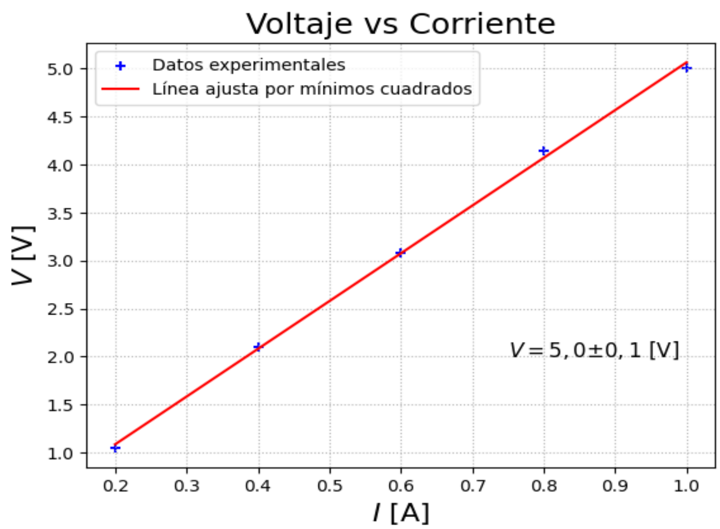


Figura 1: Ajuste lineal por mínimos cuadrados para el ejemplo sobre la ley de Ohm.

2. Calidad del ajuste:

- Los residuos son pequeños y distribuidos aleatoriamente.
- El modelo lineal es apropiado para estos datos.

3. Dominancia del error:

- La incertidumbre está dominada por la dispersión de datos, no por la resolución instrumental.

4. Casos especiales y consideraciones prácticas

4.1. Aproximación para incertidumbres dominantes

Cuando una incertidumbre relativa es mucho mayor que las otras (típicamente 3 veces o más), puede usarse solo la mayor como aproximación:

Si
$$\frac{\Delta X}{X} \gg \frac{\Delta Y}{Y}, \quad \text{entonces} \quad \frac{\Delta M}{M} \approx \frac{\Delta X}{X}\,.$$

En nuestro ejemplo 2.3, la incertidumbre del radio domina claramente.

4.2. Método de valores extremos: verificación rápida

Este método alternativo es útil en situaciones específicas donde necesitas una estimación rápida de la incertidumbre o verificar tus cálculos de propagación.

¿Cuándo usar este método?

Úsalo para:

✓ Verificar rápidamente si tu propagación formal es correcta

✓ Obtener una estimación preliminar antes de hacer cálculos detallados

✓ Situaciones de examen donde el tiempo es limitado

✓ Cuando las fórmulas de propagación se vuelven muy complejas

NO lo uses cuando:

× Se requiere un análisis riguroso para publicación

× Las incertidumbres relativas son grandes ($> 10\,\%$)

× Necesitas distinguir entre diferentes fuentes de error

Procedimiento del método

1. **Calcular el valor máximo posible:**
   - Para productos/cocientes: combina valores que maximicen el resultado
   - Ejemplo: Si $M = X/Y$, usa $M_{\text{máx}} = \frac{X+\Delta X}{Y-\Delta Y}$
2. **Calcular el valor mínimo posible:**
   - Usa la combinación que minimice el resultado
   - Ejemplo: $M_{\text{mín}} = \frac{X-\Delta X}{Y+\Delta Y}$
3. **Estimar la incertidumbre:**

$$\Delta M \approx \frac{M_{\text{máx}} - M_{\text{mín}}}{2} \tag{9}$$

Limitaciones importantes

Advertencia: Este método típicamente **sobreestima la incertidumbre** en un 10-30 % comparado con la propagación cuadrática, porque asume el peor caso posible (todos los errores se alinean desfavorablemente).

Comparación con propagación formal

Aspecto	Propagación cuadrática	Valores extremos
Precisión	Exacta para errores pequeños	Sobreestima ∼10-30 %
Velocidad	Requiere derivadas o fórmulas	Rápido y directo
Cuándo usar	Siempre que sea posible	Verificación o estimación
Validez	Errores <10 % del valor	Cualquier tamaño de error

