Guía general para el laboratorio de Física

Héctor Hernández

Versión 2.0 - 9 de septiembre de 2023

Índice general

Capítulo 1

Mediciones en el laboratorio

1.1. Introducción

Los objetivos del trabajo en un laboratorio básicamente son:

1. Realizar un experimento físico y obtener valores correctos de las cantidades físicas medidas.
2. Aprender a elaborar gráficos y a analizar la información científica que ellos contienen.
3. Aprender a redactar un informe de laboratorio en forma correcta.
4. Introducir al estudiante en nuevos tópicos de la física.

Como consecuencia de esto en las clases teóricas se muestran los experimentos de manera cualitativa, mientras que en el laboratorio se realizan los experimentos de manera cuantitativa.

Cuando se trabaja en un laboratorio es inevitable que nos hagamos las siguientes preguntas: ¿cuál es la precisión y exactitud lograda en una medición?, ¿cuál es la precisión y exactitud que pudiera lograrse? y ¿qué conceptos físicos se aplican y qué condiciones deben cumplirse?

En los siguientes capítulos daremos respuesta a estas preguntas y presentaremos algunos conceptos sobre lo que se denomina la teoría de errores, tratamiento de datos y el análisis gráfico.

1.2. Mediciones

El trabajo en el laboratorio implica medir magnitudes físicas mediante la utilización de instrumentos de medida.

Medir es la comparación de la magnitud que se está estudiando con un patrón de medida. Si cada persona tuviera su propio patrón de medida, sólo él comprendería el valor de su resultado y no podría establecer comparaciones, a menos que supiera la equivalencia entre su patrón y el de su vecino. Por esta razón se ha acordado el establecimiento de un patrón. Si bien hasta hace poco, algunos países utilizaban como sistema de unidades el Sistema Británico, y otros países el Sistema Métrico Decimal, la tendencia es usar el Sistema Internacional (SI)[1].

[1] https://es.wikipedia.org/wiki/Sistema_Internacional_de_Unidades

El Sistema Internacional de Unidades (SI) se apoya en las siguientes magnitudes básicas:

Símbolo	Nombre	Magnitud
s	segundo	tiempo
m	metro	longitud
kg	kilogramo	masa
A	amperio	corriente eléctrica
K	kelvin	temperatura termodinámica
mol	mol	cantidad de sustancia
cd	candela	intensidad luminosa

Se puede decir que el resultado de una medida es lo que se conoce como el valor de la magnitud. Este valor debe ir siempre acompañado de su respectiva unidad de medida. Decir que, la masa de una varilla es de $80,4$ no significa nada, se preguntará: ¿$80,4$ gramos?, ¿$80,4$ libras?, ¿$80,4$ kilogramos?, ¿qué diría Ud. si en un almacén de telas le venden un pie de tela y le cobran un metro? ¡Ah! entonces es importante que las cantidades que se midan vayan acompañadas de sus respectivas unidades de medida.

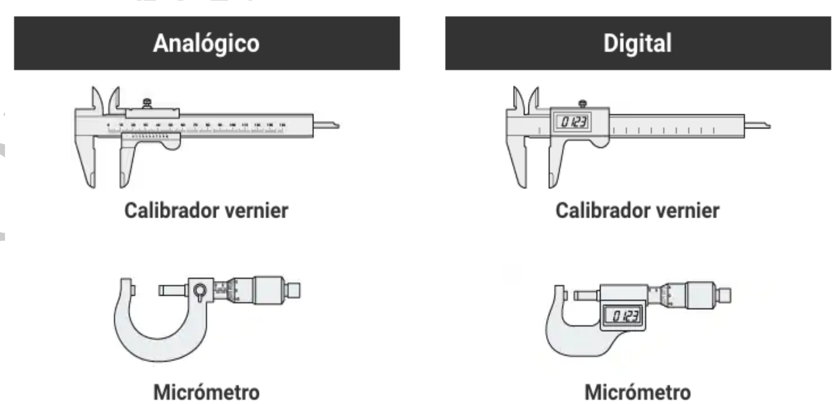
Cuadro 1.1: Unidades básicas utilizadas en mecánica

Magnitudes	SI	CGS	británico
Longitud	Metro (m)	Centímetro (cm)	Pie (ft)
Masa	Kilogramo (kg)	Gramo (g)	Libra (lb)
Tiempo	Segundo (s)	Segundo (s)	Segundo (s)

El sistema CGS es el Sistema Cegesimal de Unidades o sistema gaussiano, es un sistema de unidades basado en el centímetro, el gramo y el segundo y el sistema británico es un conjunto de unidades de medida diferentes a las del sistema métrico decimal, que se utilizan actualmente como medida principal en los Estados Unidos y el Reino Unido.

Ahora que hemos visto generalidades del proceso de medir y las unidades de medida, consideremos la descripción de algunos de los instrumentos de uso común en el trabajo de laboratorio.

En la actualidad los instrumentos de medición pueden encontrarse en formato analógico o digital. Los instrumentos analógicos suelen requerir de cierta práctica para leer las mediciones, mientras que los instrumentos digitales presentan las lecturas directamente en una pantalla. Dependiendo del objetos a medir se puede preferir un instrumento de medición analógico a uno digital.



Los instrumentos de medida nos muestran el valor de las medidas dentro de cierto rango de validez que es característico del propio aparato de medida.

Apreciación: La menor división en la escala de cualquier instrumento de medida se llama *apreciación*. En instrumentos analógicos cuando se lee en una escala única, se aproxima la lectura a la división más cercana. Por esto, el máximo error que se puede cometer en dicha medición es de $\pm$ la apreciación.

Por lo anterior cualquier medida nunca es exacta, su última cifra siempre es aproximada, debido a ello toda medida presenta siempre una incertidumbre o error determinada por la precisión del instrumento.

La determinación de la apreciación de un instrumento que tiene solamente una escala analógica, se realiza siguiendo la explicación dada a continuación.

Se escogen dos valores sobre la escala, que pueden ser consecutivos o no. Se hace la diferencia del valor mayor (n) menos el valor menor (m) y se divide entre el número de partes en que está dividido el intervalo (ver figura 1.1).

$$\text{Apreciación} = \frac{n - m}{\text{N}^0 \text{ total de divisiones}}$$

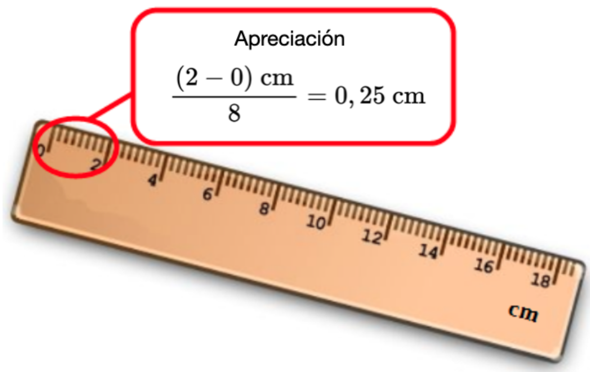


Figura 1.1: Apreciación de un instrumento

La apreciación de un instrumento es una indicación del error de la medida, se habla entonces de "precisión"de un instrumento: a menor apreciación, mayor precisión.

1.3. Medición de la masa

El Sistema Internacional SI la unidad para medir la masa es el kilogramo (kg), con sus respectivas unidades derivadas: gramo, miligramo, etc. Para medir la masa de un cuerpo se emplean balanzas o básculas que funcionan por comparación con otras masas conocidas o las balanzas modernas electrónicas. Existen muchos tipos de balanzas pero las más relevantes pueden ser:

1. Balanza de dos platillos, que compara la masa desconocida colocada en un platillo con masas conocidas colocadas en el otro.

2. Balanza de un solo platillo, en este tipo de balanza, se coloca el cuerpo al que.se desea determinar la masa en el platillo; luego la balanza se lleva al equilibrio mediante el uso de jinetillos, que se colocan en la escala graduada. En esta escala se obtiene el valor de la masa del cuerpo. Estas balanzas pueden ser mecánicas o eléctricas.

3. Balanza análitica, es una clase de balanza de laboratorio diseñada para medir masas muy pequeñas, en un principio de un rango menor del gramo de error (las digitales llegan hasta la diezmilésima de gramo: 0,0001 g o 0,1 mg).

Cuando se utiliza una balanza, se deben observar ciertas reglas:

- Manejar las balanzas con sumo cuidado, sobre todo las electrónicas, por eso al mover las perillas de la balanza digital debe hacerse paso a paso.
- Evitar tocar con los dedos el platillo.
- Evitar poner sustancias químicas o recipientes húmedos sobre el platillo. Utilizar sobre el platillo un papel.

1.4. Medición de la longitud

La longitud se mide comúnmente en metros (m) y en sus múltiplos y submúltiplos: kilómetros, centímetros y milímetros, de acuerdo al Sistema Internacional de Unidades.

Cuando se trata de medir longitudes muy grandes, como las que hay en el espacio exterior, se definen unas unidades que son más apropiadas:

- Año luz, ly, la distancia que recorre la luz en un año: 9.460.730.472.580.800 km.
- Unidad Astronómica, UA, la distancia media Tierra-Sol =149.597.870.700 metros.
- Pársec, pc, paralaje de un segundo de arco, equivalente a 206.264,81 UA.

La cinta métrica

Cuando se desea medir longitudes, uno de los instrumentos comúnmente usado es la cinta métrica, cuya apreciación es de 1 mm. La medida de la longitud de un objeto implica la comparación directa del mismo con la cinta métrica, esto es, hay que fijar la posición de los extremos del objeto sobre la escala graduada. Lo recomendable es colocarlo en la parte donde sea posible leer con claridad (como se muestra en la figura 1.2), y no es recomendable hacer coincidir los extremos de la cinta métrica con el objeto, pues en general estos extremos están deteriorados.

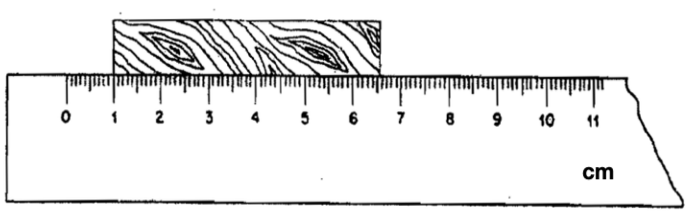


Figura 1.2: Forma correcta de medir con una regla deteriorada. Medida: (5,5 ± 0,1) cm.

El vernier

Al medir un objeto con una regla graduada o una cinta métrica, es posible que exista una fracción de la escala que no puede ser apreciada como se muestra en la figura 1.2. Allí se puede notar que el objeto mide entre 5,5 cm y 5,6 cm.

Si nosotros deseamos menor error (mayor precisión), entonces se puede usar el vernier. La figura de la izquierda de 1.3 muestra el vernier y el objeto cuya longitud se desea conocer. Allí se señalan las dos partes más importantes del instrumento: la regla fija y la regla móvil llamada corrientemente nonio.

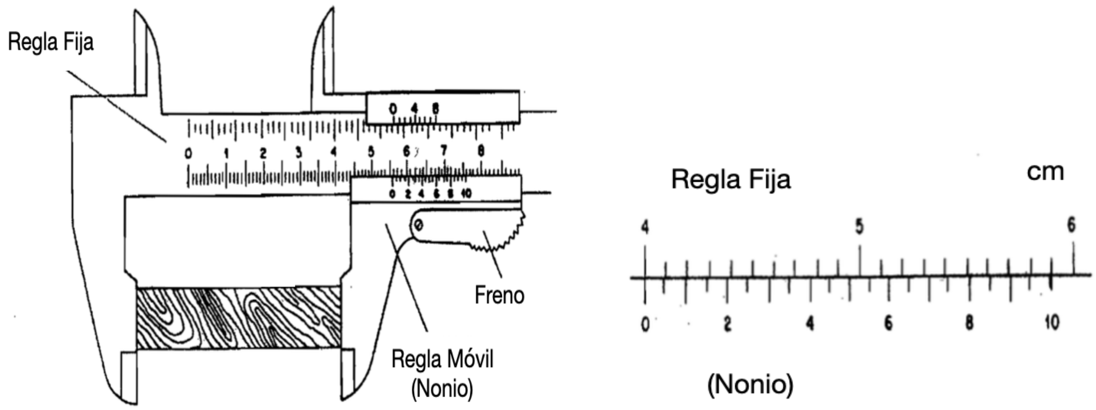


Figura 1.3: Izquierda: medición de longitud mediante Vernier. Medida (5.530 ± 0,005)cm. Derecha: Escalas del vernier

Ya hemos señalado que uno de los elementos del vernier es la regla móvil o nonio. Ella está destinada a lograr una precisión que no permite la regla graduada. La regla fija posee divisiones milimétricas y el nonio generalmente está graduado en 10 o 20 divisiones. El nonio de la figura 1.3 posee 20 divisiones. La apreciación del vernier está dada por la diferencia entre la longitud de una división de la escala principal y la longitud de una división del nonio.

Al ser colocado el cero del nonio, por ejemplo, en la división 4 cm de la regla fija como se señala en la figura derecha de 1.3, las divisiones del nonio llegan a $5,9$ cm. Es decir, las 20 divisiones que hemos señalado del vernier corresponden a una longitud de $1,9$ cm en la escala fija o principal. Luego, cada división del vernier es de $\frac{1,9}{20}$ cm $= 0,095$ cm.

De acuerdo a lo anterior, la diferencia entre las longitudes de una división de la escala principal y una división del vernier de la figura 1.3, es de $(0,10 - 0,095)$cm, es decir, $0,005$ cm, que corresponde a la apreciación del vernier.

Para el caso general, cuando el nonio tiene n divisiones, la apreciación del vernier se puede determinar de la siguiente manera:

Las n divisiones del nonio corresponden a $(n-1)$ divisiones de la regla principal, por lo tanto, cada división del nonio mide:

$$\left(\frac{n-1}{n}\right)\ \mathrm{mm}\,.$$

La diferencia con una división principal será:

$$\left(1-\frac{n-1}{n}\right)\ \mathrm{mm} = \frac{1}{n}\ \mathrm{mm}\,,$$

es decir, la apreciación del instrumento será:

$$\text{Apreciación del vernier } = \frac{\text{Apreciación de la escala principal}}{\text{N}^0\text{ total de divisiones del nonio}}\,.$$

Para el vernier de la figura 1.3, la apreciación es:

$$\text{Apreciación } = \frac{0,1\ \mathrm{cm}}{20} = 0,005\ \mathrm{cm} = 0,05\ \mathrm{mm}$$

Volviendo a la figura 1.3 y la medición que estamos considerando, se puede observar que la posición del cero del vernier está entre $5,5$ y $5,6$ cm, es decir, las dos primeras cifras son las que corresponden a la medida hecha anteriormente con la cinta métrica: $5,5$ cm.

Respecto a la cifra siguiente esta se obtiene del nonio, en él se puede observar que la raya 7 (o la sexta división) del nonio coincide con la raya 6,2 de la escala principal. Entonces la medida que se lee en el vernier es $5,5 + 0,070 = 5,570$ cm, por lo que el resultado correcto es $(5,570 \pm 0,005)$ mm, o bien, $(55,70 \pm 0,05)$ mm.

En el siguiente figura 1.4 mostramos otro ejemplo para una lectura de una medición hecha con el vernier

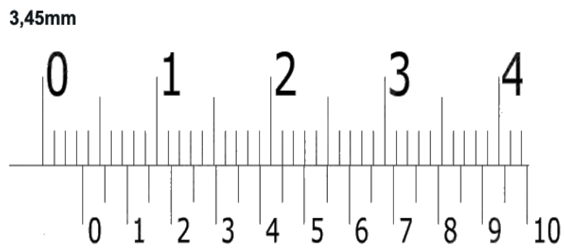


Figura 1.4: Medida (3.45 ± 0,05) mm.

Vemos que a la izquierda del cero del nonio hay 3 divisiones, esto significa que tenemos 3 mm enteros y en el nonio coincide la división que está justo entre el cuatro y el cinco con una división de la regla, es decir, 0,45 mm El resultado es sumar los enteros de la regla más la fracción del nonio: 3 + 0,45 mm = 3,45mm.

El tornillo micrométrico

Cuando se enrosca un tornillo en una tuerca este avanza cierta longitud dentro de ella. Si el giro comprende una vuelta completa la longitud recorrida se llama paso del tornillo. Esta propiedad es el principio básico de funcionamiento del Tornillo Micrométrico, otro instrumento de precisión utilizado para la medición de longitudes. La figura izquierda de 1.5 muestra un tornillo micrométrico y sus partes fundamentales: la escala fija graduada, el tambor, la tuerca de seguridad y el freno.

Figura 1.5: Tornillo Micrométrico

Cuando se mide con el tornillo micrométrico las primeras cifras están dadas sobre la escala fija. En el ejemplo mostrado en la figura derecha de 1.5 podemos ver que la lectura de obtiene de sumar la lectura de la escala fija + la del tambor, en este caso: 5 + 0,5 + 0,28 = 5,78 mm.

Para comprender esta última lectura sabemos que el tornillo tiene un paso de $0,5$ mm y que el tambor está dividido en 50 partes iguales, es decir, una apreciación de $0,01$mm.

