



Universidad
Industrial de
Santander

Guía general para el laboratorio de Física y análisis de datos

Héctor F. Hernández G.

Versión 3.0 - 28 de mayo de 2024

Índice general

| | |
|---|-----------|
| 1. Mediciones en el laboratorio | 2 |
| 1.1. Introducción | 2 |
| 1.2. Mediciones | 3 |
| 1.2.1. Medición de la masa | 5 |
| 1.2.2. Medición de la longitud | 5 |
| 1.2.3. Medición del tiempo | 8 |
| 1.2.4. Medición de la temperatura | 8 |
| 1.2.5. Medición de corriente eléctrica | 10 |
| 1.2.6. Medición de la cantidad de sustancia | 11 |
| 1.2.7. Medición de la intensidad luminosa | 11 |
| 2. Redondeo, cifras significativas y orden de magnitud | 13 |
| 2.1. Introducción | 13 |
| 2.2. Redondeo | 13 |
| 2.3. Cifras Significativas | 14 |
| 2.3.1. Operaciones con cifras significativas | 14 |
| 2.4. Orden de magnitud | 15 |
| 2.5. Ejercicios | 16 |
| 3. Teoría de Errores | 17 |
| 3.1. Introducción | 17 |
| 3.2. Exactitud, precisión y sensibilidad | 17 |
| 3.3. Tipos de errores en las mediciones | 18 |
| 3.3.1. Errores sistemáticos | 18 |
| 3.3.2. Errores casuales o accidentales | 18 |
| 3.3.3. Errores de precisión | 19 |
| 3.4. La escritura de los resultados de una medición | 19 |
| 3.4.1. Error absoluto y error relativo | 20 |
| 3.5. Mediciones directas | 20 |
| 3.5.1. Cálculo de los errores con una sola medida | 21 |
| 3.5.2. Cálculo de los errores en una serie de medidas | 21 |
| 3.5.3. Precisión y exactitud de mediciones | 29 |
| 3.5.4. Discrepancia | 30 |
| 3.6. Algoritmo para el manejo de los errores | 31 |
| 3.7. Mediciones indirectas | 34 |

| | | |
|-----------|--|-----------|
| 3.7.1. | Propagación de errores | 34 |
| 3.7.2. | Propagación de errores en casos particulares | 35 |
| 3.7.3. | Propagación de errores en casos generales | 36 |
| 3.8. | Ejercicios | 41 |
| 4. | Representación de los datos y el análisis gráfico | 44 |
| 4.1. | Introducción | 44 |
| 4.2. | Tabulación de datos y resultados | 44 |
| 4.3. | Representaciones gráficas | 46 |
| 4.3.1. | Ejes de coordenadas | 47 |
| 4.3.2. | Selección de escalas | 47 |
| 4.3.3. | Ubicación de los puntos | 48 |
| 4.4. | Análisis Gráfico de Funciones | 49 |
| 4.4.1. | Función lineal | 49 |
| 4.4.2. | Función exponencial | 50 |
| 4.4.3. | Función potencial | 52 |
| 5. | Regresión lineal | 54 |
| 5.1. | Introducción | 54 |
| 5.2. | Regresión y la construcción de modelos | 54 |
| 5.3. | Los algoritmos en los modelos de regresión | 56 |
| 5.4. | Regresión lineal simple | 57 |
| 5.4.1. | Método de los mínimos cuadrados | 60 |
| 5.4.2. | Propiedades del método de mínimos cuadrados | 69 |
| 6. | ¿Cómo escribir un informe de laboratorio? | 77 |
| 6.1. | Introducción | 77 |
| 6.2. | Estructura | 77 |
| 6.3. | Modelo para un informe de laboratorio | 78 |

Capítulo 1

Mediciones en el laboratorio

1.1. Introducción

En este capítulo, se abordarán los conceptos fundamentales relacionados con las mediciones en el contexto del laboratorio de física. Se explorarán las unidades de medida, los instrumentos comunes utilizados para medir diferentes magnitudes y las técnicas básicas para llevar a cabo mediciones precisas.

En el entorno del laboratorio de física, los objetivos se centran en la realización precisa y eficiente de experimentos, así como en el desarrollo de habilidades clave para la investigación científica. Estos objetivos incluyen:

- **Obtención de Mediciones Precisas:** El primer objetivo es llevar a cabo experimentos físicos con el fin de obtener valores precisos de las cantidades físicas medidas.
- **Elaboración y Análisis de Gráficos:** Un segundo objetivo es adquirir la habilidad de crear gráficos adecuados y analizar la información científica que estos gráficos contienen. Esto es esencial para visualizar y comprender los resultados de manera efectiva.
- **Redacción de Informes de Laboratorio:** La correcta redacción de informes de laboratorio es fundamental en la comunicación de resultados científicos. Por lo tanto, otro objetivo importante es aprender a redactar informes de laboratorio de manera precisa y coherente.
- **Exploración de Nuevos Tópicos de la Física:** El laboratorio también cumple la función de introducir a los estudiantes en nuevos conceptos y tópicos de la física que pueden no haber sido tratados en las clases teóricas.

Además, es importante destacar que, mientras las clases teóricas suelen presentar experimentos de manera cualitativa, el laboratorio se enfoca en la realización cuantitativa de los mismos. En este contexto, surgen preguntas inevitables, como: ¿cuál es la precisión y exactitud alcanzada en una medición?, ¿cuál es la precisión y exactitud que se podría lograr?, y ¿qué conceptos físicos se aplican y qué condiciones deben cumplirse?

En los capítulos siguientes, se abordarán estas preguntas y se presentarán conceptos clave relacionados con la teoría de errores, el tratamiento de datos y el análisis gráfico.

1.2. Mediciones

El trabajo en el laboratorio implica medir magnitudes físicas mediante la utilización de instrumentos de medida.

Medir es la comparación de la magnitud que se está estudiando con un patrón de medida. Si cada persona tuviera su propio patrón de medida, solo él comprendería el valor de su resultado y no podría establecer comparaciones, a menos que supiera la equivalencia entre su patrón y el de su vecino. Por esta razón se ha acordado el establecimiento de un patrón. Si bien hasta hace poco, algunos países utilizaban como sistema de unidades el Sistema Británico, y otros países el Sistema Métrico Decimal, la tendencia es usar el Sistema Internacional (SI) ¹.

El Sistema Internacional de Unidades (SI) se apoya en las siguientes magnitudes básicas:

| Símbolo | Nombre | Magnitud |
|---------|-----------|---------------------------|
| s | segundo | tiempo |
| m | metro | longitud |
| kg | kilogramo | masa |
| A | amperio | corriente eléctrica |
| K | kelvin | temperatura termodinámica |
| mol | mol | cantidad de sustancia |
| cd | candela | intensidad luminosa |

Se puede decir que el resultado de una medida es lo que se conoce como el valor de la magnitud. Este valor debe ir siempre acompañado de su respectiva unidad de medida. Decir que la masa de una varilla es de 80,4 no significa nada, se preguntará: ¿80,4 gramos?, ¿80,4 libras?, ¿80,4 kilogramos?, ¿qué diría Ud. si en un almacén de telas le venden un pie de tela y le cobran un metro? ¡Ah! entonces es importante que las cantidades que se midan vayan acompañadas de sus respectivas unidades de medida.

Cuadro 1.1: Unidades básicas utilizadas en mecánica

| Magnitudes | SI | CGS | británico |
|------------|----------------|-----------------|-------------|
| Longitud | Metro (m) | Centímetro (cm) | Pie (ft) |
| Masa | Kilogramo (kg) | Gramo (g) | Libra (lb) |
| Tiempo | Segundo (s) | Segundo (s) | Segundo (s) |

El sistema CGS es el Sistema Cegesimal de Unidades o sistema gaussiano, es un sistema de unidades basado en el centímetro, el gramo y el segundo y el sistema británico es un conjunto de unidades de medida diferentes a las del sistema métrico decimal, que se utilizan actualmente como medida principal en los Estados Unidos y el Reino Unido.

En la actualidad los instrumentos de medición pueden encontrarse en formato analógico o digital, figura 1.1. Los instrumentos analógicos suelen requerir de cierta práctica para leer las mediciones, mientras que los instrumentos digitales presentan las lecturas directamente en una pantalla. Dependiendo del objeto a medir se puede preferir un instrumento de medición analógico a uno digital.

Los instrumentos de medida nos muestran el valor de las medidas dentro de cierto rango de validez que es característico del propio aparato de medida.

¹https://es.wikipedia.org/wiki/Sistema_Internacional_de_Unidades

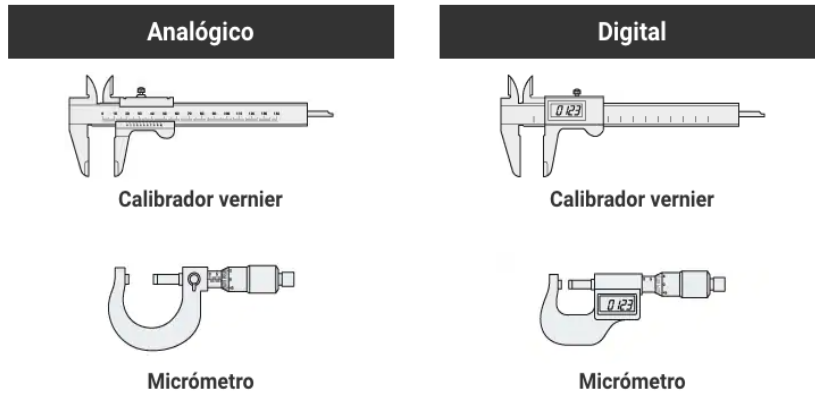


Figura 1.1: Instrumentos de medida analógicos y digitales

Apreciación: La menor división en la escala de cualquier instrumento de medida se llama *apreciación*. En instrumentos analógicos cuando se lee en una escala única, se aproxima la lectura a la división más cercana. Por esto, el máximo error que se puede cometer en dicha medición es de \pm la apreciación.

Por lo anterior cualquier medida nunca es exacta, su última cifra siempre es aproximada, debido a ello toda medida presenta siempre una incertidumbre o error determinada por la precisión del instrumento.

La determinación de la apreciación de un instrumento que tiene solamente una escala analógica, se realiza siguiendo la explicación dada a continuación.

Se escogen dos valores sobre la escala, que pueden ser consecutivos o no. Se hace la diferencia del valor mayor n menos el valor menor m y se divide entre el número de partes en que está dividido el intervalo (ver figura 1.2).

$$\text{Apreciación} = \frac{n - m}{N^{\circ} \text{ total de divisiones}}$$

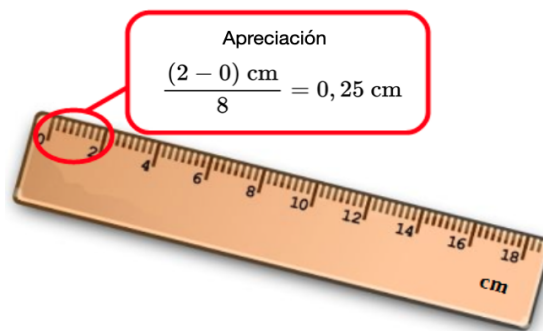


Figura 1.2: Apreciación de un instrumento

La apreciación de un instrumento es una indicación del error de la medida, se habla entonces de "precisión" de un instrumento o de la sensibilidad: a menor apreciación, mayor precisión.

1.2.1. Medición de la masa

En el Sistema Internacional (SI), la unidad para medir la masa es el kilogramo (kg), con sus derivadas como el gramo y el miligramo. Para medir la masa de un objeto, se utilizan balanzas o básculas. Algunos tipos de balanzas incluyen:

- Balanza de dos platillos: compara la masa desconocida con masas conocidas en dos platillos.
- Balanza de un solo platillo: el objeto se coloca en un platillo y se ajusta el equilibrio con jinetillos en una escala graduada. Pueden ser mecánicas o electrónicas.
- Balanza analítica: diseñada para medir masas muy pequeñas, con precisión de hasta la diezmilésima de gramo (0,0001 g o 0,1 mg).

Al usar una balanza, se deben seguir algunas reglas:

- Manejarlas con cuidado, especialmente las electrónicas.
- Evitar tocar el platillo con los dedos.
- No poner sustancias químicas o recipientes húmedos directamente en el platillo, utilizar papel.

1.2.2. Medición de la longitud

La longitud se mide en metros (m) y sus múltiplos y submúltiplos según el Sistema Internacional de Unidades (SI). Para medir longitudes enormes, como las del espacio exterior, se utilizan unidades especiales:

- Año luz (ly): Distancia que recorre la luz en un año, aproximadamente 9,46 billones de kilómetros.
- Unidad Astronómica (UA): Distancia media entre la Tierra y el Sol, aproximadamente 149,6 millones de kilómetros.
- Pársec (pc): Equivalente a 206.264,81 UA.

La regla o cinta métrica

El instrumento más común para medir longitudes es la cinta métrica, con una apreciación de 1 mm. La medición de la longitud de un objeto implica una comparación directa con una cinta métrica. Para llevar a cabo esta medición, debemos fijar la posición de los extremos del objeto sobre la escala graduada de la cinta métrica. Es aconsejable colocar el objeto de manera que sea fácil de leer con claridad, como se muestra en la figura 1.3.

La medición de un objeto con una regla graduada o una cinta métrica puede llevar a una fracción de la escala que no puede ser apreciada, como se muestra en la figura 1.3, donde el objeto mide entre 2,3 cm y 2,4 cm.



Figura 1.3: Forma correcta de medir con una regla. Medida: $(2,3 \pm 0,1)$ cm.

El vernier

El vernier permite medir con mayor precisión que una regla graduada. Su apreciación se calcula como la diferencia entre la longitud de una división de la escala principal y una del nonio. Por ejemplo, un vernier con una apreciación de 0,005 mm permitiría una lectura de 2,355 mm.

En la figura 1.4 de la izquierda podemos ver un vernier midiendo una esfera dando una lectura de $1,640 \pm 0,005$.



Figura 1.4: Izquierda: Vernier mostrando una medida de $(1,640 \pm 0,005)$ cm. Derecha: escalas del vernier

El vernier consta de dos partes principales: una escala principal con divisiones milimétricas y una escala móvil, el nonio, generalmente graduado en 10 o 20 divisiones. En la figura 1.4, el nonio tiene 20 divisiones. La apreciación del vernier se calcula como la diferencia entre la longitud de una división de la escala principal y la longitud de una división del nonio.

Para el caso general, cuando el nonio tiene n divisiones, la apreciación del vernier se puede determinar de la siguiente manera:

$$\text{Apreciación del vernier} = \frac{\text{Apreciación de la escala principal}}{\text{Nº total de divisiones del nonio}}.$$

Para el vernier de la figura 1.4, la apreciación es:

$$\text{Apreciación} = \frac{0,1 \text{ cm}}{20} = 0,005 \text{ cm} = 0,05 \text{ mm}$$

Cuando el cero del nonio se coloca, por ejemplo, en la división 4 cm de la regla fija, como se muestra en la figura derecha de 1.4, las divisiones del nonio llegan a 5,9 cm. Esto significa que las 20 divisiones del vernier corresponden a una longitud de 1,9 cm en la escala principal. Por lo tanto, cada división del vernier mide $\frac{1,9}{20}$ cm = 0,095 cm. La lectura sería 4,095 cm.

Volviendo a la figura 1.4, izquierda, la posición del cero del vernier está entre 1,6 y 1,7 cm, es decir, las dos primeras cifras son las que corresponden a la medida hecha con una cinta métrica: $1,6 \pm 0,1$ cm. La siguiente cifra se obtiene del nonio, en este caso la raya 4 del nonio coincide con la raya 2,4 de la escala principal. Entonces la medida que se lee en el vernier será $1,6 + 0,040 = 1,640$ cm, por lo que el resultado correcto es $(1,640 \pm 0,005)$ cm, o bien, $(16,40 \pm 0,05)$ mm.

En la figura 1.5, se presenta otro ejemplo de lectura de una medición realizada con el vernier. En este caso, a la izquierda del cero del nonio hay 3 divisiones, lo que equivale a 3 mm enteros. En el nonio, la división que está justo entre el cuatro y el cinco coincide con una división de la regla, es decir, 0.45 mm. Por lo tanto, la medida resulta en $3 + 0.45$ mm = 3.45 mm.



Figura 1.5: Medida $(3.45 \pm 0,05)$ mm.

El tornillo micrométrico

Cuando se utiliza un tornillo que se enrosca en una tuerca, este avanza una distancia determinada con cada giro completo, conocida como el paso del tornillo. Este principio es la base del funcionamiento del Tornillo Micrométrico, un instrumento de precisión utilizado para medir longitudes. La figura izquierda de la Figura 1.6 muestra un tornillo micrométrico con sus componentes clave, que incluyen la escala fija graduada, el tambor, la tuerca de seguridad y el freno.

La medición con el tornillo micrométrico comienza con la lectura de las cifras en la escala fija. Por ejemplo, en la figura derecha de la Figura 1.6, la lectura se obtiene al sumar la lectura de la escala fija con la del tambor, resultando en este caso: $5 + 0,5 + 0,28 = 5,78$ mm.

Para comprender esta lectura, es importante tener en cuenta que el tornillo tiene un paso de 0,5 mm, y el tambor está dividido en 50 partes iguales, lo que equivale a una apreciación de 0,01 mm.

La apreciación de un tornillo micrométrico se calcula utilizando la fórmula:

$$\text{Apreciación} = \frac{\text{paso del tornillo}}{\text{Número total de divisiones del tambor}}.$$

En el caso del tornillo de la Figura 1.6, la apreciación es de:

$$\text{Apreciación} = \frac{0,5 \text{ mm}}{50} = 0,01 \text{ mm}.$$

Por lo tanto, la lectura en esta figura se expresa como $(5,78 \pm 0,01)\text{mm}$.



Figura 1.6: Tornillo Micrométrico

Además, cabe mencionar que en la escala fija milimétrica se incluyen divisiones en la parte inferior que facilitan determinar si el tambor ha dado una vuelta completa, indicando la necesidad de agregar 0,50 mm a la lectura del tambor.

1.2.3. Medición del tiempo

En física, el tiempo es una magnitud que se utiliza para medir la duración o la separación de uno o más acontecimientos. Su unidad de medición en el Sistema Internacional es el segundo (s), y 60 de estas unidades constituyen una unidad mayor llamada minuto (min). Los aparatos con los que se mide el tiempo son el reloj o el cronómetro.

El cronómetro

Los intervalos de tiempo se pueden medir utilizando un cronómetro, que, según la tecnología utilizada en su construcción, puede ser de reloj digital o analógico. Por lo general, indican el tiempo en minutos, segundos y fracciones de segundo. Cuentan con un botón utilizado para iniciar y detener el cronometraje, así como otro botón para regresar la lectura a cero (ver figura 1.7). El cronómetro digital es más confiable si deseamos medir tiempos con precisión en escalas de milésimas o centésimas de segundo. A diferencia de los cronómetros analógicos, este tipo de instrumentos se basa en tecnologías más modernas, que incluyen osciladores de cuarzo y circuitos electrónicos sofisticados.

1.2.4. Medición de la temperatura

La temperatura es una magnitud física que se mide utilizando un termómetro. Existen varias escalas de temperatura, siendo las más comunes:

- **Escala Celsius ($^{\circ}\text{C}$):** En esta escala, el punto de congelación del agua es 0°C , y su punto de ebullición es 100°C .



Figura 1.7: Cronómetro digital (izquierda) y analógico (derecha)

- **Escala Fahrenheit ($^{\circ}\text{F}$):** Utilizada en muchos países de habla inglesa, donde el punto de congelación del agua es 32°F y su punto de ebullición es 212°F .
- **Escala Kelvin (K):** Empleada en la ciencia, establece el cero absoluto.^{en} -273.15°C , donde un objeto no desprende calor alguno.

Estas escalas se basan en diferentes puntos de referencia y sustancias termométricas para su definición, pero la Celsius y la Fahrenheit son las más comunes en el uso cotidiano.

El termómetro

La medición directa de la temperatura de un objeto se realiza utilizando un instrumento conocido como termómetro. Los termómetros pueden ser de tipo analógico o digital, como se muestra en la figura 1.8. Además, existen termómetros que no requieren contacto físico, como los termómetros infrarrojos, ópticos o de radiación. También hay otros tipos de termómetros, como los de gas y de resistencia.



Figura 1.8: Termómetro digital (izquierda) y analógico (derecha)

Un termómetro típico consta de un bulbo de vidrio que contiene un líquido que experimenta dilatación lineal con la temperatura, junto con un tubo capilar graduado y calibrado. El líquido más comúnmente utilizado en termómetros es el mercurio (Hg), debido a su capacidad de dilatación regular y su buena conductividad térmica.

La escala de un termómetro suele estar dividida por el fabricante, quien garantiza su precisión. La apreciación de un termómetro se puede determinar utilizando el método descrito anteriormente para instrumentos con una sola escala. Las escalas de temperatura pueden estar en grados centígrados ($^{\circ}\text{C}$), grados Fahrenheit ($^{\circ}\text{F}$) o kelvins (K, escala absoluta).

La relación entre la escala centígrada y la escala absoluta (kelvin) es:

$$T(\text{K}) = T(^{\circ}\text{C}) + 273,2$$

Y la relación entre la escala centígrada y la escala Fahrenheit es:

$$T(^{\circ}\text{F}) = \frac{9}{5}T(^{\circ}\text{C}) + 32$$

Es importante recordar que un cambio de temperatura de un grado kelvin es equivalente a un cambio de un grado centígrado, pero un cambio de un grado centígrado no es igual a un cambio de un grado Fahrenheit.

1.2.5. Medición de corriente eléctrica

La intensidad de la corriente eléctrica está relacionada con el flujo de cargas eléctricas a través de un material conductor por unidad de tiempo. Básicamente, medimos dos tipos de corriente eléctrica: la corriente continua y la corriente alterna. La corriente continua circula siempre en el mismo sentido y tiene un valor constante, se produce por pilas o baterías, y la corriente alterna es corriente que circula en forma oscilatoria. Este tipo de corriente es la que usamos para encender la luz o al enchufar los electrodomésticos del hogar. La forma más común de medir la corriente eléctrica es con un amperímetro, que es un dispositivo que se conecta al circuito eléctrico e indica los Amperios, que es la unidad de medida según el Sistema Internacional de Unidades (SI) que tiene dicho objeto.

Amperímetros

El amperímetro es el instrumento utilizado para medir la corriente en amperios (A) en un circuito. Para la medición directa, el amperímetro se conecta en serie con el circuito en el que se va a medir la corriente. Un amperímetro suele tener una resistencia baja para que no produzca una caída de tensión significativa en el circuito que se está midiendo.

Los instrumentos utilizados para medir corrientes más pequeñas, en el rango de los miliamperios o microamperios, se denominan miliamperímetros o microamperímetros, respectivamente.

Existen varios tipos de amperímetros, con tecnologías digitales o analógicas, ver figura 1.9.

- **Amperímetros magnetoeléctricos o de bobina móvil:** Están formados por un imán permanente fijo y un cuadro o bobina móvil que gira bajo el efecto de la fuerza de Ampère cuando circula corriente por el mismo. La espiral en el eje del cuadro impide la rotación del cuadro. Cuanto mayor sea la corriente que atraviesa el cuadro, mayor será el ángulo de la aguja cuyo extremo se traslada por una escala.
- **Amperímetros electromagnéticos o de imán móvil:** Constan de una aguja unida a un imán alojado en el interior de una bobina. Cuando la corriente circula por esta última, se produce un campo magnético que, dependiendo de su sentido, produce una atracción o repulsión del imán que es proporcional a la intensidad de dicha corriente.