Tabla 1: Comparación entre métodos de propagación de incertidumbres

Ejemplo comparativo del método de valores extremos

En el caso del ejemplo 2.3 teníamos para la densidad: $\rho = \frac{3m}{4\pi r^3}$ con $m = (125,0 \pm 0,1)$ g y $r = (2,15 \pm 0,01)$ cm:

$$\rho_{\text{máx}} = \frac{3(m+\Delta m)}{4\pi(r-\Delta r)^3} = \frac{3(125{,}1)}{4\pi(2{,}14)^3} = 3{,}047 \text{ g/cm}^3\,,$$
$$\rho_{\text{mín}} = \frac{3(m-\Delta m)}{4\pi(r+\Delta r)^3} = \frac{3(124{,}9)}{4\pi(2{,}16)^3} = 2{,}959 \text{ g/cm}^3\,,$$
$$\Delta\rho \approx \frac{3{,}047-2{,}959}{2} = 0{,}044 \text{ g/cm}^3\,.$$

Con el método de propagación formal (método correcto) se obtuvo $\Delta\rho = 0,04197$ g/cm^3.

Diferencia: El método de valores extremos da 0.044 vs 0,04197, una sobreestimación aceptable para verificación rápida.

Regla práctica

Si ambos métodos dan resultados similares (diferencia <20 %), puedes confiar en tus cálculos. Si difieren significativamente (>30 %), revisa tu propagación formal.

Nota pedagógica: Aunque este método es menos preciso, su simplicidad lo hace valioso para desarrollar intuición física sobre cómo se propagan las incertidumbres. Es especialmente útil en exámenes cronometrados donde la velocidad es esencial, pero *siempre prefiere la propagación cuadrática para informes formales de laboratorio.*

4.3. Mediciones con constantes físicas

Las constantes físicas como π, g (aceleración gravitacional), etc., se consideran sin incertidumbre para cálculos en laboratorio introductorio, pero es recomendable usar las constantes con al menos 3 o 4 cifras significativas, como $g = 9{,}81$ o $\pi = 3{,}1416$.

4.4. Redondeo de incertidumbres

1. La incertidumbre se redondea a **una cifra significativa** (o dos si el primer dígito es 1 o 2)
2. El valor medido se redondea al mismo decimal que la incertidumbre
3. Ejemplos:
   - $(3,14159 \pm 0,02358) \to (3,14 \pm 0,02)$.
   - $(45,678 \pm 1,234) \to (45,7 \pm 1,2)$.
   - $(100,45 \pm 0,18) \to (100,5 \pm 0,2)$.

5. Ejercicios

1. La expresión para el cálculo del módulo de rigidez (G) de una varilla cilíndrica viene dada por:

$$G = \frac{2Lk}{\pi R^4}$$

Donde L es la longitud de la varilla, R su radio exterior y k la constante recuperadora.

En una experiencia de laboratorio se obtuvieron los siguientes datos:

$$L = (104{,}2 \pm 0{,}1)\text{cm}$$
$$R = (0{,}03005 \pm 0{,}00003)\text{cm}$$
$$k = (9{,}92 \pm 0{,}02) \times 10^{3}\text{dyn cm}$$

a) Calcule el error relativo y el error porcentual en G.

b) Calcule el valor de G.

c) Exprese el valor de G con el respectivo error absoluto.

2. Las dimensiones de una plancha metálica rectangular se midieron en el laboratorio y los resultados se registraron como se indica a continuación:

   Largo: $L = (53{,}154 \pm 0{,}3)$ cm, Ancho: $A = (12{,}5$ cm$)$ con $4\,\%$ de error

   Suponiendo que los errores están indicados correctamente.

   a) Escriba las dimensiones de la plancha metálica en forma correcta, omitiendo cualquier cifra no significativa.

   b) Encuentre el perímetro y el área de la plancha con sus respectivos errores, expresados tanto en forma absoluta como en forma porcentual.

3. Escriba correctamente las expresiones de los siguientes resultados.

   a) $9{,}5 \pm 0{,}081$.

   b) $2{,}317 \pm 0{,}762$.

   c) $62{,}01 \pm 0{,}035$.

   d) $105 \times 10^{2} \pm 1 \times 10^{3}$.

   e) $3{,}452 \pm 0{,}09$.

   f) $95 \times 10^{-3} \pm 1 \times 10^{-4}$.

Referencias

[1] Hughes, I. & Hase, T. (2010). *Measurements and their Uncertainties: A Practical Guide to Modern Error Analysis*. Oxford University Press.

[2] Kirkup, L. & Frenkel, R. B. (2013). *Una introducción al análisis de incertidumbres: Un manual de laboratorio para principiantes*. Universidad Nacional de General Sarmiento.

