

Modelos estelares newtonianos con ecuaciones barotrópicas de estado

30 de octubre de 2019

1. Estrellas con ecuación de estado $P = P(\rho)$

Resolveremos el sistema de ecuaciones de estructura estelar newtoniano asumiendo una relación $P = P(\rho)$ un poco más realista. Para determinar las incógnitas $P(r)$, $P_{\perp}(r)$, $\rho(r)$ y $m(r)$ de la ecuación de equilibrio hidrostático permitiremos que las presiones principales sean desiguales, entonces la ecuación de equilibrio hidrostático es

$$\frac{dP(r)}{dr} = -\frac{d\Phi(r)}{dr}\rho(r) + \frac{2}{r}(P_{\perp}(r) - P(r)) = -\frac{Gm(r)}{r^2}\rho(r) + \frac{2}{r}(P_{\perp}(r) - P(r)) \quad (1)$$

donde P y P_{\perp} denotan las presiones radial y tangencial, respectivamente. Esta ecuación es el límite newtoniano de la ecuación generalizada Tolman-Oppenheimer-Volkoff para la materia anisótropa.

El potencial gravitacional $\Phi(r)$ satisface la ecuación de Poisson

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left[r^2 \frac{d\Phi}{dr} \right] = 4\pi G \rho. \quad (2)$$

Derivando con respecto a r la ecuación (1)

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{r^2}{\rho} \frac{dP}{dr} \right] = -G \frac{dm}{dr} + \frac{d}{dr} \left[\frac{2r}{\rho} \Delta \right] = -4\pi G r^2 \rho + \frac{d}{dr} \left[\frac{2r}{\rho} \Delta \right] \quad (3)$$

donde $\Delta = P_{\perp} - P$.

Si $P = P(\rho)$:

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{r^2}{\rho} \frac{dP}{dr} \frac{d\rho}{dr} \right] - \frac{d}{dr} \left[\frac{2r}{\rho} \Delta \right] = -4\pi G r^2 \rho \quad (4)$$

mientras que por otro lado

$$\frac{dP}{dr} = \frac{dP}{dr} \frac{d\rho}{dr} = -\frac{d\Phi}{dr} \rho + \frac{2\Delta}{r} \Rightarrow \frac{d\Phi}{dr} = -\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dr} \frac{d\rho}{dr} + \frac{2\Delta}{r\rho} \quad (5)$$

Existe un ansatz (Cosenza) que consiste en suponer que

$$\Delta = Cr \frac{d\Phi}{dr} \rho \quad (6)$$

Por lo que

$$\begin{aligned}\Delta &= Cr \left[-\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dr} \frac{d\rho}{dr} + \frac{2\Delta}{r\rho} \right] \rho = -Cr \frac{dP}{dr} \frac{d\rho}{dr} + 2C\Delta \\ \Delta &= -\frac{Cr}{1-2C} \frac{dP}{dr} \frac{d\rho}{dr}\end{aligned}$$

que al sustituir en (4) resulta en

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{r^2}{\rho} \frac{dP}{dr} \frac{d\rho}{dr} \right] + \frac{2C}{1-2C} \frac{d}{dr} \left[\frac{r^2}{\rho} \frac{dP}{dr} \frac{d\rho}{dr} \right] = -4\pi G r^2 \rho$$

De manera que

$$\boxed{\frac{d}{dr} \left[\frac{r^2}{\rho} \frac{dP}{dr} \frac{d\rho}{dr} \right] = -4\pi G h r^2 \rho} \quad (7)$$

donde $h = 1 - 2C$. Cuando $h = 1$ tenemos el caso isótopo ($C = 0 \Rightarrow P_{\perp} = P$)

Utilizaremos la siguiente ecuación barotrópica de estado

$$\boxed{P(\rho) = \kappa \rho^{\gamma} + \alpha \rho - \beta} \quad (8)$$

Para la ecuación (7) tenemos

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{r^2}{\rho} (\gamma \kappa \rho^{\gamma-1} + \alpha) \frac{d\rho}{dr} \right] = -4\pi G h r^2 \rho \quad (9)$$

Hemos llegado a una ecuación diferencial de segundo orden para $\rho(r)$. Como tal, se requieren dos condiciones de borde para encontrar una solución particular:

- La densidad debe ser finita en el centro de la estrella $\rho(0) = \rho_c < \infty$
- El gradiente de densidad debe ser nulo en el centro de la estrella. Esto implica que la densidad alcanza su máximo en el centro de la estrella (ya que la presión es monótonamente decreciente): $\rho'(0) = 0$.