La apreciación de un tornillo micrométrico corresponde a:

$$\text{Apreciación } = \frac{\text{paso del tornillo}}{\text{N}^0 \text{ total de divisiones del tambor}}.$$

Para cl tornillo de la figura 1.5, la apreciación es:

$$\text{Apreciación } = \frac{0,5 \text{ mm}}{50} = 0,01 \text{ mm}$$

y la lectura en esa misma figura es $(5,78 \pm 0,01)$mm.

Note que, en la escala fija milimétrica aparecen unas divisiones en la parte inferior de la misma, que permiten determinar con más facilidad si el tambor ha o no realizado una vuelta. Es decir, si es o no necesario agregar $0,50$ mm a la lectura del tambor.

1.5. Medición del tiempo

En física el tiempo es una magnitud que se usa para medir la duración o la separación de uno o más acontecimientos. Su unidad de medición en el Sistema Internacional es el segundo (s) y 60 de estas unidades constituyen una unidad mayor llamada minuto (min). Los aparatos con los que se mide el tiempo son el reloj o el cronómetro

El cronómetro

Los intervalos de tiempo se pueden medir utilizando un cronómetro, que según la tecnología utilizada en su construcción pueden ser de reloj digital o analógico, por lo general indican el tiemo minutos, segundos y fracciones de segundo. Tiene un botón utilizado para comenzar y detener el cronometraje y un botón para regresar a cero la lectura (ver figura 1.6).

Figura 1.6: Cronómetro digital (izquierda) y analógico (derecha)

El cronómetro digital es más confiable si queremos medir tiempos en escalas de milésimas o centésimas de segundo con bastante precisión. Al contrario que los cronómetro analógicos, este tipo de instrumentos se basan en tecnología más modernas con osciladores de cuarzo y circuitos electrónicos sofisticados.

1.6. Medición de la temperatura

La temperatura es una magnitud física que expresa cuantitativamente las percepciones de calor y frío. La temperatura se mide con un aparato llamado termómetro. Los termómetros se calibran en varias escalas de temperatura que históricamente se han basado en diversos puntos de referencia y sustancias termométricas para su definición. Las escalas más comunes son la escala Celsius con el símbolo de unidad ˚C (antes llamada centígrada), la escala Fahrenheit (˚F) y la escala Kelvin (K), esta última utilizada predominantemente con fines científicos. El kelvin es una de las siete unidades básicas del Sistema Internacional de Unidades (SI).

La escala Celsius es la más utilizada junto con la escala Fahrenheit. En esta escala, el punto de congelación del agua equivale a 0 ˚C (cero grados centígrados) y su punto de ebullición a 100 ˚C. La escala Fahrenheit, es la medida utilizada en la mayoría de los países de habla inglesa. En esta escala, el punto de congelación del agua ocurre a los 32 ˚F y su punto de ebullición a los 212 ˚F. La escala Kelvin es la medida que suele utilizarse en ciencia y establece el "cero absoluto" como punto cero, lo que supone que el objeto no desprende calor alguno y equivale a -273,15 ˚C.

El termómetro

La lectura directa de la temperatura de un cuerpo se logra con un instrumento que al ponerlo en contacto con éste da el valor de la temperatura: el termómetro. Los termómetros pueden ser de lectura analógica o digital, figura 1.7. Pero también existen termómetros que no funcionan por contacto como los termómetros infrarrojos, ópticos o de radiación. Otros tipos de termómetros son los de gas y de resistencia.

Figura 1.7: Termómetro digital (izquierda) y analógico (derecha)

El termómetro común consta de un bulbo de vidrio que contiene un líquido que experimenta dilataciones lineales con la temperatura y un tubo capilar graduado y calibrado. El líquido más usado es el mercurio (Hg) porque presenta una capacidad de dilatación regular y es un buen conductor del calor.

Estos termómetros tienen su escala dividida por el fabricante quien garantiza la apreciación del mismo, la que se puede determinar por el método descrito antes para instrumentos de una sola escala. Las escalas pueden estar divididas en grados centígrados (o Celsius) °C, en grados Fahrenheit °F o en grados Kelvin K (escala absoluta).

La relación entre la escala centígrada y la absoluta es:

$$T(\mathrm{K}) = T\,(^{\circ}C) + 273,2\,.$$

La relación de la escala centígrada con la escala Fahrenheit es:

$$T\,(^{\circ}F) = \frac{9}{5}T\,(^{\circ}C) + 32.$$

Es bueno recordar que una diferencia de temperatura de un grado Kelvin es igual a una diferencia de un grado centígrado, pero una diferencia de un grado centígrado no es igual a una diferencia de un grado Fahrenheit.

1.7. Medición de corriente eléctrica

La intensidad de la corriente está relacionada con el flujo de cargas eléctricas a través de un material conductor por unidad de tiempo. Básicamente medimos dos tipos de corriente eléctrica: la corriente continua y la corriente alterna. La corriente continua circula siempre en el mismo sentido y tiene un valor constante, se produce por pilas o baterías y la corriente alterna es corriente que circula en forma oscilatoria. Este tipo de corriente es la que usamos para encender la luz o al enchufar los electrodomésticos del hogar. La forma más común de medir la corriente eléctrica es con un amperímetro que es un dispositivo que se conecta al circuito eléctrico e indica los Amperios, que es la unidad de medida según el Sistema Internacional de Unidades (SI), que tiene dicho objeto.

Amperímetros

El amperímetro es el instrumento utilizado para medir la corriente en amperios (A) en un circuito. Para la medición directa, el amperímetro se conecta en serie con el circuito en el que se va a medir la corriente. Un amperímetro suele tener una resistencia baja para que no produzca una caída de tensión significativa en el circuito que se está midiendo.

Los instrumentos utilizados para medir corrientes más pequeñas, en el rango de los miliamperios o microamperios, se denominan miliamperímetros o microamperímetros, respectivamente

Existen varios tipos de amperímetros, con tecnologías digitales o analógicas, ver figura 1.8.

Figura 1.8: Diferentes tipos de amperímetros

- Amperímetros magnetoeléctricos o de bobina móvil. Están formados por un imán permanente fijo y un cuadro o bobina móvil que gira bajo el efecto de la fuerza de Ampère cuando circula corriente por el mismo. La espiral en el eje del cuadro impide la rotación del cuadro. Cuanto mayor sea la corriente que atraviesa el cuadro mayor será el ángulo de la aguja cuyo extremo se traslada por una escala.

- Amperímetros electromagnéticos o de imán móvil. Constan de una aguja unida a un imán alojado en el interior de una bobina. Cuando la corriente circula por esta última, se produce un campo magnético que, dependiendo de su sentido, produce una atracción o repulsión del imán que es proporcional a la intensidad de dicha corriente.

- Amperímetros electrodinámicos. Constan de dos bobinas, una fija y otra móvil que producen campos magnéticos, cada una de las cuales porta una corriente que es función de la corriente a medir. La reacción entre los campos de la bobina fija y la bobina móvil proporciona el torque del sistema móvil, que es compensado por resortes espiral que también se emplean para llevar la corriente a la bobina móvil.

- Amperímetros digitales. Estos aparatos ofrecen la lectura de la corriente directamente en una pantalla eliminando en gran medida los errores de lectura. Se diferencian de los analógicos en que las partes mecánicas móviles se han sustituido por circuitos electrónicos, con la gran ventaja de eliminar el desgaste de las partes.

1.8. Medición de la cantidad de sustancia

La cantidad de sustancia (símbolo: n) en una muestra dada de materia se define como la relación $n = N/N_{\mathrm{A}}$ entre el número de entidades elementales N y la constante de Avogadro N_{A}.

Las entidades pueden ser moléculas, átomos o iones de un tipo específico. La sustancia concreta que se toma como muestra puede especificarse utilizando un subíndice, por ejemplo, la cantidad de cloruro de sodio (NaCl) se denotaría como n_{NaCl}.

La unidad de cantidad para la sustancia en el Sistema Internacional de Unidades se denomina mol (símbolo: mol). Desde 2019, el valor de la constante de Avogadro N_{A} se define exactamente como $6,02214076 \times 10^{23}$ mol^{-1}. A veces, la cantidad de sustancia se denomina cantidad química.

1.9. Medición de la intensidad luminosa

La intensidad luminosa es una medida de la potencia ponderada en función de la longitud de onda emitida por una fuente luminosa en una dirección determinada por unidad de ángulo sólido, basada en la función de luminosidad y normalizada para la sensibilidad del ojo humano. La unidad SI de intensidad luminosa es la candela (cd). En la medición de la luz, se distinguen varias magnitudes fotométricas con las que se puede evaluar la luz:

- Lúmen (lm): Un lumen es la cantidad de energía visible que podemos realmente medir. Es el flujo luminoso, una medida de la potencia luminosa emitida por la fuente.

- Lux (lx): un lux es el equivalente a la energía producida por un lumen que incide sobre una superficie de 1 m^2. Es el nivel de iluminación de una fuente.

- Candela (cd): consiste en la unidad básica que mide la intensidad luminosa. Se define como la intensidad luminosa que va en una dirección dada, por lo que se relaciona con el ángulo de apertura hacia la luz.

Para poder medir la luminancia se utiliza un instrumento denominado luxómetro, figura 1.9. Un luxómetro permite medir simple y rápidamente la iluminancia real y no subjetiva de un ambiente. Contiene una célula fotoeléctrica que capta la luz y la convierte en impulsos eléctricos, los cuales son interpretados y representada en un display o aguja con la correspondiente escala de luxes.

Figura 1.9: Diferentes tipos de luxómetro

Capítulo 2

Redondeo, cifras significativas y orden de magnitud

2.1. Introducción

En este capítulo revisaremos una serie de temas fundamentales en el tratamiento de datos numéricos obtenidos en el laboratorio. Cuando hacemos cálculos con datos numéricos nos veremos en la necesidad de redondear números para obtener el valor aproximado que tenga la representación más corta. Esto se hace con el fin de evitar valores engañosamente precisos de un número, medida o estimación en los valores calculados. Es necesario entonces considerar los dígitos significativos de un número que sean fiables y necesarios para indicar la cantidad en estudio.

2.2. Redondeo

Generalmente un valor obtenido de un experimento corresponde a un número que se puede redondear a ciertas cifras, prescindiendo de uno o más de sus últimos dígitos. Por ejemplo, sustituir 23,4476 por 23,45, la fracción 312/937 por 1/3, o la expresión $\sqrt{2}$ por 1,414.

Cuando el primero de sus dígitos que se desea suprimir es menor que 5, el último dígito que se mantiene no se modifica; cuando el primer dígito a suprimir es mayor o igual a 5, se aumenta en una unidad la última cifra conservada, (ver ejemplos en la tabla 2.1).

Tabla 2.1: Ejemplos de redondeo de un número

	Número	5 cifras	4 cifras	3 cifras	2 cifras	1 cifra
a	3,14159	3,1416	3,142	3,14	3,1	3
b	$9{,}8070 \times 10^{-3}$	$9{,}8070 \times 10^{-3}$	$9{,}807 \times 10^{-3}$	$9{,}81 \times 10^{-3}$	$9{,}8 \times 10^{-3}$	1×10^{-2}
c	0,644510	0,64451	0,6445	0,645	0,64	0,6
d	327508	32751×10	3275×10^2	328×10^3	33×10^4	3×10^5

Note que el redondeo no debe hacerse en forma sucesiva, sino con respecto a la cifra original. Si en el ejercicio c, Ud. realiza un redondeo sucesivo, el resultado sería:

$$0,644510 \Rightarrow 0,64451 \Rightarrow 0,6445 \Rightarrow 0,645 \Rightarrow 0,65 \Rightarrow 0,7.$$

Note que el número 0,7 difiere más de 0,644510 que el número 0,6.

2.3. Cifras significativas

Las cifras significativas del valor de una magnitud son todos aquellos dígitos contados desde la izquierda a partir del primer dígito diferente de cero, sin tener en cuenta la posición de la coma decimal, hasta el primer dígito afectado de error. Si un número que expresa el resultado de una medición (por ejemplo, longitud, presión, masa) tiene más dígitos que el número de dígitos permitido por la resolución de la medición, entonces sólo son fiables tantos dígitos como permita la resolución de la medición y, por tanto, sólo éstos pueden ser cifras significativas

En los ejemplos que siguen, el dígito dudoso, es decir, aquel afectado por el error está señalado en negrita

Ejemplos:

1. 1,23**1** m; 123,**1** cm; 123**1** mm, tienen todos 4 cifras significativas.
2. 21,0**3** g y 200,**3** cm tienen 4 cifras significativas.
3. 2,0**0** cm y 74**0** m tienen 3 cifras significativas.
4. 0,4**8** s y 0,005**2** g tienen 2 cifras significativas.
5. $32\mathbf{3} \times 10^{-3}$ kg y $3,0\mathbf{0} \times 10^{8}$ m/s tienen 3 significativas.

Es oportuno observar en el ejemplo 4, que los valores de las magnitudes se han descrito con dos cifras significativas y no con tres (3) y cinco (5) respectivamente, ya que los ceros a la izquierda no se deben contar como cifras significativas.

2.3.1. Operaciones con cifras significativas

Suma y resta

En la suma y resta de magnitudes con diferentes números de cifras significativas, se redondea el resultado hasta que posea el mismo número de cifras decimales que la magnitud que menos decimales tenga.

Ejemplo: suma y diferencia de masas en gramos.

1) 25,340	2) 58,0	3) 1,6523
5,465	0,038	-0,015
0,322	1,0001	———
———	———	1,6373
31,127	59,0381	

En los ejemplos 2 y 3 se observa que los resultados son más precisos que uno de los términos (58,0 g y 0,015 g respectivamente). Por lo tanto, es necesario redondear el resultado al número de decimales de la magnitud menos precisa. Así, las soluciones serán:

$$1)\ 31,127\ \text{g} \quad 2)\ 59,0\ \text{g} \quad 3)\ 1,637\ \text{g}$$

Multiplicación y división

En la multiplicación y división de magnitudes con diferentes números de cifras significativas, se redondea el resultado hasta que posea el mismo número de cifras significativas que el factor que menos cifras significativas tenga.

1. $7{,}485 \text{ m} \cdot 8{,}61 \text{ m} = 64{,}4 \text{ m}^2$
2. $7485 \text{ m} \cdot 8{,}61 \text{ m} = 644 \times 10^2 \text{ m}^2$
3. $\dfrac{0{,}1342}{1{,}54} = 0{,}0871$

Observación: Es conveniente señalar que cuando se conoce el error absoluto (o el error probable) de una magnitud, es este error el que determina el número de cifras significativas que tendrá la magnitud.

2.4. Orden de magnitud

El orden de magnitud de una cantidad es la potencia de diez más cercana a dicha cifra.
Por ejemplo:

1. La masa de la tierra es $5,983 \times 10^{24}$ kg. Su orden de magnitud en el sistema SI es 10^{25} kg y en el sistema CGS es 10^{28} g.
2. El orden de magnitud de 0,0035 es 10^{-3}.
3. El orden de magnitud de 800×10^{-3} es 10^0 cm.

Observación: Si la cantidad física es dimensional, su orden de magnitud también es dimensional y depende del sistema de unidades considerado, ver los ejemplos 1 y 3. El exponente de la potencia de 10 puede ser positivo, negativo o cero.

Tomemos el ejemplo 1, para aclarar cómo se puede obtener el orden de magnitud responderemos a la siguiente pregunta: ¿cuáles son las potencias de 10 consecutivas, inmediatamente menor y mayor que la cantidad física considerada?

$$10^{24} \text{ kg} < 5,983 \times 10^{24} \text{ kg} < 10^{25} \text{ kg}$$

¿Cuáles son las diferencias respectivas?

$$5,983 \times 10^{24} \text{ kg} - 10^{24} \text{ kg} = 4,983 \times 10^{24}\text{kg}$$
$$10^{25} \text{ kg} - 5,983 \times 10^{24} \text{ kg} = 4,017 \times 10^{24} \text{ kg}$$

La menor diferencia que es $(4,017 \times 10^{24})$ implica mayor proximidad, luego 10^{25} es la potencia que se aproxima más a $5,983 \times 10^{24}$.

2.5. Ejercicios

1. Determinar el número de cifras significativas y el orden de magnitud de las siguientes magnitudes físicas.

   a) Radio de la tierra $= 6,371 \times 10^6$ m.

   b) Volumen de la tierra $=1,087 \times 10^{21}$ m^3
   c) Aceleración de gravedad$=9,80665$ m/s^2

2. Exprese el resultado de los siguientes problemas en órdenes de magnitud

   a) La edad del universo se cree que es 3×10^{10} años, dé el resultado en segundos.
   b) La velocidad de la luz en el vacío en: m/s, m/h y en km/dias
   c) La dénsidad del hierro en kg/m^3 y en g/cm^3

3. Un estudiante determinó que el radio de una esfera es $R = 10,00$ mm.

   a) ¿Cuánto mide su área?
   b) ¿Cuánto mide su volumen?
   c) Indique el orden de magnitud para las tres magnitudes físicas anteriores.