[3] Schmid, W. A. & Lazos, R. (2000). *Guía para estimar la incertidumbre de la medición*. Centro Nacional de Metrología (CENAM), México.
https://paginaspersonales.unam.mx/app/webroot/files/5404/GUIAPARAESTIMARLAINCERTIDUMBRE(CENAM)_26566.pdf

[4] Fornasini, P. (2008). *The Uncertainty in Physical Measurements: An Introduction to Data Analysis in the Physics Laboratory*. Springer.

[5] Bell, S. (2001). *A Beginner's Guide to Uncertainty of Measurement*. NPL Measurement Good Practice Guide No. 11.
https://www.esscolab.com/uploads/files/measurement-guide.pdf

[6] JCGM / WG 1 *Evaluación de datos de medición: Guía para la expresión de la incertidumbre de medida*.
https://www.cem.es/sites/default/files/gum20digital1202010.pdf

[7] Taylor, J. R. (1997). *An Introduction to Error Analysis* (2nd ed.). University Science Books.

[8] Meurer, A. *et al.* (2017). *SymPy: symbolic computing in Python*. PeerJ Computer Science, **3**, e103. https://doi.org/10.7717/peerj-cs.103

[9] Harris, C. R., Millman, K. J., van der Walt, S. J., et al. *Array programming with NumPy*. Nature, 585, 357–362 (2020).
https://doi.org/10.1038/s41586-020-2649-2

[10] Hunter, J. D. *Matplotlib: A 2D Graphics Environment*. Computing in Science Engineering, 9(3), 90–95 (2007).
https://doi.org/10.1109/MCSE.2007.55

[11] Seabold, S. and Perktold, J. *Statsmodels: Econometric and Statistical Modeling with Python*. Proceedings of the 9th Python in Science Conference (2010).
https://doi.org/10.25080/Majora-92bf1922-011

A. El método de mínimos cuadrados

El método de mínimos cuadrados es una técnica estadística para determinar la mejor relación funcional entre variables experimentales y estimar los parámetros del modelo (como la pendiente m en $y = mx + b$) con sus incertidumbres. A diferencia del método de derivadas parciales - aplicable a funciones explícitas con incertidumbres conocidas-, este se utiliza para obtener magnitudes indirectas a partir de datos experimentales con variabilidad.

En aplicaciones como la ley de Ohm($V = RI$), la resolución instrumental establece la incertidumbre mínima de las mediciones directas, afectando la estimación de los parámetros ajustados. Aunque es común realizar ajustes no ponderados, cuando la resolución instrumental es comparable a la dispersión de los datos, debe incorporarse explícitamente al análisis.

> Nota: ¿Cómo incluir la resolución del instrumento en el método de mínimos cuadrados?
>
> Existen tres formas de incluir la resolución en el ajuste:
>
> - Asignar incertidumbres basadas en la resolución: $\Delta V_i = \Delta V_{\text{instr}}, \quad \Delta I_i = \Delta I_{\text{instr}}$
> - Realizar un ajuste **ponderado** con pesos $w_i = 1/\Delta V_i^2$
> - En ajustes no ponderados, **combinar cuadráticamente** las incertidumbres calculadas con la resolución instrumental
>
> **Criterio práctico:** Si $\Delta R <$ resolución/rango, la incertidumbre está subestimada y debe corregirse.

Fundamentos teóricos

Si la dispersión de los puntos experimentales es debida solo a los errores casuales en las mediciones, la mejor recta será aquella para la cual la suma de los cuadrados de las distancias $(y_i - y_0)$ sea un mínimo, de ahí su nombre: método de los mínimos cuadrados.

Consideremos una relación lineal entre dos magnitudes físicas y y x de la forma:

$$y = mx + b\,.$$

Donde y es la variable dependiente y x es la variable independiente, en nuestro caso la magnitud controlada por el experimentador.

La desviación de un valor cualquiera y_i determinado experimentalmente con respecto a su valor y_0 en la recta, será:

$$\Delta y_i = y_i - y_0 = y_i - (b + mx_i)\ . \tag{10}$$

Ahora se puede enunciar el principio básico de este método, el cual dice que la mejor recta que puede ser trazada entre esos puntos, es aquella para la cual la suma de los cuadrados de las desviaciones Δy_i de los datos experimentales, con respecto a esa recta, es mínima.

$$\sum_{i=1}^{n} (\Delta y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} [y_i - b - mx_i]^2\ ,$$

donde n es el número de pares de valores de y y x.