S introducen las variables adimensionales para la coordenada radial ξ y la densidad $\Psi(\xi)$, relacionadas con sus respectivas cantidades físicas por:

$$\boxed{r = a\xi, \quad \rho = \rho_c \Psi(\xi)^{\frac{1}{\gamma-1}}} \quad (10)$$

Con estas nuevas variables tenemos:

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left[\xi^2 \left(1 + \frac{\alpha}{\gamma \kappa \rho_c^{\gamma-1}} \frac{1}{\Psi} \right) \frac{d\Psi}{d\xi} \right] = -\frac{4\pi G a^2 (\gamma-1) h}{\gamma \kappa \rho_c^{\gamma-2}} \Psi^{\frac{1}{\gamma-1}} \quad (11)$$

Si definimos:

$$\boxed{a^2 = \frac{\gamma \kappa \rho_c^{\gamma-2}}{4\pi G (\gamma-1)}, \quad b = \frac{\alpha}{\gamma \kappa \rho_c^{\gamma-1}}, \quad n = \frac{1}{\gamma-1}} \quad (12)$$

resulta lo que llamaremos la ecuación de Lane-Emden Master

$$\boxed{\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left[\xi^2 \left(1 + \frac{b}{\Psi} \right) \frac{d\Psi}{d\xi} \right] = -h\Psi^n} \quad \boxed{\gamma \neq 1} \quad (13)$$

Y las condiciones de borde:

1.

$$\Psi(0) = \left[\frac{\rho(0)}{\rho_c} \right]^{\gamma-1} = \left[\frac{\rho_c}{\rho_c} \right]^{\gamma-1} = 1 \quad (14)$$

2.

$$\Psi'(0) = \frac{d}{dr} \left[\frac{\rho}{\rho_c} \right]^{\gamma-1} \bigg|_{r=0} = (\gamma-1) \frac{\rho^{\gamma-2}}{\rho_c^{\gamma-1}} \frac{d\rho}{dr} \bigg|_{r=0} = (\gamma-1) \frac{\rho_c^{\gamma-2}}{\rho_c^{\gamma-1}} \left[\frac{d\rho}{dr} \right]_{r=0} = 0 \quad (15)$$

La propiedad básica que satisfacen las soluciones $\Psi(\xi)$ de la ecuación de Lane-Emden es $d\Psi d\xi < 0$, es decir, son monótonamente decrecientes desde su máximo en el origen $\Psi(\xi = 0) = 1$. Esto equivalente físicamente a que la densidad sea máxima en el centro de la estrella: $\rho(r = 0) = \rho_c$, y que decrezca conforme la coordenada radial aumenta.

Es de esperar que debido al comportamiento decreciente de la densidad, exista un punto donde se llegue al borde de la estrella. En la superficie de la estrella se tiene que:

$$\begin{cases} P(r = r_b) = 0 & \Rightarrow \beta = \kappa \rho_b^\gamma + \alpha \rho_b \\ P(r = 0) = P_c & \Rightarrow P_c = \kappa \rho_c^\gamma + \alpha \rho_c - \beta \end{cases} \quad (16)$$

Debe existir un punto $r_b = a\xi_1$ donde $P(r_b) = 0$. A la coordenada radial r donde esto sucede se le define como el radio de la estrella.

La presión en función de las nuevas variables es

$$P = \kappa \rho^\gamma + \alpha \rho - \beta \Rightarrow \mathcal{P} = \kappa \rho_c^\gamma \Psi^{\frac{1}{\gamma-1}} (\Psi + \gamma b) - \beta \quad (17)$$

Por lo tanto:

$$\boxed{\mathcal{P} = \kappa \rho_c^\gamma \Psi^{\frac{1}{\gamma-1}} (\Psi + \gamma b) - \beta} \quad (18)$$

En la superficie: $\xi = \xi_1$

$$\mathcal{P} = 0 = \kappa \rho_c^\gamma \Psi(\xi_1)^{\frac{1}{\gamma-1}} (\Psi(\xi_1) + \gamma b) - \beta \Rightarrow \boxed{\beta = \kappa \rho_c^\gamma \Psi(\xi_1)^{\frac{1}{\gamma-1}} (\Psi(\xi_1) + \gamma b)} \quad (19)$$