4. Exprese cada uno de los siguientes números con cuatro, tres, dos y una cifra significativa:

$0,4536$	$98,372$	$70045,6$
163571	$3,13100$	$26,39$
$0,45330$	$0,00332998$	$20150,0$

5. Calcule el valor de L con las cifras significativas correspondientes:

$$L = \frac{k^2}{a} + a$$

Donde $k = 14{,}3$ cm y $a = 853$ mm.

Capítulo 3

Teoría de Errores

3.1. Introducción

Cuando se realiza la medida de una magnitud física un cierto numero de veces, se observa que no todos los valores son iguales entre si y lógicamente nos preguntamos ¿Cuál es el valor correcto? ¿Por qué los valores obtenidos son diferentes?

Antes de contestar estas preguntas, debemos decir que ninguna medición puede dar un valor absolutamente exacto de una cantidad física. Es por ello que, cuando hablamos del valor “verdadero” de una magnitud física o valor exacto (valor que tendría la magnitud si no estuviese afectada de ningún tipo de error) debemos entenderlo como una abstracción.

Se puede emplear los métodos e instrumentos técnicos más perfeccionados y de todos modos ninguna medición lleva a un valor exacto, sino a la posibilidad de indicar un intervalo en el cual debe estar comprendido el “verdadero valor” para la magnitud medida.

Por ejemplo, si se mide la longitud de un objeto con una regla graduada, se puede decir que el resultado tiene una incertidumbre de ± 1 mm, y el resultado se puede escribir como $5,5 \pm 0,1$ cm. Pero si se utiliza un vernier, el cual permite obtener una medida con más precisión, el resultado sería $5,530 \pm 0,005$ cm.

3.2. Exactitud, precisión y sensibilidad

- Exactitud: se refiere al grado de concordancia entre el valor “verdadero”[1] y el medido experimentalmente. Decimos que un aparato es exacto si las medidas realizadas con él son todas muy próximas al valor “verdadero”de la magnitud medida.

- Precisión: tiene que ver con la concordancia entre las medidas de una misma magnitud realizadas en condiciones sensiblemente iguales, un aparato es más preciso cuando la diferencia entre diferentes mediciones de una misma magnitud sean muy pequeñas. Notemos que la exactitud normalmente implica precisión, pero la afirmación inversa no es cierta, ya que pueden existir aparatos muy precisos que posean poca exactitud, debido a errores sistemáticos, como por ejemplo el “error del cero”.

  Por lo tanto, precisión y exactitud no son sinónimos, la precisión tiene que ver con la capacidad que tiene el instrumento para tomar una medida mientras que exactitud tiene que ver con el hecho de lo cerca que pueda estar una medición al valor real.

- Sensibilidad: se relaciona con el valor mínimo de la magnitud que es capaz de medir un aparato. Cuando decimos que la sensibilidad de una balanza es de 1 mg, significa que para

[1] Por ahora lo que entendemos como valores “verdaderos” luego los definiremos como valores medios.

masas inferiores a este valor la balanza no muestra ninguna desviación. Por lo general consideramos la sensibilidad de un aparato de medida como el valor de la división más pequeña de la escala de medida.

Así como es importante no confundir precisión con exactitud, también es importante no confundir precisión y sensibilidad.

3.3. Tipos de errores en las mediciones

3.3.1. Errores sistemáticos

Son aquellos errores que afectan los resultados en una misma dirección y pueden ser causados por:

1. Defectos y errores de calibración de los instrumentos. Por ejemplo, si el cero del tambor de un tornillo micrométrico no coincide con el cero de la escala fija, se introducirá una desviación que será igual para todas las medidas realizadas. Esto se puede remediar recalibrando el instrumento.

2. El observador (errores personales). Puede introducir errores por efectos de paralaje. Se deben evitar estando consciente de las causas que los originan.

3. Variación de las condiciones ambientales. En este caso el observador no tiene control.

4. El método empleado. En este caso, los errores solo se hacen evidentes, si se cambia el método.

Para tratar estos errores de manera segura es necesario poder controlar el correcto funcionamiento de los equipos de medida.

3.3.2. Errores casuales o accidentales

Son aquellos errores producto de una contribución de fuentes incontrolables que van desplazando aleatoriamente el valor medido por encima y por debajo de su valor real, esto hace que las medidas den resultados diferentes. Se les conoce también como errores aleatorios o estadísticos. Los errores casuales, a diferencia de los errores sistemáticos, son inevitables y están presentes en todo experimento porque son una consecuencia de múltiples fluctuaciones incontrolables e independientes de los factores que intervienen en la realización de una medición.

Pueden ser causados por:

1. Condiciones ambientales fluctuantes, tales como: temperatura, presión variaciones de voltaje en la linea.

2. Oscilaciones de los mecanismos propios del instrumento de medida.

3. El observador.

4. Factores que puedan introducir errores que contribuyen al error total en los que podemos mencionar los siguiente: vibraciones mecánicas, señales parásitas en instrumentos electrónicos, defectos de fábrica, etc.

Como se trata de errores al azar, es casi imposible decidir si el promedio de las medidas se aleja hacia arriba o hacia abajo del valor exacto, por esto dicho error se expresa acompañado del signo de indeterminación $\pm$. En el caso de errores sistemáticos se puede al menos en principio, determinar su signo.

3.3.3. Errores de precisión

Los equipos de medición poseen escalas o dígitos y la división más pequeña de la escala o el último dígito determina la mínima diferencia de magnitud que puede apreciar el equipo, es decir: su resolución.

Una cinta métrica se encuentra dividida en centímetros y milímetros, por lo tanto, las medidas que se realicen con la cinta nos permitirá conocer la longitud de un objeto con un error aproximado de 1 mm. En el caso de que queramos disminuir el error de la medida debemos utilizar un dispositivo de medición que tenga una mayor resolución.

Este tipo de error se le conoce como el error de precisión y se debe a la resolución, sensibilidad, del aparato de medida. Suele designarse con ε_p

3.4. La escritura de los resultados de una medición

Al medir una magnitud x y conocer el error involucrado en la medición Δx debemos expresar la medida de la siguiente manera

$$x = x_0 \pm \Delta x \quad [\text{unidades}] \tag{3.1}$$

- x_0 es el valor de la medida
- Δx es la incertidumbre o el error de la medida

Nota: la medida y el error se deben dar en las mismas unidades.

Por ejemplo, con una cinta métrica se ha medido la altura de una persona. El resultado obtenido es de 1,68 m, y el error cometido es 1 cm. La forma correcta de expresar el resultado de la medida es:

$$\text{altura } = 1,68 \pm 0,01 \text{ m}\,.$$

3.4.1. Error absoluto y error relativo

Cuando medimos una magnitud física cuyo valor "verdadero" es x_0, lo que obtenemos por el proceso de medición es un valor x de la medida, el **error absoluto** de dicha medida es la siguiente diferencia

$$\Delta x = |x - x_0|\,, \tag{3.2}$$

en donde suponemos que $\Delta x \ll |x_0|$.

El error absoluto nos da una medida de la desviación, en términos absolutos, respecto al valor "verdadero".

Conocido el el error absoluto podemos calcular el **error relativo** de dicha medida:

$$\varepsilon = \frac{\Delta x}{x_0}, \tag{3.3}$$

de manera que en forma porcentual se puede expresar como $\varepsilon \times 100\,\%$.

Cuando vayamos a escribir el resultado de una medición para una magnitud M de debe indicar el grado de incertidumbre de la manera siguiente

$$\mathrm{M} = x \pm \Delta x \quad [\text{unidades}]\;. \tag{3.4}$$

Es muy común escribir el error absoluto con solo una cifra significativa, al menos que se indique lo contrario. Si el error se ha obtenido con más de una cifra, se deberá a proceder a suprimir las posteriores por el método del redondeo. El valor de la magnitud debe tener sólo las cifras necesarias para que su última cifra significativa sea del mismo orden decimal que la última del error absoluto, también llamada cifra de acotamiento.

Escribir el error con una o dos cifras significativas es una decisión un poco arbitraria, y dependerá del error introducido. Por ejemplo, si tenemos un error de 0,89 m y lo redondeamos a 0,9, la diferencia introducida es ligeramente superior al 1 %, valor que podría justificar el redondeo y expresar el error de una manera más sencilla; pero si un error de 1,4 m lo redondeamos a 1 m, la diferencia es cercana a un 40 %, algo difícilmente justificable.

En la siguiente tabla mostramos algunos ejemplos de medidas redondeando a una cifra significativa el error absoluto

Incorrecto	Correcto
$3,319 \pm 0,123$	$3,3 \pm 0,1$
$6,5 \pm 0,09$	$6,50 \pm 0,09$
$428,364 \pm 0,28$	$428,4 \pm 0,3$
$0,01695 \pm 0,0056$	$0,017 \pm 0,006$
46276 ± 1563	$(46 \pm 2) \times 10^3$

3.5. Mediciones directas

Cuando hacemos una medida directamente de un aparato de medición decimos que hacemos una medida directa. En lo que sigue vamos a estudiar el tratamiento de los errores suponiendo que las medidas están libres de errores sistemáticos.

3.5.1. Cálculo de los errores con una sola medida

En el caso de realizar una sola medida x de una magnitud, el error cometido vendrá dado únicamente por el error de precisión del aparato utilizado, es decir, $\varepsilon_p = \Delta x$.

Pero es necesario diferenciar si la medida la hacemos con un aparato analógico o digital.

- Analógico: el error de precisión se toma como la mitad de la división mas pequeña que puede medir el instrumento, es decir, la mitad de su sensibilidad.

$$\varepsilon_p = \frac{\text{división más pequeña}}{2} \tag{3.5}$$

  Por ejemplo, supongamos que un amperímetro analógico tiene una escala de lectura que aprecia valores hasta décimas de amperio (sensibilidad: S=0,1 A) y, al hacer una medida, la aguja se queda entre 0,6 A y 0,7 A. En ese caso, se podrá tomar como valor experimental de la corriente $I = 0,65$ A y como error absoluto $\varepsilon_p = (0,1)/2 = 0,05$ A. Se dirá que la intensidad de corriente es de $0,65 \pm 0,05$ A.

  Para una regla dividida milímetros el error de precisión en milímetros es de $\varepsilon_p = 0{,}5$ mm.

- Digital: el error de precisión es la mínima magnitud que puede medir el instrumento.

$$\varepsilon_p = \text{mínima magnitud medible} \tag{3.6}$$

  Por ejemplo, supongamos que un cronómetro digital que mide hasta milésimas de segundo (sensibilidad: S = 1 ms) nos permite medir el período de oscilación de un péndulo en $T = 882$ ms. El error absoluto en este caso es $\varepsilon_p = 1$ ms. Por lo tanto, el resultado se debe escribir como: $T = 882 \pm 1$ ms.

3.5.2. Cálculo de los errores en una serie de medidas

En esta sección nos referimos solo a los errores casuales, cuyo cálculo necesita del uso de la teoría estadística. Esta teoría es válida cuando el número de medidas que ser realiza es grande.

En el laboratorio elemental se considera que el número de medidas es grande, cuando $n \geq 25$. Pero no debe considerarse a este número como un valor fijo. Para otros autores, la separación entre un número grande y uno pequeño de medidas puede variar.

Hemos dicho que cuando se realiza una serie de medidas de una magnitud lo más probable es que ellas sean diferentes, entonces uno se pregunta ¿cuál es la mejor medida?

Cálculo de errores en un número pequeño de medidas

Para contestar estas preguntas se acostumbra utilizar algunas definiciones necesarias.

Valor medio aritmético: se define como el cociente entre la suma de las medidas: $x_1, x_2, \ldots, x_N$ y el número de N medidas realizadas.

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_N}{N} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \tag{3.7}$$

Es decir, la media de las medidas es el valor más probable de la magnitud. Se puede mostrar que $\bar{x}$ es el valor más cercano al valor verdadero (desconocido) de una medida.

Error absoluto de una medida: como mencionamos con anterioridad, se corresponde al valor absoluto de la diferencia del valor medio respecto a cada medida.

$$\Delta x_i = |\bar{x} - x_i| \tag{3.8}$$

Error medio absoluto de una serie de medidas: se define como el valor medio aritmético de los errores absolutos de cada medida.

$$\overline{\Delta x} = \frac{\Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3 + \ldots + \Delta x_N}{N} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \Delta x_i\,. \tag{3.9}$$

Error relativo de una serie de medidas: es dado por el cociente entre el error medio absoluto y el valor medio aritmético de las medidas.

$$\varepsilon_x = \frac{\overline{\Delta x}}{\bar{x}}\,. \tag{3.10}$$

Error porcentual: se define como el producto del error relativo por 100

$$\varepsilon_{\%} = \varepsilon_x \times 100\,. \tag{3.11}$$

Dispersión D: la diferencia entre los valores extremos de las medidas:

$$D = x_{\max} - x_{\min}\,. \tag{3.12}$$

Dispersión porcentual $D_{\%}$: definido por

$$D_{\%} = \frac{D}{\bar{x}} \cdot 100 \tag{3.13}$$

Ejemplo 1. Para ilustrar lo descrito antes, realizaremos el siguiente ejercicio:

Se quiere determinar el volumen de un cilindro y por lo tanto es necesario medir la altura y el diámetro del mismo. La medida de la altura se hizo una vez con una cinta métrica, mientras que la del diámetro se realizó cinco veces con un vernier de apreciación $0,005$ cm.

$$\text{altura } = h = (10,2 \pm 0,1)\text{cm}$$

$d =$ diámetro (cm)	$1,780$	$1,780$	$1,780$	$1,790$	$1,790$

El diámetro promedio es:

$$\bar{d} = \frac{1,780 + 1,780 + 1,780 + 1,790 + 1,790}{5} = 1,784 \text{ cm}$$

En este caso la dispersión es:

$$D = 1,790 - 1,780 = 0,01 \Rightarrow D_{\%} = \frac{0,01}{1,784} \cdot 100 = 0,6\,\%$$

Los errores absolutos para cada medida del diámetro son los siguientes:

$$\begin{aligned}
\Delta d_1 &= |1,784 - 1,780| = 0,004 \text{ cm} \\
\Delta d_2 &= |1,784 - 1,780| = 0,004 \text{ cm} \\
\Delta d_3 &= |1,784 - 1,780| = 0,004 \text{ cm} \\
\Delta d_4 &= |1,784 - 1,790| = 0,006 \text{ cm} \\
\Delta d_5 &= |1,784 - 1,790| = 0,006 \text{ cm}
\end{aligned}$$

El error absoluto del diámetro:

$$\overline{\Delta d} = \frac{0,004 \text{ cm} + 0,004 \text{ cm} + 0,004 \text{ cm} + 0,006 \text{ cm} + 0,006 \text{ cm}}{5} = 0,005 \text{ cm}$$

El error relativo del diámetro:

$$\varepsilon_d = \frac{\overline{\Delta d}}{\bar{d}} = \frac{0,005 \text{ cm}}{1,784 \text{ cm}} = 0,0028.$$

El error porcentual para el diámetro:

$$\varepsilon_{\%} = \varepsilon_d \times 100 = 0,0028 \times 100 = 0,28\,\%$$

El error relativo para la altura:

$$\varepsilon_h = \frac{\Delta h}{h} = \frac{0,1 \text{ cm}}{10,2 \text{ cm}} = 0,01.$$

El error porcentual para la altura:

$$\varepsilon_{\%} = \varepsilon_h \times 100 = 0,01 \times 100 = 1\,\%.$$

Por lo tanto:

$$h = (10,2 \pm 0,1) \text{ cm} \quad y \quad d = (1,784 \pm 0,005) \text{ cm}$$

Vamos a reproducir el ejemplo anterior en Python. Primero que todo debemos incorprar las librerias **numpy** y **matplotlib**

```
from numpy import *
import matplotlib.pyplot as plt
```

Luego introducimos los datos como un arreglo

```
d = array([1.780, 1.780, 1.780, 1.790, 1.790])
print('Num de datos:',          len(d)  )
print('promedio:',              mean(d), 'cm' )
print('suma:',                  sum(d)  )
```

Num de datos: 5
promedio: 1.784 cm
suma: 8.92

Podemos calcular la dispersión de la siguiente manera

```
# Valores máximo y mínimos del conjunto de datos
print('valor máximo:',  amax(d))
print('valor mínimo:',  amin(d))
print('dispersión:',   (amax(d)-amin(d)).round(2))
print('dispersión porcentual:', ((amax(d)-amin(d))/mean(d)*100).round(1),'%')
```

valor máximo: 1.79
valor mínimo: 1.78
dispersión: 0.01
dispersión porcentual: 0.6 %

Para el error absoluto del diámetro

```
Delta_d=(sum(abs(mean(d)-d))/len(d)).round(3)
Delta_d
```

0.005

Para el error relativo del diámetro

```
err_d=(Delta_d/mean(d)) # error relativo
err_dp=(e_d*100)    # error porcentual

print('error relativo:', err_d.round(4))
print('error porcentual:', err_dp.round(2),'%')
```

error relativo: 0.0028
error porcentual: 0.28 %

Cálculo de errores en un número grande de medidas

Supongamos que, un estudiante necesita conocer el diámetro de un tubo de vidrio, para lo cual realiza 25 medidas, Tabla 3.1. El instrumento utilizado fue un tornillo micrométrico de apreciación $0,01$ mm.