Dado que la condición exigida es la de minimizar la suma anterior, entonces los parámetros m y b deben ajustarse para cumplir con esta condición. Ello se logra calculando las derivadas parciales de la suma con respecto a m y con respecto a b, e igualándolas a cero.

$$\frac{\partial\left[\sum\left(\Delta y_i\right)^2\right]}{\partial b} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\left(y_i - b - mx_i\right)^2}{\partial b} = \sum_{i=1}^{n} -2(y_i - b - mx_i) = 0\,,$$

$$\frac{\partial\left[\sum\left(\Delta y_i\right)^2\right]}{\partial m} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\left(y_i - b - mx_i\right)^2}{\partial m} = \sum_{i=1}^{n} -2x_i(y_i - b - mx_i) = 0\,.$$

Por lo tanto, se debe resolver el sistema

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n} y_i - \sum_{i=1}^{n} b - \sum_{i=1}^{n} mx_i = 0 &&\Rightarrow nb + m\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i\,,\\
&\sum_{i=1}^{n} y_i x_i - \sum_{i=1}^{n} bx_i - \sum_{i=1}^{n} mx_i^2 = 0 &&\Rightarrow b\sum_{i=1}^{n} x_i + m\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i\,,
\end{aligned}$$

para m y b.

Utilizando la regla de Cramer y definiendo Δ como se muestra a continuación:

$$\Delta = \begin{vmatrix} n & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 \end{vmatrix} = n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2\,,$$

se obtiene:

$$m = \frac{\begin{vmatrix} n & \sum y_i \\ \sum x_i & \sum x_i y_i \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{n\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2} \quad \text{y} \quad b = \frac{\begin{vmatrix} \sum y_i & \sum x_i \\ \sum x_i y_i & \sum x_i^2 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{n\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2}\,.$$

Por lo tanto:

$$m = \frac{n\sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \sum\limits_{i=1}^{n} y_i}{\Delta} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} y_i\left(x_i - \bar{x}\right)}{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2}\,, \tag{11}$$

$$b = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 \sum\limits_{i=1}^{n} y_i - \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i}{\Delta} = \bar{y} - m\bar{x}\,. \tag{12}$$

Se puede escribir (11) como

$$m = \frac{S_{xy}}{S_x^2}\,. \tag{13}$$

Donde $\bar{x}$ e $\bar{y}$ denotan las medias muestrales de x y y (respectivamente),

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}, \quad \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}\,,$$

S_x^2 es la varianza muestral de x y S_{xy} es la covarianza muestral entre x y y. Estos parámetros se calculan como:

$$S_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2}{n},\ S_y^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \bar{y}\right)^2}{n},\ S_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)\left(y_i - \bar{y}\right)}{n}\,.$$

La cantidad m se denomina coeficiente de regresión de y sobre x.

Una vez obtenidos los valores de m y b, es necesario calcular sus errores correspondientes Δm y Δb. Esto lo podemos hacer calculando las desviaciones estándar de la pendiente y la ordenada al origen, calculadas a partir de la distribución de diferencias Δy_i, ecuación (10), respecto de la mejor línea de ajuste.

Sea $\hat{y}_i = b + mx_i$ la predicción de y basada en el valor i de x. Entonces $e_i = y_i - \hat{y}_i$ representa el i residuo - la diferencia entre el i valor de respuesta observado y el i valor de respuesta predicho por nuestro modelo lineal.

Definimos la suma residual de cuadrados (SSR - Sum of Squared Residuals) como

$$\mathrm{SSR} = e_1^2 + e_2^2 + \cdots + e_n^2 \,,$$

o equivalentemente como

$$\mathrm{SSR} = (y_1 - b - mx_1)^2 + (y_2 - b - mx_2)^2 + \cdots + (y_n - b - mx_n)^2 \ .$$

La diferencia entre el valor observado y_i y el correspondiente valor ajustado $\hat{y}_i$ es un residuo. Matemáticamente, el residuo i es

$$e_i = y_i - \hat{y}_i = y_i - (b + mx_i) \,, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

Los residuos desempeñan un papel importante en la investigación de la adecuación del modelo y en la detección de desviaciones de los supuestos subyacentes. Podemos escribir entonces

$$\mathrm{SSR} = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2 \ . \tag{14}$$

Tenemos otra cantidad relevante, la suma SSE (SSE- Explained Sum of Squares) que se define como:

$$\mathrm{SSE} = \sum_{i=1}^{n} (\hat{y}_i - \bar{y})^2 \,, \tag{15}$$

representa la suma de las diferencias al cuadrado entre los valores predichos y la media de los valores observados.