Al sustituir β en (18) resulta

$$\mathcal{P} = \kappa \rho_c^\gamma \left[\Psi^{\frac{1}{\gamma-1}} (\Psi + \gamma b) - \Psi(\xi_1)^{\frac{1}{\gamma-1}} (\Psi(\xi_1) + \gamma b) \right] \quad (20)$$

En el centro $\xi = 0$ de la estrella donde $\mathcal{P}(0) = \mathcal{P}_c$ resulta

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_c &= \kappa \rho_c^\gamma \left[\Psi(0)^{\frac{1}{\gamma-1}} (\Psi(0) + \gamma b) - \Psi(\xi_1)^{\frac{1}{\gamma-1}} (\Psi(\xi_1) + \gamma b) \right] \\ &= \kappa \rho_c^\gamma \left[1 + \gamma b - \Psi(\xi_1)^{\frac{1}{\gamma-1}} (\Psi(\xi_1) + \gamma b) \right] \Rightarrow \boxed{\kappa = \frac{\mathcal{P}_c}{\rho_c^\gamma \left[1 + \gamma b - \Psi(\xi_1)^{\frac{1}{\gamma-1}} (\Psi(\xi_1) + \gamma b) \right]}} \end{aligned} \quad (21)$$

y por lo tanto, al sustituir κ en (20)

$$\frac{\mathcal{P}}{\mathcal{P}_c} = \frac{\Psi^{\frac{1}{\gamma-1}} [\Psi + \gamma b] - \Psi_1^{\frac{1}{\gamma-1}} [\Psi_1 + \gamma b]}{1 + \gamma b - \Psi_1^{\frac{1}{\gamma-1}} [\Psi_1 + \gamma b]} \quad (22)$$

donde hemos denotado $\Psi_1 = \Psi(\xi_1)$.

En función de n

$$\frac{\mathcal{P}}{\mathcal{P}_c} = \frac{\Psi^n [\Psi + (1 + \frac{1}{n}) b] - \Psi_1^n [\Psi_1 + (1 + \frac{1}{n}) b]}{1 + (1 + \frac{1}{n}) b - \Psi_1^n [\Psi_1 + (1 + \frac{1}{n}) b]} \quad (23)$$

Para la anisotropía

$$\Delta = -\frac{Cr}{1-2C} [\gamma \kappa \rho^{\gamma-1} + \alpha] \frac{d\rho}{dr} \Rightarrow \Delta = -\frac{C\Psi^{-\frac{\gamma-2}{\gamma-1}} \xi}{1-2C} \frac{\gamma [\Psi + b]}{\gamma-1} \frac{d\Psi}{d\xi} \kappa \rho_c^\gamma \quad (24)$$

Por lo tanto

$$\frac{\Delta}{\mathcal{P}_c} = -\frac{C\xi}{1-2C} \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{\left[1 + \frac{b}{\Psi}\right] \Psi^{\frac{1}{\gamma-1}}}{\left[1 + \gamma b - \Psi_1^{\frac{1}{\gamma-1}} (\Psi_1 + \gamma b)\right]} \frac{d\Psi}{d\xi} \quad (25)$$

o de manera equivalente

$$\frac{\Delta}{\mathcal{P}_c} = -\frac{C(1+n)\xi}{1-2C} \frac{\left[1 + \frac{b}{\Psi}\right] \Psi^n}{\left[1 + (1 + \frac{1}{n}) b - \Psi_1^n (\Psi_1 + (1 + \frac{1}{n}) b)\right]} \frac{d\Psi}{d\xi} \quad (26)$$

Por lo tanto

$$\mathcal{P}_\perp = \Delta + \mathcal{P} \quad (27)$$

Para el caso $\gamma = 1$ (Esfera Isoterma) tenemos ahora que la ecuación (8) es

$$P = (\kappa + \alpha)\rho - \beta = \hat{\kappa}\rho - \beta$$

Po lo que

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{r^2}{\rho} \frac{dP}{dr} \frac{d\rho}{dr} \right] = -4\pi G h r^2 \rho \Rightarrow \frac{d}{dr} \left[\frac{r^2}{\rho} \frac{d\rho}{dr} \right] = -\frac{4\pi G}{\hat{\kappa}} h r^2 \rho \quad (28)$$

Si ahora

$$r = a\xi, \quad \rho = \rho_c e^{-\Psi} \quad (29)$$

resulta

$$-\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left[\xi^2 \frac{d\Psi(\xi)}{d\xi} \right] = -\frac{4\pi G a^2 \rho_c}{\hat{\kappa}} h e^{-\Psi}$$