- **Amperímetros electrodinámicos:** Constan de dos bobinas, una fija y otra móvil que producen campos magnéticos, cada una de las cuales porta una corriente que es función de la corriente a medir. La reacción entre los campos de la bobina fija y la bobina móvil proporciona el torque del sistema móvil, que es compensado por resortes espirales que también se emplean para llevar la corriente a la bobina móvil.
- **Amperímetros digitales:** Estos aparatos ofrecen la lectura de la corriente directamente en una pantalla eliminando en gran medida los errores de lectura. Se diferencian de los analógicos en que las partes mecánicas móviles se han sustituido por circuitos electrónicos, con la gran ventaja de eliminar el desgaste de las partes.



Figura 1.9: Diferentes tipos de amperímetros

1.2.6. Medición de la cantidad de sustancia

La cantidad de sustancia (símbolo: n) en una muestra dada de materia se define como la relación $n = N/N_A$ entre el número de entidades elementales N y la constante de Avogadro N_A .

Las entidades pueden ser moléculas, átomos o iones de un tipo específico. La sustancia concreta que se toma como muestra puede especificarse utilizando un subíndice, por ejemplo, la cantidad de cloruro de sodio (NaCl) se denotaría como n_{NaCl} .

La unidad de cantidad para la sustancia en el Sistema Internacional de Unidades se denomina mol (símbolo: mol). Desde 2019, el valor de la constante de Avogadro N_A se define exactamente como $6,02214076 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$. A veces, la cantidad de sustancia se denomina cantidad química.

1.2.7. Medición de la intensidad luminosa

La intensidad luminosa es una medida de la potencia ponderada en función de la longitud de onda emitida por una fuente luminosa en una dirección determinada por unidad de ángulo sólido, basada en la función de luminosidad y normalizada para la sensibilidad del ojo humano. La unidad SI de intensidad luminosa es la candela (cd). En la medición de la luz, se distinguen varias magnitudes fotométricas con las que se puede evaluar la luz:

- **Lúmen (lm):** Un lumen es la cantidad de energía visible que podemos realmente medir. Es el flujo luminoso, una medida de la potencia luminosa emitida por la fuente.

- Lux (lx): Un lux es el equivalente a la energía producida por un lumen que incide sobre una superficie de 1 m^2 . Es el nivel de iluminación de una fuente.
- Candela (cd): La candela consiste en la unidad básica que mide la intensidad luminosa. Se define como la intensidad luminosa que va en una dirección dada, por lo que se relaciona con el ángulo de apertura hacia la luz.

Para poder medir la luminancia se utiliza un instrumento denominado luxómetro, como se muestra en la figura 1.10. Un luxómetro permite medir simple y rápidamente la iluminancia real y no subjetiva de un ambiente. Contiene una célula fotoeléctrica que capta la luz y la convierte en impulsos eléctricos, los cuales son interpretados y representados en un display o aguja con la correspondiente escala de luxes.



Figura 1.10: Diferentes tipos de luxómetro

Capítulo 2

Redondeo, cifras significativas y orden de magnitud

2.1. Introducción

En este capítulo, se abordarán una serie de conceptos fundamentales relacionados con el manejo de datos numéricos obtenidos en el contexto del laboratorio. Cuando se efectúan cálculos con tales datos, surge la necesidad de redondear números para obtener un valor aproximado que sea conciso y evite la representación engañosa de la precisión de una cifra, medida o estimación en los resultados calculados. En este sentido, resulta crucial considerar los dígitos significativos de un número que sean confiables y esenciales para expresar con precisión la magnitud en cuestión.

2.2. Redondeo

En muchos casos, los valores obtenidos de experimentos pueden ser redondeados a un número específico de cifras significativas, prescindiendo de uno o más de sus últimos dígitos. Por ejemplo, se puede reemplazar 23,4476 por 23,45, la fracción 312/937 por $1/3$ o la expresión $\sqrt{2}$ por 1,414.

El proceso de redondeo suele seguir una regla general: cuando el primer dígito que se quiere suprimir es menor que 5, el último dígito conservado se mantiene sin cambios; por otro lado, cuando el primer dígito a suprimir es igual o mayor a 5, se aumenta en una unidad la última cifra conservada (ver ejemplos en la tabla 2.1).

Tabla 2.1: Ejemplos de redondeo de un número

| | Número | 5 cifras | 4 cifras | 3 cifras | 2 cifras | 1 cifra |
|---|-------------------------|-------------------------|------------------------|-----------------------|----------------------|--------------------|
| a | 3,14159 | 3,1416 | 3,142 | 3,14 | 3,1 | 3 |
| b | $9,8070 \times 10^{-3}$ | $9,8070 \times 10^{-3}$ | $9,807 \times 10^{-3}$ | $9,81 \times 10^{-3}$ | $9,8 \times 10^{-3}$ | 1×10^{-2} |
| c | 0,644510 | 0,64451 | 0,6445 | 0,645 | 0,64 | 0,6 |
| d | 327508 | 32751×10 | 3275×10^2 | 328×10^3 | 33×10^4 | 3×10^5 |

Note que el redondeo no debe hacerse en forma sucesiva, sino con respecto a la cifra original. Si en el ejercicio c, se realiza un redondeo sucesivo, el resultado sería:

$$0,644510 \Rightarrow 0,64451 \Rightarrow 0,6445 \Rightarrow 0,645 \Rightarrow 0,65 \Rightarrow 0,7.$$

Note que el número 0,7 difiere más de 0,644510 que el número 0,6.

2.3. Cifras Significativas

Las cifras significativas en el valor de una magnitud son todos los dígitos contados desde el primero que es diferente de cero, empezando desde la izquierda, sin considerar la posición de la coma decimal, hasta el primer dígito que se ve afectado por el error. Si un número que representa el resultado de una medición, como la longitud, la presión o la masa, tiene más dígitos que los permitidos por la resolución de la medición, solo se consideran fiables los dígitos que la resolución permite. Estos dígitos son los que se denominan cifras significativas.”

A continuación, se presentan ejemplos en los que el dígito dudoso, es decir, aquel que está afectado por el error, se encuentra resaltado en negrita.

Ejemplos:

1. 1,2**31** m; 123,**1** cm; 123**1** mm, tienen todos 4 cifras significativas.
2. 21,**03** g y 200,**3** cm tienen 4 cifras significativas.
3. 2,**00** cm y 7**40** m tienen 3 cifras significativas.
4. 0,**48** s y 0,00**52** g tienen 2 cifras significativas.
5. **323** $\times 10^{-3}$ kg y 3,**00** $\times 10^8$ m/s tienen 3 significativas.

Es oportuno observar en el ejemplo 4, que los valores de las magnitudes se han descrito con dos cifras significativas y no con tres (3) y cinco (5) respectivamente, ya que los ceros a la izquierda no se deben contar como cifras significativas.

2.3.1. Operaciones con cifras significativas

Suma y Resta

Cuando realizamos operaciones de suma y resta con magnitudes que tienen diferentes cantidades de cifras significativas, es necesario redondear el resultado final para que tenga el mismo número de cifras decimales que la magnitud que posea menos cifras decimales.

Por ejemplo, consideremos la suma y resta de masas expresadas en gramos.

| | | |
|-----------|---------|-----------|
| 1) 25,340 | 2) 58,0 | 3) 1,6523 |
| 5,465 | 0,038 | -0,015 |
| 0,322 | 1,0001 | ————— |
| ————— | ————— | 1,6373 |
| 31,127 | 59,0381 | |

En los ejemplos 2 y 3 se observa que los resultados son más precisos que uno de los términos (58,0 g y 0,015 g respectivamente). Por lo tanto, es necesario redondear el resultado al número de decimales de la magnitud menos precisa. Así, las soluciones serán:

1) 31,127 g 2) 59,0 g 3) 1,637 g

Multiplicación y División

Cuando realizamos operaciones de multiplicación y división con magnitudes que tienen diferentes cantidades de cifras significativas, es necesario redondear el resultado final para que tenga el mismo número de cifras significativas que el factor que posea menos cifras significativas.

1. $7,485 \text{ m} \cdot 8,61 \text{ m} = 64,4 \text{ m}^2$

2. $7485 \text{ m} \cdot 8,61 \text{ m} = 644 \times 10^2 \text{ m}^2$

3. $\frac{0,1342}{1,54} = 0,0871$

Observación: Es importante destacar que cuando se conoce el error absoluto (o el error probable) de una magnitud, es precisamente este error el que determina el número de cifras significativas que debe tener la magnitud.

2.4. Orden de magnitud

El orden de magnitud de una cantidad se refiere a la potencia de diez más cercana a dicha cifra.

Por ejemplo,

1. La masa de la tierra es $5,983 \times 10^{24} \text{ kg}$. Su orden de magnitud en el sistema SI es 10^{25} kg y en el sistema CGS es 10^{28} g .

2. El orden de magnitud de 0,0035 es 10^{-3} .

3. El orden de magnitud de 800×10^{-3} es 10^0 cm .

Observación: Si la cantidad física es dimensional, su orden de magnitud también es dimensional y depende del sistema de unidades considerado, como se ejemplifica en los casos 1 y 3. El exponente de la potencia de 10 puede ser positivo, negativo o cero.

Tomemos el ejemplo 1 para ilustrar cómo se puede determinar el orden de magnitud de una cantidad física. Para ello, responderemos a la siguiente pregunta: ¿cuáles son las potencias de 10 consecutivas, inmediatamente menor y mayor que la cantidad física considerada?

$$10^{24} \text{ kg} < 5,983 \times 10^{24} \text{ kg} < 10^{25} \text{ kg}$$

¿Cuáles son las diferencias respectivas?

$$\begin{aligned} 5,983 \times 10^{24} \text{ kg} - 10^{24} \text{ kg} &= 4,983 \times 10^{24} \text{ kg} \\ 10^{25} \text{ kg} - 5,983 \times 10^{24} \text{ kg} &= 4,017 \times 10^{24} \text{ kg} \end{aligned}$$

La menor diferencia que es $(4,017 \times 10^{24})$ implica mayor proximidad, luego 10^{25} es la potencia que se aproxima más a $5,983 \times 10^{24}$.

2.5. Ejercicios

1. Determinar el número de cifras significativas y el orden de magnitud de las siguientes magnitudes físicas.

- a) Radio de la tierra = $6,371 \times 10^6$ m.
- b) Volumen de la tierra = $1,087 \times 10^{21}$ m³
- c) Aceleración de gravedad = $9,80665$ m/s²

2. Exprese el resultado de los siguientes problemas en órdenes de magnitud

- a) La edad del universo se cree que es 3×10^{10} años, dé el resultado en segundos.
- b) La velocidad de la luz en el vacío en: m/s, m/h y en km/días
- c) La densidad del hierro en kg/m³ y en g/cm³

3. Un estudiante determinó que el radio de una esfera es $R = 10,00$ mm.

- a) ¿Cuánto mide su área?
- b) ¿Cuánto mide su volumen?
- c) Indique el orden de magnitud para las tres magnitudes físicas anteriores.

4. Exprese cada uno de los siguientes números con cuatro, tres, dos y una cifra significativa:

| | | |
|---------|------------|---------|
| 0,4536 | 98,372 | 70045,6 |
| 163571 | 3,13100 | 26,39 |
| 0,45330 | 0,00332998 | 20150,0 |

5. Calcule el valor de L con las cifras significativas correspondientes:

$$L = \frac{k^2}{a} + a$$

Donde $k = 14,3$ cm y $a = 853$ mm.

Capítulo 3

Teoría de Errores

3.1. Introducción

Esta sección se centrará en la teoría de errores en el contexto de las mediciones experimentales. Se explorarán los tipos de errores, incluyendo errores sistemáticos y aleatorios, y se discutirán estrategias para minimizar y cuantificar estos errores. Además, se introducirán métodos para calcular incertidumbres.

Cuando se realiza la medida de una magnitud física un cierto numero de veces, se observa que no todos los valores son iguales entre si y lógicamente nos preguntamos ¿Cuál es el valor correcto? ¿Por qué los valores obtenidos son diferentes?

Antes de contestar estas preguntas, debemos decir que ninguna medición puede dar un valor absolutamente exacto de una cantidad física. Es por ello que, cuando hablamos del valor “verdadero” de una magnitud física o valor exacto (valor que tendría la magnitud si no estuviese afectada de ningún tipo de error) debemos entenderlo como una abstracción.

Se puede emplear los métodos e instrumentos técnicos más perfeccionados y de todos modos ninguna medición lleva a un valor exacto, sino a la posibilidad de indicar un intervalo en el cual debe estar comprendido el “verdadero valor” para la magnitud medida.

Por ejemplo, si se mide la longitud de un objeto con una regla graduada, se puede decir que el resultado tiene una incertidumbre de ± 1 mm, y el resultado se puede escribir como $5,5 \pm 0,1$ cm. Pero si se utiliza un vernier, el cual permite obtener una medida con más precisión, el resultado sería $5,530 \pm 0,005$ cm.

3.2. Exactitud, precisión y sensibilidad

- Exactitud: se refiere al grado de concordancia entre el valor “verdadero”¹ y el medido experimentalmente. Decimos que un aparato es exacto si las medidas realizadas con él son todas muy próximas al valor “verdadero” de la magnitud medida.
- Precisión: tiene que ver con la concordancia entre las medidas de una misma magnitud realizadas en condiciones sensiblemente iguales, un aparato es más preciso cuando la diferencia entre diferentes mediciones de una misma magnitud sean muy pequeñas. Notemos

¹Por ahora lo que entendemos como valores “verdaderos” luego los definiremos como valores medios.

que la exactitud normalmente implica precisión, pero la afirmación inversa no es cierta, ya que pueden existir aparatos muy precisos que posean poca exactitud, debido a errores sistemáticos, como por ejemplo el “error del cero”.

Por lo tanto, precisión y exactitud no son sinónimos, la precisión tiene que ver con la capacidad que tiene el instrumento para tomar una medida mientras que exactitud tiene que ver con el hecho de lo cerca que pueda estar una medición al valor real.

- **Sensibilidad:** se relaciona con el valor mínimo de la magnitud que es capaz de medir un aparato. Cuando decimos que la sensibilidad de una balanza es de 1 mg, significa que para masas inferiores a este valor la balanza no muestra ninguna desviación. Por lo general consideramos la sensibilidad de un aparato de medida como el valor de la división más pequeña de la escala de medida.

Así como es importante no confundir precisión con exactitud, también es importante no confundir precisión y sensibilidad.

3.3. Tipos de errores en las mediciones

3.3.1. Errores sistemáticos

Son aquellos errores que afectan los resultados en una misma dirección y pueden ser causados por:

1. Defectos y errores de calibración de los instrumentos. Por ejemplo, si el cero del tambor de un tornillo micrométrico no coincide con el cero de la escala fija, se introducirá una desviación que será igual para todas las medidas realizadas. Esto se puede remediar recalibrando el instrumento.
2. El observador (errores personales). Puede introducir errores por efectos de paralaje. Se deben evitar estando consciente de las causas que los originan.
3. Variación de las condiciones ambientales. En este caso el observador no tiene control.
4. El método empleado. En este caso, los errores solo se hacen evidentes, si se cambia el método.

Para tratar estos errores de manera segura es necesario poder controlar el correcto funcionamiento de los equipos de medida.

3.3.2. Errores casuales o accidentales

Son aquellos errores producto de una contribución de fuentes incontrolables que van desplazando aleatoriamente el valor medido por encima y por debajo de su valor real, esto hace que las medidas den resultados diferentes. Se les conoce también como errores aleatorios o estadísticos. Los errores casuales, a diferencia de los errores sistemáticos, son inevitables y están presentes en todo experimento porque son una consecuencia de múltiples fluctuaciones incontrolables e independientes de los factores que intervienen en la realización de una medición.

Pueden ser causados por:

1. Condiciones ambientales fluctuantes, tales como: temperatura, presión variaciones de voltaje en la línea.
2. Oscilaciones de los mecanismos propios del instrumento de medida.
3. El observador.
4. Factores que puedan introducir errores que contribuyen al error total en los que podemos mencionar los siguiente: vibraciones mecánicas, señales parásitas en instrumentos electrónicos, defectos de fábrica, etc.

Como se trata de errores al azar, es casi imposible decidir si el promedio de las medidas se aleja hacia arriba o hacia abajo del valor exacto, por esto dicho error se expresa acompañado del signo de indeterminación \pm . En el caso de errores sistemáticos se puede al menos en principio, determinar su signo.

3.3.3. Errores de precisión

Los equipos de medición poseen escalas o dígitos y la división más pequeña de la escala o el último dígito determina la mínima diferencia de magnitud que puede apreciar el equipo, es decir: su resolución.

Una cinta métrica se encuentra dividida en centímetros y milímetros, por lo tanto, las medidas que se realicen con la cinta nos permitirá conocer la longitud de un objeto con un error aproximado de 1 mm. En el caso de que queramos disminuir el error de la medida debemos utilizar un dispositivo de medición que tenga una mayor resolución.

Este tipo de error se le conoce como el error de precisión y se debe a la resolución, sensibilidad, del aparato de medida. Suele designarse con ε_p

3.4. La escritura de los resultados de una medición

Al medir una magnitud x y conocer el error involucrado en la medición Δx debemos expresar la medida de la siguiente manera

$$x = x_0 \pm \Delta x \quad [\text{unidades}] \quad (3.1)$$

- x_0 es el valor de la medida
- Δx es la incertidumbre o el error de la medida

Nota: la medida y el error se deben dar en las mismas unidades.

Por ejemplo, con una cinta métrica se ha medido la altura de una persona. El resultado obtenido es de 1,68 m, y el error cometido es 1 cm. La forma correcta de expresar el resultado de la medida es:

$$\text{altura} = 1,68 \pm 0,01 \text{ m.}$$

3.4.1. Error absoluto y error relativo

Cuando medimos una magnitud física cuyo valor “verdadero” es x_0 , lo que obtenemos por el proceso de medición es un valor x de la medida, el **error absoluto** de dicha medida es la siguiente diferencia

$$\Delta x = |x - x_0|, \quad (3.2)$$

en donde suponemos que $\Delta x \ll |x_0|$.

El error absoluto nos da una medida de la desviación, en términos absolutos, respecto al valor “verdadero”.

Conocido el error absoluto podemos calcular el **error relativo** de dicha medida:

$$\varepsilon = \frac{\Delta x}{x_0}, \quad (3.3)$$

de manera que en forma porcentual se puede expresar como $\varepsilon \times 100 \%$.

Cuando vayamos a escribir el resultado de una medición para una magnitud M de debe indicar el grado de incertidumbre de la manera siguiente

$$M = x \pm \Delta x \quad [\text{unidades}] . \quad (3.4)$$

Es muy común escribir el error absoluto con solo una cifra significativa, al menos que se indique lo contrario. Si el error se ha obtenido con más de una cifra, se deberá a proceder a suprimir las posteriores por el método del redondeo. El valor de la magnitud debe tener sólo las cifras necesarias para que su última cifra significativa sea del mismo orden decimal que la última del error absoluto, también llamada cifra de acotamiento.

Escribir el error con una o dos cifras significativas es una decisión un poco arbitraria, y dependerá del error introducido. Por ejemplo, si tenemos un error de 0,89 m y lo redondeamos a 0,9, la diferencia introducida es ligeramente superior al 1 %, valor que podría justificar el redondeo y expresar el error de una manera más sencilla; pero si un error de 1,4 m lo redondeamos a 1 m, la diferencia es cercana a un 40 %, algo difícilmente justificable.

En la siguiente tabla mostramos algunos ejemplos de medidas redondeando a una cifra significativa el error absoluto

| Incorrecto | Correcto |
|----------------------|--------------------------|
| $3,319 \pm 0,123$ | $3,3 \pm 0,1$ |
| $6,5 \pm 0,09$ | $6,50 \pm 0,09$ |
| $428,364 \pm 0,28$ | $428,4 \pm 0,3$ |
| $0,01695 \pm 0,0056$ | $0,017 \pm 0,006$ |
| 46276 ± 1563 | $(46 \pm 2) \times 10^3$ |

3.5. Mediciones directas

Cuando hacemos una medida directamente de un aparato de medición decimos que hacemos una medida directa. En lo que sigue vamos a estudiar el tratamiento de los errores suponiendo que las medidas están libres de errores sistemáticos.

3.5.1. Cálculo de los errores con una sola medida

En el caso de realizar una sola medida x de una magnitud, el error cometido vendrá dado únicamente por el error de precisión del aparato utilizado, es decir, $\varepsilon_p = \Delta x$.

Pero es necesario diferenciar si la medida la hacemos con un aparato analógico o digital.

- Analógico: el error de precisión se toma como la mitad de la división mas pequeña que puede medir el instrumento, es decir, la mitad de su sensibilidad.

$$\varepsilon_p = \frac{\text{división más pequeña}}{2} \quad (3.5)$$

Por ejemplo, supongamos que un amperímetro analógico tiene una escala de lectura que aprecia valores hasta décimas de amperio (sensibilidad: $S=0,1$ A) y, al hacer una medida, la aguja se queda entre 0,6 A y 0,7 A. En ese caso, se podrá tomar como valor experimental de la corriente $I = 0,65$ A y como error absoluto $\varepsilon_p = (0,1)/2 = 0,05$ A. Se dirá que la intensidad de corriente es de $0,65 \pm 0,05$ A.

Para una regla dividida milímetros el error de precisión en milímetros es de $\varepsilon_p = 0,5$ mm.

- Digital: el error de precisión es la mínima magnitud que puede medir el instrumento.

$$\varepsilon_p = \text{mínima magnitud medible} \quad (3.6)$$

Por ejemplo, supongamos que un cronómetro digital que mide hasta milésimas de segundo (sensibilidad: $S = 1$ ms) nos permite medir el período de oscilación de un péndulo en $T = 882$ ms. El error absoluto en este caso es $\varepsilon_p = 1$ ms. Por lo tanto, el resultado se debe escribir como: $T = 882 \pm 1$ ms.

3.5.2. Cálculo de los errores en una serie de medidas

En esta sección nos referimos solo a los errores casuales, cuyo cálculo necesita del uso de la teoría estadística. Esta teoría es válida cuando el número de medidas que se realiza es grande.

En el laboratorio elemental se considera que el número de medidas es grande, cuando $n \geq 25$. Pero no debe considerarse a este número como un valor fijo. Para otros autores, la separación entre un número grande y uno pequeño de medidas puede variar.

Hemos dicho que cuando se realiza una serie de medidas de una magnitud lo más probable es que ellas sean diferentes, entonces uno se pregunta ¿cuál es la mejor medida?

Cálculo de errores en un número pequeño de medidas

Para contestar estas preguntas se acostumbra utilizar algunas definiciones necesarias.

Valor medio aritmético: se define como el cociente entre la suma de las medidas: x_1, x_2, \dots, x_n y el número de n medidas realizadas.

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (3.7)$$

Es decir, la media de las medidas es el valor más probable de la magnitud. Se puede mostrar que \bar{x} es el valor más cercano al valor verdadero (desconocido) de una medida.