Y la variabilidad total (SST - Total Sum of Squares) que representa la variabilidad total de la variable dependiente y respecto a su media.

$$\mathrm{SST} = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2 \ . \tag{16}$$

La variabilidad total se puede descomponer en la variabilidad explicada por el modelo y la variabilidad residual

$$\mathrm{SST} = \mathrm{SSR} + \mathrm{SSE} \ \Rightarrow \ \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2 + \sum_{i=1}^{n} (\hat{y}_i - \bar{y})^2 \ . \tag{17}$$

Podemos calcular el error estándar residual y los errores estándar de la pendiente Δm y el término independiente Δb de la regresión lineal de la siguiente manera:

$$\mathrm{SE}\,(m) = \Delta m \ = \ \sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}} \,, \tag{18}$$

$$\mathrm{SE}\,(b) = \Delta b \ = \ \sqrt{\hat{\sigma}^2 \left[\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2} \right]} \,, \tag{19}$$

donde

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\text{SSR}}{n-2}\,. \tag{20}$$

B. Mínimos cuadrados utilizando Python

Actualmente, es habitual utilizar alguna herramienta computacional que permite hacer los cálculos necesarios y los gráficos del ajuste de la recta. Aunque el uso de este método no nos obliga a hacer el gráfico de la recta, por razones pedagógicas, es conveniente hacerlo para así observar más claramente las desviaciones de los puntos experimentales con respecto a la recta calculada[5].

Los cálculos del ejemplo 3.2 se pueden hacer de dos formas diferentes, la primera es transcribiendo las ecuaciones del método de mínimos cuadrados y la segunda utilizando alguna librería especializada de Python.

B.1. Código con las ecuaciones explícitas

Para facilitar los cálculos numéricos, la representación gráfica de los datos y el análisis estadístico, utilizaremos dos librerías muy comunes en Python: **numpy** y **matplotlib.pyplot**. La primera nos permite trabajar eficientemente con arreglos numéricos y realizar operaciones matemáticas [9] y la segunda se encarga de generar gráficos de manera sencilla y personalizable [10].

Primero se deben llamar las librerías y a continuación va la escritura del código

```python
# Librerías
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
# Datos
xn = np.array([0.20, 0.40, 0.60, 0.80, 1.00]) # Corriente (A)
yn = np.array([1.05, 2.10, 3.08, 4.15, 5.00]) # Voltaje (V)
# Se obtiene el valor de n (numero de datos)
n = len(xn)
# Las sumatorias necesarias
Sum_x = np.sum(xn)
Sum_y = np.sum(yn)
Sum_xx = np.sum(xn**2)
Sum_xy = np.sum(xn*yn)
Sum_xSumy = np.sum(xn)*np.sum(yn)
Delta = n*np.sum(xn**2) - (np.sum(xn))**2
print(n,',', Sum_x, ',',Sum_y,',', Sum_xx,',',
      Sum_xy,',', Sum_xSumy, ',',Delta)
print(f'============================================')
# Se escriben las ecuaciones para b y m
m_mc = (n * Sum_xy - Sum_x * Sum_y) / Delta
b_mc = Sum_y /n - m_mc * Sum_x/n
print('m=',m_mc, ',', 'b=',b_mc)
#
y_hat= m_mc*xn + b_mc
SSR= np.sum((yn - y_hat)**2)
s_hat= np.sqrt(SSR/(n-2))
# Los promedios de x y y
xp= np.sum(xn)/n
yp= np.sum(yn)/n
Delta_m = np.sqrt(s_hat**2 / np.sum((xn - xp)**2))
```