Si ahora definimos

$$a^2 = \frac{\hat{\kappa}}{4\pi G \rho_c} \quad (30)$$

Resulta

$$\boxed{\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left[\xi^2 \frac{d\Psi}{d\xi} \right] = h e^{-\Psi}} \quad \boxed{\gamma = 1} \quad (31)$$

Que debe resolverse numéricamente con las condiciones iniciales

$$\Psi(0) = 0, \quad \Psi'(0) = 0 \quad (32)$$

En este caso la presión en función de las nuevas variables es

$$P = \hat{\kappa} \rho - \beta \Rightarrow \mathcal{P} = \hat{\kappa} \rho_c e^{-\Psi} - \beta \quad (33)$$

Por lo tanto:

$$\boxed{\mathcal{P} = \hat{\kappa} \rho_c e^{-\Psi} - \beta} \quad (34)$$

En la superficie: $\xi = \xi_1$

$$\mathcal{P} = 0 = \hat{\kappa} \rho_c e^{-\Psi(\xi_1)} - \beta \Rightarrow \boxed{\beta = \hat{\kappa} \rho_c e^{-\Psi(\xi_1)}} \quad (35)$$

Al sustituir β en (34) resulta

$$\mathcal{P} = \hat{\kappa} \rho_c \left[e^{-\Psi} - e^{-\Psi(\xi_1)} \right] \quad (36)$$

En el centro $\xi = 0$ de la estrella donde $\mathcal{P}(0) = \mathcal{P}_c$ resulta

$$\mathcal{P}_c = \hat{\kappa} \rho_c \left[e^{-\Psi(0)} - e^{-\Psi(\xi_1)} \right] = \hat{\kappa} \rho_c \left[1 - e^{-\Psi(\xi_1)} \right] \Rightarrow \hat{\kappa} = \frac{\mathcal{P}_c}{\rho_c \left[1 - e^{-\Psi(\xi_1)} \right]} \quad (37)$$

y por lo tanto, al sustituir κ en (36)

$$\boxed{\frac{\mathcal{P}}{\mathcal{P}_c} = \frac{e^{-\Psi} - e^{-\Psi(\xi_1)}}{1 - e^{-\Psi(\xi_1)}}} \quad (38)$$

1.1. Soluciones exactas de la ecuación de Lane-Emden master

Caso $n = 0$: La única solución analítica que podemos encontrar equivale al límite en que el índice adiabático $\gamma \rightarrow \infty$

$$P = \kappa \rho^\gamma + \alpha \rho - \beta \quad (39)$$

La ecuación Lane-Emden Master es

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left[\xi^2 \left(1 + \frac{b}{\Psi} \right) \frac{d\Psi}{d\xi} \right] = -h \quad (40)$$

cuya solución analítica resulta ser

$$\Psi_0 = \exp \left[-\mathbf{W} \left(\frac{e^{-\Theta}}{b} \right) - \Theta \right] = \exp \left[-\mathbf{W} \left(\frac{e^{-\Theta}}{b} \right) \right] \exp[-\Theta] = \mathbf{W} \left(\frac{e^{-\Theta}}{b} \right) b \quad (41)$$

donde $\mathbf{W}(x)$ es función W de Lambert (o función Omega).

Se ha utilizado la propiedad $e^{-\mathbf{W}(\mathbf{x})} = \mathbf{W}(\mathbf{x})/x$ y la variable

$$\Theta(\xi) = \frac{h\xi^3 + 2\xi C_2 - 6 C_1}{6b\xi} \quad (42)$$

Para que Ψ_0 sea finita en el origen debemos hacer $C_1 = 0$. Por lo tanto:

$$\Theta = \frac{h\xi^2 + 2 C_2}{6b} \quad (43)$$

Finalmente, aplicando la otra condición de borde

$$\Psi_0(0) = 1 = \mathbf{W}\left(\frac{e^{-\Theta(0)}}{b}\right) b \Rightarrow C_2 = -3 \quad (44)$$

Es decir que

$$\Theta = \frac{h\xi^2 - 6}{6b} \quad (45)$$

Por lo tanto:

$$\Psi_0 = \mathbf{W}\left(\frac{e^{-\frac{h\xi^2 - 6}{6b}}}{b}\right) b \quad (46)$$

Para $b \gg 1$ resulta que $\Psi_0 \rightarrow 1$.