¿Cómo presentar estas medidas gráficamente? Una manera es por medio de un histograma, el cual no es más que un gráfico del número de veces que ocurre una medida (frecuencia) como función del valor de ésta.

N° de la medida	d(mm)	N° de la medida	d(mm)	N° de la medida	d(mm)
1	15,12	10	15,14	19	15,14
2	15,10	11	15,15	20	15,13
3	15,15	12	15,14	21	15,15
4	15,17	13	15,13	22	15,13
5	15,14	14	15,14	23	15,11
6	15,16	15	15,13	24	15,13
7	15,14	16	15,13	25	15,15
8	15,12	17	15,14		
9	15,12	18	15,14		

Cuadro 3.1: Medidas del diámetro d de un tubo

El histograma se construye de la forma siguiente: Se divide el conjunto de valores medidos en intervalos iguales y se cuenta el número de veces que ocurre el valor de la medición en cada intervalo. El ancho de cada intervalo es arbitrario y generalmente se escoge el más conveniente.

Con los valores de la tabla anterior 3.1 y escogiendo como el ancho del intervalo en 0,01 mm, las frecuencias de las medidas se muestran en la tabla 3.2.

Intervalo (mm)	Frecuencia
$15,095 - 15,105$	1
$15,105 - 15,115$	1
$15,115 - 15,125$	3
$15,125 - 15,135$	6
$15,135 - 15,145$	8
$15,145 - 15,155$	4
$15,155 - 15,165$	1
$15,165 - 15,175$	1

Cuadro 3.2: Frecuencias de las medidas de la tabla 3.1

Para hacer un histograma podemos volver al Pyhton

```
d = array([15.12, 15.10, 15.15, 15.17, 15.14, 15.16, 15.14, 15.12,
           15.12, 15.14, 15.15, 15.14, 15.13, 15.14, 15.13, 15.13,
           15.14, 15.14, 15.14, 15.13, 15.15, 15.13, 15.11, 15.13,
           15.15])
plt.hist(d,edgecolor = "white", bins=8)
plt.xlabel('Diámetros')
plt.ylabel('Frecuencia')
plt.title("histograma")
plt.show()
```

Si se efectuaran otras 25 mediciones, el histograma respectivo sería probablemente diferente al mostrado en 3.1, y si se continuase haciendo medidas del diámetro hasta un número n muy grande y se realizara un nuevo histograma de ellas, tomando los intervalos más pequeños, se obtendría una curva continua, llamada gaussiana o curva de Gauss, ver gráfica 3.2. De la curva de Gauss podemos extraer la información, que nos permite decidir que tan confiables son los valores obtenidos en las medidas realizadas.

Además del valor medio aritmético $\bar{x}$ también podemos definir:

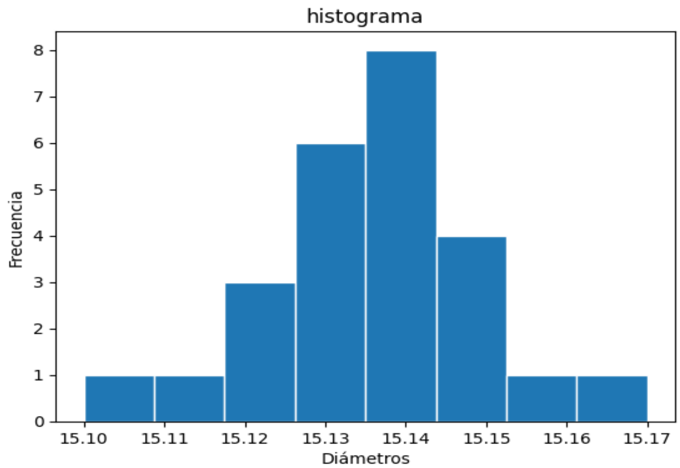


Figura 3.1: Histograma para los datos de la tabla 3.1.

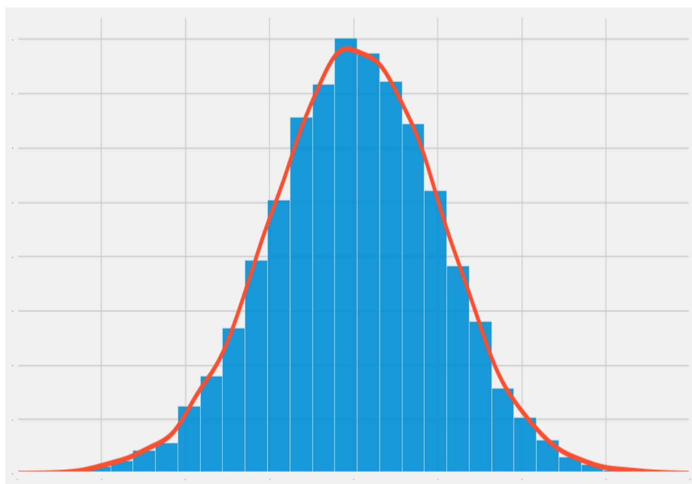


Figura 3.2: Curva de Gauss para un número n muy grande de medidas.

Desviación de cada medida respecto al valor medio: corresponde a la diferencia entre el valor medio y cada medida y se denota por Δx_i.

$$\Delta x_i = \bar{x} - x_i \tag{3.14}$$

Las desviaciones pueden ser positivas o negativas, lo cual nos señala que las medidas caen a uno u otro lado del valor medio.

Desviación estándar: Se define como:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} (\bar{x} - x_i)^2}{(N-1)}} \tag{3.15}$$

cuando el número de medidas no es lo suficientemente grande.

En el caso que se tengan varios conjuntos de medidas (N grande), la desviación estándar está dada por:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} (\bar{x} - x_i)^2}{N(N-1)}} \tag{3.16}$$

La curva de Gauss dibujada en la figura 3.1, ayuda a visualizar las definiciones dadas para el valor medio y la desviación estándar.

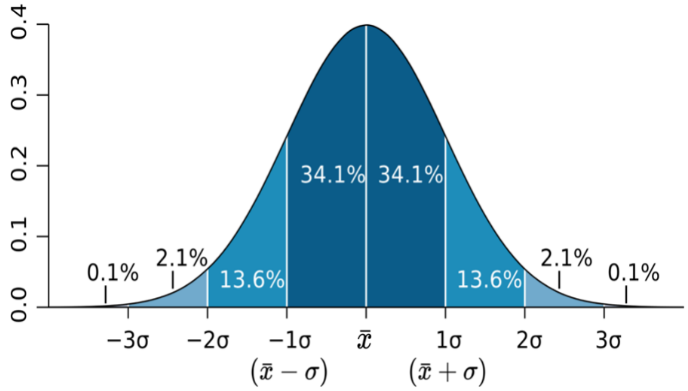


Figura 3.3: Curva de distribución de Gauss mostrando la posición de $\bar{x}$ y σ

Podemos notar que los valores de las mediciones tienden a agruparse alrededor de un punto central: la media. La representación de los datos es simétrica a ambos lados de la media y las desviaciones estándares quedan situadas a igual distancia unas de otras.

Notemos también que la proporción de las medidas situada entre la media y las desviaciones es una constante, por ejemplo: $\bar{x} \pm 1\sigma$ cubre el 68,3 % de las mediciones. Mientras que $\bar{x} \pm 3\sigma$ cubre el 99,7 %.

Error probable (ε_p) Se define como la desviación respecto al valor medio, que divide la mitad derecha (o izquierda) del área bajo la curva de Gauss en dos partes iguales. Por lo tanto, la probabilidad de observar una desviación dentro del intervalo $(\bar{x} - \varepsilon_p)$ y $(\bar{x} + \varepsilon_p)$ es $\frac{1}{2}$, ver la figura 3.2.

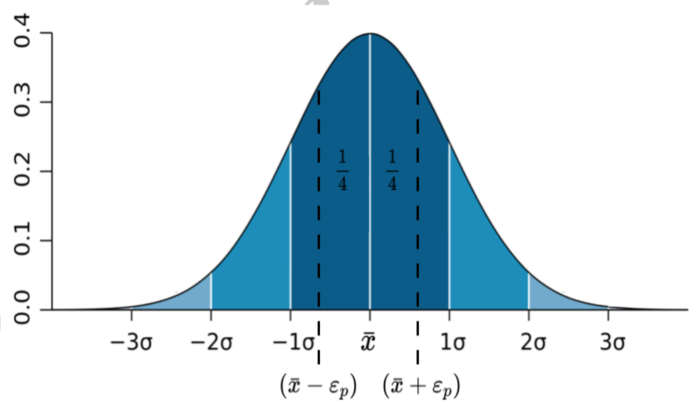


Figura 3.4: Curva de distribución de Gauss mostrando la posición de $\bar{x}$ y σ

Esto puede interpretarse diciendo que hay un 50 % de probabilidad de que el valor verdadero se encuentre en ese intervalo. Para una distribución de Gauss, el error probable (ε_p) está dado por:

$$\varepsilon_p = 0,674\sigma \tag{3.17}$$

El estudiante debe expresar en este caso, el resultado de una serie grande de medidas como:

$$x = (\bar{x} \pm \varepsilon_p) \quad [\text{unidades}]\,. \tag{3.18}$$

La teoría estadística dice que de todas las medidas el:

- $38,3\,\%$ están comprendidas en el intervalo de $\bar{x} - \frac{\sigma}{2}$ hasta $\bar{x} + \frac{\sigma}{2}$.
- $50,0\,\%$ están comprendidas en el intervalo de $\bar{x} - \varepsilon_p$ hasta $\bar{x} + \varepsilon_p$.
- $68,3\,\%$ están comprendidas en el intervalo de $\bar{x} - \sigma$ hasta $\bar{x} + \sigma$.
- $82,2\,\%$ están comprendidas en el intervalo de $\bar{x} - 2\varepsilon_p$ hasta $\bar{x} + 2\varepsilon_p$.
- 95,45 % están comprendidas en el intervalo de $\bar{x} - 2\sigma$ hasta $\bar{x} + 2\sigma$.
- 95,69 % están comprendidas en el intervalo de $\bar{x} - 3\varepsilon_p$ hasta $\bar{x} + 3\varepsilon_p$.
- $99,73\,\%$ están comprendidas en el intervalo de $\bar{x} - 3\sigma$ hasta $\bar{x} + 3\sigma$.

Ejemplo 2. Consideremos el siguiente conjunto de medidas que se corresponden a 25 medidas para el diámetro de un tubo, Tabla 3.3. Para ese conjunto de valores tenemos:

N° de medida	d(mm)	$(\bar{d} - d)$ mm	$(\Delta d)^2$ mm^2
1	15,12	0,016	0,0003
2	15,10	0,036	0,0013
3	15,15	-0,014	0,0002
4	15,17	-0,034	0,0011
5	15,14	-0,004	0,00002
6	15,16	-0,024	0,0006
7	15,14	-0,004	0,0002
8	15,12	0,016	0,0003
9	15,12	0,016	0,0003
10	15,14	-0,004	0,00002
11	15,15	-0,014	0,0002
12	15,14	-0,004	0,00002
13	15,13	0,006	0,00004
14	15,14	-0,004	0,00002
15	15,13	0,006	0,00004
16	15,13	0,006	0,00004
17	15,14	-0,004	0,00002
18	15,14	-0,004	0,00002
19	15,14	-0,004	0,00002
20	15,13	0,006	0,00004
21	15,15	-0,014	0,0002
22	15,13	0,006	0,00004
23	15,15	-0,014	0,0002
24	15,11	0,026	0,0007
25	15,13	0,006	0,00004
Suma	$\mathbf{378,40}$		$\mathbf{0,0058}$
Promedio	$\mathbf{15,136}$		

Cuadro 3.3: Medidas para diámetro d de un tubo

- La desviación estándar:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(\Delta d)^2}{(N-1)}} = \sqrt{\frac{0,0058\ \text{mm}^2}{24}} = 0,02\ \text{mm}.$$

- Error probable:

$$e_p = 0,674 \times \sigma = 0,01\ \text{mm}.$$

- Error relativo:

$$\varepsilon_d = \frac{e_p}{\bar{d}} = \frac{0,01\ \text{mm}}{15,14\ \text{mm}} = 7 \times 10^{-4}.$$

- Error porcentual:

$$\varepsilon_{\%} = \varepsilon_d \times 100 = 7 \times 10^{-4} \times 100 = 7 \times 10^{-2} = 0,07\,\%.$$

- Valor del diámetro:

$$d = (15,14 \pm 0,01)\ \text{mm}$$

Con Python podemos hacer los cálculos del Ejemplo 2, pero es bueno notar lo siguiente. Numpy tiene una función para calcular la desviación estándar que es **std** que se basa en la ecuación

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(d_i - \bar{d})^2}{N}}$$

que sería la desviación estándar no corregida de una muestra (considerada como la población total).

```
sig=std(d)
sig
```

```
0.014966629547095968
```

Pero aquí estaremos utilizando la ecuación 3.15 que también se conoce como la desviación estándar de una muestra corregida. Esa diferencia entre $1/N$ y $1/(N-1)$ se hace cada vez más pequeña a medida que N aumenta. Podemos definir nuestra propia desviación estándar.

```
des = sqrt(sum((d - mean(d))**2  )/(len(d)-1))
des
```

```
0.015275252316519673
```

Para el resto de los cálculos del ejemplo 2 tenemos:

```
epr=(0.674*des)
ed=epr/mean(d)
ep=ed*100
print('promedio:', mean(d).round(2))
print('error probable:', epr.round(2))
print('error relativo:', ed.round(4))
print('error porcentual:', ep.round(2),'%')
```

```
promedio: 15.14
error probable: 0.01
error relativo: 0.0007
error porcentual: 0.07 %
```

3.5.3. Precisión y exactitud de mediciones

Volviendo al tema de la precisión y exactitud de las mediciones vimos que están relacionadas con los errores cometidos en la obtención de las mismas. La precisión en el valor medio es proporcional al inverso del error casual o estadístico. Se obtendrá una alta precisión si el error (porcentual) estadístico es pequeño y será baja si dicho error es grande. La exactitud será alta cuando los errores sistemáticos sean pequeños y será baja si éstos son grandes.

En algunos casos, una alta exactitud puede implicar un error casual pequeño, pero en general no es así. La precisión y exactitud no son términos intercambiables entre sí y los métodos estadísticos dan específicamente una medida cuantitativa de la precisión y no de la exactitud.

Las diferencias entre exactitud y precisión se ilustran en la figura 3.5. En la figura de la izquierda se observa que el valor medio difiere bastante del valor verdadero, lo cual se interpreta diciendo que las mediciones fueron de baja exactitud, la gaussiana B indica una baja exactitud y una alta precisión.

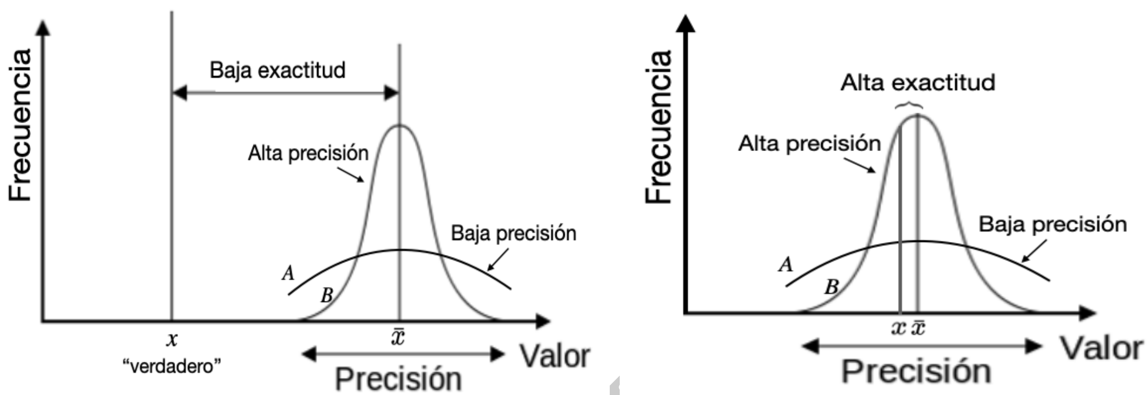


Figura 3.5: Precisión y Exactitud

En la misma figura pero de la derecha, en la gausiana B, el intervalo $(\bar{x} - \varepsilon_p, \bar{x} + \varepsilon_p)$ es menor que en la gaussiana A, por lo tanto las mediciones que corresponden a la gaussiana B son de mayor precisión y una alta exactitud.

3.5.4. Discrepancia

Cuando tenemos dos mediciones de una misma cantidad, por ejemplo

$$x_1 = (x_{01} \pm \Delta x_1) \quad \text{y} \quad x_2 = (x_{02} \pm \Delta x_2)$$

decimos que tenemos una discrepancia si estas mediciones no coinciden.

Definimos la discrepancia entre dos medidas como la diferencia entre las medidas de la misma cantidad:

$$\text{Discrepancia} = \mathcal{D} = |x_{01} - x_{02}|$$

No es exactamente un error pero es una cantidad que puede ser significativa para el cálculo de los errores.