Error absoluto de una medida: como mencionamos con anterioridad, se corresponde al valor absoluto de la diferencia del valor medio respecto a cada medida.

$$\Delta x_i = |\bar{x} - x_i| \quad (3.8)$$

Error medio absoluto de una serie de medidas: se define como el valor medio aritmético de los errores absolutos de cada medida.

$$\overline{\Delta x} = \frac{\Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3 + \dots + \Delta x_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Delta x_i. \quad (3.9)$$

Error relativo de una serie de medidas: es dado por el cociente entre el error medio absoluto y el valor medio aritmético de las medidas.

$$\varepsilon_x = \frac{\overline{\Delta x}}{\bar{x}}. \quad (3.10)$$

Error porcentual: se define como el producto del error relativo por 100

$$\varepsilon \% = \varepsilon_x \times 100. \quad (3.11)$$

Dispersión D : la diferencia entre los valores extremos de las medidas:

$$D = x_{\max} - x_{\min}. \quad (3.12)$$

Dispersión porcentual $D\%$: definido por

$$D \% = \frac{D}{\bar{x}} \cdot 100 \quad (3.13)$$

Ejemplo 1. Para ilustrar lo descrito antes, realizaremos el siguiente ejercicio:

Se quiere determinar el volumen de un cilindro y por lo tanto es necesario medir la altura y el diámetro del mismo. La medida de la altura se hizo una vez con una cinta métrica, mientras que la del diámetro se realizó cinco veces con un vernier de apreciación 0,005 cm.

$$\text{altura} = h = (10,2 \pm 0,1)\text{cm}$$

| | | | | | |
|---------------------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $d =$ diámetro (cm) | 1,780 | 1,780 | 1,780 | 1,790 | 1,790 |
|---------------------|-------|-------|-------|-------|-------|

El diámetro promedio es:

$$\bar{d} = \frac{1,780 + 1,780 + 1,780 + 1,790 + 1,790}{5} = 1,784 \text{ cm}$$

En este caso la dispersión es:

$$D = 1,790 - 1,780 = 0,01 \Rightarrow D \% = \frac{0,01}{1,784} \cdot 100 = 0,6 \%$$

Los errores absolutos para cada medida del diámetro son los siguientes:

$$\Delta d_1 = |1,784 - 1,780| = 0,004 \text{ cm}$$

$$\Delta d_2 = |1,784 - 1,780| = 0,004 \text{ cm}$$

$$\Delta d_3 = |1,784 - 1,780| = 0,004 \text{ cm}$$

$$\Delta d_4 = |1,784 - 1,790| = 0,006 \text{ cm}$$

$$\Delta d_5 = |1,784 - 1,790| = 0,006 \text{ cm}$$

El error absoluto del diámetro:

$$\overline{\Delta d} = \frac{0,004 \text{ cm} + 0,004 \text{ cm} + 0,004 \text{ cm} + 0,006 \text{ cm} + 0,006 \text{ cm}}{5} = 0,005 \text{ cm}$$

El error relativo del diámetro:

$$\varepsilon_d = \frac{\overline{\Delta d}}{\bar{d}} = \frac{0,005 \text{ cm}}{1,784 \text{ cm}} = 0,0028.$$

El error porcentual para el diámetro:

$$\varepsilon \% = \varepsilon_d \times 100 = 0,0028 \times 100 = 0,28 \%$$

El error relativo para la altura:

$$\varepsilon_h = \frac{\Delta h}{h} = \frac{0,1 \text{ cm}}{10,2 \text{ cm}} = 0,01.$$

El error porcentual para la altura:

$$\varepsilon \% = \varepsilon_h \times 100 = 0,01 \times 100 = 1 \%$$

Por lo tanto:

$$h = (10,2 \pm 0,1) \text{ cm} \quad y \quad d = (1,784 \pm 0,005) \text{ cm}$$

Vamos a reproducir el ejemplo anterior en Python. Primero que todo debemos incorporar las librerías **numpy** y **matplotlib**

```
1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
```

Luego introducimos los datos como un arreglo

```
1 d = np.array ([1.780 , 1.780 , 1.780 ,1.790 , 1.790])
2 print('Num de datos:', len(d))
3 print('Promedio:', np.mean(d), 'cm')
4 print('Suma:', np.sum(d))
```

```
Num de datos: 5
promedio: 1.784 cm
suma: 8.92
```

Podemos calcular la dispersión de la siguiente manera

```

1 # Valores máximo y mínimos del conjunto de datos
2 print('valor máximo:', np.amax(d))
3 print('valor mínimo:', np.amin(d))
4 print('dispersión:', (np.amax(d) - np.amin(d)).round(2))
5 print('dispersión porcentual:', ((np.amax(d)-np.amin(d))/np.mean(d)*100).round
  (1), '%')

```

```

valor máximo: 1.79
valor mínimo: 1.78
dispersión: 0.01
dispersión porcentual: 0.6 %

```

Para el error absoluto del diámetro

```

1 Delta_d=(np.sum(np.abs(np.mean(d)-d))/len(d)).round(3)
2 Delta_d

```

```
0.005
```

Para el error relativo del diámetro

```

1 err_d=(Delta_d/np.mean(d)) # error relativo
2 err_dp=(err_d*100) # error porcentual
3 print('error relativo:', err_d.round(4))
4 print('error porcentual:', err_dp.round(2), '%')

```

```

error relativo: 0.0028
error porcentual: 0.28 %

```

Cálculo de errores en un número grande de medidas

Supongamos que, un estudiante necesita conocer el diámetro de un tubo de vidrio, para lo cual realiza 25 medidas, tabla 3.1. El instrumento utilizado fue un tornillo micrométrico de apreciación 0,01 mm.

¿Cómo presentar estas medidas gráficamente? Una manera es por medio de un histograma, el cual no es más que un gráfico del número de veces que ocurre una medida (frecuencia) como función del valor de ésta. El histograma se construye de la forma siguiente: Se divide el conjunto de valores medidos en intervalos iguales y se cuenta el número de veces que ocurre el valor de la medición en cada intervalo. El ancho de cada intervalo es arbitrario y generalmente se escoge el más conveniente.

Con los valores de la tabla anterior 3.1 y escogiendo como el ancho del intervalo en 0,01 mm, las frecuencias de las medidas se muestran en la tabla 3.2.

Para hacer un histograma podemos volver al Python

```

1 d = array([15.12, 15.10, 15.15, 15.17, 15.14, 15.16, 15.14, 15.12,
2           15.12, 15.14, 15.15, 15.14, 15.13, 15.14, 15.13, 15.13,
3           15.14, 15.14, 15.14, 15.13, 15.15, 15.13, 15.11, 15.13,
4           15.15])

```

| N° de la medida | d(mm) | N° de la medida | d(mm) | N° de la medida | d(mm) |
|------------------------|-------|------------------------|-------|------------------------|-------|
| 1 | 15,12 | 10 | 15,14 | 19 | 15,14 |
| 2 | 15,10 | 11 | 15,15 | 20 | 15,13 |
| 3 | 15,15 | 12 | 15,14 | 21 | 15,15 |
| 4 | 15,17 | 13 | 15,13 | 22 | 15,13 |
| 5 | 15,14 | 14 | 15,14 | 23 | 15,11 |
| 6 | 15,16 | 15 | 15,13 | 24 | 15,13 |
| 7 | 15,14 | 16 | 15,13 | 25 | 15,15 |
| 8 | 15,12 | 17 | 15,14 | | |
| 9 | 15,12 | 18 | 15,14 | | |

Tabla 3.1: Medidas del diámetro d de un tubo

| Intervalo (mm) | Frecuencia |
|-----------------|------------|
| 15,095 – 15,105 | 1 |
| 15,105 – 15,115 | 1 |
| 15,115 – 15,125 | 3 |
| 15,125 – 15,135 | 6 |
| 15,135 – 15,145 | 8 |
| 15,145 – 15,155 | 4 |
| 15,155 – 15,165 | 1 |
| 15,165 – 15,175 | 1 |

Tabla 3.2: Frecuencias de las medidas de la tabla 3.1

```

5 plt.hist(d,edgecolor = "white", bins=8)
6 plt.xlabel('Diámetros')
7 plt.ylabel('Frecuencia')
8 plt.title("histograma")
9 plt.show()

```

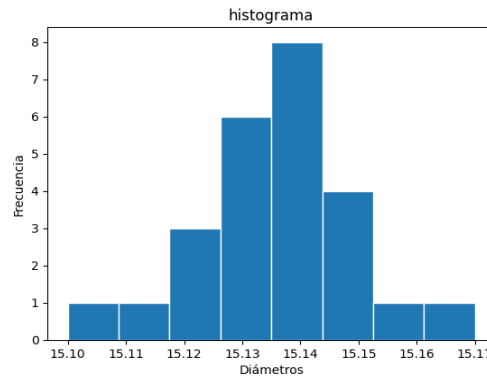


Figura 3.1: Histograma para los datos de la tabla 3.1.

Si se efectuaran otras 25 mediciones, el histograma respectivo sería probablemente diferente al mostrado en 3.1, y si se continuase haciendo medidas del diámetro hasta un número n muy grande y se realizara un nuevo histograma de ellas, tomando los intervalos más pequeños, se obtendría una curva continua, llamada gaussiana o curva de Gauss, ver gráfica 3.2. De la curva de Gauss podemos extraer la información, que nos permite decidir que tan confiables son los valores obtenidos en las medidas realizadas.

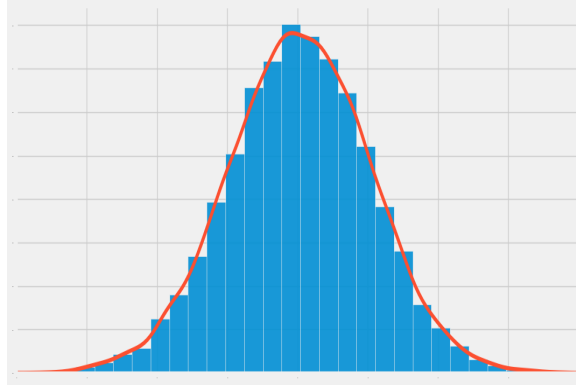


Figura 3.2: Curva de Gauss para un número n muy grande de medidas.

Además del valor medio aritmético \bar{x} también podemos definir:

Desviación de cada medida respecto al valor medio: corresponde a la diferencia entre el valor medio y cada medida y se denota por Δx_i .

$$\Delta x_i = \bar{x} - x_i \quad (3.14)$$

Las desviaciones pueden ser positivas o negativas, lo cual nos señala que las medidas caen a uno u otro lado del valor medio.

La varianza: se calcula tomando la desviación de cada medida respecto al valor medio pero elevando al cuadrado esas diferencias, sumando esos cuadrados y luego dividiendo por el número total de observaciones n :

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \quad (3.15)$$

Desviación estándar: es una medida de dispersión que indica cuánto varían los valores de un conjunto de datos alrededor de su media. Es la raíz cuadrada positiva de la varianza. Se calcula de la siguiente manera:

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad (3.16)$$

Dependiendo del contexto y del propósito del cálculo, cuando se trabaja con poblaciones enteras o con una muestra de esa población podemos definir la varianza y desviación estándar

muestral a la cantidad

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\bar{x} - x_i)^2}{n - 1}} \quad (3.17)$$

que se conoce como la fórmula de Bessel y se utiliza cuando la muestra es una muestra aleatoria simple de la población y se quiere estimar la varianza de la población a partir de la muestra.

La curva de Gauss dibujada en la figura 3.3, ayuda a visualizar las definiciones dadas para el valor medio y la desviación estándar.

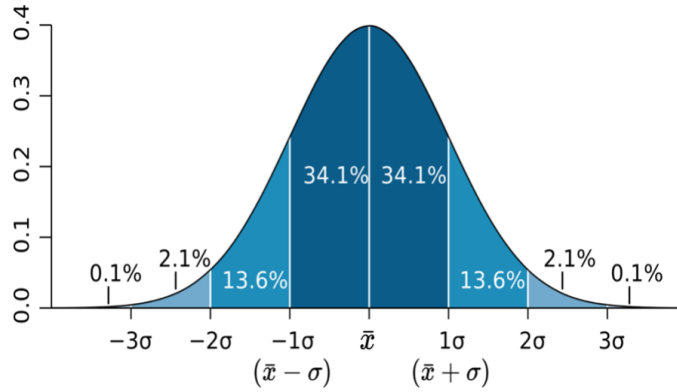


Figura 3.3: Curva de distribución de Gauss mostrando la posición de \bar{x} y σ

Podemos notar que los valores de las mediciones tienden a agruparse alrededor de un punto central: la media. La representación de los datos es simétrica a ambos lados de la media y las desviaciones estándares quedan situadas a igual distancia unas de otras.

Notemos también que la proporción de las medidas situada entre la media y las desviaciones es una constante, por ejemplo: $\bar{x} \pm 1\sigma$ cubre el 68,3% de las mediciones. Mientras que $\bar{x} \pm 3\sigma$ cubre el 99,7%.

Error probable (ε_p) Se define como la desviación respecto al valor medio, que divide la mitad derecha (o izquierda) del área bajo la curva de Gauss en dos partes iguales. Por lo tanto, la probabilidad de observar una desviación dentro del intervalo $(\bar{x} - \varepsilon_p)$ y $(\bar{x} + \varepsilon_p)$ es $\frac{1}{2}$, ver la figura 3.4.

Esto puede interpretarse diciendo que hay un 50% de probabilidad de que el valor verdadero se encuentre en ese intervalo. Para una distribución de Gauss, el error probable (ε_p) está dado por:

$$\varepsilon_p = 0,674\sigma \quad (3.18)$$

El estudiante debe expresar en este caso, el resultado de una serie grande de medidas como:

$$x = (\bar{x} \pm \varepsilon_p) \quad [\text{unidades}]. \quad (3.19)$$

La teoría estadística dice que de todas las medidas el:

- 38,3% están comprendidas en el intervalo de $\bar{x} - \frac{\sigma}{2}$ hasta $\bar{x} + \frac{\sigma}{2}$.

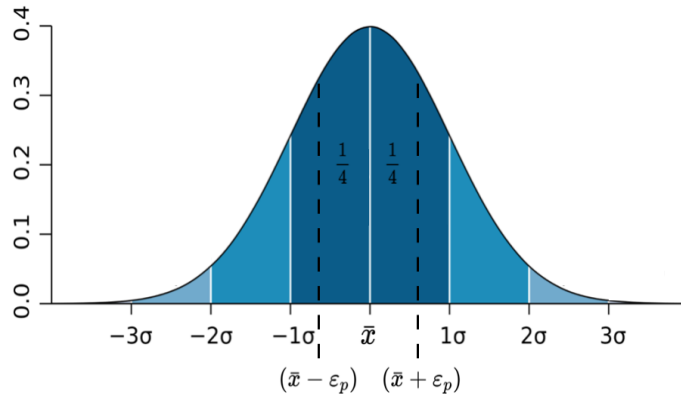


Figura 3.4: Curva de distribución de Gauss mostrando la posición de \bar{x} y σ

- 50,0 % están comprendidas en el intervalo de $\bar{x} - \varepsilon_p$ hasta $\bar{x} + \varepsilon_p$.
- 68,3 % están comprendidas en el intervalo de $\bar{x} - \sigma$ hasta $\bar{x} + \sigma$.
- 82,2 % están comprendidas en el intervalo de $\bar{x} - 2\varepsilon_p$ hasta $\bar{x} + 2\varepsilon_p$.
- 95,45 % están comprendidas en el intervalo de $\bar{x} - 2\sigma$ hasta $\bar{x} + 2\sigma$.
- 95,69 % están comprendidas en el intervalo de $\bar{x} - 3\varepsilon_p$ hasta $\bar{x} + 3\varepsilon_p$.
- 99,73 % están comprendidas en el intervalo de $\bar{x} - 3\sigma$ hasta $\bar{x} + 3\sigma$.

Ejemplo 2. Consideremos el siguiente conjunto de medidas que se corresponden a 25 medidas para el diámetro de un tubo, Tabla 3.3. Para ese conjunto de valores tenemos:

- La desviación estándar:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\Delta d)^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{0,0058 \text{ mm}^2}{24}} = 0,02 \text{ mm}.$$

- Error probable:

$$e_p = 0,674 \times \sigma = 0,01 \text{ mm}.$$

- Error relativo:

$$\varepsilon_d = \frac{e_p}{\bar{d}} = \frac{0,01 \text{ mm}}{15,14 \text{ mm}} = 7 \times 10^{-4}.$$

- Error porcentual:

$$\varepsilon \% = \varepsilon_d \times 100 = 7 \times 10^{-4} \times 100 = 7 \times 10^{-2} = 0,07 \%.$$

- Valor del diámetro:

$$d = (15,14 \pm 0,01) \text{ mm}$$

Con Python podemos hacer los cálculos del Ejemplo 2, pero es bueno notar lo siguiente. Numpy tiene una función para calcular la desviación estándar que es **std** que se basa en la ecuación

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (d_i - \bar{d})^2}{n}}$$

que sería la desviación estándar no corregida de una muestra (considerada como la población total).

```
1 sig=np.std(d)
2 sig
```

0.014966629547095968

Pero aquí estaremos utilizando la ecuación 3.17 que también se conoce como la desviación estándar de una muestra corregida. Esa diferencia entre $1/n$ y $1/(n-1)$ se hace cada vez más pequeña a medida que n aumenta. Podemos definir nuestra propia desviación estándar.

```
1 des = np.sqrt(sum((d - np.mean(d))**2)/(len(d)-1))
2 des
```

0.015275252316519673

Para el resto de los cálculos del ejemplo 2 tenemos:

```
1 epr=(0.674*des)
2 ed=epr/np.mean(d)
3 ep=ed*100
4 print('promedio:', np.mean(d).round(2))
5 print('error probable:', epr.round(2))
6 print('error relativo:', ed.round(4))
7 print('error porcentual:', ep.round(2), '%')
```

promedio: 15.14
error probable: 0.01
error relativo: 0.0007
error porcentual: 0.07 %

3.5.3. Precisión y exactitud de mediciones

Volviendo al tema de la precisión y exactitud de las mediciones vimos que están relacionadas con los errores cometidos en la obtención de las mismas. La precisión en el valor medio es proporcional al inverso del error casual o estadístico. Se obtendrá una alta precisión si el error (porcentual) estadístico es pequeño y será baja si dicho error es grande. La exactitud será alta cuando los errores sistemáticos sean pequeños y será baja si éstos son grandes.

En algunos casos, una alta exactitud puede implicar un error casual pequeño, pero en general no es así. La precisión y exactitud no son términos intercambiables entre sí y los métodos estadísticos dan específicamente una medida cuantitativa de la precisión y no de la exactitud.

Las diferencias entre exactitud y precisión se ilustran en la figura 3.5. En la figura de la izquierda se observa que el valor medio difiere bastante del valor verdadero, lo cual se interpreta diciendo que las mediciones fueron de baja exactitud, la gaussiana B indica una baja exactitud y una alta precisión.

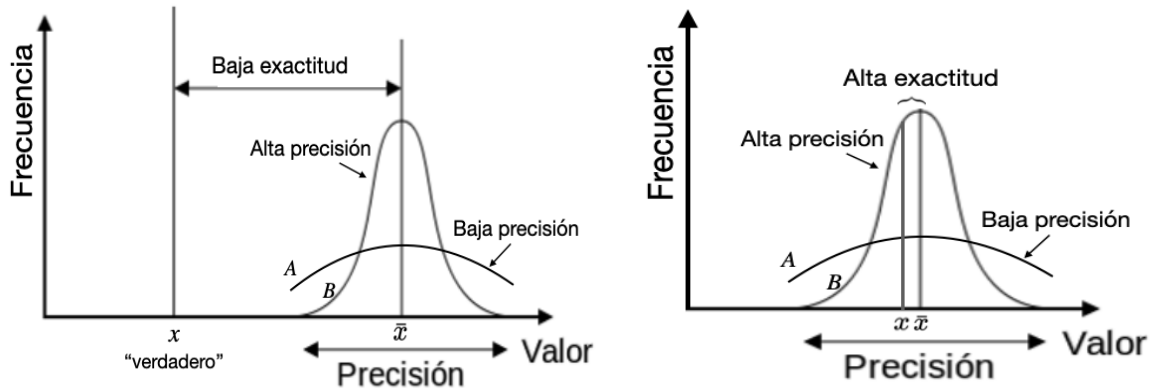


Figura 3.5: Precisión y Exactitud

En la misma figura pero de la derecha, en la gaussiana B , el intervalo $(\bar{x} - \varepsilon_p, \bar{x} + \varepsilon_p)$ es menor que en la gaussiana A , por lo tanto las mediciones que corresponden a la gaussiana B son de mayor precisión y una alta exactitud.

3.5.4. Discrepancia

Cuando tenemos dos mediciones de una misma cantidad, por ejemplo

$$x_1 = (x_{01} \pm \Delta x_1) \quad \text{y} \quad x_2 = (x_{02} \pm \Delta x_2)$$

decimos que tenemos una discrepancia si estas mediciones no coinciden.

Definimos la discrepancia entre dos medidas como la diferencia entre las medidas de la misma cantidad:

$$\text{Discrepancia} = \mathcal{D} = |x_{01} - x_{02}|$$

No es exactamente un error pero es una cantidad que puede ser significativa para el cálculo de los errores.

Por ejemplo, dos estudiantes miden las siguientes temperaturas en un experimento:

$$T_A = (2,2 \pm 0,1) \text{ K}, \quad T_B = (2,7 \pm 0,2) \text{ K} \Rightarrow \mathcal{D} = |2,2 - 2,7| = 0,5$$

Lo anterior es igual a:

$$2,1 \leq T_A \leq 2,3 \text{ K} \quad \text{y} \quad 2,5 \leq T_B \leq 2,9 \text{ K}$$

y se dice que ambas mediciones son distinguibles entre sí porque los intervalos no se solapan.

Pero resulta que otros dos estudiantes miden las siguientes temperaturas

$$T_A = (2,3 \pm 0,1) \text{ K}, \quad T_B = (2,5 \pm 0,2) \text{ K} \Rightarrow \mathcal{D} = |2,3 - 2,5| = 0,2$$

que es equivalente a:

$$2,2 \leq T_A \leq 2,4 \text{ K} \quad \text{y} \quad 2,3 \leq T_B \leq 2,7 \text{ K}$$

en este caso, la discrepancia es de 0,2 pero no es significativa porque los intervalos de las mediciones se superponen, decimos entonces que las mediciones son indistinguibles.

Podemos hablar de una discrepancia porcentual si tomamos la media de las medidas, para el primer caso el promedio de las dos medidas es: 2,45 K.

$$\mathcal{D}_{\%} = \left| \frac{0,5}{2,45} \right| \times 100 = 20 \%$$

Y para el segundo par de medidas el promedio es 2,4 K

$$\mathcal{D}_{\%} = \left| \frac{0,2}{2,4} \right| \times 100 = 8 \%$$

3.6. Algoritmo para el manejo de los errores

Podemos crear un algoritmo que nos ayude a definir los criterios que debemos utilizar a la hora de escribir los resultados de las mediciones hechas en el laboratorio. Para darle a nuestras mediciones una validez estadística es conveniente realizar el calculo de la dispersión D , ecuación 3.12, la dispersión porcentual 3.13 y tener a mano la sensibilidad S del aparato de medida.