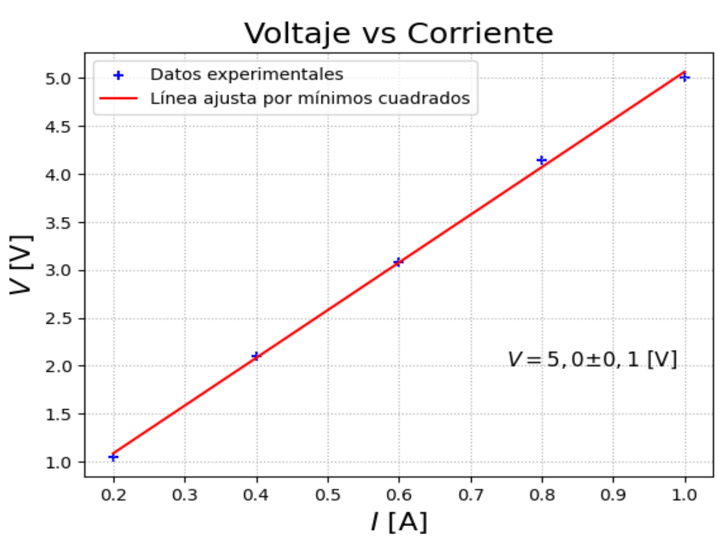
[5]Es recomendable consultar el sitio web: https://marceluda.github.io/python-para-fisicos/ que se dedica a recopilar material para facilitar el uso de Python en laboratorios de física.

```
Delta_b= np.sqrt(s_hat**2 * (1/n + xp**2 / np.sum((xn - xp)**2)))
print(f'Delta_m =  {np.round(Delta_m, 3)}')
print(f'Delta_b =  {np.round(Delta_b, 3)}')
print(f'===========================================')
print(f'Resultados debidamente redondeados:')
print(f'm = {np.round(m_mc, 1)} \u00B1 {np.round(Delta_m, 1)}')
print(f'b = {np.round(b_mc, 2)} \u00B1 {np.round(Delta_b, 2)}')
```

```
5 , 3.0 , 15.38 , 2.2 , 11.218 , 46.14 , 2.0
===========================================
m= 4.975000000000001 , b= 0.0909999999999993
Delta_m = 0.101
Delta_b = 0.067
===========================================
Resultados debidamente redondeados:
m = 5.0 ± 0.1
b = 0.09 ± 0.07
```

La figura 1 se generó con el siguiente código:

```
# La gráfica con los datos y la recta que mejor se ajusta
plt.figure()
plt.scatter(xn, yn, color='b',marker='+', label='Datos experimentales')
plt.plot(xn, y_hat,color='r', label='Línea ajusta por mínimos cuadrados')
plt.grid(linestyle='dotted')
plt.legend(loc='best')
plt.title(r'Voltaje vs Corriente', fontsize=18)
plt.xlabel(r'$I$ [A]', fontsize=16)
plt.ylabel(r'$V$ [V]', fontsize=16)
plt.text(0.75, 2.0, '$V=5,0  \u00B1 0,1$ [V]', fontsize=12)
plt.show()
```



B.2. Código con la librería statsmodels de Python

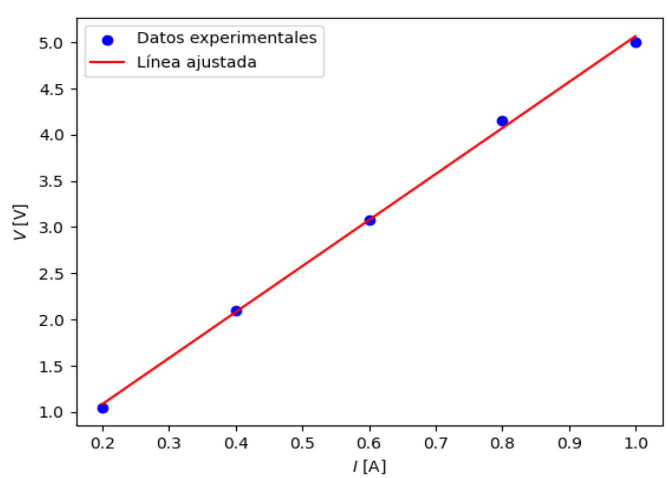
Una de las librerías más utilizadas para este propósito es **statsmodels**. Esta librería proporciona herramientas para realizar modelos estadísticos clásicos, como regresión lineal, pruebas de hipótesis, y análisis de series temporales [11].

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
# Datos
xn = np.array([0.20, 0.40, 0.60, 0.80, 1.00])  # Corriente (A)
yn = np.array([1.05, 2.10, 3.08, 4.15, 5.00])  # Voltaje (V)
# Con la librería "statsmodels" para hallar un análisis más completo
import statsmodels.api as sm
# Agregamos una constante (columna de unos) a xn
X = sm.add_constant(xn)
# Ajustamos el modelo
model = sm.OLS(yn, X).fit()
# Obtenemos los coeficientes y los errores estándar
b, m = model.params
Delta_b, Delta_m = model.bse
# Imprimimos los coeficientes y sus errores estándar
print(f'm = {m:.4f} \u00B1 {Delta_m:.4f}')
print(f'b = {b:.4f} \u00B1 {Delta_b:.4f}')
```

```
m = 4.9750 ± 0.1011
b = 0.0910 ± 0.0671
```

En este caso la figura se puede genera de la siguiente manera