De la ecuación de equilibrio y en el caso isótropo ($h = 1$) resulta:

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dr} = -\frac{Gm}{r^2}\rho &\Rightarrow \frac{d\mathcal{P}}{d(a\xi)} = -\frac{Gm}{a^2\xi^2}\rho_c\Psi_0 \\ \frac{d\mathcal{P}}{d\xi} &= -\frac{G\rho_c}{a}\frac{m}{\xi^2}\Psi_0 \\ \frac{d\mathcal{P}}{d\xi} &= -\frac{G\rho_c}{a}\frac{\frac{4}{3}\pi a^3\xi^3\rho_c}{\xi^2}\mathbf{W}\left(\frac{e^{-\Theta}}{b}\right)b \end{aligned}$$

Por lo tanto, la presión cuando $n = 0$ la denotaremos por \mathcal{P}_0

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{P}}{d\xi} &= -\frac{4\pi a^2 b G \rho_c^2}{3} \mathbf{W}\left(\frac{e^{-\Theta}}{b}\right) \xi \\ \int d\mathcal{P} &= -\frac{4\pi a^2 b G \rho_c^2}{3} \int \mathbf{W}\left(\frac{e^{-\Theta}}{b}\right) \xi d\xi \end{aligned}$$

En la superficie $\xi = \xi_1$ donde $\mathcal{P}_0(\xi_1) = 0$

1.2. Soluciones numéricas de la ecuación de Lane-Emden master

Si queremos integrar numéricamente la ecuación (13)

$$\frac{d}{d\xi} \left[\xi^2 \left(1 + \frac{b}{\Psi} \right) \frac{d\Psi}{d\xi} \right] = -\xi^2 h \Psi^n \quad (47)$$

o equivalentemente

$$\frac{d^2\Psi}{d\xi^2} = -\frac{h\Psi^n}{1 + \frac{b}{\Psi}} - \frac{2}{\xi} \frac{d\Psi}{d\xi} + \frac{b}{\Psi^2 \left(1 + \frac{b}{\Psi} \right)} \left(\frac{d\Psi}{d\xi} \right)^2 \quad (48)$$

Demos realizar el siguiente cambio de variables:

$$\begin{cases} X = \Psi & \Rightarrow & X' = \Psi' = Y \\ Y = \Psi' & \Rightarrow & Y' = \Psi'' \end{cases} \quad (49)$$

Y el resultado es un sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} X' = Y \\ Y' = -\frac{hX^n}{1 + \frac{b}{X}} - \frac{2}{\xi} Y + \frac{b}{X^2 \left(1 + \frac{b}{X} \right)} Y^2 \end{cases} \quad (50)$$

que de debe resolver numéricamente con las condiciones iniciales

$$\begin{cases} X(0) = 1 \\ Y(0) = 0 \end{cases} \quad (51)$$

Como X es decreciente y positivo, eventualmente llegará hasta un punto en donde se anule y posteriormente se vuelva negativo, pero antes de que esto ocurra la presión $\mathcal{P}(\xi)$ debe tener una primera raíz para algún valor $\xi = \xi_1$. Sin ambigüedad podemos hacer $\xi_1 = 1$ para el primer valor donde $\mathcal{P}(\xi = 1) = 0$, es decir la densidad en el borde será $X(1) = \Psi(1) = \Psi_1$.

$$\frac{\mathcal{P}}{\mathcal{P}_c} = \frac{X^n [X + (1 + \frac{1}{n}) b] - X(1)^n [X(1) + (1 + \frac{1}{n}) b]}{1 + (1 + \frac{1}{n}) b - X(1)^n [X(1) + (1 + \frac{1}{n}) b]} \quad (52)$$

1.3. Propiedades físicas de las funciones de Lane-Emden

1.3.1. Índice adiabático

$$\Gamma = \frac{\rho}{P} \frac{dP}{d\rho} = \frac{\rho (\gamma \kappa \rho^{\gamma-1} + \alpha)}{\kappa \rho^\gamma + \alpha \rho - \beta} \quad (53)$$

En las nuevas variables

$$\Gamma = \frac{\gamma \kappa \rho_c^\gamma \Psi^{\frac{1}{\gamma-1}} (\Psi + b)}{\kappa \rho^\gamma + \alpha \rho - \beta} = \frac{\Psi^{\frac{1}{\gamma-1}} (\Psi + b) \gamma}{\Psi^{\frac{1}{\gamma-1}} (\Psi + \gamma b) - \Psi(\xi_1)^{\frac{1}{\gamma-1}} (\Psi(\xi_1) + \gamma b)} \quad (54)$$

o de manera equivalente:

$$\Gamma = \frac{\Psi^n (\Psi + b) (1 + \frac{1}{n})}{\Psi^n [\Psi + (1 + \frac{1}{n}) b] - \Psi_1^n [\Psi_1 + (1 + \frac{1}{n}) b]}$$