Realicemos los siguientes pasos

1. Tomaremos $N = 3$ mediciones como el valor mínimo para nuestro algoritmo.

i) **Si $D < S$:** El error vendrá dado por $\Delta x = S$ y la medida es \bar{x}_3 , por lo tanto

$$M = \bar{x}_3 \pm S \quad [\text{Unidades}]$$

ii) **Si $D > S$ y $D_{\%} \leq 2\%$:** El error vendrá dado por $\Delta x = S$ y la medida es \bar{x}_3

$$M = \bar{x}_3 \pm S \quad [\text{Unidades}]$$

donde

$$\bar{x}_3 = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 x_i$$

2. Si para $N = 3$ se tiene que $D > S$ pero la dispersión está entre: $2\% \leq D_{\%} \leq 8\%$, entonces realizamos más medidas hasta llegar a $N = 6$. El error vendrá dada por el valor máximo entre $D_6/4$ y S , donde D_6 es la dispersión para 6 medidas, es decir:

$$M = \bar{x}_6 \pm \max \{D_6/4, S\} \quad [\text{Unidades}]$$

donde

$$\bar{x}_6 = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^6 x_i$$

3. Si para $N = 3$ se tiene que $D > S$ pero la dispersión está entre: $8\% \leq D\% \leq 15\%$, entonces hacemos $N = 15$, y el error vendrá dado por

$$\Delta x_{15} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{15} (x_i - \bar{x}_{15})^2}{14}}$$

La magnitud se escribe entonces como

$$M = \bar{x}_{15} \pm \Delta x_{15} \quad [\text{Unidades}]$$

donde

$$\bar{x}_{15} = \frac{1}{15} \sum_{i=1}^{15} x_i$$

4. Si para $N = 3$ se tiene que $D > S$ pero la dispersión es $D\% \geq 15\%$, entonces demos hacer muchas medidas $N \geq 50$, y el error vendrá dado por

$$\Delta x_N = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x}_N)^2}{N(N-1)}}$$

La magnitud se escribe entonces como

$$M = \bar{x}_N \pm \Delta x_N \quad [\text{Unidades}]$$

donde

$$\bar{x}_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i.$$

Notemos que si por ejemplo, se ha obtenido que $D > S$ y $2\% \leq D\% \leq 8\%$ se necesitan 6 medidas y el valor verdadero queda establecido en la media aritmética de las 6 medidas y su error corresponde al máximo de entre la dispersión de las seis medidas dividido por 4 o la sensibilidad.

Por otro lado, si se realizan 15 o más medidas, en realidad se está buscando que el conjunto de las mismas sea una distribución gaussiana o normal, en cuyo caso, el error que se considera corresponde con el error cuadrático medio (ECM) o desviación standard σ .

Ejemplo 3. Con una regla graduada, en milímetros, se mide la longitud L de un tubo. El error de cada medida para este instrumento analógico es

$$\varepsilon_p = \frac{1 \text{ mm}}{2} = 0,5 \text{ mm} = S$$

- Los datos obtenidos para tres medidas son:

| | | | |
|----------------|------|------|------|
| $L(\text{mm})$ | 15,0 | 14,0 | 13,5 |
|----------------|------|------|------|

La media:

$$\bar{L} = \frac{15,0 + 14,0 + 13,5}{3} = \frac{42,5}{3} = 14,2 \text{ mm}$$

La dispersión para estos datos es de

$$D = 15,0 - 13,5 = 1,5 \Rightarrow D_{\%} = \frac{1,5}{14,2} \cdot 100 = 11 \%$$

Estamos en el caso donde $D > S$ y la dispersión porcentual resulta ser mayor al 2 %. Debemos hacer más medidas

- Agregamos tres medidas más para completar 6 mediciones

| | | | | | | |
|----------------|------|------|------|------|------|------|
| $L(\text{mm})$ | 15,0 | 14,0 | 13,5 | 15,5 | 15,5 | 15,5 |
|----------------|------|------|------|------|------|------|

La media:

$$\bar{L} = \frac{15,0 + 14,0 + 13,5 + 15,5 + 15,5 + 15,5}{6} = \frac{89,0}{6} = 14,8 \text{ mm}$$

La dispersión para estos datos es ahora de

$$D = 15,5 - 13,5 = 2,0 \Rightarrow D_{\%} = \frac{2,0}{14,8} \cdot 100 = 14 \%$$

Con $N = 6$, nuevamente tenemos que $D > S$ y la dispersión porcentual se encuentra fuera del rango $2\% \leq D_{\%} \leq 8\%$. Debemos tomar más medidas.

- Agregamos 9 medidas más para completar $N = 15$

| $L(\text{ mm})$ | $L(\text{ mm})$ | $L(\text{ mm})$ |
|-----------------|-----------------|-----------------|
| 15,0 | 14,0 | 13,5 |
| 15,5 | 15,5 | 15,5 |
| 13,5 | 15,0 | 14,0 |
| 14,0 | 14,0 | 15,5 |
| 13,5 | 14,0 | 14,0 |

La media:

$$\bar{L} = \frac{1}{15} \sum_{i=1}^{15} L_i = \frac{216}{15} = 14,4 \text{ mm}$$

La dispersión para estos datos es ahora de

$$D = 15,5 - 13,5 = 2,0 \Rightarrow D_{\%} = \frac{2,0}{14,4} \cdot 100 = 14 \%$$

Con $N = 15$, nuevamente tenemos que $D > S$ pero ahora la dispersión porcentual se encuentra dentro del rango $8\% \leq D_{\%} \leq 15\%$. Podemos parar y proceder a calcular los

errores completando la siguiente tabla

| i | $L_i \pm 0,5(\text{mm})$ | $L_i - \bar{L}(\text{mm})$ | $(L_i - \bar{L})^2 (\text{mm}^2)$ |
|----------|--------------------------|----------------------------|-----------------------------------|
| 1 | 15,0 | 0,6 | 0,36 |
| 2 | 15,5 | 1,1 | 1,21 |
| 3 | 13,5 | -0,9 | 0,81 |
| 4 | 14,0 | -0,4 | 0,16 |
| 5 | 13,5 | -0,9 | 0,81 |
| 6 | 14,0 | -0,4 | 0,16 |
| 7 | 15,5 | 1,1 | 1,21 |
| 8 | 15,0 | 0,6 | 0,36 |
| 9 | 14,0 | -0,4 | 0,16 |
| 10 | 14,0 | -0,4 | 0,16 |
| 11 | 13,5 | -0,9 | 0,81 |
| 12 | 15,5 | 1,1 | 1,21 |
| 13 | 14,0 | -0,4 | 0,16 |
| 14 | 15,5 | 1,1 | 1,21 |
| 15 | 14,0 | -0,4 | 0,16 |
| Σ | 216 | | 8,95 |

Por lo tanto:

$$\Delta x_{15} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{15} (L_i - \bar{L}_{15})^2}{14}} = \sqrt{\frac{8,95}{14}} = 0,214 \text{ mm}$$

La longitud L del tubo se escribe entonces como

$$L = 14,4 \pm 0,2 \text{ mm}$$

3.7. Mediciones indirectas

Hasta aquí se ha analizado lo correspondiente a errores de magnitudes medidas directamente, por ejemplo: la altura de un cilindro, el diámetro de un tubo, el tiempo de caída de un cuerpo. Frecuentemente la magnitud de interés debe ser determinada a partir de otras magnitudes medidas directamente, por lo que el error en dicha magnitud debe ser obtenido a partir de los errores de las otras magnitudes.

Por ejemplo, para la determinar el volumen V de un cilindro se efectúan medidas del diámetro d y la altura h , luego el error en V debe ser obtenido de los errores cometidos en las medidas de d y h . El procedimiento que permite obtener este error es lo que se conoce como propagación de errores.

3.7.1. Propagación de errores

Como indicamos anteriormente, la medida indirecta de una magnitud se alcanza por aplicación de una fórmula a un conjunto de medidas directas, (las variables independientes o los datos), que las relacionan con la magnitud del problema. Mediante dicha fórmula se puede obtener también el error de la medida.

3.7.2. Propagación de errores en casos particulares

A continuación analizaremos algunos de los casos más sencillos de propagación de errores:

Suma y diferencia de magnitudes. Cuando una magnitud M es el resultado de la suma o resta de dos o más magnitudes medidas directamente, un error en dichas magnitudes traerá consigo un error en M , es decir, si $(X \pm \Delta X)$ y $(Y \pm \Delta Y)$ son dos mediciones directas, entonces

$$M = X \pm Y \Rightarrow M \pm \Delta M = (X \pm \Delta X) \pm (Y \pm \Delta Y),$$

reagrupando términos resulta,

$$M \pm \Delta M = (X \pm Y) \pm (\Delta X + \Delta Y)$$

donde

$$\Delta M = \Delta X + \Delta Y$$

El error absoluto ΔM , de la suma o diferencia de magnitudes, viene dado por la suma de los errores absolutos de cada una de las magnitudes medidas directamente.

El error relativo será:

$$\varepsilon_r = \frac{\Delta M}{M} = \frac{\Delta X + \Delta Y}{X \pm Y}$$

Multiplicación de magnitudes. Si la magnitud M es el resultado de multiplicar dos o más magnitudes medidas en forma directa, el error absoluto ΔM se puede obtener de la siguiente manera:

$$M = X \cdot Y \Rightarrow M \pm \Delta M = (X \pm \Delta X) \cdot (Y \pm \Delta Y),$$

por lo tanto

$$M \pm \Delta M = (X \cdot Y) \pm X\Delta Y \pm Y\Delta X + \Delta X\Delta Y.$$

Puesto que las cantidades ΔX y ΔY son pequeñas comparadas con X y Y , se puede despreciar el término $\Delta X\Delta Y$ y el error absoluto de M será:

$$\Delta M = X\Delta Y + Y\Delta X.$$

El error relativo:

$$\varepsilon_r = \frac{\Delta M}{M} = \frac{\Delta X}{X} + \frac{\Delta Y}{Y}$$

es decir, el error relativo de un producto de magnitudes es la suma de los errores relativos de cada una de las magnitudes medidas directamente.

División de magnitudes. Cuando la magnitud M es el resultado de dividir magnitudes medidas directamente, el error absoluto se puede obtener en la forma siguiente:

$$M = \frac{X}{Y} \Rightarrow M \pm \Delta M = \frac{X \pm \Delta X}{Y \mp \Delta Y},$$

por lo tanto:

$$M \pm \Delta M = \frac{X \pm \Delta X}{Y \mp \Delta Y} \cdot \frac{Y \pm \Delta Y}{Y \pm \Delta Y} = \frac{XY \pm Y\Delta X \pm X\Delta Y + \Delta X\Delta Y}{Y^2 - (\Delta Y)^2}.$$

Considerando que ΔX y ΔY son pequeños en relación a X y Y , se puede despreciar los términos $\Delta X\Delta Y$ y $(\Delta Y)^2$, luego

$$M \pm \Delta M = \frac{X}{Y} \pm \frac{Y\Delta X + X\Delta Y}{Y^2},$$

es decir, el error absoluto en M será:

$$\Delta M = \frac{Y\Delta X + X\Delta Y}{Y^2},$$

y el error relativo:

$$\varepsilon_r = \frac{\Delta M}{M} = \frac{\Delta X}{X} + \frac{\Delta Y}{Y}.$$

Al igual que para el producto de magnitudes, el error relativo del cociente es igual a la suma de los errores relativos de cada una de las magnitudes medidas directamente.

Función potencial. Si la magnitud M es el resultado de elevar la magnitud X a una potencia n , $M = aX^n$, donde a es un valor exacto. El error relativo se puede obtener aplicando el criterio definido para el producto de magnitudes.

Ya que M se puede escribir como:

$$M = a \cdot \underbrace{X \cdot X \cdot X \dots X}_{n \text{ veces}}$$

su error relativo será:

$$\varepsilon_r = \frac{\Delta M}{M} = \underbrace{\frac{\Delta X}{X} + \frac{\Delta X}{X} + \dots + \frac{\Delta X}{X}}_{n \text{ veces}}$$

luego

$$\varepsilon_r = \frac{\Delta M}{M} = n \frac{\Delta X}{X}$$

así que, el error absoluto será:

$$\Delta M = anX^{n-1}\Delta X.$$

3.7.3. Propagación de errores en casos generales

En el caso en que la magnitud a determinar dependa de más de dos magnitudes medidas directamente y relacionadas a través de diferentes operaciones matemáticas, el cálculo del error absoluto y del relativo se puede realizar por uno de los métodos siguientes:

Método del binomio

Consideremos un caso en que la expresión que relaciona la magnitud M con las magnitudes X, Y, Z y T sea del tipo:

$$M = \frac{X^a Y^b}{Z^c T^d} = X^a Y^b Z^{-c} T^{-d}$$

Para la obtención del error en M , supongamos que el experimento sea tan desafortunado que todos los errores influyan en el resultado en la misma dirección. En este caso el máximo error posible en M vendrá dado por:

$$M \pm \Delta M = \frac{(X + \Delta X)^a (Y + \Delta Y)^b}{(Z - \Delta Z)^c (T - \Delta T)^d} = (X + \Delta X)^a (Y + \Delta Y) (Z - \Delta Z)^{-c} (T - \Delta T)^{-d}$$

Esto sucederá si los valores de X y Y son grandes, mientras que los de Z y T son pequeños. La expresión anterior puede ser escrita en la forma siguiente:

$$M \left(1 + \frac{\Delta M}{M}\right) = X^a Y^b Z^{-c} T^{-d} \left(1 + \frac{\Delta X}{X}\right)^a \left(1 + \frac{\Delta Y}{Y}\right)^b \left(1 - \frac{\Delta Z}{Z}\right)^{-c} \left(1 - \frac{\Delta T}{T}\right)^{-d}$$

luego,

$$\left(1 + \frac{\Delta M}{M}\right) = \left(1 + \frac{\Delta X}{X}\right)^a \left(1 + \frac{\Delta Y}{Y}\right)^b \left(1 - \frac{\Delta Z}{Z}\right)^{-c} \left(1 - \frac{\Delta T}{T}\right)^{-d}$$

Si suponemos que los errores absolutos son pequeños comparados con las magnitudes medidas, los términos, $\frac{\Delta X}{X}$, $\frac{\Delta Y}{Y}$, $\frac{\Delta Z}{Z}$ y $\frac{\Delta T}{T}$ son aún más pequeños, por consiguiente al desarrollar cada uno de los binomios de Newton y despreciar los términos elevados al cuadrado o de potencias mayores, lo que queda es:

$$\left(1 + \frac{\Delta M}{M}\right) \simeq \left(1 + a \frac{\Delta X}{X}\right) \left(1 + b \frac{\Delta Y}{Y}\right) \left(1 + c \frac{\Delta Z}{Z}\right) \left(1 + d \frac{\Delta T}{T}\right)$$

Efectuando las multiplicaciones y despreciando los productos de los términos pequeños, se tiene:

$$\varepsilon_r = \frac{\Delta M}{M} = a \frac{\Delta X}{X} + b \frac{\Delta Y}{Y} + c \frac{\Delta Z}{Z} + d \frac{\Delta T}{T} \quad (3.20)$$

es decir, el error relativo de M corresponde a la suma de los errores relativos de cada magnitud multiplicados por sus exponentes respectivos.

Si se multiplica por 100 la expresión anterior, se obtiene el error porcentual en M como función de los porcentajes de error que introducen cada una de las magnitudes:

$$\varepsilon \% = a \varepsilon_X \% + b \varepsilon_Y \% + c \varepsilon_Z \% + d \varepsilon_T \%$$

Ejemplo 4. Supongamos que una magnitud M está relacionada con las magnitudes: X_1, X_2, Y, Z, T_1 y T_2 , mediante una expresión del tipo:

$$M = \frac{(X_1 + X_2) Y^2}{Z (T_1 - T_2)^3} \quad (3.21)$$

Para utilizar la expresión (3.20), se debe llevar la expresión M a una forma que contenga sólo productos y/o cocientes de magnitudes. Para lograr esto, se realiza el siguiente cambio de variables,

$$\begin{aligned} X &= X_1 + X_2 \\ T &= T_1 - T_2 \end{aligned} \quad (3.22)$$

Como X y T son el resultado de una suma y una resta, respectivamente, se sabe que el error absoluto de cada una de ellas viene dado por:

$$\begin{aligned} \Delta X &= \Delta X_1 + \Delta X_2 \\ \Delta T &= \Delta T_1 + \Delta T_2 \end{aligned}$$

Usando (3.22) M se puede expresar como:

$$M = \frac{XY^2}{ZT^3}$$

De acuerdo a la expresión (3.20), el error relativo de M será:

$$\varepsilon_r = \frac{\Delta M}{M} = \frac{\Delta X}{X} + 2\frac{\Delta Y}{Y} + \frac{\Delta Z}{Z} + 3\frac{\Delta T}{T}.$$

Ejemplo 5. Para calcular los errores en el volumen del cilindro estudiado anteriormente, (Ejemplo 1) se hará uso de la expresión (3.20).

Con los valores medidos de $h = (10,2 \pm 0,1)$ cm y $d = (1,784 \pm 0,005)$ cm, el volumen del cilindro estará dado por:

$$V = \pi r^2 h = \frac{\pi d^2 h}{4} = \frac{\pi (1,784)^2 (10,2)}{4} = 25,5 \text{ cm}^3.$$

El error relativo será:

$$\varepsilon_r = \frac{\Delta V}{V} = 2\frac{\Delta D}{D} + \frac{\Delta h}{h} = 2 \cdot (0,0028) + 0,01 = 0,016.$$

El error porcentual,

$$\varepsilon_{\%} = \varepsilon_r \cdot 100 = 0,016 \cdot 100 = 1,6 \simeq 2\%.$$

El error absoluto,

$$\Delta V = 0,016 \cdot V = 0,4 \text{ cm}^3,$$

luego el valor calculado de V se escribe de la siguiente manera:

$$V = (25,5 \pm 0,4) \text{ cm}^3$$

Nota: El error absoluto de la magnitud física se escribió con una cifra significativa. Esto condiciona el número de cifras significativa del valor de la magnitud.

Método de las derivadas parciales

Existe un método alternativo al dado anteriormente para la propagación de errores, el cual hace uso de las derivadas y que explicaremos a continuación.

Sea una magnitud M , la cual es función de las magnitudes independientes X, Y, Z, T, \dots

$$M = M(X, Y, Z, T, \dots)$$

El error en M es producido por cada uno de los errores de las magnitudes X, Y, Z, T, \dots , independientemente uno de los otros. A estos errores se les llama errores parciales y la suma de ellos, considerando el caso más desfavorable, dará el error en M .

El error absoluto en M estará dado por:

$$\Delta M = \left| \frac{\partial M}{\partial X} \right| |\Delta X| + \left| \frac{\partial M}{\partial Y} \right| |\Delta Y| + \left| \frac{\partial M}{\partial Z} \right| |\Delta Z| + \left| \frac{\partial M}{\partial T} \right| |\Delta T| + \dots \quad (3.23)$$

donde los términos $\frac{\partial M}{\partial X}, \frac{\partial M}{\partial Y}, \frac{\partial M}{\partial Z}, \frac{\partial M}{\partial T}, \dots$ son las derivadas de M con respecto a X, Y, Z, T, \dots , respectivamente.

Estas se determinan derivando la función M con respecto a cada una de las variables en forma separada y considerando constantes las demás, es decir, al derivar M con respecto a X se considera a las variables Y, Z, T, \dots como constantes, y así sucesivamente cuando se deriva respecto a Y , ó a Z, \dots

El error relativo se determina como el cociente entre el error absoluto y la función misma.

$$\varepsilon_r = \frac{\Delta M}{M} = \frac{1}{M(X, Y, Z, T, \dots)} \left\{ \left| \frac{\partial M}{\partial X} \right| |\Delta X| + \left| \frac{\partial M}{\partial Y} \right| |\Delta Y| + \left| \frac{\partial M}{\partial Z} \right| |\Delta Z| + \left| \frac{\partial M}{\partial T} \right| |\Delta T| + \dots \right\} \quad (3.24)$$

Ejemplo 6. Obtendremos el error relativo para la expresión (5.4.2) del ejemplo 3, utilizando el método de las derivadas parciales:

$$M = \frac{(X_1 + X_2) Y^2}{Z (T_1 - T_2)^3}$$

Las derivadas parciales de M respecto a cada una de las variables son las siguientes:

$$\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial X_1} &= \frac{Y^2}{Z (T_1 - T_2)^3}, & \frac{\partial M}{\partial X_2} &= \frac{Y^2}{Z (T_1 - T_2)^3}, & \frac{\partial M}{\partial Y} &= \frac{2Y (X_1 + X_2)}{Z (T_1 - T_2)^3} \\ \frac{\partial M}{\partial Z} &= -\frac{(X_1 + X_2) Y^2}{Z^2 (T_1 - T_2)^3}, & \frac{\partial M}{\partial T_1} &= -\frac{3 (X_1 + X_2) Y^2}{Z (T_1 - T_2)^4}, & \frac{\partial M}{\partial T_2} &= \frac{3 (X_1 + X_2) Y^2}{Z (T_1 - T_2)^4} \end{aligned}$$

El error absoluto será:

$$\Delta M = \left| \frac{\partial M}{\partial X_1} \right| |\Delta X_1| + \left| \frac{\partial M}{\partial X_2} \right| |\Delta X_2| + \left| \frac{\partial M}{\partial Y} \right| |\Delta Y| + \left| \frac{\partial M}{\partial Z} \right| |\Delta Z| + \left| \frac{\partial M}{\partial T_1} \right| |\Delta T_1| + \left| \frac{\partial M}{\partial T_2} \right| |\Delta T_2| .$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}\Delta M = & \frac{Y^2}{Z(T_1 - T_2)^3} \Delta X_1 + \frac{Y^2}{Z(T_1 - T_2)^3} \Delta X_2 + \frac{2Y(X_1 + X_2)}{Z(T_1 - T_2)^3} \Delta Y \\ & + \frac{(X_1 + X_2)Y^2}{Z^2(T_1 - T_2)^3} \Delta Z + \frac{3(X_1 + X_2)Y^2}{Z(T_1 - T_2)^4} \Delta T_1 + \frac{3(X_1 + X_2)Y^2}{Z(T_1 - T_2)^4} \Delta T_2\end{aligned}$$

Simplificando:

$$\begin{aligned}\Delta M = & \frac{Y^2(\Delta X_1 + \Delta X_2)}{Z(T_1 - T_2)^3} + \frac{Y(X_1 + X_2)}{Z(T_1 - T_2)^3} \left[2\Delta Y + \frac{Y\Delta Z}{Z} \right] \\ & + \frac{3(X_1 + X_2)Y^2(\Delta T_1 + \Delta T_2)}{Z(T_1 - T_2)^4}\end{aligned}$$

El error relativo:

$$\begin{aligned}\varepsilon_r = \frac{\Delta M}{M} = & \frac{Z(T_1 - T_2)^3}{(X_1 + X_2)Y^2} \left\{ \frac{Y^2(\Delta X_1 + \Delta X_2)}{Z(T_1 - T_2)^3} + \frac{Y(X_1 + X_2)}{Z(T_1 - T_2)^3} \left[2\Delta Y + \frac{Y\Delta Z}{Z} \right] \right. \\ & \left. + \frac{3(X_1 + X_2)Y^2(\Delta T_1 + \Delta T_2)}{Z(T_1 - T_2)^4} \right\}\end{aligned}$$

simplificamos nuevamente y finalmente obtenemos

$$\frac{\Delta M}{M} = \frac{\Delta X_1 + \Delta X_2}{X_1 + X_2} + 2\frac{\Delta Y}{Y} + \frac{\Delta Z}{Z} + 3\frac{\Delta T_1 + \Delta T_2}{T_1 - T_2} \quad (3.25)$$

Vemos que la expresión anterior para el error relativo coincide con la obtenida por el método del binomio del ejemplo 4. Se debe notar que el método de las derivadas es más laborioso y necesita del conocimiento de las derivadas parciales. Sin embargo, este último método es aplicable a cualquier expresión, mientras que el método del binomio sólo es válido para expresiones que contengan solamente variables independientes.