```python
# Generamos valores de y usando los coeficientes obtenidos
y_pred = m * xn + b
# Graficamos los datos originales y la línea ajustada
plt.scatter(xn, yn, color='blue', label='Datos experimentales')
plt.plot(xn, y_pred, color='red', label='Línea ajustada')
plt.xlabel('$I$ [A]')
plt.ylabel('$V$ [V]')
plt.legend()
plt.show()
```



Una vez definido el modelo estadístico con **statsmodels**, podemos obtener un resumen detallado de los resultados de la regresión utilizando el método **. summary ( )**. Esta función genera una tabla con información relevante, como los coeficientes ajustados, errores estándar, valores t, niveles de significancia, y medidas de calidad del ajuste (como R^2).

```python
results = model
print(results.summary())
```

```
                            OLS Regression Results
==============================================================================
Dep. Variable:                      y   R-squared:                       0.999
Model:                            OLS   Adj. R-squared:                  0.998
Method:                 Least Squares   F-statistic:                     2421.
Date:                Fri, 01 Aug 2025   Prob (F-statistic):           1.85e-05
Time:                        21:42:12   Log-Likelihood:                 7.9304
No. Observations:                   5   AIC:                            -11.86
Df Residuals:                       3   BIC:                            -12.64
Df Model:                           1
Covariance Type:            nonrobust
==============================================================================
                 coef    std err          t      P>|t|      [0.025      0.975]
------------------------------------------------------------------------------
const          0.0910      0.067      1.357      0.268      -0.122       0.304
x1             4.9750      0.101     49.200      0.000       4.653       5.297
==============================================================================
Omnibus:                          nan   Durbin-Watson:                   2.437
Prob(Omnibus):                    nan   Jarque-Bera (JB):                0.277
Skew:                           0.273   Prob(JB):                        0.871
Kurtosis:                       1.984   Cond. No.                         4.89
==============================================================================
```

C. Análisis de residuos: verificación avanzada del ajuste lineal

Esta sección, de carácter **opcional**, está dirigida a estudiantes que deseen profundizar en la evaluación de la calidad de sus ajustes lineales. No es un requisito para los informes de laboratorio básicos.

¿Qué son los residuos?

Los residuos son las diferencias entre los valores observados y los valores predichos por el modelo. Para cada punto (x_i, y_i), el residuo se define como:

$$e_i = y_i - \hat{y}_i = y_i - (mx_i + b)\,, \tag{21}$$

donde $\hat{y}_i$ es el valor predicho por el modelo lineal.

Análisis visual básico

La forma más sencilla de evaluar un ajuste es graficar los residuos contra la variable independiente x. Los residuos deben estar distribuidos aleatoriamente alrededor de cero, sin mostrar patrones sistemáticos, como se puede apreciar en la Figura 2.

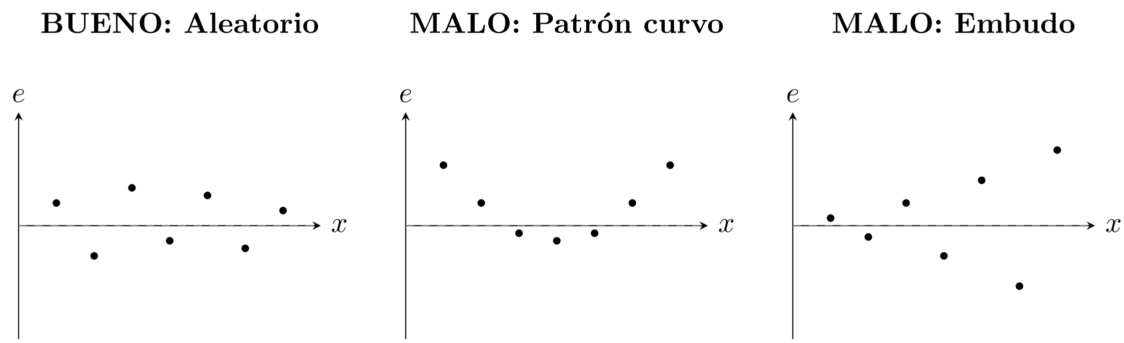


Figura 2: Patrones típicos en gráficos de residuos

El coeficiente de determinación R^2

Una medida numérica simple de la calidad del ajuste es el coeficiente de determinación [7]:

$$R^2 = 1 - \frac{\sum(y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum(y_i - \bar{y})^2} = 1 - \frac{SSR}{SST} \tag{22}$$

Interpretación práctica para física experimental:

- $R^2 > 0{,}99$: Excelente ajuste lineal
- $0{,}95 < R^2 < 0{,}99$: Buen ajuste
- $0{,}90 < R^2 < 0{,}95$: Ajuste aceptable, revisar datos
- $R^2 < 0{,}90$: Considerar modelo no lineal

Código Python para análisis de residuos

Para los estudiantes interesados en implementar este análisis:

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
# Datos del ejemplo de la Ley de Ohm (sección 3.2)
I = np.array([0.20, 0.40, 0.60, 0.80, 1.00])  # Corriente (A)
V = np.array([1.05, 2.10, 3.08, 4.15, 5.00])  # Voltaje (V)
# Realizar el ajuste lineal
m, b = np.polyfit(I, V, 1)  # m = pendiente, b = intercepto
# Calcular predicciones y residuos
V_pred = m * I + b
residuos = V - V_pred
# Calcular R-cuadrado
SS_res = np.sum(residuos**2)
SS_tot = np.sum((V - np.mean(V))**2)
R2 = 1 - (SS_res/SS_tot)
# Imprimir estadísticas
```