1.3.2. Radio estelar

El radio estelar es

$$r = a\xi \Rightarrow r_b = \left(\frac{\gamma\kappa\rho_c^{\gamma-2}}{4\pi G(\gamma-1)} \right)^{\frac{1}{2}} \xi_1 \quad (55)$$

Por lo tanto

$$r_b = \left(\frac{\gamma\kappa\rho_c^{\gamma}}{4\pi G(\gamma-1)\rho_c^2} \right)^{\frac{1}{2}} \xi_1 = \left[\frac{\frac{\gamma\mathcal{P}_c}{1+\gamma b - \Psi_1^{\frac{1}{\gamma-1}}(\Psi_1+\gamma b)}}{4\pi G(\gamma-1)} \right]^{\frac{1}{2}} \frac{\xi_1}{\rho_c} \quad (56)$$

$$r_b = \left[\frac{\gamma\mathcal{P}_c}{4\pi G(\gamma-1) \left[1 + \gamma b - \Psi_1^{\frac{1}{\gamma-1}}(\Psi_1 + \gamma b) \right]} \right]^{\frac{1}{2}} \frac{\xi_1}{\rho_c} \quad (57)$$

1.3.3. Masa estelar

La masa de la estrella al interior del radio r vendrá dada por la integral

$$m = 4\pi \int_0^r \hat{r}^2 \rho(\hat{r}) d\hat{r} = 4\pi \int_0^r (a\xi)^2 \rho_c \Psi^{\frac{1}{\gamma-1}} d(a\xi) = 4\pi a^3 \rho_c \int_0^r \xi^2 \Psi^{\frac{1}{\gamma-1}} d\xi \quad (58)$$

Como sabemos que:

$$\frac{d}{d\xi} \left[\xi^2 \left(1 + \frac{b}{\Psi} \right) \frac{d\Psi}{d\xi} \right] = -\xi^2 \Psi^{\frac{1}{\gamma-1}} \Rightarrow \xi^2 \left(1 + \frac{b}{\Psi} \right) \frac{d\Psi}{d\xi} = - \int_0^\xi \bar{\xi}^2 \Psi^{\frac{1}{\gamma-1}} d\bar{\xi} \quad (59)$$

Como $d\Psi/d\xi < 0$, tomando su valor absoluto para la masa de la estrella al interior de r

$$m = 4\pi a^3 \rho_c \xi^2 \left(1 + \frac{b}{\Psi} \right) \left| \frac{d\Psi}{d\xi} \right| \quad (60)$$

La masa total $m(r_b) = M$ es entonces

$$M = m(a\xi_1) = 4\pi a^3 \rho_c \xi_1^2 \left(1 + \frac{b}{\Psi_1} \right) \left| \frac{d\Psi}{d\xi} \right|_{\xi=\xi_1} \quad (61)$$

1.3.4. Relación Masa-Radius

De la ecuación para el radio de la estrella podemos despejar la densidad central

$$\left(\frac{r_b}{\xi_1} \right)^2 = \frac{\gamma\kappa\rho_c^{\gamma-2}}{4\pi G(\gamma-1)} \Rightarrow \rho_c^{\gamma-2} = \left(\frac{r_b}{\xi_1} \right)^2 \frac{4\pi G(\gamma-1)}{\gamma\kappa} \quad (62)$$

por lo que

$$\rho_c = \left[\left(\frac{r_b}{\xi_1} \right)^2 \frac{4\pi G(\gamma-1)}{\gamma\kappa} \right]^{\frac{1}{\gamma-2}} \quad (63)$$