Por ejemplo, dos estudiantes miden las siguientes temperaturas en un experimento:

$$T_A = (2,2 \pm 0,1)\ \text{K}\,, \quad T_B = (2,7 \pm 0,2)\ \text{K} \;\Rightarrow\; \mathcal{D} = |2{,}2 - 2{,}7| = 0,5$$

Lo anterior es igual a:

$$2,1 \leq T_A \leq 2,3\ \text{K} \quad \text{y} \quad 2,5 \leq T_B \leq 2,9\ \text{K}$$

y se dice que ambas mediciones son distinguibles entre sí porque los intervalos no se solapan.

Pero resulta que otros dos estudiantes miden las siguientes temperaturas

$$T_A = (2,3 \pm 0,1)\ \mathrm{K}\,, \quad T_B = (2,5 \pm 0,2)\ \mathrm{K} \ \Rightarrow\ \mathcal{D} = |2{,}3 - 2{,}5| = 0,2$$

que es equivalente a:

$$2,2 \leq T_A \leq 2,4\ \mathrm{K} \quad \mathrm{y} \quad 2,3 \leq T_B \leq 2,7\ \mathrm{K}$$

en este caso, la discrepancia es de 0,2 pero no es significativa porque los intervalos de las mediciones se superponen, decimos entonces que las mediciones son indistinguibles.

Podemos hablar de una discrepancia porcentual si tomamos la media de las medidas, para el primer caso el promedio de las dos medidas es: 2,45 K.

$$\mathcal{D}_{\%} = \left|\frac{0,5}{2,45}\right| \times 100 = 20\,\%$$

Y para el segundo par de medidas el promedio es 2,4 K

$$\mathcal{D}_{\%} = \left|\frac{0,2}{2,4}\right| \times 100 = 8\,\%$$

3.6. Algoritmo para el manejo de los errores

Podemos crear un algoritmo que nos ayude a definir los criterios que debemos utilizar a la hora de escribir los resultados de las mediciones hechas en el laboratorio. Para darle a nuestras mediciones una validez estadística es conveniente realizar el calculo de la dispersión D, ecuación 3.12, la dispersión porcentual 3.13 y tener a mano la sensibilidad S del aparato de medida.

Realicemos los siguientes pasos

1. Tomaremos $N = 3$ mediciones como el valor mínimo para nuestro algoritmo.

   i) Si $D < S$: El error vendrá dado por $\Delta x = S$ y la medida es $\bar{x}_3$, por lo tanto

   $$\mathrm{M} = \bar{x}_3 \pm S \quad [\mathrm{Unidades}]$$

   ii) Si $D > S$ y $D_{\%} \leq 2\,\%$: El error vendrá dado por $\Delta x = S$ y la medida es $\bar{x}_3$

   $$\mathrm{M} = \bar{x}_3\ \pm\ S \quad [\mathrm{Unidades}]$$

   donde

   $$\bar{x}_3 = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3} x_i$$

2. Si para $N = 3$ se tiene que $D > S$ pero la dispersión está entre: $2\,\% \leq D_{\%} \leq 8\,\%$, entonces realizamos más medidas hasta llegar a $N = 6$. El error vendrá dada por el valor máximo entre $D_6/4$ y S, donde D_6 es la dispersión para 6 medidas, es decir:

   $$\mathrm{M} = \bar{x}_6\ \pm\ \max\{D_6/4, S\} \quad [\mathrm{Unidades}]$$

   donde

   $$\bar{x}_6 = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} x_i$$

3. Si para $N = 3$ se tiene que $D > S$ pero la dispersión está entre: $8\,\% \leq D_{\%} \leq 15\,\%$, entonces hacemos $N = 15$, y el error vendrá dado por

$$\Delta x_{15} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{15} (x_i - \bar{x}_{15})^2}{14}}$$

La magnitud se escribe entonces como

$$\text{M} = \bar{x}_{15} \pm \Delta x_{15} \quad [\text{Unidades}]$$

donde

$$\bar{x}_{15} = \frac{1}{15}\sum_{i=1}^{15} x_i$$

4. Si para $N = 3$ se tiene que $D > S$ per la dispersión es $D_{\%} \geq 15\,\%$, entonces demos hacer muchas medidas $N \geq 50$, y el error vendrá dado por

$$\Delta x_N = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x}_N)^2}{N(N-1)}}$$

La magnitud se escribe entonces como

$$\text{M} = \bar{x}_N \pm \Delta x_N \quad [\text{Unidades}]$$

donde

$$\bar{x}_N = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i\,.$$

Notemos que si por ejemplo, se ha obtenido que $D > S$ y $2\,\% \leq D_{\%} \leq 8\,\%$ se necesitan 6 medidas y el valor verdadero queda establecido en la media aritmética de las 6 medidas y su error corresponde al máximo de entre la dispersión de las seis medidas dividido por 4 o la sensibilidad.

Por otro lado, si se realizan 15 o más medidas, en realidad se está buscando que el conjunto de las mismas sea una distribución gaussiana o normal, en cuyo caso, el error que se considera corresponde con el error cuadrático medio (ECM) o desviación standard σ.

Ejemplo 3. Con una regla graduada, en milímetros, se mide la longitud L de un tubo. El error de cada medida para este instrumento analógico es

$$\varepsilon_p = \frac{1 \text{ mm}}{2} = 0,5 \text{ mm} = S$$

- Los datos obtenidos para tres medidas son:

L(mm)	15, 0	14, 0	13, 5

La media:

$$\bar{L} = \frac{15,0 + 14,0 + 13,5}{3} = \frac{42,5}{3} = 14,2 \text{ mm}$$

La dispersión para estos datos es de

$$D = 15,0 - 13,5 = 1,5 \;\Rightarrow\; D_{\%} = \frac{1,5}{14,2} \cdot 100 = 11\,\%$$

Estamos en el caso donde $D > S$ y la dispersión porcentual resulta ser mayor al $2\,\%$. Debemos hacer más medidas

- Agregamos tres medidas más para completar 6 mediciones

L(mm)	$15,0$	$14,0$	$13,5$	$15,5$	$15,5$	$15,5$

La media:

$$\bar{L} = \frac{15,0 + 14,0 + 13,5 + 15,5 + 15,5 + 15,5}{6} = \frac{89,0}{6} = 14,8 \text{ mm}$$

La dispersión para estos datos es ahora de

$$D = 15,5 - 13,5 = 2,0 \;\Rightarrow\; D_{\%} = \frac{2,0}{14,8} \cdot 100 = 14\,\%$$

Con $N = 6$, nuevamente tenemos que $D > S$ y la dispersión porcentual se encuentra fuera del rango $2\,\% \leq D_{\%} \leq 8\,\%$. Debemos tomar más medidas.

- Agregamos 9 medidas más para completar $N = 15$

L(mm)	L(mm)	L(mm)
$15,0$	$14,0$	$13,5$
$15,5$	$15,5$	$15,5$
$13,5$	$15,0$	$14,0$
$14,0$	$14,0$	$15,5$
$13,5$	$14,0$	$14,0$

La media:

$$\bar{L} = \frac{1}{15}\sum_{i=1}^{15} L_i = \frac{216}{15} = 14,4 \text{ mm}$$

La dispersión para estos datos es ahora de

$$D = 15,5 - 13,5 = 2,0 \;\Rightarrow\; D_{\%} = \frac{2,0}{14,4} \cdot 100 = 14\,\%$$

Con $N = 15$, nuevamente tenemos que $D > S$ pero ahora la dispersión porcentual se encuentra dentro del rango $8\,\% \leq D_{\%} \leq 15\,\%$. Podemos parar y proceder a calcular los errores completando la siguiente tabla

i	$L_i \pm 0,5$(mm)	$L_i - \bar{L}$(mm)	$\left(L_i - \bar{L}\right)^2$ (mm^2)
1	$15,0$	$0,6$	$0,36$
2	$15,5$	$1,1$	$1,21$
3	$13,5$	$-0,9$	$0,81$
4	$14,0$	$-0,4$	$0,16$
5	$13,5$	$-0,9$	$0,81$
6	$14,0$	$-0,4$	$0,16$
7	$15,5$	$1,1$	$1,21$
8	$15,0$	$0,6$	$0,36$
9	$14,0$	$-0,4$	$0,16$
10	$14,0$	$-0,4$	$0,16$
11	$13,5$	$-0,9$	$0,81$
12	$15,5$	$1,1$	$1,21$
13	$14,0$	$-0,4$	$0,16$
14	$15,5$	$1,1$	$1,21$
15	$14,0$	$-0,4$	$0,16$
$\sum$	216		$8,95$

Por lo tanto:

$$\Delta x_{15} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{15}\left(L_i - \bar{L}_{15}\right)^2}{14}} = \sqrt{\frac{8,95}{14}} = 0,214 \text{ mm}$$

La longitud L del tubo se escribe entonces como

$$L = 14,4 \pm 0,2 \text{ mm}$$

3.7. Mediciones indirectas

Hasta aquí se ha analizado lo correspondiente a errores de magnitudes medidas directamente, por ejemplo: la altura de un cilindro, el diámetro de un tubo, el tiempo de caída de un cuerpo. Frecuentemente la magnitud de interés debe ser determinada a partir de otras magnitudes medidas directamente, por lo que el error en dicha magnitud debe ser obtenido a partir de los errores de las otras magnitudes.

Por ejemplo, para la determinar el volumen V de un cilindro se efectúan medidas del diámetro d y la altura h, luego el error en V debe ser obtenido de los errores cometidos en las medidas de d y h. El procedimiento que permite obtener este error es lo que se conoce como propagación de errores.

3.7.1. Propagación de errores

Como indicamos anteriormente, la medida indirecta de una magnitud se alcanza por aplicación de una fórmula a un conjunto de medidas directas, (las variables independientes o los datos), que las relacionan con la magnitud del problema. Mediante dicha fórmula se puede obtener también el error de la medida.

3.7.2. Propagación de errores en casos particulares

A continuación analizaremos algunos de los casos más sencillos de propagación de errores:

Suma y diferencia de magnitudes. Cuando una magnitud M es el resultado de la suma o resta de dos o más magnitudes medidas directamente, un error en dichas magnitudes traerá consigo un error en M, es decir, si $(X \pm \Delta X)$ y $(Y \pm \Delta Y)$ son dos mediciones directas, entonces

$$\mathrm{M} = X \pm Y \;\Rightarrow\; \mathrm{M} \pm \Delta\mathrm{M} = (X \pm \Delta X) \pm (Y \pm \Delta Y)\,,$$

reagrupando términos resulta,

$$\mathrm{M} \pm \Delta\mathrm{M} = (X \pm Y) \pm (\Delta X + \Delta Y)$$

donde

$$\Delta\mathrm{M} = \Delta X + \Delta Y$$

El error absoluto ΔM, de la suma o diferencia de magnitudes, viene dado por la suma de los errores absolutos de cada una de las magnitudes medidas directamente.

El error relativo será:

$$\varepsilon_r = \frac{\Delta\mathrm{M}}{\mathrm{M}} = \frac{\Delta X + \Delta Y}{X \pm Y}$$

Multiplicación de magnitudes. Si la magnitud M es el resultado de multiplicar dos o más magnitudes medidas en forma directa, el error absoluto ΔM se puede obtener de la siguiente manera:

$$\mathrm{M} = X \cdot Y \;\Rightarrow\; \mathrm{M} \pm \Delta\mathrm{M} = (X \pm \Delta X) \cdot (Y \pm \Delta Y)\,,$$

por lo tanto

$$\mathrm{M} \pm \Delta\mathrm{M} = (X \cdot Y) \pm X\Delta Y \pm Y\Delta X + \Delta X\Delta Y\,.$$

Puesto que las cantidades ΔX y ΔY son pequeñas comparadas con X y Y, se puede despreciar el término $\Delta X\Delta Y$ y el error absoluto de M será:

$$\Delta\mathrm{M} = X\Delta Y + Y\Delta X\,.$$

El error relativo:

$$\varepsilon_r = \frac{\Delta\mathrm{M}}{\mathrm{M}} = \frac{\Delta X}{X} + \frac{\Delta Y}{Y}$$

es decir, el error relativo de un producto de magnitudes es la suma de los errores relativos de cada una de las magnitudes medidas directamente.

División de magnitudes. Cuando la magnitud M es el resultado de dividir magnitudes medidas directamente, el error absoluto se puede obtener en la forma siguiente:

$$\mathrm{M} = \frac{X}{Y} \;\Rightarrow\; \mathrm{M} \pm \Delta\mathrm{M} = \frac{X \pm \Delta X}{Y \mp \Delta Y}\,,$$

por lo tanto:

$$\mathrm{M} \pm \Delta\mathrm{M} = \frac{X \pm \Delta X}{Y \mp \Delta Y} \cdot \frac{Y \pm \Delta Y}{Y \pm \Delta Y} = \frac{XY \pm Y\Delta X \pm X\Delta Y + \Delta X\Delta Y}{Y^2 - (\Delta Y)^2}\,.$$

Considerando que ΔX y ΔY son pequeños en relación a X y Y, se puede despreciar los términos $\Delta X\Delta Y$ y $(\Delta Y)^2$, luego

$$\mathrm{M} \pm \Delta\mathrm{M} = \frac{X}{Y} \pm \frac{Y\Delta X + X\Delta Y}{Y^2}\,,$$

es decir, el error absoluto en M será:

$$\Delta\mathrm{M} = \frac{Y\Delta X + X\Delta Y}{Y^2}\,,$$

y el error relativo:

$$\varepsilon_r = \frac{\Delta\mathrm{M}}{\mathrm{M}} = \frac{\Delta X}{X} + \frac{\Delta Y}{Y}\,.$$

Al igual que para el producto de magnitudes, el error relativo del cociente es igual a la suma de los errores relativos de cada una de las magnitudes medidas directamente.

Función potencial. Si la magnitud M es el resultado de elevar la magnitud X a una potencia n, M$= aX^n$, donde a es un valor exacto. El error relativo se puede obtener aplicando el criterio definido para el producto de magnitudes.

Ya que M se puede escribir como:

$$\mathrm{M} = a \cdot \underbrace{X \cdot X \cdot X \ldots X}_{n \text{ veces}}$$

su error relativo será:

$$\varepsilon_r = \frac{\Delta \mathrm{M}}{\mathrm{M}} = \underbrace{\frac{\Delta X}{X} + \frac{\Delta X}{X} + \ldots + \frac{\Delta X}{X}}_{n \text{ veces}}$$

luego

$$\varepsilon_r = \frac{\Delta \mathrm{M}}{\mathrm{M}} = n\frac{\Delta X}{X}$$

así que, el error absoluto será:

$$\Delta \mathrm{M} = anX^{n-1}\Delta X\,.$$

3.7.3. Propagación de errores en casos generales

En el caso en que la magnitud a determinar dependa de más de dos magnitudes medidas directamente y relacionadas a través de diferentes operaciones matemáticas, el cálculo del error absoluto y del relativo se puede realizar por uno de los métodos siguientes:

Método del binomio

Consideremos un caso en que la expresión que relaciona la magnitud M con las magnitudes X, Y, Z y T sea del tipo:

$$\mathrm{M} = \frac{X^a Y^b}{Z^c T^d} = X^a Y^b Z^{-c} T^{-d}$$

Para la obtención del error en M, supongamos que el experimento sea tan desafortunado que todos los errores influyan en el resultado en la misma dirección. En este caso el máximo error posible en M vendrá dado por:

$$\mathrm{M} \pm \Delta \mathrm{M} = \frac{(X+\Delta X)^a (Y+\Delta Y)^b}{(Z-\Delta Z)^c (T-\Delta T)^d} = (X+\Delta X)^a (Y+\Delta Y)(Z-\Delta Z)^{-c}(T-\Delta T)^{-d}$$

Esto sucederá si los valores de X y Y son grandes, mientras que los de Z y T son pequeños. La expresión anterior puede ser escrita en la forma siguiente:

$$\mathrm{M}\left(1+\frac{\Delta \mathrm{M}}{\mathrm{M}}\right) = X^a Y^b Z^{-c} T^{-d}\left(1+\frac{\Delta X}{X}\right)^a \left(1+\frac{\Delta Y}{Y}\right)^b \left(1-\frac{\Delta Z}{Z}\right)^{-c} \left(1-\frac{\Delta T}{T}\right)^{-d}$$

luego,

$$\left(1+\frac{\Delta \mathrm{M}}{\mathrm{M}}\right) = \left(1+\frac{\Delta X}{X}\right)^a \left(1+\frac{\Delta Y}{Y}\right)^b \left(1-\frac{\Delta Z}{Z}\right)^{-c} \left(1-\frac{\Delta T}{T}\right)^{-d}$$

Si suponemos que los errores absolutos son pequeños comparados con las magnitudes medidas, los términos, $\frac{\Delta X}{X}$, $\frac{\Delta Y}{Y}$, $\frac{\Delta Z}{Z}$ y $\frac{\Delta T}{T}$ son aún más pequeños, por consiguiente al desarrollar cada uno de los binomios de Newton y despreciar los términos elevados al cuadrado o de potencias mayores, lo que queda es:

$$\left(1+\frac{\Delta \mathrm{M}}{\mathrm{M}}\right) \simeq \left(1+a\frac{\Delta X}{X}\right)\left(1+b\frac{\Delta Y}{Y}\right)\left(1+c\frac{\Delta Z}{Z}\right)\left(1+d\frac{\Delta T}{T}\right)$$

Efectuando las multiplicaciones y despreciando los productos de los términos pequeños, se tiene:

$$\varepsilon_r = \frac{\Delta \mathrm{M}}{\mathrm{M}} = a\frac{\Delta X}{X} + b\frac{\Delta Y}{Y} + c\frac{\Delta Z}{Z} + d\frac{\Delta T}{T} \tag{3.19}$$

es decir, el error relativo de M corresponde a la suma de los errores relativos de cada magnitud multiplicados por sus exponentes respectivos.