Para ilustrar esto último obtengamos el error relativo para la expresión:

$$M = \frac{(a + z)^2}{(b + z)^2}$$

donde a y b son constantes exactas.

a) Método del binomio

Primero realizaremos el siguiente cambio de variables:

- $A = a + z \Rightarrow \Delta A = \Delta z$
- $B = b + z \Rightarrow \Delta B = \Delta z$

Note que las variables A y B son dependientes. Por lo tanto:

$$M = \frac{A^2}{B^2}$$

para el error relativo se tendrá,

$$\frac{\Delta M}{M} = 2 \frac{\Delta A}{A} + 2 \frac{\Delta B}{B}$$

de aquí,

$$\frac{\Delta M}{M} = 2 \frac{\Delta z}{a+z} + 2 \frac{\Delta z}{b+z} = \frac{2a+2b+4z}{(a+z)(b+z)} \Delta z$$

b) Método de las derivadas parciales

$$\Delta M = \left| \frac{\partial M}{\partial z} \right| |\Delta z|$$

donde

$$\frac{\partial M}{\partial z} = \frac{2(a+z)(b+z) - 2(a+z)^2}{(b+z)^3}$$

Por lo tanto

$$\frac{\Delta M}{M} = \frac{(b+z)^2}{(a+z)^2} \left\{ \frac{2(a+z)(b+z) - 2(a+z)^2}{(b+z)^3} \right\} \Delta z = \frac{2(b-a)}{(a+z)(b+z)} \Delta z$$

Como se puede ver, se ha obtenido dos expresiones diferentes para el error en M; sin embargo, sólo una de ellas es correcta. Analicemos el caso particular en que $a = b$ entonces se tendrá que $M=1$, eso implica que el error relativo de M debe ser cero.

Lo anterior muestra que el método de las derivadas parciales da el resultado correcto para el error en M.

Nota: si en las ecuaciones aparecen números irracionales: $\pi, e, \gamma \dots$ es necesario tomar en cuenta un número de cifras significativas que no afecte a la magnitud del error absoluto de la cantidad que queremos determinar. Como lo más probable es que estos valores se obtengan de un ordenador o calculadora entonces podemos tomar todos los decimales para que el error sea pequeño y pueda despreciarse frente al resto de las magnitudes que estemos considerando.

3.8. Ejercicios

1. La expresión para el cálculo del módulo de rigidez (G) de una varilla cilíndrica viene dada por:

$$G = \frac{2Lk}{\pi R^4}$$

Donde L es la longitud de la varilla, R su radio exterior y k la constante recuperadora.

En una experiencia de laboratorio se obtuvieron los siguientes datos:

$$L = (104,2 \pm 0,1) \text{cm}$$

$$R = (0,03005 \pm 0,00003) \text{cm}$$

$$k = (9,92 \pm 0,02) \times 10^3 \text{dyn cm}$$

- a) Calcule el error relativo y el error porcentual en G.
 - b) Calcule el valor de G.
 - c) Exprese el valor de G con el respectivo error absoluto.
2. Las dimensiones de una plancha metálica rectangular se midieron en el laboratorio y los resultados se registraron como se indica a continuación:

Largo: $L = (53,154 \pm 0,3) \text{ cm}$

Ancho: $A = (12,5 \text{ cm})$ con 4 % de error

Suponiendo que los errores están indicados correctamente.

- a) Escriba las dimensiones de la plancha metálica en forma correcta, omitiendo cualquier cifra no significativa.
 - b) Encuentre el perímetro y el área de la plancha con sus respectivos errores, expresados tanto en forma absoluta como en forma porcentual.
3. Dada la ecuación:

$$M = 4\pi^2 \frac{\theta}{T^2 - T_0^2}$$

encuentre la expresión para el error relativo de M.

Datos:

$$\theta \pm \Delta\theta$$

$$T \pm \Delta T$$

$$T_0 \pm \Delta T_0.$$

4. Escriba correctamente las expresiones de los siguientes resultados.
- a) $9,5 \pm 0,081$.
 - b) $2,317 \pm 0,762$.
 - c) $62,01 \pm 0,035$.
 - d) $105 \times 10^2 \pm 1 \times 10^3$.
 - e) $3,452 \pm 0,09$.
 - f) $95 \times 10^{-3} \pm 1 \times 10^{-4}$.

| N° de medida | $d(\text{mm})$ | $(\bar{d} - d) \text{ mm}$ | $(\Delta d)^2 \text{ mm}^2$ |
|--------------|----------------|----------------------------|-----------------------------|
| 1 | 15,12 | 0,016 | 0,0003 |
| 2 | 15,10 | 0,036 | 0,0013 |
| 3 | 15,15 | -0,014 | 0,0002 |
| 4 | 15,17 | -0,034 | 0,0011 |
| 5 | 15,14 | -0,004 | 0,00002 |
| 6 | 15,16 | -0,024 | 0,0006 |
| 7 | 15,14 | -0,004 | 0,0002 |
| 8 | 15,12 | 0,016 | 0,0003 |
| 9 | 15,12 | 0,016 | 0,0003 |
| 10 | 15,14 | -0,004 | 0,00002 |
| 11 | 15,15 | -0,014 | 0,0002 |
| 12 | 15,14 | -0,004 | 0,00002 |
| 13 | 15,13 | 0,006 | 0,00004 |
| 14 | 15,14 | -0,004 | 0,00002 |
| 15 | 15,13 | 0,006 | 0,00004 |
| 16 | 15,13 | 0,006 | 0,00004 |
| 17 | 15,14 | -0,004 | 0,00002 |
| 18 | 15,14 | -0,004 | 0,00002 |
| 19 | 15,14 | -0,004 | 0,00002 |
| 20 | 15,13 | 0,006 | 0,00004 |
| 21 | 15,15 | -0,014 | 0,0002 |
| 22 | 15,13 | 0,006 | 0,00004 |
| 23 | 15,15 | -0,014 | 0,0002 |
| 24 | 15,11 | 0,026 | 0,0007 |
| 25 | 15,13 | 0,006 | 0,00004 |
| Suma | 378,40 | | 0,0058 |
| Promedio | 15,136 | | |

Tabla 3.3: Medidas para diámetro d de un tubo

Capítulo 4

Representación de los datos y el análisis gráfico

4.1. Introducción

En este capítulo, se aprenderá cómo representar datos experimentales de manera efectiva mediante gráficos. Se abordarán técnicas para la creación de gráficos claros y comprensibles, así como para el análisis de datos a través de regresión lineal y la interpretación de pendientes e intersecciones.

Para el científico, analista de datos o persona con la responsabilidad de escribir documentos técnicos es importante que desarrolle competencias en las técnicas de visualización de datos. Las presentaciones con gráficos deben ser claras, atractivas y sobre todo convincentes, muchas veces deben lograr traducir cantidades numéricas a ideas que permitan hacer extrapolaciones y proyecciones a situaciones futuras. Las técnicas de visualización de datos termina siendo algo que se aprende con el oficio, con el día a día del trabajo de investigación y pocas veces se enseña en las universidades.

El propósito de este capítulo es hacer una pequeña introducción sobre visualización de datos y como usarlos en el análisis de los datos experimentales.

4.2. Tabulación de datos y resultados

La Física es una ciencia experimental y cuantitativa, depende del trabajo de laboratorio donde se tendrá la necesidad de medir magnitudes y procesar datos.

Es una norma básica que dichos datos deben ser presentados en forma clara y ordenada, y la mejor forma para lograr esto es ubicar los datos en tablas, donde se destinen diferentes columnas a cada conjunto de datos. Conocer en qué consiste la tabulación de los datos y cómo hacerlo correctamente puede resultar de gran ayuda a la hora de realizar las diferentes etapas de procesamiento y visualización, facilita considerablemente la comprensión, el análisis y la interpretación de los datos para llevar a cabo comparaciones y obtener conclusiones válidas.

Las ventajas de este proceso de tabulación son las siguientes:

1. Cumplir con condiciones de claridad y orden.

2. Facilitar la lectura y la comprensión de los datos.
3. Reducir las posibilidades de equivocación al tomar valores para calcular.

Las Tablas deben ser lo más autocontenidas posibles, sus títulos y leyendas deben ser suficiente para explicar su contenido. Las leyendas de tablas y figuras deben ser más que una simple descripción. Deben generar una reflexión una conclusión al presentar la tabla o figura. En textos científicos las tablas deben ser referidas desde el texto (ver Tabla 4.1). Si no se hace referencia a una tabla en particular, ésta se considera inútil para el artículo y debe ser eliminada.

La confección de tablas de valores no se limita necesariamente a los datos que se recogen directamente en el trabajo experimental, sino que puede extenderse a los resultados de efectuar operaciones con dichos datos. Además en dichas tablas, deben disponerse columnas para colocar en ellas el error con el cual dichas magnitudes han sido medidas, siempre que este sea diferente en cada medición.

Las tablas en las que se recopilan y se organizan los datos deben contar con las siguientes partes:

- Título de la tabla: debe ser breve, conciso y claro.
- Contenido de la tabla: deben aparecer las magnitudes con sus respectivos nombres y unidades, preferiblemente en el mismo sistema de unidades.
- Número de la tabla.
- Notas explicativas: hacer referencia a la fuente de los datos, explicación de las abreviaturas, consideraciones a tener en cuenta, etc.

Como ejemplo de lo dicho anteriormente se presenta una tabla de valores obtenida en una experiencia de movimiento rectilíneo uniformemente acelerado, ver tabla 4.1

| Participante | Velocidad (ms^{-1}) | Distancia (m) |
|--------------|--------------------------------|-----------------|
| 1 | 10.53 | 2.38 |
| 2 | 11.16 | 1.83 |
| 3 | 9.54 | 2.04 |
| 4 | 15.77 | NA ^a |
| 5 | 12.82 | 1.74 |
| Total | 59.82 | 7.99 |
| Promedio | 11.964 | 1.997 |

Tabla 4.1: Velocidad de carrera sobre 200 m y distancia de salto de longitud de un grupo de personas seleccionadas al azar.

^aEl participante 4 no pudo realizar el salto de longitud por razones médicas

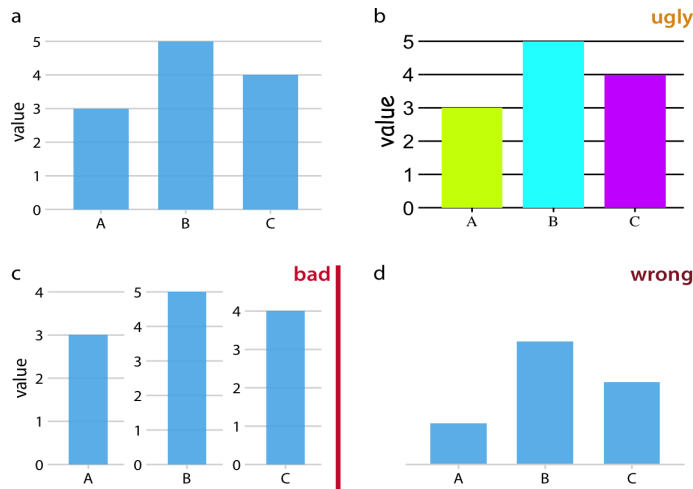


Figura 4.1: En (a) se muestra un diagrama de barras para tres valores: $A = 3$, $B = 5$ y $C = 4$; es una representación sencilla y entendible. (b) es una versión fea de la parte (a), aunque el gráfico es técnicamente correcto, es estéticamente desagradable, con colores innecesarios, una cuadrícula de fondo absurda y un texto con tipos de letra y tamaños diferentes. (c) es una mala versión de la parte (a), en el eje y cada barra tiene su propia escala y además están desalineadas, por lo tanto es una gráfica engañosa. (d) es una versión incorrecta de la parte (a), como el eje y no pose escalas no es posible determinar sus valores numéricos.

4.3. Representaciones gráficas

La representación de gráficas o la visualización de datos es una técnica artística que permite transmitir el conocimiento científico. Con la visualización de datos se debe transmitir de manera precisa la información científica relevante sin distorsionar su contenido. No debe contener información falsa ni errónea. Es necesario que la visualización sea agradable desde el punto de vista estético, si las figuras se muestran con colores poco armónicos, elementos visuales engorrosos traerá como consecuencia que el espectador no pueda interpretar la figura de manera correcta.

En muchos casos, una acertada visualización de datos permite determinar valores que no han sido obtenidos experimentalmente, como son:

1. Valores entre puntos experimentales (proceso de Interpolación).
2. Valores fuera del intervalo experimental (proceso de Extrapolación).
3. Valores de los parámetros constantes de la función matemática usada.

En la figura 4.1¹ podemos ver algunos ejemplos de cómo hacer una buena visualización y otras como ejemplos de cómo no hacerla. Una figura que muestre problemas estéticos pero que cumple con su función de ser clara e informativa es una figura que podríamos llamar “fea”. Una figura “mala” es aquella que es poco clara, confusa, complicada, engañosa, mientras que una figura “incorrecta” es aquella que presenta información errónea, presenta inconsistencias matemáticas que inevitablemente llevará a una interpretación equivocada de los datos.

¹Tomada de: <https://clauswilke.com/dataviz/>.

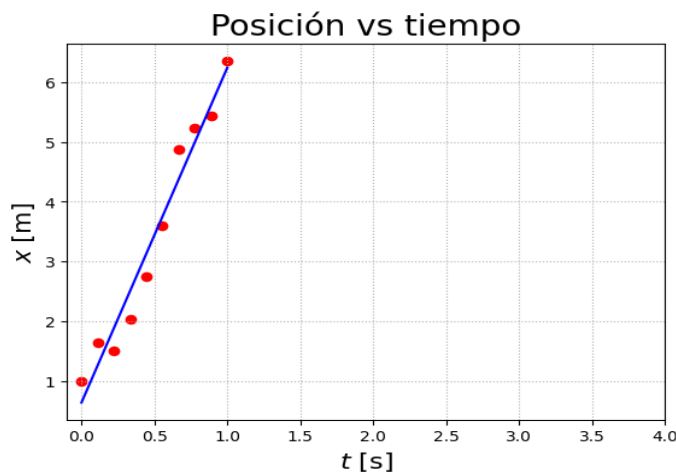


Figura 4.2: Muy mala selección de las escalas.

Cuando se grafican valores experimentales o magnitudes calculadas se debe considerar:

4.3.1. Ejes de coordenadas

En muchos casos, cuando se quiere visualizar datos se necesita definir escalas que permitan posicionar los datos en un gráfico. En gráficos 2D se necesitan dos números para especificar un punto de manera unívoca, es decir, dos escalas de posición. Estas dos escalas suelen ser los ejes x (eje horizontal o eje de las abscisas) y el eje y (eje vertical o eje de las ordenadas), es lo generalmente se denomina el sistema de coordenadas.

1. En los ejes deben aparecer claramente las magnitudes, símbolo o letra, que en ellos se representan y sus unidades de medida correspondientes
2. En los ejes sólo deben colocarse los valores más representativos de la escala escogida.
3. En general, es conveniente que el origen aparezca en el gráfico, pero no siempre es necesario que la intersección de los dos ejes corresponda al punto cero; en este caso las escalas pueden desplazarse cuando los datos experimentales están en un intervalo que así lo requiera.
4. La variable independiente, cuyo valor lo asigna a conveniencia el experimentador, se representa sobre el eje x horizontal y la variable que depende de ese valor asignado se coloca sobre el eje y vertical.

4.3.2. Selección de escalas

La escogencia de las escalas a utilizar es un problema si no se tiene cuidado al considerar factores como: el tamaño del conjunto de datos, las divisiones sobre cada eje, la relación entre los errores experimentales y los valores mínimos elegidos en las escalas.

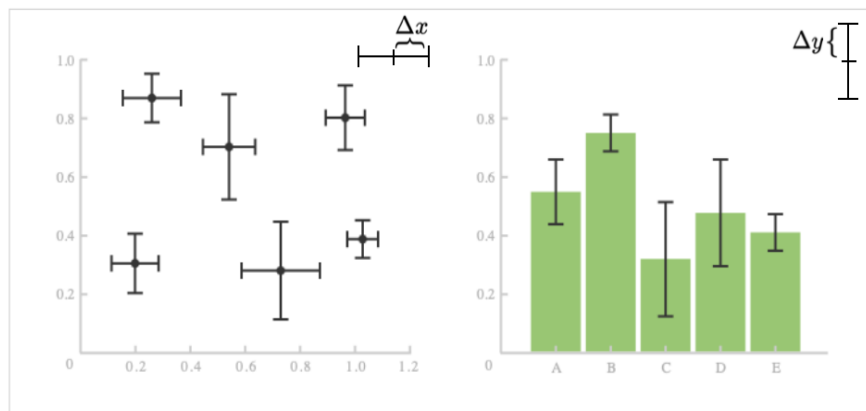


Figura 4.3: Representación de puntos experimentales con barras de error.

Las escala no deben ser muy pequeña, ya que en este caso se pueden agrupar exageradamente los puntos en una región de la gráfica (ver figura 4.2). Tampoco deben elegirse escalas grandes que exageran la precisión.

Una gráfica puede requerir tener dos ejes que representan dos unidades diferentes, por ejemplo Temperatura en $^{\circ}\text{C}$ vs Tiempo en s. Estirar o comprimir los ejes obedecerá a las razones que necesitemos resaltar, una gráfica alta y estrecha enfatiza el cambio a lo largo del eje y y una corta y ancha hace lo contrario. Lo ideal es elegir una relación de aspecto que garantice que las diferencias importantes de posición sean perceptibles.

Por otro lado, si los ejes x y y se miden en las mismas unidades, entonces las separaciones de la cuadrícula para los dos ejes deben ser iguales, de forma que la misma distancia a lo largo del eje x o y corresponda al mismo número de unidades de datos.

Los sistemas de coordenadas cartesianos son sistemas de coordenadas lineales y aunque suelen proporcionar una representación precisa de los datos, hay situaciones en las que se prefiere utilizar escalas no lineales. En una escala no lineal, a un espaciado uniforme en las unidades de datos le corresponde un espaciado desigual en la visualización o, contrariamente, a un espaciado uniforme en la visualización le corresponde un espaciado desigual en las unidades de datos.

La escala no lineal más utilizada es la escala logarítmica o escala logarítmica abreviada, estas escalas son lineales en la multiplicación, de forma que un paso unitario en la escala corresponde a una multiplicación con un valor fijo. Para crear una escala logarítmica, debemos realizar una transformación logarítmica de los valores de los datos y exponenciar los números que se muestran a lo largo de las líneas de la cuadrícula del eje.

4.3.3. Ubicación de los puntos

Los valores experimentales no deben ser graficadas sólo como un solo punto, se debe representar además el error absoluto con el cual se obtuvo dicho valor. Para ello se usan: cuadrados, rectángulos, barras, cruces, etc. (ver figura 4.3). Si la escala escogida no permite representar el error absoluto, los valores experimentales se deben representar con una equis o una cruz. Las barras de error suelen representarse a lo largo de las direcciones x y y en un gráfico de dispersión.

En las figuras 2D sencillas, las barras de error tienen una ventaja importante sobre las re-

presentaciones más complejas de la incertidumbre ya que se pueden combinar con muchos otros tipos de gráficos. Por lo tanto, las barras de error resultan ser la representaciones más sencillas para mostrar cantidades con incertidumbre sobre todo en las gráficas de barras.

Cada conjunto debe ser representado por un símbolo diferente, por ejemplo: $\times, \Delta, \odot, +$ e identificar luego cada curva. La recta o curva que siguen los puntos se debe trazar de un modo que la función sea lo más representativa posible del comportamiento de las magnitudes que caracterizan el fenómeno en estudio.

4.4. Análisis Gráfico de Funciones

En el análisis de un experimento generalmente se dispone de un conjunto de datos que de acuerdo a la teoría del fenómeno en estudio debe corresponder a una cierta ley física. Ley que se expresa mediante una ecuación matemática. Este análisis se puede lograr graficando los valores experimentales que seguramente seguirán una cierta curva que corresponde a la tendencia de los puntos. La idea es comparar la forma de la curva obtenida por las mediciones con la predicha por la teoría. Si la comparación muestran la misma tendencia se concluye que esto es una comprobación experimental de la teoría considerada.

Como es más fácil obtener la información de un gráfico lineal, entonces se procede a elegir convenientemente las variables de modo de obtener una función lineal. A continuación se mostrará como algunas de las funciones más conocidas pueden ser llevadas a un gráfico lineal.

4.4.1. Función lineal

En algunos experimentos las magnitudes físicas pueden variar linealmente, como es el caso de la deformación y la fuerza en la ley de Hooke ($F = -kx$). Al realizar el experimento y graficar resulta un conjunto de puntos que corresponde a un comportamiento lineal.

El experimentador tiene que buscar ahora la mejor estrategia para trazar la mejor recta que pasa por entre los puntos experimentales.

Los métodos estadísticos demuestran que, siempre que la dispersión de los puntos experimentales se deba a los errores casuales de medición, la mejor recta pasará por el centroide de los puntos experimentales, que es el punto con las coordenadas (\bar{x}, \bar{y}) , en donde \bar{x} y \bar{y} son los valores medios de las coordenadas x y y respectivamente.

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \\ \bar{y} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i\end{aligned}\tag{4.1}$$

Para ajustar la recta al conjunto de puntos experimentales, se puede recurrir al método del centroide. Este método es un método artesanal, y consiste en buscar sobre la gráfica la mejor recta que pase por el centroide y la mayoría de los puntos experimentales. Aquellos puntos que queden por fuera de esta recta deben estar distribuidos en lo posible con igual peso a ambos lados de la curva.

Como sabemos, la ecuación de una recta es:

$$y = mx + b$$

donde:

- m es la pendiente de la recta, calculada a partir de las coordenadas de dos puntos sobre la recta, necesariamente no tienen que corresponder a valores experimentales.

$$m = \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)} \frac{\text{unidad de } y}{\text{unidad de } x}$$

- b es el corte de la recta con el eje de las ordenadas en $x = 0$.

El error absoluto para m y b viene dado por la lectura de la posición de los puntos sobre el gráfico, es decir en función de la apreciación de la escala en el eje respectivo.

4.4.2. Función exponencial

Dada la función

$$y(x) = ka^{bx} \quad (4.2)$$

donde k , a y b son constantes. Si $b > 0$ la exponencial es creciente, mientras que si $b < 0$, la exponencial es decreciente. Notemos que en $x = 0$, $y = k$, por lo que k resulta ser la ordenada al origen, es decir, la curva intercepta al eje de las ordenadas en el punto $(0, k)$.

Tomando logaritmos se tiene:

$$\log(y) = b \log(a)x + \log(k) \quad (4.3)$$

Recordemos que si por ejemplo $a = 10$ debemos tomar logaritmo en base diez.

Si hacemos una gráfica directamente $\log y$ en función de x se obtendrá una recta, pero para ello habría que calcular los logaritmos de y . Este cálculo puede ser evitado usando un papel especial llamado papel semi-logarítmico, en el cual uno de los ejes tiene las divisiones proporcionales a los logaritmos decimales y el otro es lineal.

En la escala logarítmica existen ciclos, donde un ciclo corresponde al conjunto de números entre dos potencias de diez (1 a 10; 10 a 100; 100 a 1000 ó 0,1 a 1; etc.).

El gráfico de la función $y = ka^{bx}$ es una recta porque la ecuación (4.3) puede ser escrita como

$$u = mx + v,$$

donde: $u = \log(y)$, $m = b \log(a)$ y $v = \log(k)$.