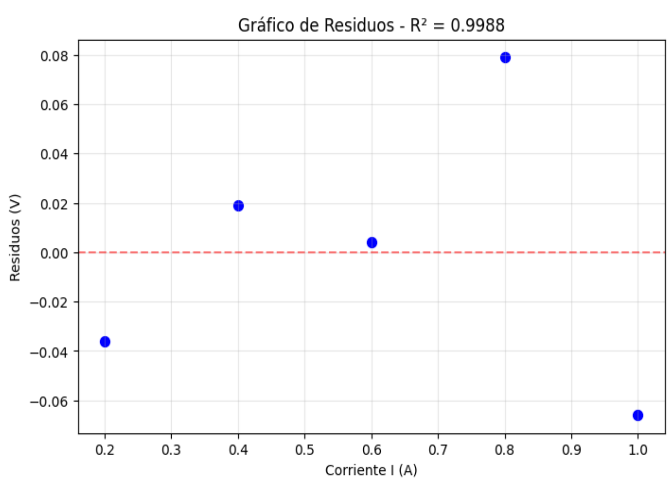
```python
print(f"Parámetros del ajuste:")
print(f"  Pendiente (R): {m:.2f} \u03A9")
print(f"  Intercepto: {b:.3f} V")
print(f" \nCalidad del ajuste:")
print(f"  R\u00B2 = {R2:.4f}")
print(f"  Residuo máximo: {np.max(np.abs(residuos)):.4f} V")
print(f"  Media de residuos: {np.mean(residuos):.2e} V")
print(f"  Desv. estándar de residuos: {np.std(residuos):.4f} V")
```

Parámetros del ajuste:
Pendiente (R): 4.97 Ω
Intercepto: 0.091 V

Calidad del ajuste:
R^2 = 0.9988
Residuo máximo: 0.0790 V
Media de residuos: -1.33e-16 V
Desv. estándar de residuos: 0.0495 V

Una gráfica con los residuos

```python
# Graficar residuos
plt.figure(figsize=(8, 5))
plt.scatter(I, residuos, color='blue', s=50)
plt.axhline(y=0, color='red', linestyle='--', alpha=0.5)
plt.xlabel('Corriente I (A)')
plt.ylabel('Residuos (V)')
plt.title(f'Gráfico de Residuos - R\u00B2 = {R2:.4f}')
plt.grid(True, alpha=0.3)
plt.show()
```



Señales de advertencia

Si observas alguno de estos patrones, consulta con tu instructor:

1. **Patrón curvo en los residuos**: La relación podría no ser lineal.

2. **Residuos que aumentan con** x: La dispersión de los datos aumenta (o disminuye) con x.
3. **Varios residuos consecutivos del mismo signo**: Posible error sistemático.
4. **Un punto muy alejado** (residuo $> 3\sigma$): Posible error de medición.

¿Qué hacer si el ajuste no es bueno?

- Revisa los datos originales por errores de transcripción.
- Verifica que el modelo físico esperado sea realmente lineal.
- Considera si hay efectos físicos no considerados (fricción, resistencia del aire, etc.).
- Consulta con tu instructor sobre transformaciones apropiadas (log-log, semi-log).

Recuerda: Un mal ajuste lineal no significa que tu experimento esté mal; podría revelar física interesante no contemplada en el modelo simple.