Si se multiplica por 100 la expresión anterior, se obtiene el error porcentual en M como función de los porcentajes de error que introducen cada una de las magnitudes:

$$\varepsilon_{\%} = a\varepsilon_{X\,\%} + b\varepsilon_{Y\,\%} + c\varepsilon_{Z\,\%} + d\varepsilon_{T\,\%}\,.$$

Ejemplo 4. Supongamos que una magnitud M está relacionada con las magnitudes: X_1, X_2, Y, Z, T_1 y T_2, mediante una expresión del tipo:

$$\mathrm{M} = \frac{(X_1 + X_2)\,Y^2}{Z\,(T_1 - T_2)^3}\,. \tag{3.20}$$

Para utilizar la expresión (3.19), se debe llevar la expresión M a una forma que contenga sólo productos y/o cocientes de magnitudes. Para lograr esto, se realiza el siguiente cambio de variables,

$$\begin{aligned} X &= X_1 + X_2 \\ T &= T_1 - T_2 \end{aligned} \tag{3.21}$$

Como X y T son el resultado de una suma y una resta, respectivamente, se sabe que el error absoluto de cada una de ellas viene dado por:

$$\begin{aligned} \Delta X &= \Delta X_1 + \Delta X_2 \\ \Delta T &= \Delta T_1 + \Delta T_2 \end{aligned}$$

Usando (3.21) M se puede expresar como:

$$\mathrm{M} = \frac{XY^2}{ZT^3}$$

De acuerdo a la expresión (3.19), el error relativo de M será:

$$\varepsilon_r = \frac{\Delta \mathrm{M}}{\mathrm{M}} = \frac{\Delta X}{X} + 2\frac{\Delta Y}{Y} + \frac{\Delta Z}{Z} + 3\frac{\Delta T}{T}\,.$$

Ejemplo 5. Para calcular los errores en el volumen del cilindro estudiado anteriormente, (Ejemplo 1) se hará uso de la expresión (3.19).

Con los valores medidos de $h = (10,2 \pm 0,1)$ cm y $d = (1,784 \pm 0,005)$ cm, el volumen del cilindro estará dado por:

$$V = \pi r^2 h = \frac{\pi d^2 h}{4} = \frac{\pi (1,784)^2 (10,2)}{4} = 25,5 \text{ cm}^3\,.$$

El error relativo será:

$$\varepsilon_r = \frac{\Delta V}{V} = 2\frac{\Delta D}{D} + \frac{\Delta h}{h} = 2 \cdot (0,0028) + 0,01 = 0,016\,.$$

El error porcentual,

$$\varepsilon_{\%} = \varepsilon_r \cdot 100 = 0,016 \cdot 100 = 1,6 \simeq 2\,\%\,.$$

El error absoluto,

$$\Delta V = 0,016 \cdot V = 0,4 \text{ cm}^3\,,$$

luego el valor calculado de V se escribe de la siguiente manera:

$$V = (25,5 \pm 0,4)\text{cm}^3$$

Nota: El error absoluto de la magnitud física se escribío con una cifra significativa. Esto condiciona el número de cifras significativa del valor de la magnitud.

Método de las derivadas parciales

Existe un método alternativo al dado anteriormente para la propagación de errores, el cual hace uso de las derivadas y que explicaremos a continuación.

Sea una magnitud M, la cual es función de las magnitudes independientes $X, Y, Z, T, \ldots$

$$\mathrm{M} = \mathrm{M}(X, Y, Z, T, \ldots)$$

El error en M es producido por cada uno de los errores de las magnitudes $X, Y, Z, T, \ldots$, independientemente uno de los otros. A estos errores se les llama errores parciales y la suma de ellos, considerando el caso más desfavorable, dará el error en M.

El error absoluto en M estará dado por:

$$\Delta\mathrm{M} = \left|\frac{\partial\mathrm{M}}{\partial X}\right| |\Delta X| + \left|\frac{\partial\mathrm{M}}{\partial Y}\right| |\Delta Y| + \left|\frac{\partial\mathrm{M}}{\partial Z}\right| |\Delta Z| + \left|\frac{\partial\mathrm{M}}{\partial T}\right| |\Delta T| + \ldots \tag{3.22}$$

donde los términos $\frac{\partial\mathrm{M}}{\partial X}, \frac{\partial\mathrm{M}}{\partial Y}, \frac{\partial\mathrm{M}}{\partial Z}, \frac{\partial\mathrm{M}}{\partial T}, \ldots$ son las derivadas de M con respecto a $X, Y, Z, T, \ldots$, respectivamente.

Estas se determinan derivando la función M con respecto a cada una de las variables en forma separada y considerando constantes las demás, es decir, al derivar M con respecto a X se considera a las variables $Y, Z, T, \ldots$ como constantes, y así sucesivamente cuando se deriva respecto a Y, ó a $Z, \ldots$

El error relativo se determina como el cociente entre el error absoluto y la función misma.

$$\varepsilon_{\mathrm{r}} = \frac{\Delta\mathrm{M}}{\mathrm{M}} = \frac{1}{\mathrm{M}(X, Y, Z, T, \ldots)} \left\{ \left|\frac{\partial\mathrm{M}}{\partial X}\right| |\Delta X| + \left|\frac{\partial\mathrm{M}}{\partial Y}\right| |\Delta Y| + \left|\frac{\partial\mathrm{M}}{\partial Z}\right| |\Delta Z| + \left|\frac{\partial\mathrm{M}}{\partial T}\right| |\Delta T| + \ldots \right\} \tag{3.23}$$

Ejemplo 6. Obtendremos el error relativo para la expresión (3.20) del ejemplo 3, utilizando el método de las derivadas parciales:

$$\mathrm{M} = \frac{(X_1 + X_2)\, Y^2}{Z\,(T_1 - T_2)^3}$$

Las derivadas parciales de M respecto a cada una de las variables son las siguientes:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\mathrm{M}}{\partial X_1} &= \frac{Y^2}{Z\,(T_1 - T_2)^3}, \quad \frac{\partial\mathrm{M}}{\partial X_2} = \frac{Y^2}{Z\,(T_1 - T_2)^3}, \quad \frac{\partial\mathrm{M}}{\partial Y} = \frac{2Y\,(X_1 + X_2)}{Z\,(T_1 - T_2)^3} \\
\frac{\partial\mathrm{M}}{\partial Z} &= -\frac{(X_1 + X_2)\, Y^2}{Z^2\,(T_1 - T_2)^3}, \quad \frac{\partial\mathrm{M}}{\partial T_1} = -\frac{3\,(X_1 + X_2)\, Y^2}{Z\,(T_1 - T_2)^4}, \quad \frac{\partial\mathrm{M}}{\partial T_2} = \frac{3\,(X_1 + X_2)\, Y^2}{Z\,(T_1 - T_2)^4}
\end{aligned}$$

El error absoluto será:

$$\Delta\mathrm{M} = \left|\frac{\partial\mathrm{M}}{\partial X_1}\right| |\Delta X_1| + \left|\frac{\partial\mathrm{M}}{\partial X_2}\right| |\Delta X_2| + \left|\frac{\partial\mathrm{M}}{\partial Y}\right| |\Delta Y| + \left|\frac{\partial\mathrm{M}}{\partial Z}\right| |\Delta Z| + \left|\frac{\partial\mathrm{M}}{\partial T_1}\right| |\Delta T_1| + \left|\frac{\partial\mathrm{M}}{\partial T_2}\right| |\Delta T_2| .$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\Delta\mathrm{M} = &\frac{Y^2}{Z\,(T_1 - T_2)^3}\Delta X_1 + \frac{Y^2}{Z\,(T_1 - T_2)^3}\Delta X_2 + \frac{2Y\,(X_1 + X_2)}{Z\,(T_1 - T_2)^3}\Delta Y \\
&+ \frac{(X_1 + X_2)\, Y^2}{Z^2\,(T_1 - T_2)^3}\Delta Z + \frac{3\,(X_1 + X_2)\, Y^2}{Z\,(T_1 - T_2)^4}\Delta T_1 + \frac{3\,(X_1 + X_2)\, Y^2}{Z\,(T_1 - T_2)^4}\Delta T_2
\end{aligned}$$

Simplificando:

$$\Delta \mathrm{M} = \frac{Y^2\left(\Delta X_1 + \Delta X_2\right)}{Z\left(T_1 - T_2\right)^3} + \frac{Y\left(X_1 + X_2\right)}{Z\left(T_1 - T_2\right)^3}\left[2\Delta Y + \frac{Y\Delta Z}{Z}\right] + \frac{3\left(X_1 + X_2\right)Y^2\left(\Delta T_1 + \Delta T_2\right)}{Z\left(T_1 - T_2\right)^4}$$

El error relativo:

$$\varepsilon_{\mathrm{r}} = \frac{\Delta \mathrm{M}}{\mathrm{M}} = \frac{Z\left(T_1 - T_2\right)^3}{\left(X_1 + X_2\right)Y^2}\left\{\frac{Y^2\left(\Delta X_1 + \Delta X_2\right)}{Z\left(T_1 - T_2\right)^3} + \frac{Y\left(X_1 + X_2\right)}{Z\left(T_1 - T_2\right)^3}\left[2\Delta Y + \frac{Y\Delta Z}{Z}\right] + \frac{3\left(X_1 + X_2\right)Y^2\left(\Delta T_1 + \Delta T_2\right)}{Z\left(T_1 - T_2\right)^4}\right\}$$

simplificamos nuevamente y finalmente obtenemos

$$\frac{\Delta \mathrm{M}}{\mathrm{M}} = \frac{\Delta X_1 + \Delta X_2}{X_1 + X_2} + 2\frac{\Delta Y}{Y} + \frac{\Delta Z}{Z} + 3\frac{\Delta T_1 + \Delta T_2}{T_1 - T_2} \tag{3.24}$$

Vemos que la expresión anterior para el error relativo coincide con la obtenida por el método del binomio del ejemplo 4. Se debe notar que el método de las derivadas es más laborioso y necesita del conocimiento de las derivadas parciales. Sin embargo, este último método es aplicable a cualquier expresión, mientras que el método del binomio sólo es valido para expresiones que contengan solamente variables independientes.

Para ilustrar esto último obtengamos el error relativo para la expresión:

$$\mathrm{M} = \frac{(a+z)^2}{(b+z)^2}$$

donde a y b son constantes exactas.

a) Método del binomio

Primero realizaremos el siguiente cambio de variables:

- $A = a + z \Rightarrow \Delta A = \Delta z$
- $B = b + z \Rightarrow \Delta B = \Delta z$

Note que las variables A y B son dependientes. Por lo tanto:

$$\mathrm{M} = \frac{A^2}{B^2}$$

para el error relativo se tendrá,

$$\frac{\Delta \mathrm{M}}{\mathrm{M}} = 2\frac{\Delta A}{A} + 2\frac{\Delta B}{B}$$

de aquí,

$$\frac{\Delta \mathrm{M}}{\mathrm{M}} = 2\frac{\Delta z}{a+z} + 2\frac{\Delta z}{b+z} = \frac{2a + 2b + 4z}{(a+z)(b+z)}\Delta z$$

b) Método de las derivadas parciales

$$\Delta \mathrm{M} = \left|\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial z}\right| |\Delta z|$$

donde

$$\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial z} = \frac{2(a+z)(b+z) - 2(a+z)^2}{(b+z)^3}$$

Por lo tanto

$$\frac{\Delta \mathrm{M}}{\mathrm{M}} = \frac{(b+z)^2}{(a+z)^2}\left\{\frac{2(a+z)(b+z) - 2(a+z)^2}{(b+z)^3}\right\}\Delta z = \frac{2(b-a)}{(a+z)(b+z)}\Delta z$$

Como se puede ver, se ha obtenido dos expresiones diferentes para el error en M; sin embargo, sólo una de ellas es correcta. Analicemos el caso particular en que $a = b$ entonces se tendrá que M=1, eso implica que el error relativo de M debe ser cero.

Lo anterior muestra que el método de las derivadas parciales da el resultado correcto para el error en M.

Nota: si en las ecuaciones aparecen números irracionales: π, e, γ... es necesario tomar en cuenta un número de cifras significativas que no afecte a la magnitud del error absoluto de la cantidad que queremos determinar. Como lo más probable es que estos valores se obtengan de un ordenador o calculadora entonces podemos tomar todos los decimales para que el error sea pequeño y pueda despreciarse frente al resto de las magnitudes que estemos considerando.

3.8. Ejercicios

1. La expresión para el cálculo del módulo de rigidez (G) de una varilla cilíndrica viene dada por:

$$G = \frac{2Lk}{\pi R^4}$$

Donde L es la longitud de la varilla, R su radio exterior y k la constante recuperadora.

En una experiencia de laboratorio se obtuvieron los siguientes datos:

$$L = (104,2 \pm 0,1)\text{cm}$$
$$R = (0,03005 \pm 0,00003)\text{cm}$$
$$k = (9,92 \pm 0,02) \times 10^3\text{dyn cm}$$

   a) Calcule el error relativo y el error porcentual en G.
   b) Calcule el valor de G.
   c) Exprese el valor de G con el respectivo error absoluto.

2. Las dimensiones de una plancha metálica rectangular se midieron en el laboratorio y los resultados se registraron como se indica a continuación:

Largo: $L = (53,154 \pm 0,3)$ cm

Ancho: $A = (12,5$ cm$)$ con 4 % de error

Suponiendo que los errores están indicados correctamente.

   a) Escriba las dimensiones de la plancha metálica en forma correcta, omitiendo cualquier cifra no significativa.
   b) Encuentre el perímetro y el área de la plancha con sus respectivos errores, expresados tanto en forma absoluta como en forma porcentual.

3. Dada la ecuación:

$$\mathrm{M} = 4\pi^2 \frac{\theta}{T^2 - T_0^2}$$

encuentre la expresión para el error relativo de M.

Datos:

$$\theta \pm \Delta\theta$$
$$T \pm \Delta T$$
$$T_0 \pm \Delta T_0.$$

4. Escriba correctamente las expresiones de los siguientes resultados.

   a) $9,5 \pm 0,081$.
   b) $2,317 \pm 0,762$.
   c) $62,01 \pm 0,035$.
   d) $105 \times 10^2 \pm 1 \times 10^3$.
   e) $3,452 \pm 0,09$.
   f) $95 \times 10^{-3} \pm 1 \times 10^{-4}$.

Capítulo 4

Representación y análisis gráfico

4.1. Introducción

Para el científico, analista de datos o persona con la responsabilidad de escribir documentos técnicos es importante que desarrolle competencias en las técnicas de visualización de datos. Las presentaciones con gráficos deben ser claras, atractivas y sobre todo convincentes, muchas veces deben lograr traducir cantidades numéricas a ideas que permitan hacer extrapolaciones y proyecciones a situaciones futuras. Las técnicas de visualización de datos termina siendo algo que se aprende con el oficio, con el día a día del trabajo de investigación y pocas veces se enseña en las universidades

El propósito de este capítulo es hacer una pequeña introducción sobre visualización de datos y como usarlos en el análisis de los datos experimentales.

4.2. Tabulación de datos y resultados

La Física es una ciencia experimental y cuantitativa, depende del trabajo de laboratorio donde se tendrá la necesidad de medir magnitudes y procesar datos.

Es una norma básica que dichos datos deben ser presentados en forma clara y ordenada, y la mejor forma para lograr esto es ubicar los datos en tablas, donde se destinen diferentes columnas a cada conjunto de datos. Conocer en qué consiste la tabulación de los datos y cómo hacerlo correctamente puede resultar de gran ayuda a la hora de realizar las diferentes etapas de procesamiento y visualización, facilita considerablemente la comprensión, el análisis y la interpretación de los datos para llevar a cabo comparaciones y obtener conclusiones válidas.

Las ventajas de este proceso de tabulación son las siguientes:

1. Cumplir con condiciones de claridad y orden.

2. Facilitar la lectura y la comprensión de los datos.

3. Reducir las posibilidades de equivocación al tomar valores para calcular.

Las Tablas deben ser lo más autocontenidas posibles, sus títulos y leyendas deben ser suficiente para explicar su contenido. Las leyendas de tablas y figuras deben ser más que una simple descripción. Deben generar una reflexión una conclusión al presentar la tabla o figura. En textos científicos las tablas deben ser referidas desde el texto (ver Tabla 4.1). Si no se hace referencia a una tabla en particular, ésta se considera inútil para el artículo y debe ser eliminada.

La confección de tablas de valores no se limita necesariamente a los datos que se recogen directamente en el trabajo experimental, sino que puede extenderse a los resultados de efectuar operaciones con dichos datos. Además en dichas tablas, deben disponerse columnas para colocar en ellas el error con el cual dichas magnitudes han sido medidas, siempre que este sea diferente en cada medición.