Para calcular la pendiente de la recta hay que considerar que se está trabajando con logaritmos:

$$\text{pendiente} = m = \frac{u_2 - u_1}{x_2 - x_1} = \frac{\log y_2 - \log y_1}{x_2 - x_1} = b \log a$$

Es de hacer notar que al graficar en papel semi-logarítmico y llevar los valores en la escala logarítmica, se llevan directamente los números a la escala y no se calculan los logaritmos, pero al

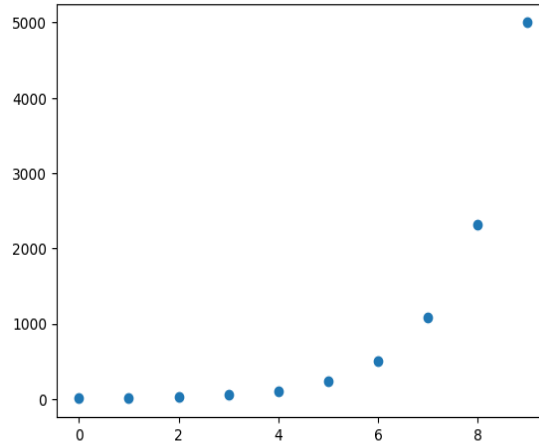
calcular la pendiente si es necesario hacerlo. Además si se está utilizando papel semi-logarítmico, k es el corte de la recta en $x = 0$.

En las siguientes líneas de código se puede interpretar lo expuesto anteriormente tomando la función exponencial siguiente:

$$y = 5 \cdot 10^{\frac{x}{3}}$$

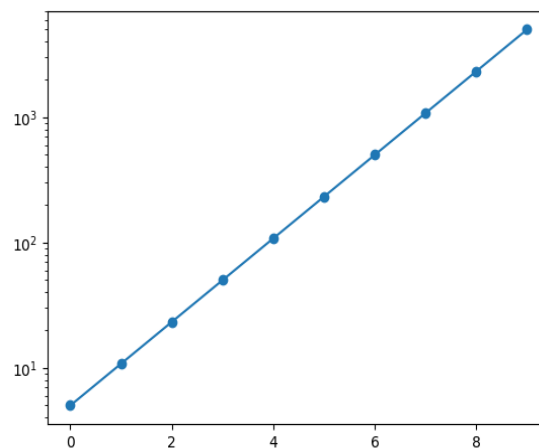
cuya gráfica la podemos hacer de la manera siguiente

```
1 x = np.arange(10)
2 y = 5*10**(1/3*x)
3 plt.plot(x, y, 'o')
4 plt.show()
```



Ahora la función lineal pero en escala logarítmica

```
1 plt.plot(x, y, '-o')
2 plt.yscale("log")
3 plt.show()
```



4.4.3. Función potencial

Dada la función:

$$y = cx^m \quad (4.4)$$

donde m y c son constantes.

Tomando logaritmos decimales se tiene:

$$\log(y) = m \log(x) + \log(c) \quad (4.5)$$

Si se hace una gráfica directamente $\log y$ en función de $\log x$ se obtendrá una recta, pero habría que calcular los logaritmos decimales de y y de x . Esto se puede evitar usando un papel especial llamado papel logarítmico (comúnmente llamado $\log - \log$), el cual tiene ambas escalas proporcionales a los logaritmos decimales.

El gráfico de la función $y = cx^m$ es una recta porque la ecuación (4.5) se puede escribir como:

$$v = mu + k,$$

donde: $v = \log(y)$, $u = \log(x)$ y $k = \log(c)$

La pendiente m de la recta está dada por:

$$m = \frac{v_2 - v_1}{u_2 - u_1} = \frac{\log y_2 - \log y_1}{\log x_2 - \log x_1} = \frac{\log \left(\frac{y_2}{y_1} \right)}{\log \left(\frac{x_2}{x_1} \right)}$$

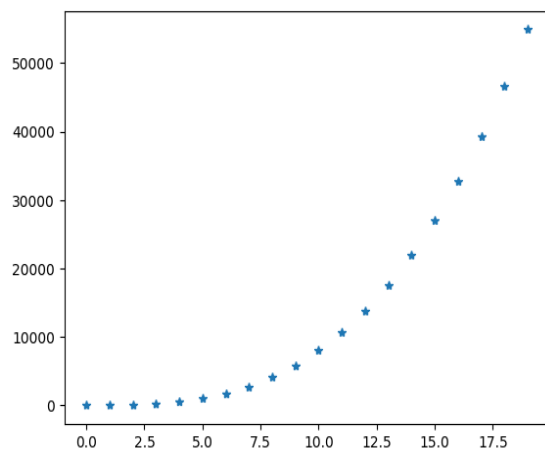
y c representa el corte de la recta en $x = 1$ ($\log 1 = 0$).

Consideremos la función potencial siguiente:

$$y = 8 x^3$$

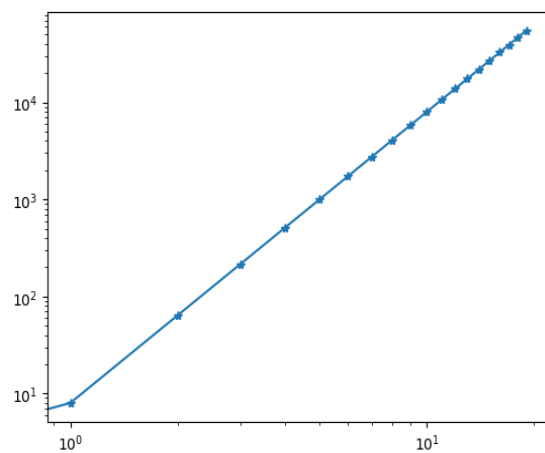
Procedemos a realizar su gráfica:

```
1 x = np.arange(20)
2 y = 8*x**(3)
3 plt.plot(x, y, 'r')
4 plt.show()
```



Ahora la función lineal pero en escala log-log

```
1 plt.plot(x, y, '-*')
2 plt.xscale("log")
3 plt.yscale("log")
4 plt.show()
```



Capítulo 5

Regresión lineal

5.1. Introducción

Este capítulo lo dedicamos al análisis de regresión, que es una técnica estadística utilizada para investigar y modelar la relación entre variables. Los métodos de análisis de regresión tienen una gran cantidad de aplicaciones en ingeniería, ciencias físicas y químicas, economía, ciencias de la vida y las ciencias sociales. Otro campo de aplicación es la ciencia y análisis de datos, esto hace que el espectro de problemas donde se aplica el análisis de regresión sea muy amplio.

El análisis de regresión fue desarrollado por primera vez por Sir Francis Galton¹ a finales del siglo XIX. Galton redescubrió de forma independiente el concepto de correlación y demostró su aplicación en el estudio de la herencia, la antropología y la psicología. Galton desarrolló una descripción matemática de la tendencia regresiva, precursora de los modelos de regresión actuales y el término regresión sigue utilizándose para describir las relaciones estadísticas entre variables.

5.2. Regresión y la construcción de modelos

El análisis de regresión es una técnica estadística que permite investigar y construir modelos que establecen relaciones entre variables.

Las relaciones estadísticas son diferentes de las relaciones funcionales porque las relaciones estadísticas no son perfectas, es decir, las observaciones de una relación estadística no caen directamente sobre una curva de relación.

Supongamos que observamos una respuesta cuantitativa y para k “predictores” diferentes: x_1, x_2, \dots, x_k . Podemos suponer también que existe alguna relación entre y y $x = (x_1, x_2, \dots, x_k)$, que puede escribirse de la forma muy general

$$y = f(x) + \varepsilon. \quad (5.1)$$

donde f es alguna función fija pero desconocida de x_1, \dots, x_k , y ε es un término de error aleatorio, que es independiente de x y tiene media cero. En esta formulación, f representa la información sistemática que x proporciona sobre y .

Existen dos razones principales para querer estimar f : la predicción y la inferencia.

¹Francis Galton 1822-1911. https://en.wikipedia.org/wiki/Francis_Galton

- **Predicción:** Este proceso utiliza un modelo estadístico o de aprendizaje automático para predecir valores futuros basados en datos existentes. El objetivo principal es obtener valores precisos de la variable de interés, y la precisión de las predicciones es crucial. En este contexto, es común tener entradas x disponibles, pero no la salida y . Podemos predecir y usando

$$\hat{y} = \hat{f}(x),$$

donde \hat{f} es nuestra estimación de f , y \hat{y} es la predicción para y . Consideramos \hat{f} como una caja negra, no importando su forma exacta siempre que las predicciones sean precisas. Generalmente, \hat{f} no será perfecta, introduciendo error que puede reducirse con mejores técnicas de aprendizaje estadístico. Incluso con una predicción perfecta f , $\hat{y} = f(x)$ aún tendría error debido a ε , de carácter aleatorio, conocido como error irreducible.

Métodos comunes para predicción incluyen regresión lineal, árboles de decisión, y redes neuronales, aplicables en situaciones como la predicción de precios en la bolsa o el valor de un producto bajo ciertas condiciones.

- **Inferencia:** El objetivo no es necesariamente predecir y al estimar f , sino conocer f de manera exacta. Se trata de usar un modelo estadístico para entender la relación entre variables y sacar conclusiones sobre la población de la cual se extrajo la muestra. El objetivo principal es realizar afirmaciones sobre los parámetros del modelo y la naturaleza de las relaciones entre las variables. Podríamos preguntarnos si existe una relación entre y y cada predictor en forma de una ecuación lineal, o si es más compleja. Históricamente, la mayoría de los métodos para estimar f han adoptado una forma lineal, lo cual es a veces razonable o deseable. Sin embargo, a menudo la relación verdadera es más complicada, y un modelo lineal puede no representar con precisión la relación entre las variables.

Métodos comunes en inferencia incluyen pruebas de hipótesis, estimación de intervalos de confianza, análisis de varianza (ANOVA), y regresión lineal múltiple. Estas técnicas pueden usarse para inferir si existe una relación entre el consumo de café y el riesgo de padecer diabetes.

Es muy probable encontrar situaciones que se encuadren en el ámbito de la predicción, en el de la inferencia, o en una combinación de ambos. Por ejemplo, los modelos lineales permiten una inferencia relativamente sencilla e interpretable, pero pueden no producir predicciones tan precisas como otros enfoques. Por el contrario, algunos de los enfoques no lineales pueden proporcionar predicciones bastante precisas para y , pero a costa de un modelo menos interpretable, haciendo la inferencia más difícil.

Uno de los métodos más utilizados para estimar f es el “método paramétrico”, que comienza con una suposición sobre la forma funcional de f . Por ejemplo, una suposición simple es que f es lineal en x :

$$f(x) = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_k x_k, \quad (5.2)$$

Esto simplifica enormemente el problema de estimar f , ya que solo hay que estimar los coeficientes $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k$. Una vez seleccionado un modelo, necesitamos un procedimiento para ajustar o entrenar el modelo con los datos. En el caso del modelo lineal (5.2), queremos estimar los parámetros $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k$, encontrando valores de estos parámetros tales que

$$y \approx \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_k x_k.$$

El enfoque más común para ajustar el modelo lineal (5.2) es el de los mínimos cuadrados ordinarios, aunque existen otros métodos para ajustar el modelo.

De alguna manera, los modelos de regresión pueden considerarse como modelos empíricos. Si la relación entre las variables es muy compleja se puede utilizar regresiones lineales a trozos para aproximar la relación verdadera entre las variables y y x . En este caso las ecuaciones de regresión sólo son válidas en la región de las variables regresoras contenidas en los datos observados.

De manera general, la variable de respuesta y puede estar relacionada con un número k regresores, x_1, x_2, \dots, x_k , de forma que

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_k x_k + \varepsilon \quad (5.3)$$

La ecuación (5.3) se denomina Modelo de Regresión Lineal Múltiple, y el adjetivo lineal se emplea para indicar que el modelo es lineal en los parámetros $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k$, no porque y sea una función lineal de las x . Esto significa que muchos modelos en los que y se relaciona con las x de forma no lineal pueden seguir tratándose como modelos de regresión lineal siempre que la ecuación sea lineal en los β 's.

Una fase crucial del análisis de regresión es comprobar la adecuación del modelo, evaluando su idoneidad y calidad del ajuste. Este análisis determina la utilidad del modelo y puede indicar si necesita ser modificado, haciendo del análisis de regresión un proceso iterativo guiado por los datos.

Es importante destacar que un modelo de regresión no implica causalidad entre variables. Una fuerte relación empírica no prueba una relación causal entre regresores y respuesta. Para establecer causalidad, se necesita más que los datos de la muestra, como consideraciones teóricas. El análisis de regresión puede confirmar una relación causal, pero no debe ser la única base para tal afirmación.

El análisis de regresión es parte de un enfoque más amplio para resolver problemas. La ecuación de regresión puede no ser el objetivo principal del estudio; a menudo es más importante entender el sistema que genera los datos.

En el trabajo de laboratorio, la recolección de datos es crucial. Un análisis de regresión es tan bueno como los datos en que se basa. Los problemas de estimación de parámetros se resuelven mediante regresión para predecir la variable de respuesta, pero al extrapolar, se corren riesgos significativos debido a errores del modelo. Una estimación incorrecta de parámetros puede llevar a predicciones deficientes. Es esencial tener en cuenta la precisión del modelo y la exactitud en la estimación de parámetros.

Los modelos de regresión pueden usarse con fines de control, donde las variables deben estar causalmente relacionadas. Sin embargo, para predicción, no es estrictamente necesario que exista una relación causal. Basta con que las relaciones en los datos originales sigan siendo válidas. Por ejemplo, el consumo diario de electricidad en agosto puede predecir la temperatura máxima diaria, pero intentar reducir la temperatura disminuyendo el consumo de electricidad fracasaría, ya que la relación no es causal.

5.3. Los algoritmos en los modelos de regresión

Desde el punto de vista computacional, construir un modelo de regresión es un proceso iterativo. Los datos de entrada incluyen conocimientos teóricos y datos disponibles para especificar un

modelo inicial. Las representaciones gráficas son útiles para esta especificación. A continuación, se estiman los parámetros del modelo, generalmente con el método de mínimos cuadrados. Luego, se evalúa la adecuación del modelo, identificando posibles errores de especificación, omisión de variables importantes, inclusión de variables innecesarias o presencia de datos inusuales. Si el modelo es inadecuado, se ajusta y se vuelven a estimar los parámetros. Este proceso se repite hasta obtener un modelo adecuado, que finalmente debe ser validado para asegurar resultados aceptables.

El análisis de regresión requiere un uso hábil del computador. Un buen programa de cálculo de regresión es esencial, pero la aplicación rutinaria de programas estándar no siempre da resultados satisfactorios. El computador no sustituye el pensamiento creativo sobre el problema. Debemos aprender a interpretar la información que proporciona y usarla en modelos posteriores. Entre el software estadístico disponible, se destaca el SAS (Statistical Analysis System), un paquete comercial para análisis de datos con una amplia gama de procedimientos estadísticos, y R, un lenguaje de código abierto y gratuito, conocido por su flexibilidad e innovación.

5.4. Regresión lineal simple

Un modelo con un único regresor x y que tiene una relación con la respuesta y en la forma de una línea recta es lo que se denomina un modelo de regresión lineal simple:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i. \quad (5.4)$$

La intersección β_0 y la pendiente β_1 son constantes desconocidas, mientras que ε es un componente de error aleatorio. Suponemos que los errores tienen media cero y varianza desconocida σ^2 . También asumimos que los errores no están correlacionados, lo que significa que el valor de un error no depende del valor de ningún otro error. Es importante considerar el regresor x como controlado por el analista de datos o experimentador y medido con un error despreciable, mientras que la respuesta y es una variable aleatoria. Esto implica que existe una distribución de probabilidad para y en cada valor posible de x .

Características importantes de este modelo

1. La respuesta y_i es la suma de dos componentes: (1) el término constante $\beta_0 + \beta_1 x_i$ y (2) el término aleatorio ε_i . Por lo tanto, y_i es una variable aleatoria.
2. Como $E\{\varepsilon_i\} = 0$, se puede demostrar que la media de esta distribución es:

$$E(y | x) = E\{y_i\} = E\{\beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i\} = \beta_0 + \beta_1 x_i + E\{\varepsilon_i\} = \beta_0 + \beta_1 x_i$$

Así, la respuesta y_i para x_i , procede de una distribución de probabilidad cuya media es:

$$E\{y_i\} = \beta_0 + \beta_1 x_i$$

Por tanto, sabemos que la función de regresión para el modelo (5.4) es:

$$E\{y\} = \beta_0 + \beta_1 x$$

ya que la función de regresión relaciona las medias de las distribuciones de probabilidad de y para x .

3. La respuesta y_i supera o no alcanza el valor de la función de regresión por la cantidad del término de error ε_i .
4. Se supone que los términos de error ε_i tienen una varianza constante σ^2 . Por lo tanto, se deduce que las respuestas y_i tienen la misma varianza constante:

$$\sigma^2 \{y_i\} = \sigma^2$$

Se puede demostrar también que:

$$\sigma^2 \{\beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i\} = \sigma^2 \{\varepsilon_i\} = \sigma^2$$

Así, el modelo de regresión (5.4) asume que las distribuciones de probabilidad de y tienen la misma varianza σ^2 , independientemente del nivel de la variable predictora x .

5. Se supone que los términos de error no están correlacionados. Dado que los términos de error ε_i y ε_j no están correlacionados, tampoco lo están las respuestas y_i y y_j .
6. En resumen, el modelo de regresión (5.4) implica que las respuestas y_i proceden de distribuciones de probabilidad cuyas medias son $E\{y_i\} = \beta_0 + \beta_1 x_i$ y cuyas varianzas son σ^2 , iguales para todos los niveles de x . Además, dos respuestas cualesquiera y_i y y_j no están correlacionadas.

Significado de los parámetros de regresión Los parámetros β_0 y β_1 del modelo de regresión (5.4) se denominan coeficientes de regresión. β_1 es la pendiente de la recta de regresión. Indica el cambio en la media de la distribución de probabilidad de y por unidad de aumento en x . El parámetro β_0 es la intercepción y de la recta de regresión. Cuando el ámbito del modelo incluye $x = 0$, β_0 da la media de la distribución de probabilidad de y en $x = 0$. Cuando el ámbito del modelo no incluye $x = 0$, β_0 no tiene ningún significado particular como término separado en el modelo de regresión.

Supongamos que en una universidad se estudió la relación entre el tiempo de estudio (en horas) y las calificaciones de 25 estudiantes en el examen final de matemáticas aplicadas. El gráfico de dispersión en la figura 5.1 muestra que a mayor tiempo de estudio, las notas tienden a aumentar, sugiriendo una relación lineal aproximada entre las variables.

Podemos suponer una relación de la forma

$$y = \beta_0 + \beta_1 x, \quad (5.5)$$

donde y son las notas, x es el tiempo de estudio, β_0 es la intersección y β_1 es la pendiente de la recta.

Dado que los puntos no caen exactamente sobre la línea recta, la ecuación (5.5) se ajusta añadiendo un término de error:

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon, \quad (5.6)$$

donde ε representa la variación aleatoria en las notas. Este modelo más realista considera factores no medidos y errores, denominándose Modelo de Regresión Lineal (MRL). Aquí, x es la variable “predictora” o “regresora” y y la variable de respuesta. Al incluir solo una variable regresora, este modelo se llama Modelo de Regresión Lineal Simple (MRLS).

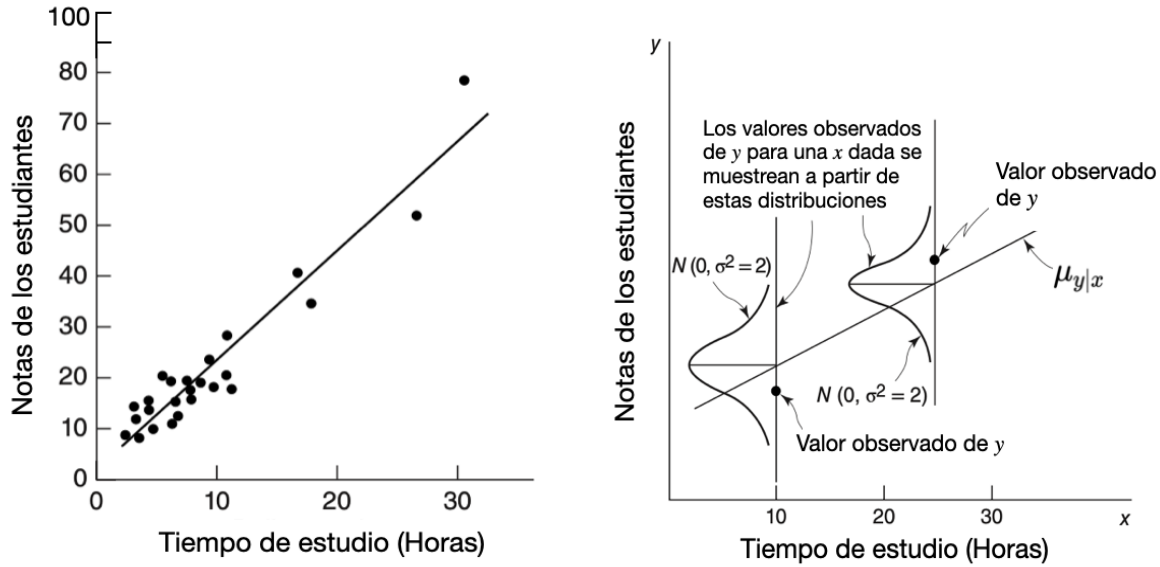


Figura 5.1: Izquierda: gráfico de dispersión para las horas de estudio y las notas obtenidas. Derecha: la generación de observaciones en la regresión lineal.

Podemos analizar el MRL fijando el valor de x y observando y . Si la media y varianza de ε son 0 y σ^2 , respectivamente, la respuesta media para cualquier valor de x es:

$$\mu_{y|x} \equiv E(y | x) = E(\beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon) = \beta_0 + \beta_1 x, \quad (5.7)$$

igual a la relación (5.5). La varianza de y dado x es:

$$\sigma_{y|x}^2 \equiv \text{Var}(y | x) = \text{Var}(\beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon) = \sigma^2. \quad (5.8)$$

El verdadero modelo de regresión $\mu_{y|x} = \beta_0 + \beta_1 x$ es una línea de valores medios, donde β_1 indica el cambio en la media de y por un cambio unitario en x . La variabilidad de y en cada x está dada por σ^2 , implicando que los valores de y tienen la misma varianza en cada x .

Si el modelo de regresión es $\mu_{y|x} = 3,5 + 2,0x$ y $\sigma^2 = 2$ el resultado se ve en la figura derecha de 5.1. Utilizando una distribución normal para ε , y también es normal. Para $x = 10$ horas, y tiene como media $3,5 + 2(10) = 23,5$ y varianza 2. σ^2 determina la variabilidad en y sobre el tiempo de estudio: un σ^2 pequeño indica valores de y cerca de la recta, mientras que un σ^2 grande indica mayores desviaciones.

Notemos que pudimos haber hecho un estudio similar pero con ocho estudiantes del curso, que elegiríamos de manera aleatoria, para entonces proceder a recopilar los datos sobre el tiempo de estudio y las calificaciones de estos estudiantes. En este caso estaríamos haciendo lo que se llama un estudio de regresión muestral.