Expresión que podemos sustituir en la masa total (61)

$$\begin{aligned}
 M &= 4\pi \left(\frac{\gamma\kappa\rho_c^{\gamma-2}}{4\pi G(\gamma-1)} \right)^{\frac{3}{2}} \rho_c \xi_1^2 \left(1 + \frac{b}{\Psi_1} \right) \left| \frac{d\Psi}{d\xi} \right|_{\xi=\xi_1} \\
 &= 4\pi \left(\frac{\gamma\kappa}{4\pi G(\gamma-1)} \right)^{\frac{3}{2}} \rho_c^{\frac{3\gamma}{2}-3} \rho_c \xi_1^2 \left(1 + \frac{b}{\Psi_1} \right) \left| \frac{d\Psi}{d\xi} \right|_{\xi=\xi_1} \\
 &= 4\pi \left(\frac{\gamma\kappa}{4\pi G(\gamma-1)} \right)^{\frac{3}{2}} \rho_c^{\frac{3\gamma}{2}-2} \xi_1^2 \left(1 + \frac{b}{\Psi_1} \right) \left| \frac{d\Psi}{d\xi} \right|_{\xi=\xi_1} \\
 &= 4\pi \left(\frac{\gamma\kappa}{4\pi G(\gamma-1)} \right)^{\frac{3}{2}} \left[\left(\frac{r_b}{\xi_1} \right)^2 \frac{4\pi G(\gamma-1)}{\gamma\kappa} \right]^{\frac{3\gamma-4}{2(\gamma-2)}} \xi_1^2 \left(1 + \frac{b}{\Psi_1} \right) \left| \frac{d\Psi}{d\xi} \right|_{\xi=\xi_1} \\
 &= 4\pi r_b^{\frac{3\gamma-4}{\gamma-2}} \left(\frac{\gamma\kappa}{4\pi G(\gamma-1)} \right)^{\frac{3}{2}} \left[\frac{4\pi G(\gamma-1)}{\gamma\kappa} \right]^{\frac{3\gamma-4}{2(\gamma-2)}} \xi_1^{-\frac{\gamma}{\gamma-2}} \left(1 + \frac{b}{\Psi_1} \right) \left| \frac{d\Psi}{d\xi} \right|_{\xi=\xi_1}
 \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$M = 4\pi r_b^{\frac{3\gamma-4}{\gamma-2}} \left(\frac{\gamma\kappa}{4\pi G(\gamma-1)} \right)^{\frac{1}{2-\gamma}} \xi_1^{-\frac{\gamma}{\gamma-2}} \left(1 + \frac{b}{\Psi_1} \right) \left| \frac{d\Psi}{d\xi} \right|_{\xi=\xi_1} \quad (64)$$

1.3.5. Densidad media

$$\bar{\rho}(r) = \frac{m(r)}{\frac{4}{3}\pi r^3} \Rightarrow \bar{\rho}(\xi) = \frac{m(\xi)}{\frac{4}{3}\pi a^3 \xi^3} = \frac{4\pi a^3 \rho_c \xi^2 \left(1 + \frac{b}{\Psi} \right) \left| \frac{d\Psi}{d\xi} \right|}{\frac{4}{3}\pi a^3 \xi^3} = \frac{3\rho_c \left(1 + \frac{b}{\Psi} \right) \left| \frac{d\Psi}{d\xi} \right|}{\xi} \quad (65)$$

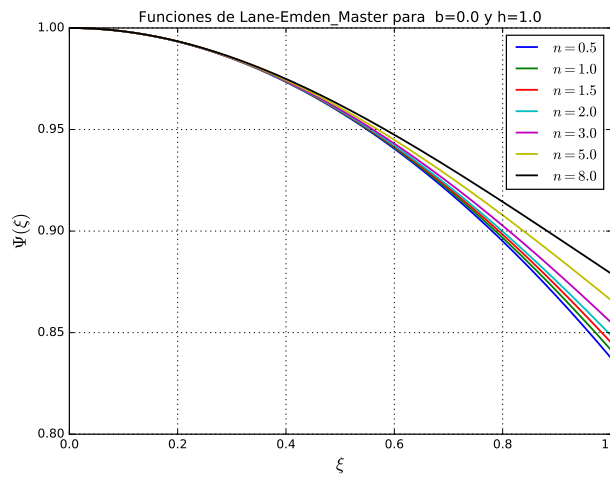
Si evaluamos la ecuación anterior en $\xi = \xi_1$

$$\bar{\rho}(\xi_1) = \frac{3\rho_c \left(1 + \frac{b}{\Psi_1} \right) \left| \frac{d\Psi}{d\xi} \right|_{\xi=\xi_1}}{\xi_1} \quad (66)$$