Las tablas en las que se recopilan y se organizan los datos deben contar con las siguientes partes:

- Título de la tabla: debe ser breve, conciso y claro.
- Contenido de la tabla: deben aparecer las magnitudes con sus respectivos nombres y unidades, preferiblemente en el mismo sistema de unidades.
- Número de la tabla.
- Notas explicativas: hacer referencia a la fuente de los datos, explicación de las abreviaturas, consideraciones a tener en cuenta, etc.

Como ejemplo de lo dicho anteriormente se presenta una tabla de valores obtenida en una experiencia de movimiento rectilíneo uniformemente acelerado, ver tabla 4.1

Participante	Velocidad (ms^{-1})	Distancia (m)
1	10.53	2.38
2	11.16	1.83
3	9.54	2.04
4	15.77	NA[a]
5	12.82	1.74
Total	59.82	7.99
Promedio	11.964	1.997

Cuadro 4.1: Velocidad de carrera sobre 200 m y distancia de salto de longitud de un grupo de personas seleccionadas al azar.

[a] El participante 4 no pudo realizar el salto de longitud por razones médicas

4.3. Representaciones gráficas

La representación de gráficas o la visualización de datos es una técnica artística que permite transmitir el conocimiento científico. Con la visualización de datos se debe transmitir de manera precisa la información científica relevante sin distorsionar su contenido. No debe contener información falsa ni errónea. Es necesario que la visualización sea agradable desde el punto de vista estético, si las figuras se muestran con colores poco armónicos, elementos visuales engorrosos traerá como consecuencia que el espectador no pueda interpretar la figura de manera correcta.

En muchos casos, una acertada visualización de datos permite determinar valores que no han sido obtenidos experimentalmente, como son:

1. Valores entre puntos experimentales (proceso de Interpolación).
2. Valores fuera del intervalo experimental (proceso de Extrapolación).
3. Valores de los parámetros constantes de la función matemática usada.

En la figura 4.1[1] podemos ver algunos ejemplos de cómo hacer una buena visualización y otras como ejemplos de cómo no hacerla. Una figura que muestre problemas estéticos pero que cumple con su función de ser clara e informativa es una figura que podríamos llamar "fea". Una figura "mala" es aquella que es poco clara, confusa, complicada, engañosa, mientras que una figura "incorrecta" es aquella que presenta información errónea, presenta inconsistencias matemáticas que inevitablemente llevará a una interpretación equivocada de los datos.

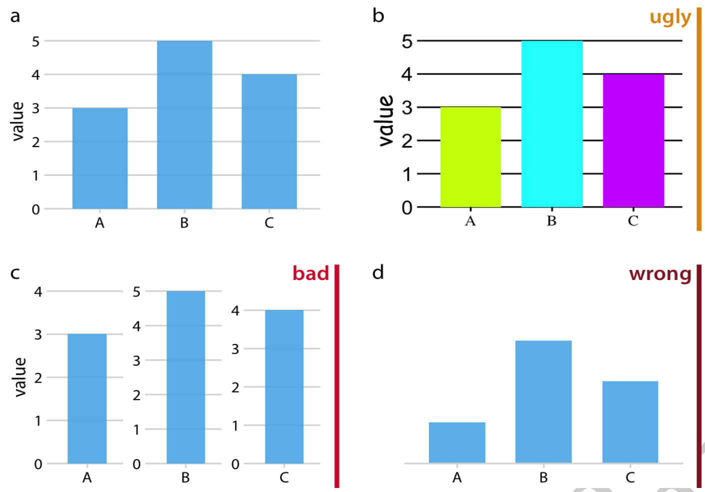


Figura 4.1: En (a) se muestra un diagrama de barras para tres valores: A = 3, B = 5 y C = 4; es una representación sencilla y entendible. (b) es una versión fea de la parte (a), aunque el gráfico es técnicamente correcto, es estéticamente desagradable, con colores innecesarios, una cuadrícula de fondo absurda y un texto con tipos de letra y tamaños diferentes. (c) es una mala versión de la parte (a), en el eje y cada barra tiene su propia escala y además están desalineadas, por lo tanto es una gráfica engañosa. (d) es una versión incorrecta de la parte (a), como el eje y no pose escalas no es posible determinar sus valores numéricos.

Cuando se grafican valores experimentales o magnitudes calculadas se debe considerar:

4.3.1. Ejes de coordenadas

En muchas casos, cuando se quiere visualizar datos se necesita definir escalas que permitan posicionar los datos en un gráfico. En gráficos 2D se necesitan dos números para especificar un punto de manera unívoca, es decir, dos escalas de posición. Estas dos escalas suelen ser los ejes x (eje horizontal o eje de las abscisas) y el eje y (eje vertical o eje de las ordenadas), es lo generalmente se denomina el sistema de coordenadas.

1. En los ejes deben aparecer claramente las magnitudes, símbolo o letra, que en ellos se representan y sus unidades de medida correspondientes

2. En los ejes sólo deben colocarse los valores más representativos de la escala escogida.

3. En general, es conveniente que el origen aparezca en el gráfico, pero no siempre es necesario que la intersección de los dos ejes corresponda al punto cero; en este caso las escalas pueden desplazarse cuando los datos experimentales están en un intervalo que así lo requiera.

4. La variable independiente, cuyo valor lo asigna a conveniencia el experimentador, se representa sobre el eje x horizontal y la variable que depende de ese valor asignado se coloca sobre el eje y vertical.

[1] Tomada de: https://clauswilke.com/dataviz/.

4.3.2. Selección de escalas

La escogencia de las escalas a utilizar es un problema si no se tiene cuidado al considerar factores como: el tamaño del conjunto de datos, las divisiones sobre cada eje, la relación entre los errores experimentales y los valore mínimos elegidos en las escalas.

Las escala no deben ser muy pequeña, ya que en este caso se pueden agrupar exageradamente los puntos en una región de la gráfica (ver figura 4.2). Tampoco deben elegirse escalas grandes que exageran la precisión.

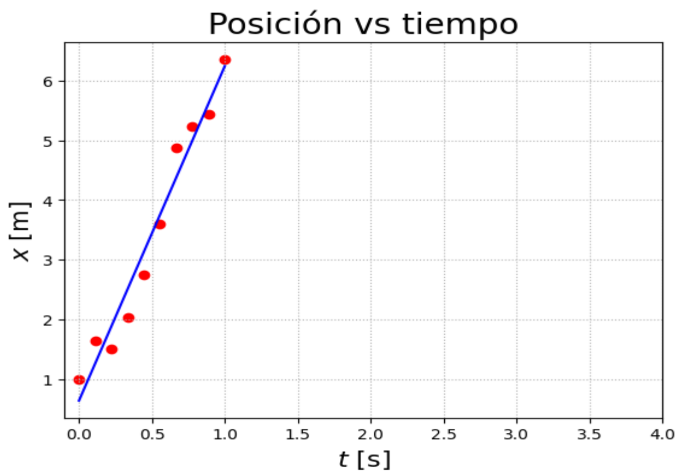


Figura 4.2: Muy mala selección de las escalas.

Una gráfica puede requerir tener dos ejes que representan dos unidades diferentes, por ejemplo Temperatura en °C vs Tiempo en s. Estirar o comprimir los ejes obedecerá a las razones que necesitemos resaltar, una gráfica alta y estrecha enfatiza el cambio a lo largo del eje y y una corta y ancha hace lo contrario. Lo ideal es elegir una relación de aspecto que garantice que las diferencias importantes de posición sean perceptibles.

Por otro lado, si los ejes x y y se miden en las mismas unidades, entonces las separaciones de la cuadrícula para los dos ejes deben ser iguales, de forma que la misma distancia a lo largo del eje x o y corresponda al mismo número de unidades de datos.

Los sistemas de coordenadas cartesianos son sistemas de coordenadas lineales y aunque suelen proporcionar una representación precisa de los datos, hay situaciones en las que se prefiere utilizar escalas no lineales. En una escala no lineal, a un espaciado uniforme en las unidades de datos le corresponde un espaciado desigual en la visualización o, contrariamente, a un espaciado uniforme en la visualización le corresponde un espaciado desigual en las unidades de datos.

La escala no lineal más utilizada es la escala logarítmica o escala logarítmica abreviada, estas escalas son lineales en la multiplicación, de forma que un paso unitario en la escala corresponde a una multiplicación con un valor fijo. Para crear una escala logarítmica, debemos realizar una transformación logarítmica de los valores de los datos y exponenciar los números que se muestran a lo largo de las líneas de la cuadrícula del eje.

4.3.3. Ubicación de los puntos

Los valores experimentales no deben ser graficadas sólo como un solo punto, se debe representar además el error absoluto con el cual se obtuvo dicho valor. Para ello se usan: cuadrados, rectángulos, barras, cruces, etc. (ver figura 4.3). Si la escala escogida no permite representar el error absoluto, los valores experimentales se deben representar con una equis o una cruz. Las barras de error suelen representarse a lo largo de las direcciones x y y en un gráfico de dispersión.

En las figuras 2D sencillas, las barras de error tienen una ventaja importante sobre las representaciones más complejas de la incertidumbre ya que se pueden combinar con muchos otros tipos de gráficos. Por lo tanto, las barras de error resultan ser la representaciones más sencillas para mostrar cantidades con incertidumbre sobre todo en las gráficas de barras.

Cada conjunto debe ser representado por un símbolo diferente, por ejemplo: $\times, \Delta, \odot, +$ e identificar luego cada curva. La recta o curva que siguen los puntos se debe trazar de un modo que la función sea lo más representativa posible del comportamiento de las magnitudes que caracterizan el fenómeno en estudio.

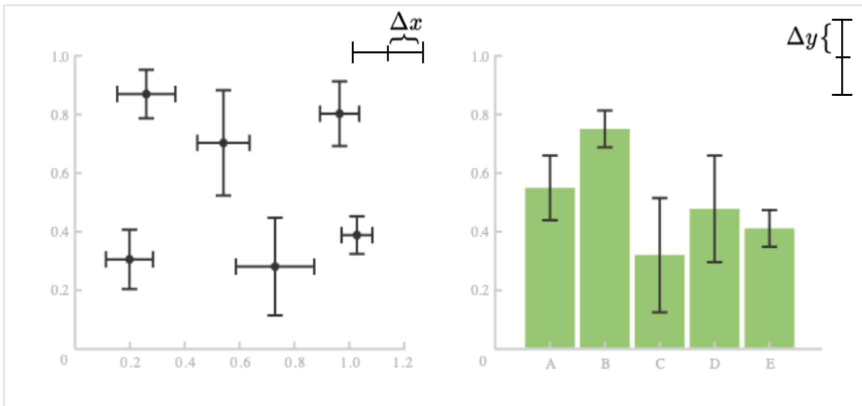


Figura 4.3: Representación de puntos experimentales con barras de error.

4.4. Trazado de una recta

En algunos experimentos las magnitudes físicas pueden variar linealmente, como es el caso de la deformación y la fuerza en la ley de Hooke ($F = -kx$). Al realizar el experimento y graficar resulta un conjunto de puntos que corresponde a un comportamiento lineal.

El experimentador tiene que buscar ahora la mejor estrategia para trazar la mejor recta que pasa por entre los puntos experimentales.

Los métodos estadísticos demuestran que, siempre que la dispersión de los puntos experimentales se deba a los errores casuales de medición, la mejor recta pasará por el centroide de los puntos experimentales, que es el punto con las coordenadas $(\bar{x}, \bar{y})$, en donde $\bar{x}$ y $\bar{y}$ son los valores medios de las coordenadas x y y respectivamente.

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \\ \bar{y} &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i \end{aligned} \tag{4.1}$$

Para ajustar la recta al conjunto de puntos experimentales, se emplearán los siguientes métodos:

4.4.1. Método gráfico

Este método es un método artesanal, y consiste en buscar sobre la gráfica la mejor recta que pase por el centroide y la mayoría de los puntos experimentales. Aquellos puntos que queden por fuera de esta recta deben estar distribuidos en lo posible con igual peso a ambos lados de la curva.

Como sabemos, la ecuación de una recta es:

$$y = mx + b$$

donde:

- m es la pendiente de la recta, calculada a partir de las coordenadas de dos puntos sobre la recta, necesariamente no tienen que corresponder a valores experimentales.

$$m = \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)} \frac{\text{unidad de } y}{\text{unidad de } x}$$

- b es el corte de la recta con el eje de las ordenadas en $x = 0$.

El error absoluto para m y b viene dado por la lectura de la posición de los puntos sobre el gráfico, es decir en función de la apreciación de la escala en el eje respectivo.

4.4.2. Método de los mínimos cuadrados

El método de los mínimos cuadrados es uno de los métodos estadísticos más usados para determinar la recta que mejor represente la tendencia de un conjunto de puntos experimentales.

Si la dispersión de los puntos experimentales es debida solo a los errores casuales en las mediciones, la mejor recta será aquella para la cual la suma de los cuadrados de las distancias $(y_i - y_0)$ sea un mínimo, ver figura 4.4. Es por esto que, a este método se le llama método de los mínimos cuadrados.

Consideremos una relación lineal entre dos magnitudes físicas y y x de la forma:

$$y = mx + b$$

Donde y es la variable dependiente y x es la variable independiente, en nuestro caso la magnitud controlada por el experimentador. Como ya se ha dicho anteriormente, los valores de esas magnitudes tendrán sus correspondientes errores, determinados por los métodos ya señalados.

La desviación de un valor cualquiera y_i determinado experimentalmente con respecto a su valor y_0 en la recta, será:

$$\Delta y_i = y_i - y_0 = y_i - (b + mx_i) \tag{4.2}$$

Ahora se puede enunciar el principio básico de este método, el cual dice que:

La mejor recta que puede ser trazada entre esos puntos, es aquella para la cual la suma de los cuadrados de las desviaciones Δy_i de los datos experimentales, con respecto a esa recta, es mínima.

$$\sum_{i=1}^{n} (\Delta y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} [y_i - b - mx_i]^2$$

donde n es el número de pares de valores de y y x.

Ya que la condición exigida es la de minimizar la suma anterior, entonces los parámetros m y b deben ajustarse para cumplir con esta condición. Ello se logra calculando las derivadas parciales de la suma con respecto a m y con respecto a b, e igualándolas a cero.

$$\frac{\partial \left[\sum (\Delta y_i)^2\right]}{\partial b} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial (y_i - b - mx_i)^2}{\partial b} = \sum_{i=1}^{n} -2(y_i - b - mx_i) = 0$$

$$\frac{\partial \left[\sum (\Delta y_i)^2\right]}{\partial m} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial (y_i - b - mx_i)^2}{\partial m} = \sum_{i=1}^{n} -2x_i(y_i - b - mx_i) = 0$$

Por lo tanto, se debe resolver el sistema

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} y_i - \sum_{i=1}^{n} b - \sum_{i=1}^{n} m x_i = 0 \qquad & \Rightarrow nb + m \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i \\
\sum_{i=1}^{n} y_i x_i - \sum_{i=1}^{n} b x_i - \sum_{i=1}^{n} m x_i^2 = 0 \quad & \Rightarrow b \sum_{i=1}^{n} x_i + m \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i
\end{aligned}$$

para m y b.

Utilizando la regla de Cramer

$$\Delta = \begin{vmatrix} n & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 \end{vmatrix} = n \sum x_i^2 - \left(\sum x_i \right)^2 ,$$

$$b = \frac{\begin{vmatrix} \sum y_i & \sum x_i \\ \sum x_i y_i & \sum x_i^2 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$$

$$m = \frac{\begin{vmatrix} n & \sum y_i \\ \sum x_i & \sum x_i y_i \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$$

Por lo tanto:

$$b \;=\; \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 \sum\limits_{i=1}^{n} y_i - \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i}{n \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i \right)^2} \tag{4.3}$$

$$m \;=\; \frac{n \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \sum\limits_{i=1}^{n} y_i}{n \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i \right)^2} \tag{4.4}$$

De esta manera obtenemos la recta $f(x) = mx + b$ que mejor de aproxima a los puntos.

Nótese que los términos $\sum x_i^2$ y $(\sum x_i)^2$ no son lo mismo. Idéntica observación se debe hacer para los términos $\sum (x_i y_i)$ y $\sum x_i \sum y_i$.

Es recomendable construir una tabla como 4.2, para así ordenar la información y facilitar los cálculos. Las cuatro sumas en la última línea, son los valores necesarios para calcular m y b. Los valores de m y b que se obtengan por el método de los mínimos cuadrados, deberían ser muy próximos a los obtenidos directamente utilizando el método gráfico.

Actualmente es casi de rutina utilizar alguna herramienta computacional que permite hacer los cálculos necesarios y los gráficos para el ajuste de la recta. Aunque el uso de este método no nos obliga a hacer el gráfico de la recta, por razones pedagógicas, es conveniente hacerlo para así observar más claramente las desviaciones de los puntos experimentales con respecto a la recta calculada.