Recordemos que el fin principal en el análisis de regresión es estimar los parámetros desconocidos del modelo de regresión. Este proceso también se denomina ajuste del modelo a los datos. Existen varias técnicas de estimación de parámetros y una de estas técnicas es el método de los mínimos cuadrados. En el ejemplo que hemos mencionado de las horas de estudio y las notas obtenidas por los estudiantes nos llevaría a una ecuación como la que se muestra a continuación

$$\hat{y} = 3,687 + 1,821x,$$

donde \hat{y} es el valor ajustado o estimado de las notas correspondiente a un valor del número de horas x . Esta ecuación ajustada es la que se representa en la parte izquierda de la figura 5.1. Note que un estudiante que estudia cero horas $x = 0$ obtendría una nota de 3,7 de 100.

5.4.1. Método de los mínimos cuadrados

El método de los mínimos cuadrados es uno de los métodos estadísticos más usados para determinar la recta que mejor represente la tendencia de un conjunto de puntos experimentales. Como mencionamos anteriormente, los parámetros β_0 y β_1 son desconocidos y deben estimarse utilizando datos muestrales. Supongamos que tenemos n pares de datos, digamos $(y_1, x_1), (y_2, x_2), \dots, (y_n, x_n)$. Estos datos pueden proceder de un experimento controlado diseñado específicamente para recopilar los datos, de un estudio observacional o de registros históricos existentes (un estudio retrospectivo).

Para estimar β_0 y β_1 utilizaremos el método de los mínimos cuadrados, esto es, estimamos β_0 y β_1 de forma que la suma de los cuadrados de las diferencias entre las observaciones y_i y la recta sea un mínimo. A partir de (5.4) podemos escribir

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (5.9)$$

La ecuación (5.4) puede verse como un modelo de regresión poblacional, mientras que la ecuación (5.9) es un modelo de regresión muestral, escrito en términos de los n pares de datos (y_i, x_i) , con $i = 1, 2, \dots, n$. Así, el criterio de mínimos cuadrados es

$$S(\beta_0, \beta_1) = \sum_{i=1}^n (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^2 \quad (5.10)$$

Si la dispersión de los puntos experimentales es debida solo a los errores casuales en las mediciones, la mejor recta será aquella para la cual la suma de los cuadrados de las distancias $(y_i - y_0)$ sea un mínimo. Es por esto que, a este método se le llama método de los mínimos cuadrados.

A los estimadores obtenidos por mínimos cuadrados β_0 y β_1 , los llamaremos b y m , respectivamente, y deben satisfacer una relación lineal de la forma:

$$\hat{y} = mx + b,$$

donde \hat{y} es la variable dependiente y x es la variable independiente, en nuestro caso la magnitud controlada por el experimentador. Como se ha indicado anteriormente, los valores de esas magnitudes tendrán sus correspondientes errores que determinaremos más adelante.

La desviación de un valor cualquiera y_i determinado experimentalmente con respecto a su valor y_0 en la recta, será:

$$\Delta y_i = y_i - y_0 = y_i - (b + mx_i) \quad (5.11)$$

Ahora se puede enunciar el principio básico de este método, el cual dice que la mejor recta que puede ser trazada entre esos puntos, es aquella para la cual la suma de los cuadrados de las desviaciones Δy_i de los datos experimentales, con respecto a esa recta, es mínima.

$$\sum_{i=1}^n (\Delta y_i)^2 = \sum_{i=1}^n [y_i - b - mx_i]^2$$

donde n es el número de pares de valores de y y x .

Ya que la condición exigida es la de minimizar la suma anterior, entonces los parámetros m y b deben ajustarse para cumplir con esta condición. Ello se logra calculando las derivadas parciales de la suma con respecto a m y con respecto a b , e igualándolas a cero.

$$\begin{aligned}\frac{\partial [\sum (\Delta y_i)^2]}{\partial b} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial (y_i - b - mx_i)^2}{\partial b} = \sum_{i=1}^n -2(y_i - b - mx_i) = 0 \\ \frac{\partial [\sum (\Delta y_i)^2]}{\partial m} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial (y_i - b - mx_i)^2}{\partial m} = \sum_{i=1}^n -2x_i(y_i - b - mx_i) = 0\end{aligned}$$

Por lo tanto, se debe resolver el sistema

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n y_i - \sum_{i=1}^n b - \sum_{i=1}^n mx_i &= 0 \quad \Rightarrow nb + m \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_i \\ \sum_{i=1}^n y_i x_i - \sum_{i=1}^n bx_i - \sum_{i=1}^n mx_i^2 &= 0 \quad \Rightarrow b \sum_{i=1}^n x_i + m \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n y_i x_i\end{aligned}$$

para m y b .

Utilizando la regla de Cramer y definiendo Δ como se muestra a continuación:

$$\Delta = \begin{vmatrix} n & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 \end{vmatrix} = n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2,$$

resulta:

$$m = \frac{\begin{vmatrix} n & \sum y_i \\ \sum x_i & \sum x_i y_i \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \quad \text{y} \quad b = \frac{\begin{vmatrix} \sum y_i & \sum x_i \\ \sum x_i y_i & \sum x_i^2 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$$

Por lo tanto:

$$m = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{\Delta} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i (x_i - \bar{x})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad (5.12)$$

$$b = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 \sum_{i=1}^n y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n x_i y_i}{\Delta} = \bar{y} - m\bar{x}, \quad (5.13)$$

donde $\bar{y} \equiv \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$ y $\bar{x} \equiv \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ son las medias simples. Nótese que los términos $\sum x_i^2$ y $(\sum x_i)^2$ no son lo mismo. Idéntica observación se debe hacer para los términos $\sum x_i y_i$ y $\sum x_i \sum y_i$.

De esta manera obtenemos la recta $\hat{y} = mx + b$ que mejor de aproxima a los puntos. Es muy común utilizar las siguiente notación:

$$S_{xx} = \sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^n x_i)^2}{n} = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2, \quad (5.14)$$

$$S_{xy} = \sum_{i=1}^n y_i x_i - \frac{(\sum_{i=1}^n y_i)(\sum_{i=1}^n x_i)}{n} = \sum_{i=1}^n y_i (x_i - \bar{x}) \quad (5.15)$$

Esto permite escribir (5.12) como

$$m = \frac{S_{xy}}{S_{xx}} \quad (5.16)$$

En el trabajo de laboratorio podríamos construir una tabla como la mostrada en 5.1, para así ordenar la información y facilitar los cálculos. Las cuatro sumas en la última línea, son los valores necesarios para calcular m y b . Los valores de m y b que se obtengan por el método de los mínimos cuadrados, deberían ser muy próximos a los obtenidos directamente utilizando el método gráfico.

| $y_i[]$ | $x_i[]$ | $x_i^2[]$ | $x_i y_i[]$ | $y_i - mx_i - b$ | $(y_i - mx_i - b)^2$ |
|------------|------------|--------------|----------------|------------------|-----------------------------------|
| y_1 | x_1 | x_1^2 | $x_1 y_1$ | $y_1 - mx_1 - b$ | $(y_1 - mx_1 - b)^2$ |
| \vdots | \vdots | \vdots | \vdots | \vdots | \vdots |
| \vdots | \vdots | \vdots | \vdots | \vdots | \vdots |
| y_n | x_n | x_n^2 | $x_n y_n$ | $y_n - mx_n - b$ | $(y_n - mx_n - b)^2$ |
| $\sum y_i$ | $\sum x_i$ | $\sum x_i^2$ | $\sum x_i y_i$ | | $\sum_{i=1}^n (y_i - mx_i - b)^2$ |

Tabla 5.1: Tabla para facilitar el uso del método de mínimos cuadrados

Pero en la actualidad es casi de rutina utilizar alguna herramienta computacional que permite hacer los cálculos necesarios y los gráficos para el ajuste de la recta. Aunque el uso de este método no nos obliga a hacer el gráfico de la recta, por razones pedagógicas, es conveniente hacerlo para así observar más claramente las desviaciones de los puntos experimentales con respecto a la recta calculada.

Una vez obtenido los valores de m y b , es necesario calcular sus errores correspondientes Δm y Δb . Esto lo podemos hacer calculando las desviaciones estándar de la pendiente y la ordenada al origen, calculadas a partir de la distribución de diferencias Δy_i , ecuación (5.11), respecto de la mejor línea de ajuste.

Sea $\hat{y}_i = b + mx_i$ la predicción de y basada en el valor i de x . Entonces $e_i = y_i - \hat{y}_i$ representa el i residuo - la diferencia entre el i valor de respuesta observado y el i valor de respuesta predicho por nuestro modelo lineal. Definimos la suma residual de cuadrados (RSS) como

$$\text{RSS} = e_1^2 + e_2^2 + \cdots + e_n^2$$

o equivalentemente como

$$\text{RSS} = (y_1 - b - mx_1)^2 + (y_2 - b - mx_2)^2 + \cdots + (y_n - b - mx_n)^2.$$

La diferencia entre el valor observado y_i y el correspondiente valor ajustado \hat{y}_i es un residuo. Matemáticamente, el residuo i es

$$e_i = y_i - \hat{y}_i = y_i - (b + mx_i), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Los residuos desempeñan un papel importante en la investigación de la adecuación del modelo y en la detección de desviaciones de los supuestos subyacentes.

Sea SSE (Sum of Squared Errors) la suma de los cuadrados de los residuos.

$$\text{SSE} = \sum_{i=1}^n e_i^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - (b + mx_i))^2$$

En el contexto del análisis de regresión por mínimos cuadrados, se define la cantidad S_y como la desviación estándar de los errores, también conocida como el error estándar residual. Esta cantidad representa la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de los errores dividida por $n - 2$, matemáticamente es:

$$S_y = \sqrt{\frac{\text{SSE}}{n - 2}}$$

S_y es una medida de la dispersión de los datos alrededor de la recta de regresión ajustada y se utilizada para calcular los errores estándar de la pendiente Δm y el término independiente Δb de la regresión lineal.

$$\Delta m = \sqrt{\frac{n}{\Delta}} \cdot S_y \quad (5.17)$$

$$\Delta b = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{\Delta}} \cdot S_y \quad (5.18)$$

Finalmente, para calcular S_y se puede utilizar como ayuda la tabla 5.1.

Ejemplo 5.1. En un experimento sobre cinemática un grupo de estudiantes mide los tiempos con los que se desplaza un móvil en un riel de aire. Los tiempos son medidos en segundos usando un cronómetro de sensibilidad $\Delta t = 0,01$ s. Otro instrumento mide las velocidades con las que se desplaza el móvil, este instrumento tiene una sensibilidad de $\Delta v = 0,01$ m/s. La tabla de datos y la respectiva gráfica se muestran la figura 5.2.

| $t_i \pm 0,01(\text{s})$ | $v_i \pm 0,01(\text{m/s})$ |
|--------------------------|----------------------------|
| 0,00 | 1.00 |
| 0,10 | 1.64 |
| 0,20 | 1.51 |
| 0,30 | 2.03 |
| 0,40 | 2.75 |
| 0,50 | 3.59 |
| 0,60 | 4.87 |
| 0,70 | 5.23 |
| 0,80 | 5.44 |
| 1,00 | 6.37 |

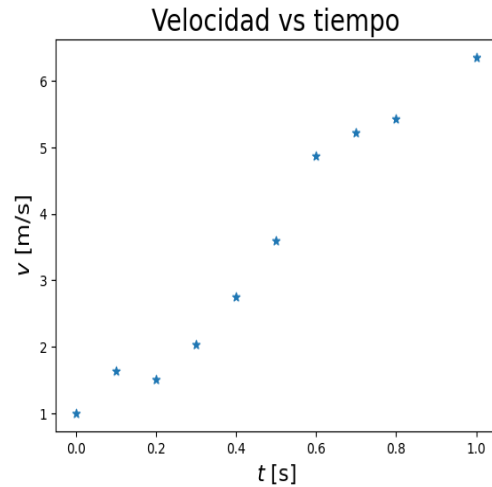


Figura 5.2: Mediciones de la velocidad de un cuerpo en función del tiempo y la gráfica de dispersión respectiva.

Como queremos efectuar los cálculos manualmente es recomendable calcular las siguientes sumas:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} n & \sum_{i=1}^n t_i & \sum_{i=1}^n v_i & \sum_{i=1}^n t_i^2 & \sum_{i=1}^n t_i v_i \\ \hline 10 & 4,60 & 34,43 & 3,04 & 21,275 \end{array}$$

$$\Delta = n \sum_{i=1}^n t_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n t_i \right)^2 = 10(3,04) - (4,60)^2 = 9,24 \text{ s}^2$$

$$b = \frac{\sum_{i=1}^n t_i^2 \sum_{i=1}^n v_i - \sum_{i=1}^n t_i \sum_{i=1}^n t_i v_i}{\Delta} = \frac{(3,04)(34,43) - (4,60)(21,275)}{9,24} = 0,7362 \text{ m/s}$$

$$m = \frac{n \sum_{i=1}^n t_i v_i - \sum_{i=1}^n t_i \sum_{i=1}^n v_i}{\Delta} = \frac{10(21,275) - (4,60)(34,43)}{9,24} = 5,8844 \text{ m/s}^2$$

Procedemos a calcular la suma de los cuadrados de los residuos

$$\begin{array}{c|c} n & \sum_{i=1}^n (v_i - b - mt_i)^2 \\ \hline 10 & 1,244 \end{array}$$

Por lo tanto

$$S_y = \left[\frac{\sum_{i=1}^n (v_i - b - mt_i)^2}{n - 2} \right]^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1,244}{8} \right)^{\frac{1}{2}} = 0,394.$$

y los errores

$$\Delta m = \left[\frac{n}{\Delta} \right]^{\frac{1}{2}} S_y = \left[\frac{10}{9,24} \right]^{\frac{1}{2}} (0,394) = 0,401,$$

$$\Delta b = \left[\frac{\sum_{i=1}^n (t_i)^2}{\Delta} \right]^{\frac{1}{2}} S_y = \left[\frac{3,04}{9,24} \right]^{\frac{1}{2}} (0,394) = 0,226.$$

Por lo tanto nuestro resultado será, por los redondeos hechos en los cálculos

$$v = mt + b = 5,91t + 0,724 \text{ m/s}$$

donde lo correcto sería escribir: $m = 5,9 \pm 0,4$ y $b = 0,7 \pm 0,2$.

Con Python podemos hacer todos los cálculos anteriores, incluida la figura 5.2. Aquí vamos a transcribir la ecuaciones las fórmulas utilizadas con anterioridad a manera de entender el proceso de los mínimos cuadrados. Luego veremos que existen otras opciones más directas.

Primero que todo, debemos llamar las librerías:

```
1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
```

Los datos deben escribirse en formas de arreglos:

```
1 yn= array([1.000, 1.64, 1.51, 2.03, 2.75, 3.59, 4.87, 5.23, 5.44, 6.37])
2 xn = array([0.00, 0.10, 0.20, 0.30, 0.40, 0.50, 0.60, 0.70, 0.80, 1.00])
```

La gráfica de la figura 5.2 se obtiene a partir de las siguientes líneas de código:

```
1 plt.scatter(xn, yn, marker='*')
2 plt.title(r'Velocidad vs tiempo', fontsize=20)
3 plt.xlabel(r'$t$ [s]', fontsize=16)
4 plt.ylabel(r'$v$ [m/s]', fontsize=16)
```

Para usar las ecuaciones (5.12)-(5.13) se necesita hacer una serie de cálculos intermedios, como se muestra a continuación:

```
1 #Se obtiene el valor de n (numero de datos)
2 n=len(xn)
3 #Las sumatorias necesarias
4 Sum_x = np.sum(xn)
5 Sum_y = np.sum(yn)
6 Sum_xx = np.sum(xn**2)
7 Sum_xy = np.sum(xn*yn)
8 Sum_xSumy = np.sum(xn)*np.sum(yn)
9 Delta = n*np.sum(xn**2) - (np.sum(xn))**2
10 print(n,',', Sum_x, ',', Sum_y, ',', Sum_xx, ',', Sum_xy, ',', Sum_xSumy, ',',
      Delta)
```

```
10 , 4.6 , 34.43 , 3.04 , 21.275, 158.378 , 9.2400000000000002
```

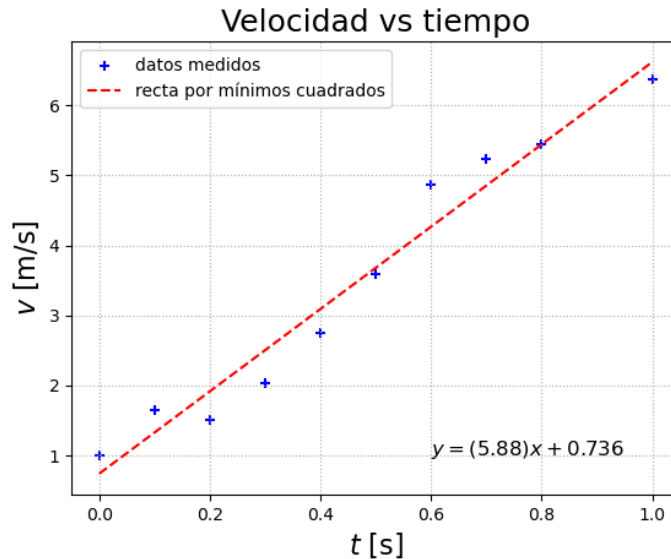
Y finalmente calculamos b y m

```
1 # Se escriben las ecuaciones para b y m
2 b=(Sum_xx*Sum_y-Sum_xy*Sum_x)/(n*Sum_xx-Sum_x**2)
3 m=(n*Sum_xy-Sum_x*Sum_y)/(n*Sum_xx-Sum_x**2)
4 print('m=',m, ', ', 'b=',b)
```

```
m= 5.884415584415585 , b= 0.7361688311688325
```

En este bloque de comandos lo que se quiere es hacer una gráfica que contenga la gráfica de dispersión y la recta que mejor ajusta los datos

```
1 # La gráfica con los datos y la recta que mejor se ajusta
2 y_pred=m_mc*xn + b_mc
3 #
4 plt.figure()
5 plt.scatter(xn, yn, color='b',marker='+', label='datos medidos')
6 plt.plot(xn, y_pred, 'r--',label='recta por mínimos cuadrados')
7 plt.grid(linestyle='dotted')
8 plt.legend(loc='best')
9 plt.title(r'Velocidad vs tiempo', fontsize=18)
10 plt.xlabel(r'$t$ [s]', fontsize=16)
11 plt.ylabel(r'$v$ [m/s]', fontsize=16)
12 plt.text(0.6, 1.0, '$y=(5.88) x + 0.736$', fontsize=12)
13 plt.show()
```



El siguiente paso es calcular Δb y Δm , pero primero S_y

```
1 SSE= np.sum((yn -(b_mc + m_mc*xn))**2)
2 Sy= np.sqrt(SSE/(n-2))
3 print('n=',n, ', ', 'SSE=', SSE, ', ', 'Sy=', Sy)
```

$n= 10$, $SSE= 1.244265584415585$, $Sy= 0.3943769745458628$

Los respectivos errores se obtienen de las ecuaciones (5.17) y (5.18)

```
1 Delta_m = np.sqrt(n/(n*np.sum(xn ** 2) - np.sum(xn)**2))*Sy
2 Delta_b = np.sqrt(np.sum(xn**2)/(n*np.sum(xn**2)-np.sum(xn)**2))*Sy
3 print(f'm = {np.round(m_mc, 1)} \u00B1 {np.round(Delta_m, 1)}')
4 print(f'b = {np.round(b_mc, 1)} \u00B1 {np.round(Delta_b, 1)}')
```

$m = 5,9 \pm 0,4$
 $b = 0,7 \pm 0,2$

Por lo tanto:

$$v = 5,9t + 0,7 \text{ m/s.}$$

Numpy tiene una función específica para calcular los parámetros m y b , que se llama "linalg.lstsq". Para mayor información se puede consultar:

<https://numpy.org/doc/stable/reference/generated/numpy.linalg.lstsq.html>

La librería "linalg.lstsq" resuelve para el vector x la ecuación matricial $ax = b$ utilizando el método de los mínimos cuadrados. Esta función se utiliza comúnmente en una variedad de aplicaciones, como el análisis de regresión, el ajuste de curvas y otras tareas de aprendizaje automático.

Veamos como funciona:

```

1 # Ajustar la recta por mínimos cuadrados usando linalg.lstsq
2 A = np.vstack([xn, np.ones(len(xn))]).T
3 m_c, b_c = np.linalg.lstsq(A, yn, rcond=None)[0]
4 #
5 print(f'm = {np.round(m_c, 1)}' )
6 print(f'b = {np.round(b_c, 1)}' )

```

$$m = 5,9$$

$$b = 0,7$$

Actualmente, la función “np.linalg.lstsq” de Numpy no proporciona directamente los errores estándar de los coeficientes. Sin embargo, hay otras bibliotecas en Python que pueden hacer regresión lineal y proporcionar estos errores de manera más directa.

Una de las bibliotecas más utilizadas para este propósito es “statsmodels”. Para más información ver:

<https://www.statsmodels.org/stable/index.html>

Para estudiar como funciona en el ejemplo que estamos considerando lo primero que hay que hacer es cargar la librería

```

1 # Importamos la librería
2 import statsmodels.api as sm

```

Luego ejecutamos las siguientes lineas de código para los cálculos

```

1 # Agregamos una constante (columna de unos) a xn
2 X = sm.add_constant(xn)
3 # Ajustamos el modelo
4 model = sm.OLS(yn, X).fit()
5 # Obtenemos los coeficientes y los errores estándar
6 b, m = model.params
7 Delta_b, Delta_m = model.bse

```

Con las siguientes lineas mostramos los resultados

```

1 # Imprimimos los coeficientes y sus errores estándar
2 print(f'm = {m:.4f} \u00B1 {Delta_m:.4f}')
3 print(f'b = {b:.4f} \u00B1 {Delta_b:.4f}')

```

$$m = 5,8844 \pm 0,4103$$

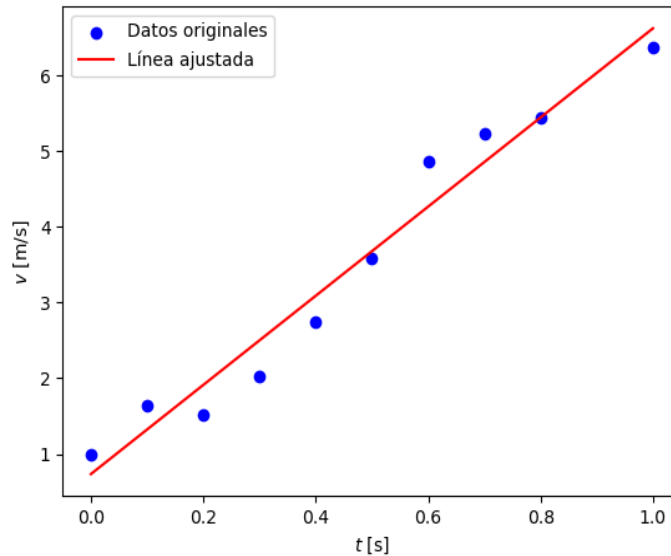
$$b = 0,7362 \pm 0,2262$$

Y ahora la gráfica

```

1 # Generamos valores de y usando los coeficientes obtenidos
2 y_pred = m * xn + b
3 # Graficamos los datos originales y la línea ajustada
4 plt.scatter(xn, yn, color='blue', label='Datos originales')
5 plt.plot(xn, y_pred, color='red', label='Línea ajustada')
6 plt.xlabel('$t$ [s]')
7 plt.ylabel('$v$ [m/s]')
8 plt.legend()
9 plt.show()

```



Se puede pedir que se genere en consola un resumen del modelo

```
1 results = model
2 print(results.summary)
```

| OLS Regression Results | | | | | | |
|------------------------|------------------|---------------------|----------|-------|--------|--------|
| ===== | | | | | | |
| Dep. Variable: | y | R-squared: | 0.963 | | | |
| Model: | OLS | Adj. R-squared: | 0.958 | | | |
| Method: | Least Squares | F-statistic: | 205.7 | | | |
| Date: | Mon, 27 May 2024 | Prob (F-statistic): | 5.45e-07 | | | |
| Time: | 10:18:42 | Log-Likelihood: | -3.7692 | | | |
| No. Observations: | 10 | AIC: | 11.54 | | | |
| Df Residuals: | 8 | BIC: | 12.14 | | | |
| Df Model: | 1 | | | | | |
| Covariance Type: | nonrobust | | | | | |
| ===== | | | | | | |
| | coef | std err | t | P> t | [0.025 | 0.975] |
| ----- | | | | | | |
| const | 0.7362 | 0.226 | 3.254 | 0.012 | 0.215 | 1.258 |
| x1 | 5.8844 | 0.410 | 14.343 | 0.000 | 4.938 | 6.831 |
| ===== | | | | | | |
| Omnibus: | 1.614 | Durbin-Watson: | 1.076 | | | |
| Prob(Omnibus): | 0.446 | Jarque-Bera (JB): | 0.806 | | | |
| Skew: | 0.218 | Prob(JB): | 0.668 | | | |
| Kurtosis: | 1.679 | Cond. No. | 4.04 | | | |
| ===== | | | | | | |

Se pueden identificar fácilmente los valores de los parámetros y sus errores estándar que relacionan la precisión de las estimaciones obtenidas. De “R-squared: 0.963” hablaremos más adelante, pero este valor indica qué tan bien los datos se ajustan al modelo de regresión (0 a 1, donde valores más cercanos a 1 indican un mejor ajuste).

5.4.2. Propiedades del método de mínimos cuadrados

Podemos notar de la ecuación (5.12)

$$m = \frac{\sum_{i=1}^n y_i (x_i - \bar{x})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \sum_{i=1}^n c_i y_i, \quad \text{donde} \quad c_i = \frac{(x_i - \bar{x})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

Se dice que los estimadores m y b por mínimos cuadrados son estimadores no ambiguos porque

$$E(m) = E\left(\sum_{i=1}^n c_i y_i\right) = \sum_{i=1}^n c_i E(y_i) = \sum_{i=1}^n c_i (\beta_0 + \beta_1 x_i) = \beta_0 \sum_{i=1}^n c_i + \beta_1 \sum_{i=1}^n c_i x_i$$

ya que por suposición $E(\varepsilon_i) = 0$. Se puede demostrar que $\sum_{i=1}^n c_i = 0$ y $\sum_{i=1}^n c_i x_i = 1$, por lo que

$$E(m) = \beta_1$$

Es decir, si suponemos que el modelo es correcto $[E(y_i) = \beta_0 + \beta_1 x_i]$, entonces m es un estimador no sesgado de β_1 . Del mismo modo podemos demostrar que b es un estimador no sesgado de β_0 , o bien

$$E(b) = \beta_0.$$

Ejemplo 5.2. Un pegamento para piezas metálicas se prueba mediante la aplicación de una fuerza de cizallamiento entre las partes que han sido pegadas. La resistencia al cizallamiento de la unión entre los dos tipos de piezas es una característica crucial de calidad del pegamento. Los investigadores observan que con el transcurso del tiempo el pegamento se debilita, lo cual es un problema que los ingenieros deben resolver.

Los datos muestran que probablemente existe una relación entre el tiempo transcurrido desde que se aplica el pegamento, medida en semanas, y la resistencia a una fuerza de cizallamiento aplicada. Los datos se han recogido para veinte observaciones sobre la resistencia al cizallamiento y la edad del pegamento, como se muestra en la tabla 5.2.

Un diagrama de dispersión sugiere una fuerte relación estadística entre la resistencia al cizallamiento y la edad del pegamento. La hipótesis inicial de un modelo lineal, $y = \beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon$, parece razonable.

A continuación haremos los cálculos directamente con Python y la librería “statsmodels” ya usada en el ejemplo 5.1. Primero los datos de la tabla 5.2

```
1 # Datos de cizallamiento y edad de la pega
2 xn = np.array([15.50, 23.75, 8.00, 17.00, 5.50, 19.00, 24.00, 2.50,
3               7.50, 11.00, 13.00, 3.75, 25.00, 9.75, 22.00, 18.00,
4               6.00, 12.50, 2.00, 21.50])
5 yn = np.array([2158.70, 1678.15, 2316.00, 2061.30, 2207.50,
6               1708.30, 1784.70, 2575.00, 2357.90, 2256.70,
7               2165.20, 2399.55, 1779.80, 2336.75, 1765.30,
8               2053.50, 2414.40, 2200.50, 2654.20, 1753.70])
```

Luego hacemos el cálculo de los parámetros m y b

| Observación, i | Cizallamiento, y_i (psi) | Edad del pegamento, x_i (semanas) |
|------------------|----------------------------|---------------------------------------|
| 1 | 2158.70 | 15.50 |
| 2 | 1678.15 | 23.75 |
| 3 | 2316.00 | 8.00 |
| 4 | 2061.30 | 17.00 |
| 5 | 2207.50 | 5.50 |
| 6 | 1708.30 | 19.00 |
| 7 | 1784.70 | 24.00 |
| 8 | 2575.00 | 2.50 |
| 9 | 2357.90 | 7.50 |
| 10 | 2256.70 | 11.00 |
| 11 | 2165.20 | 13.00 |
| 12 | 2399.55 | 3.75 |
| 13 | 1779.80 | 25.00 |
| 14 | 2336.75 | 9.75 |
| 15 | 1765.30 | 22.00 |
| 16 | 2053.50 | 18.00 |
| 17 | 2414.40 | 6.00 |
| 18 | 2200.50 | 12.50 |
| 19 | 2654.20 | 2.00 |
| 20 | 1753.70 | 21.50 |

Figura 5.3: Datos para el ejemplo 5.2.

```

1 X = sm.add_constant(xn)
2 # Ajustamos el modelo
3 model = sm.OLS(yn, X).fit()
4 # Obtenemos los coeficientes y los errores estándar
5 b, m = model.params
6 Delta_b, Delta_m = model.bse
7 # Imprimimos los coeficientes y sus errores estándar
8 print(f'm = {m:.4f} \u00B1 {Delta_m:.4f}')
9 print(f'b = {b:.4f} \u00B1 {Delta_b:.4f}')
```

$m = -37,1536 \pm 2,8891$
 $b = 2627,8224 \pm 44,1839$

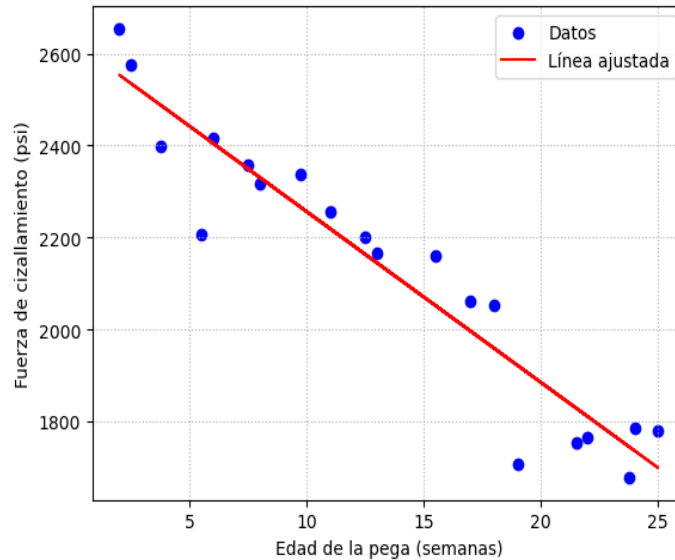
Y la gráfica con los datos y la recta obtenida

```

1 # Generamos valores de y usando los coeficientes obtenidos
2 y_pred = m * xn + b
3 # Graficamos los datos originales y la línea ajustada
4 plt.scatter(xn, yn, color='blue', label='Datos')
5 plt.plot(xn, y_pred, color='red', label='Línea ajustada')
6 plt.grid(linestyle='dotted')
7 plt.legend(loc='best')
8 plt.xlabel('Edad del pegamento (semanas)')
9 plt.ylabel('Fuerza de cizallamiento (psi)')
10 plt.legend()
```



```
11 plt.show()
```



La recta tiene por ecuación

$$\hat{y} = 2627,82 - 37,15x.$$

Recordemos que la pendiente $-37,15$ se interpreta como la disminución media semanal de la resistencia al cizallamiento debida a la edad de la pega. Dado que el límite inferior de las x está cerca del origen, el intercepto $2627,82$ representa la resistencia al corte en un lote de muestra inmediatamente después de la aplicación de la pega.

Veamos los valores ajustados \hat{y} obtenidos

```
1 y_pred = m * xn + b
2 y_pred
```

```
array([2051.94169936, 1745.42457406, 2330.59363144, 1996.21131294, 2423.4776088 ,
       1921.90413105, 1736.13617632, 2534.93838164, 2349.17042691, 2219.13285861, 2144.82567672,
       2488.49639296, 1698.98258538, 2265.57484729, 1810.44335821, 1959.05772199, 2404.90081333,
       2163.40247219, 2553.51517711, 1829.02015369])
```

y también los residuos

```
1 e_i=yn-y_pred
2 e_i
```

```
array([ 106.75830064, -67.27457406, -14.59363144, 65.08868706, -215.9776088 , -213.60413105,
       48.56382368, 40.06161836, 8.72957309, 37.56714139, 20.37432328, -88.94639296, 80.81741462,
       71.17515271, -45.14335821, 94.44227801, 9.49918667, 37.09752781, 100.68482289, -75.32015369])
```

Hay varias propiedades de los mínimos cuadrados que podemos probar:

1) La suma de los valores observados y_i es igual a la suma de los valores ajustados \hat{y}_i , o bien

$$\sum_{i=1}^n y_i = \sum_{i=1}^n \hat{y}_i$$

El lado izquierdo de la ecuación es:

```
1 Sum_y = np.sum(yn)
2 Sum_y
```

42627.149999999994

Y el lado derecho:

```
1 Sum_yp = np.sum(y_pred)
2 Sum_yp
```

42627.149999999965

2) La suma de los residuos en cualquier modelo de regresión que contiene un intercepto β_0 es siempre cero, es decir,

$$\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i) = \sum_{i=1}^n e_i = 0$$

```
1 np.sum(e_i)
```

3.069544618483633e-11

Es decir, $\sum e_i = 0,00$.

3) La recta de regresión por mínimos cuadrados siempre pasa por el centroide, el punto (\bar{x}, \bar{y}) de los datos.

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i = m\bar{x} + b.$$

```
1 # Los promedios de x y y
2 xp = np.sum(xn)/len(xn)
3 yp = np.sum(yn)/len(xn)
4 # Se imprimen los promedios y la recta evaluada en xp
5 print(xp, ',', yp, ',', m * xp + b)
```

13.3625 , 2131.3574999999996 , 2131.3574999999983

4) La suma de los residuos ponderada por el valor correspondiente de la variable regresora siempre es igual a cero, es decir,

$$\sum_{i=1}^n x_i e_i = 0$$

```
1 np.sum(xn*e_i)
```

```
4.2746250983327627e-10
```

5) La suma de los residuos ponderada por el valor ajustado correspondiente siempre es igual a cero, es decir

$$\sum_{i=1}^n \hat{y}_i e_i = 0$$

```
1 np.sum(y_pred*e_i)
```

```
6.478512659668922e-08
```

Como ya lo señalamos, los programas estadísticos suelen ofrecer un resumen de todos los cálculos que realiza el programa. La salida en pantalla o consola de la figura 5.4 presenta los resultados de la librería “statsmodels” para el ejemplo que estamos considerando. La parte superior de la tabla contiene el modelo de regresión ajustado. Observe que, antes del redondeo, los coeficientes de regresión coinciden con los que calculamos manualmente. La salida en pantalla también contiene otra información sobre el modelo de regresión que pueden ser consultadas en el manual de la librería.

```
1 results = model
2 print(results.summary())
```

| OLS Regression Results | | | | | |
|------------------------|------------------|---------------------|----------|-------|----------------------|
| ===== | | | | | |
| Dep. Variable: | y | R-squared: | 0.902 | | |
| Model: | OLS | Adj. R-squared: | 0.896 | | |
| Method: | Least Squares | F-statistic: | 165.4 | | |
| Date: | Thu, 23 May 2024 | Prob (F-statistic): | 1.64e-10 | | |
| Time: | 19:35:35 | Log-Likelihood: | -118.63 | | |
| No. Observations: | 20 | AIC: | 241.3 | | |
| Df Residuals: | 18 | BIC: | 243.3 | | |
| Df Model: | 1 | | | | |
| Covariance Type: | nonrobust | | | | |
| ===== | | | | | |
| | coef | std err | t | P> t | [0.025 0.975] |
| ----- | | | | | |
| const | 2627.8224 | 44.184 | 59.475 | 0.000 | 2534.995 2720.649 |
| x1 | -37.1536 | 2.889 | -12.860 | 0.000 | -43.223 -31.084 |
| ===== | | | | | |
| Omnibus: | 6.304 | Durbin-Watson: | 1.842 | | |
| Prob(Omnibus): | 0.043 | Jarque-Bera (JB): | 4.281 | | |
| Skew: | -1.109 | Prob(JB): | 0.118 | | |
| Kurtosis: | 3.464 | Cond. No. | 31.5 | | |
| ===== | | | | | |

Figura 5.4: Resumen de las estimaciones estadísticas por consola.

La estimación de σ^2

Además de estimar β_0 y β_1 , se necesita una estimación de la varianza del error σ^2 , que proporciona información crucial sobre la variabilidad de los errores (residuos) y tiene varias aplicaciones en el análisis estadístico, como probar hipótesis y construir estimaciones de intervalo pertinentes para el modelo de regresión. Lo ideal sería que esta estimación no dependiera de la adecuación del modelo ajustado. Esto sólo es posible cuando hay varias observaciones de y para al menos un valor de x o cuando se dispone de información previa sobre σ^2 . Cuando no se puede utilizar este enfoque, la estimación de σ^2 se obtiene a partir de la suma de cuadrados de los errores:

$$\hat{\sigma}^2 = \sum_{i=1}^n e_i^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2. \quad (5.19)$$

En inglés $\sigma^2 = \text{Error Sum of Squares} = SS_{\text{Res}}$

Conocidos los valores estimados de β_0 y β_1 , es decir: $\hat{y}_i = b + mx_i$ y al sustituir en la ecuación anterior se llega al siguiente resultado

$$\hat{\sigma}^2 = \sum_{i=1}^n y_i^2 - n\bar{y}^2 - m \sum_{i=1}^n y_i (x_i - \bar{x}). \quad (5.20)$$

Como

$$\sum_{i=1}^n y_i^2 - n\bar{y}^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 \equiv SS_T, \quad (5.21)$$

Esto no es más que la suma de cuadrados corregida de las observaciones de respuesta, por lo que

$$\hat{\sigma}^2 = SS_{\text{Res}} = SS_T - mS_{xy} \quad (5.22)$$

La suma residual de cuadrados tiene $n - 2$ grados de libertad, porque dos grados de libertad están asociados con las estimaciones b y m implicadas en la obtención de \hat{y}_i . Se puede mostrar que el valor esperado de SS_{Res} es $E(SS_{\text{Res}}) = (n - 2)\sigma^2$, por lo que un estimador no sesgado de σ^2 es

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{SS_{\text{Res}}}{n - 2} = MS_{\text{Res}} \quad (5.23)$$

La cantidad MS_{Res} se denomina cuadrado medio residual. La raíz cuadrada de $\hat{\sigma}^2$ se llama a veces el error estándar de regresión, y tiene las mismas unidades que la variable de respuesta y .

Dado que $\hat{\sigma}^2$ depende de la suma residual de cuadrados, cualquier violación de los supuestos sobre los errores del modelo o cualquier especificación errónea de la forma del modelo puede dañar seriamente la utilidad de $\hat{\sigma}^2$ como estimación de σ^2 . Dado que $\hat{\sigma}^2$ se calcula a partir de los residuos del modelo de regresión, decimos que es una estimación dependiente del modelo de σ^2 .

A partir de $\hat{\sigma}^2$ los errores estándar de m y b se pueden obtener a partir de las siguientes ecuaciones

$$SE(b)^2 = \sigma^2 \left[\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \right], \quad SE(m)^2 = \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}, \quad (5.24)$$

Si volvemos al ejemplo 5.2 se pueden hacer los siguientes cálculos

$$\begin{aligned}
SS_T &= \sum_{i=1}^n y_i^2 - n\bar{y}^2 = \sum_{i=1}^n y_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^n y_i)^2}{n} \\
&= 92547433,45 - \frac{(42,627,15)^2}{20} = 1693737,60
\end{aligned}$$

De la ecuación (5.22) la suma residual de cuadrados es

$$\begin{aligned}
SS_{\text{Res}} &= SS_T - \hat{\beta}_1 S_{xy} \\
&= 1693737,60 - (-37,15)(-41112,65) = 166402,65
\end{aligned}$$

El valor estimado de σ^2 se obtiene a partir de la ecuación (5.23)

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{SS_{\text{Res}}}{n-2} = \frac{166402,65}{18} = 9244,59$$

Para los errores usamos las ecuaciones (5.24)

$$\Delta b = \sqrt{(9244,59) \left[\frac{1}{20} + \frac{178,56}{1106,56} \right]} = 44,184, \quad \Delta m = \sqrt{\frac{9244,59}{1106,56}} = 2,889,$$

Prueba de hipótesis sobre m y b

Los errores estándar también pueden utilizarse para realizar pruebas de hipótesis sobre los coeficientes. La prueba de hipótesis más común consiste en probar la hipótesis nula:

$$H_0: \text{No hay relación entre } x \text{ y } y$$

frente a la hipótesis alternativa

$$H_a: \text{Existe alguna relación entre } x \text{ y } y$$

Matemáticamente, esto corresponde a probar

$$H_0 : \beta_1 = 0 \text{ frente a } H_a : \beta_1 \neq 0,$$

ya que si $\beta_1 = 0$ entonces el modelo (5.4) se reduce a $y = \beta_0 + \varepsilon$, y x no está asociado con y . Para probar la hipótesis nula, tenemos que determinar si m , nuestra estimación de β_1 , está lo suficientemente lejos de cero para que podemos estar seguros de que β_1 es distinto de cero ¿Qué distancia es suficiente? Esto, por supuesto, depende de la exactitud de m , es decir, depende de $SE(m)$. Si $SE(m)$ es pequeño, entonces incluso valores relativamente pequeños de m pueden proporcionar una fuerte evidencia de que $\beta_1 \neq 0$, y por lo tanto que existe una relación entre x y y . Por el contrario, si $SE(m)$ es grande, entonces m debe ser grande en valor absoluto para que podamos rechazar la hipótesis nula. En la práctica, se suele calcular un “estadístico” t o valor t , dado por

$$t = \frac{m - 0}{SE(m)}, \quad (5.25)$$

que mide el número de desviaciones típicas que β_1 se aleja de 0. Si realmente no hay relación entre x y y , entonces esperamos que (5.25) tenga una distribución t con $n - 2$ grados de libertad. La distribución t tiene forma de campana y para valores de n superiores a 30 aproximadamente es bastante similar a la distribución normal estándar. En consecuencia, resulta sencillo calcular la probabilidad de observar cualquier número igual a $|t|$ o mayor en valor absoluto, suponiendo que $\beta_1 = 0$.

Llamamos a esta probabilidad el valor p . A grandes rasgos, interpretamos el valor p de la siguiente manera: un valor p pequeño indica que es poco probable observar una asociación tan sustancial entre el predictor y la respuesta debido al azar, en ausencia de cualquier asociación real entre el predictor y la respuesta. Por lo tanto, si vemos un valor p pequeño, podemos inferir que existe una asociación entre el predictor y la respuesta. Rechazamos la hipótesis nula, es decir, declaramos que existe una relación entre x y y , si el valor p es lo suficientemente pequeño. Los límites típicos del valor p para rechazar la hipótesis nula son el 5% o el 1%. Cuando $n = 30$, estos valores corresponden a estadísticos t (5.25) de alrededor de 2 y 2.75, respectivamente.

Capítulo 6

¿Cómo escribir un informe de laboratorio?

6.1. Introducción

La última sección se enfocará en las pautas y estructura para la redacción de informes de laboratorio. Se proporcionarán consejos sobre la organización de la información, la inclusión de resultados, tablas y gráficos, la elaboración de conclusiones y la citación adecuada de fuentes.

Describir en un texto el trabajo de una investigación para que sea comprensible para los demás y aceptable para su publicación es una tarea que puede resultar difícil y escabrosa. Por eso es necesario que los estudiantes universitarios aprendan a implicarse en esta tarea desde sus primeros contactos con los laboratorios.

En este contexto universitario el informe o monografía de laboratorio es un texto que se basa en las experiencias obtenidas en el laboratorio, o de una investigación teórica, que pretender ser una primera aproximación a las publicaciones científicas profesionales.

La idea principal es que el estudiante y futuro investigador comunique sus resultados, logros y avances de la mejor manera posible, con la suficiente precisión y claridad como para que otros investigadores o estudiantes puedan interpretar también los resultados, incluso replicar la experiencia.

Por lo tanto, es importante que el estudiante comience a familiarizarse con el método científico y que sea capaz, no solo de relacionar la teoría con los resultados experimentales, sino que también sea capaz de comunicar su experiencia de manera satisfactoria.

6.2. Estructura

Un reporte, informe o monografía debe estar conformado por conjunto de partes o secciones que son esenciales para su elaboración. Básicamente son las que se muestra a continuación:

1. Resumen: El resumen debe tener el contenido suficiente para que el lector se construya una idea completa de qué se hizo y cuáles fueron los resultados.
2. Introducción: Aquí se explica la razón de ser del artículo y su contexto. Se debe describir el problema, los antecedentes y la justificación del trabajo.

3. Metodología: Aquí se hace referencia a los recursos materiales que se utilizaron en el trabajo, las técnicas utilizadas, la descripción de cómo se realizó el trabajo. Esta sección es importante ya que debe garantizar que otra persona que lea el trabajo pueda replicar el experimento o los cálculos que se realizaron.
4. Experimento y resultados: se exponen los datos obtenidos, los cálculos que se realizaron. También se puede asomar algunos avances sobre las ideas que se discutirán con mayor profundidad en la conclusiones pero sin entrar en análisis numéricos.
5. Discusión y conclusiones: Se hace un análisis de los resultados obtenidos y de su relevancia, se pueden hacer comparaciones con otros trabajos, hacer predicciones, comprobar objetivos.
6. Referencias: se escribe la lista completa de las referencias que se citaron en el texto. Es recomendable apegarse a un estándar de referencias ya que los estilos pueden variar dependiendo del área científica o el tipo de publicación.

6.3. Modelo para un informe de laboratorio

A continuación y a manera de apéndice se anexa un modelo de informe de laboratorio para ser completado con la información correspondiente.

La fuente en L^AT_EX del documento¹ la pueden encontrar en <https://github.com/hectorfro/CursosUIS/tree/main/LabFisII23B>

¹Artículo realizado por el Prof Luis A. Núñez de la Escuela de Física