Una vez obtenido los valores de m y b, es necesario calcular sus errores correspondientes Δm y Δb. Esto lo podemos hacer calculando las desviaciones estándar de la pendiente y la ordenada al origen, calculadas a partir de la distribución de diferencias Δy_i, ecuación (4.2), respecto de la mejor línea de ajuste. Sea S_y la desviación estándar de y respecto a la línea recta obtenida por

$y_i[\,]$	$x_i[\,]$	$x_i^2[\,]$	$x_iy_i[\,]$
y_1	x_1	x_1^2	x_1y_1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
y_n	x_n	x_n^2	x_ny_n
$\sum y_i$	$\sum x_i$	$\sum x_i^2$	$\sum x_iy_i$

Cuadro 4.2: Tabla para facilitar el uso del método de mínimos cuadrados

mínimos cuadrados:

$$S_y = \left[\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - b - mx_i)}{n-2}\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{4.5}$$

Para calcular estos valores de Δm y Δb se utilizan las siguientes expresiones:

$$\Delta m = \left[\frac{n}{n\sum_{i=1}^{n}(x_i)^2 - \left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2}\right]^{\frac{1}{2}} S_y \tag{4.6}$$

$$\Delta b = \left[\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i)^2}{n\sum_{i=1}^{n}(x_i)^2 - \left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2}\right]^{\frac{1}{2}} S_y \tag{4.7}$$

La cantidad S_y representa la llamada desviación estándar de y respecto a la línea recta obtenida.

Finalmente para calcular S_y se puede utilizar como ayuda la tabla 4.3

$x_i[\,]$	$y_i[\,]$	$y_i - mx_i - b$	$(y_i - mx_i - b)^2$
x_1	y_1	$y_1 - mx_1 - b$	$(y_1 - mx_1 - b)^2$
x_2	y_2	$y_2 - mx_2 - b$	$(y_2 - mx_2 - b)^2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_n	y_n	$y_n - mx_n - b$	$(y_n - mx_n - b)^2$
			$\sum_{i=1}^{n}$

Cuadro 4.3: Tabla para facilitar los cálculos de S_y.

Ejemplo 7. En un experimento sobre cinemática un grupo de estudiantes mide los tiempos con los que se desplaza un móvil en un riel de aire. Lis tiempos son medidos en segundos usando un cronómetro de sensibilidad $S = 0,01$ s. Un instrumento de mejor precisión mide las velocidades con las que se desplaza el móvil, este instrumento tiene una sensibilidad de $0,001$ m/s. Los datos se muestran en la tabla 4.4.

Al graficar los datos anteriores se obtiene la figura

$t_i \pm 0,01$(s)	$v_i \pm 0,01$(m/s)
$0,00$	1.00
$0,10$	1.64
$0,20$	1.51
$0,30$	2.03
$0,40$	2.75
$0,50$	3.59
$0,60$	4.87
$0,70$	5.23
$0,80$	5.44
$1,00$	6.37

Cuadro 4.4: Mediciones de la velocidad de un cuerpo en función del tiempo

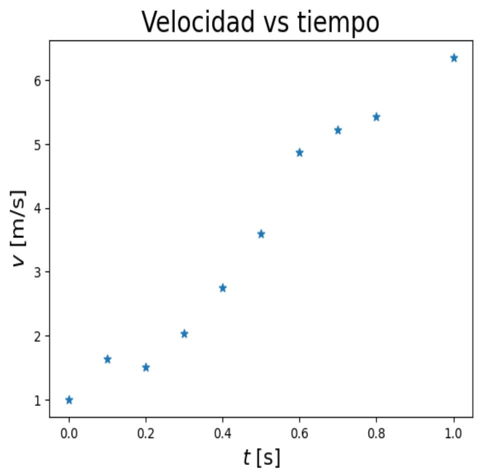


Figura 4.4: Gráfico de los datos v vs t de la tabla 4.4.

Es recomendable calcular las siguientes sumas:

n	$\sum_{i=1}^{n} t_i$	$\sum_{i=1}^{n} v_i$	$\sum_{i=1}^{n} t_i^2$	$\sum_{i=1}^{n} t_i v_i$
10	4,60	34,43	3,04	21,3

$$\Delta = n\sum_{i=1}^{n} t_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} t_i\right)^2 = 10(3{,}04) - (4{,}60)^2 = 9{,}24 \text{ s}^2$$

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{n} t_i^2 \sum_{i=1}^{n} v_i - \sum_{i=1}^{n} t_i \sum_{i=1}^{n} t_i v_i}{\Delta} = \frac{(3{,}04)(34{,}43) - (4{,}60)(21{,}3)}{9{,}24} = 0{,}724 \text{ m/s}$$

$$m = \frac{n\sum_{i=1}^{n} t_i v_i - \sum_{i=1}^{n} t_i \sum_{i=1}^{n} v_i}{\Delta} = \frac{10(21{,}3) - (4{,}60)(34{,}43)}{9{,}24} = 5{,}91 \text{ m/s}^2$$

Procedemos a calcular los errores

n	$\sum_{i=1}^{n} (v_i - b - mt_i)$
10	6,63

La desviación estándar de y:

$$S_y = \left[\frac{\sum_{i=1}^{n} (v_i - b - mt_i)^2}{n-2} \right]^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{6{,}63}{8} \right)^{\frac{1}{2}} = 0{,}91\,.$$

y los errores

$$\Delta m = \left[\frac{n}{\Delta} \right]^{\frac{1}{2}} S_y = \left[\frac{10}{9{,}24} \right]^{\frac{1}{2}} (0{,}91) = 0{,}95$$

$$\Delta b = \left[\frac{\sum_{i=1}^{n} (t_i)^2}{\Delta} \right]^{\frac{1}{2}} S_y = \left[\frac{3{,}04}{9{,}24} \right]^{\frac{1}{2}} (0{,}91) = 0{,}52$$

Por lo tanto nuestro resultado será:

$$v = mt + b = 5{,}91t + 0{,}724 \text{ m/s}$$

donde $m = 5{,}91 \pm 0{,}95$ y $b = 0{,}72 \pm 0{,}52$.

En Python podemos hacer todos los casos anteriores, incluida la figura 4.4, pero primero debemos ingresar los datos

```
yn=  array([1.000, 1.64, 1.51, 2.03, 2.75, 3.59, 4.87, 5.23, 5.44, 6.37])
xn = array([0.00, 0.10, 0.20, 0.30, 0.40, 0.50, 0.60, 0.70, 0.80, 1.00])
```

La gráfica de la figura 4.4 se obtiene a partir de las siguientes lineas de código:

```
plt.scatter(xn, yn, marker='*')
plt.title(r'Velocidad vs tiempo', fontsize=20)
plt.xlabel(r'$t$ [s]', fontsize=16)
plt.ylabel(r'$v$ [m/s]', fontsize=16)
```

Para usar las ecuaciones (4.3)-(4.4) hagamos primero los siguientes cálculos intermedios

```
#Se obtiene el valor de n (numero de datos)
n=len(xn)
#Las sumatorias necesarias
Sum_x=sum(xn)
Sum_y=sum(yn)
Sum_xx=sum(xn**2)
Sum_xy=sum(xn*yn)
print(n,',', Sum_x, ',',Sum_y,',', Sum_xx,',', Sum_xy)
```

```
10 , 4.6 , 34.43 , 3.04 , 21.275
```

Y finalmente calculamos b y m

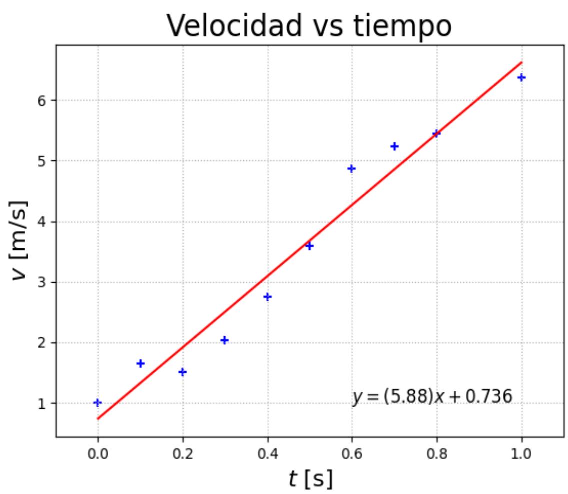
```
# Se escriben las ecuaciones para b y m
b=(Sum_xx*Sum_y-Sum_xy*Sum_x)/(n*Sum_xx-Sum_x**2)
m=(n*Sum_xy-Sum_x*Sum_y)/(n*Sum_xx-Sum_x**2)
print('m=',m, ',', 'b=',b)
```

```
m= 5.884415584415585 , b= 0.7361688311688325
```

Notemos lo diferente del valor de m con respecto al obtenido anteriormente, esta diferencia obviamente se debe a que anteriormente fuimos haciendo redondeos en la operaciones.

Veamos la recta y los datos

```
# La gráfica con los datos y la recta que mejor se ajusta
x=xn
y=m*x+b
#
plt.scatter(xn, yn, color='b',marker='+')
plt.grid(linestyle='dotted')
plt.plot(x, y, color='r')
plt.title(r'Velocidad vs tiempo', fontsize=20)
plt.xlabel(r'$t$ [s]', fontsize=16)
plt.ylabel(r'$v$ [m/s]', fontsize=16)
plt.xlim(-0.1, 1.1)
plt.text(0.6, 1.0, '$y=(5.88) x + 0.736$', fontsize=12)
plt.show()
```



El siguiente paso es calcular Δb y Δm

```
# Escribimos las sumatorias para calcular Sy
Sum_d= Sum_y-b-m*Sum_x
Sy=sqrt(Sum_d/(n-2))
print(n,',', Sum_d,',', Sy)
```

10 , 6.625519480519479 , 0.9100494135292516

Los respectivos errores se obtienen de las ecuaciones (4.6) y (4.7)

```
Dm= (n/((n*Sum_xx-Sum_x**2)))**(1/2)*Sy
Db= (Sum_xx/((n*Sum_xx-Sum_x**2)))**(1/2)*Sy
print('Dm=', Dm, ',', 'Db=',Db)
```

Dm= 0.9467362111662778 , Db= 0.5219943236034063

Por lo tanto:

$$v = 5{,}88t + 0{,}736 \text{ m/s}$$

donde: $m = 5{,}88 \pm 0{,}95$ y $b = 0{,}74 \pm 0{,}52$.

4.5. Análisis Gráfico de Funciones

En el análisis de un experimento generalmente se dispone de un conjunto de datos que de acuerdo a la teoría del fenómeno en estudio debe corresponder a una cierta ley física. ley que se expresa mediante una ecuación matemática. Este análisis se puede lograr graficando los valores experimentales que seguramente seguirán una cierta curva que corresponde a la tendencia de los puntos. La idea es comparar la forma de la curva obtenida por la mediciones con la predicha por la teoría. Si la comparación muestran la misma tendencia se concluye que esto es una comprobación experimental de la teoría considerada.

Como es más fácil obtener la información de un gráfico lineal, entonces se procede a elegir convenientemente las variables de modo de obtener una función lineal. A continuación se mostrará como algunas de las funciones más conocidas pueden ser llevadas a un gráfico lineal.

4.5.1. Función exponencial

Dada la función

$$y(x) = ka^{bx} \tag{4.8}$$

donde k, a y b son constantes. Si $b > 0$ la exponencial es creciente, mientras que si si $b < 0$, la exponencial es decreciente. Notemos que en $x = 0$, $y = k$, por lo que k resulta ser la ordenada al origen, es decir, la curva intercepta al eje de las ordenadas en el punto $(0, k)$.

Tomando logaritmos se tiene:

$$\log(y) = b\log(a)x + \log(k) \tag{4.9}$$

Recordemos que si por ejemplo $a = 10$ debemos tomar logaritmo en base diez.

Si hacemos una gráfica directamente $\log y$ en función de x se obtendrá una recta, pero para ello habría que calcular los logaritmos de y. Este cálculo puede ser evitado usando un papel especial llamado papel semi-logarítmico, en el cual uno de los ejes tiene las divisiones proporcionales a los logaritmos decimales y el otro es lineal.

En la escala logarítmica existen ciclos, donde un ciclo corresponde al conjunto de números entre dos potencias de diez (1 a 10; 10 a 100; 100 a 1000 ó 0,1 a 1; etc.).

El gráfico de la función $y = ka^{bx}$ es una recta porque la ecuación (4.9) puede ser escrita como

$$u = mx + v\,,$$

donde: $u = \log(y)$, $m = b\log(a)$ y $v = \log(k)$.

Para calcular la pendiente de la recta hay que considerar que se está trabajando con logaritmos:

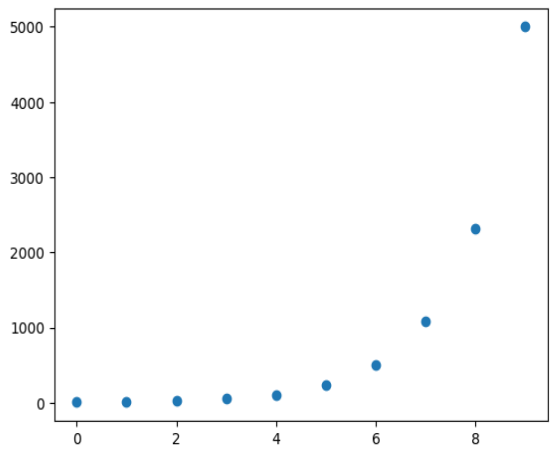
$$\text{pendiente} = m = \frac{u_2 - u_1}{x_2 - x_1} = \frac{\log y_2 - \log y_1}{x_2 - x_1} = b\log a$$

Es de hacer notar que al graficar en papel semi-logarítmico y llevar los valores en la escala logarítmica, se llevan directamente los números a la escala y no se calculan los logaritmos, pero al calcular la pendiente si es necesario hacerlo. Además si se está utilizando papel semi-logarítmico, k es el corte de la recta en $x = 0$.

En las siguientes lineas de código podemos interpretar lo expuesto anteriormente tomando la función exponencial siguiente:

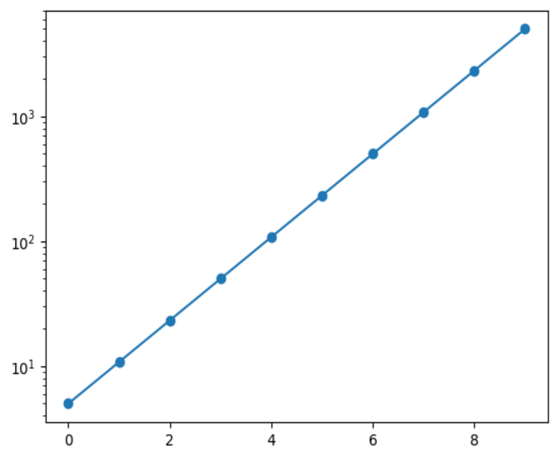
$$y = 5 \cdot 10^{\frac{x}{3}}$$

```
x = arange(10)
y = 5*10**(1/3*x)
plt.plot(x, y, 'o')
plt.show()
```



Ahora la función lineal en escala logarítmica

```
plt.plot(x, y, '-o')
plt.yscale("log")
plt.show()
```



4.5.2. Función potencial

Dada la función:

$$y = cx^m \tag{4.10}$$

donde m y c son constantes.

Tomando logaritmos decimales se tiene:

$$\log(y) = m \log(x) + \log(c) \tag{4.11}$$

Si se hace una gráfica directamente $\log y$ en función de $\log x$ se obtendrá una recta, pero habría que calcular los logaritmos decimales de y y de x. Esto se puede evitar usando un papel especial llamado papel logarítmico (comúnmente llamado $\log - \log$), el cual tiene ambas escalas proporcionales a los logaritmos decimales.

El gráfico de la función $y = cx^m$ es una recta porque la ecuación (4.11) se puede escribir como:

$$v = mu + k\,,$$

donde: $v = \log(y)$, $u = \log(x)$ y $k = \log(c)$

La pendiente m de la recta está dada por:

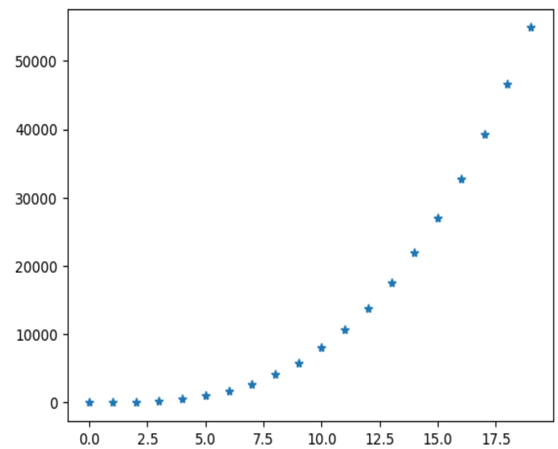
$$m = \frac{v_2 - v_1}{u_2 - u_1} = \frac{\log y_2 - \log y_1}{\log x_2 - \log x_1} = \frac{\log\left(\frac{y_2}{y_1}\right)}{\log\left(\frac{x_2}{x_1}\right)}$$

y c representa el corte de la recta en $x = 1(\log 1 = 0)$.

Consideremos la función potencial siguiente:

$$y = 8\ x^3$$

```
x = arange(20)
y = 8*x**(3)
plt.plot(x, y, '*')
plt.show()
```



Ahora la función lineal en escala log-log

```
plt.plot(x, y, '-*')
plt.xscale("log")
plt.yscale("log")
plt.show()
```