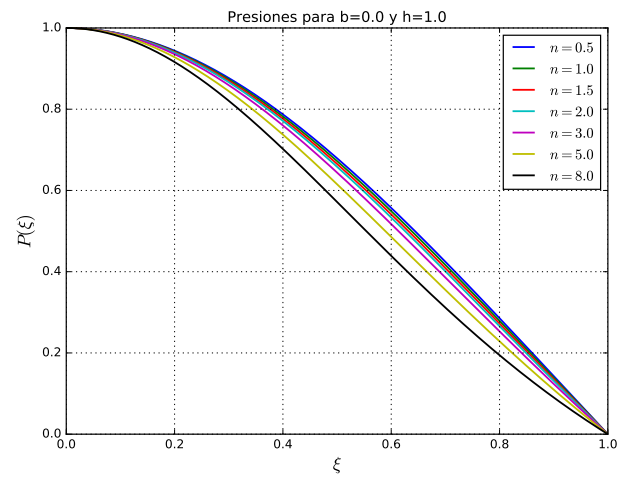
es decir, la densidad media total de la estrella es un múltiplo de su densidad central. Pero como se puede expresar explícitamente en función de la masa y radio totales de la estrella:

$$\bar{\rho}(\xi_1) = \frac{3\rho_c \left(1 + \frac{b}{\Psi_1} \right) \left| \frac{d\Psi}{d\xi} \right|_{\xi=\xi_1}}{\xi_1} = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi r_b^3} \Rightarrow \rho_c = \frac{\xi_1}{4\pi \left(1 + \frac{b}{\Psi_1} \right) \left| \frac{d\Psi}{d\xi} \right|_{\xi=\xi_1}} \frac{M}{r_b^3} \quad (67)$$

La densidad central se puede determinar explícitamente si la masa y radio totales de la estrella son conocidos, además de γ .

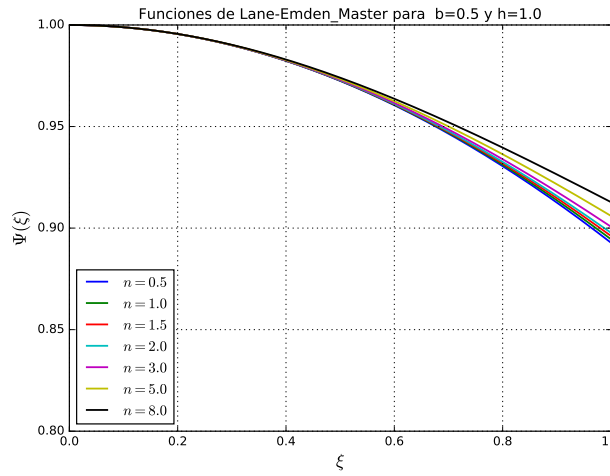


(a)

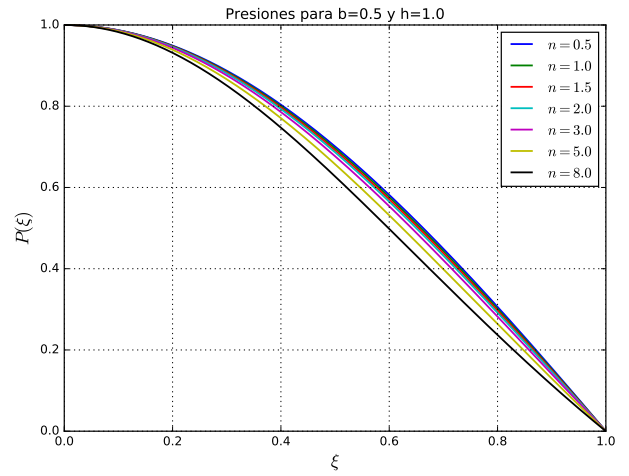


(b)

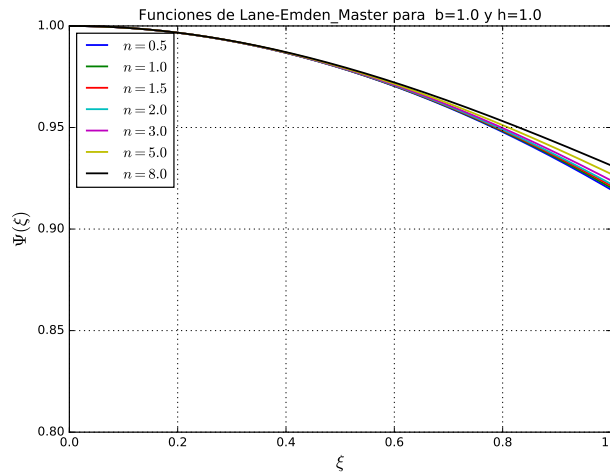
Figura 1: Integración numérica para Ψ y las presiones internas



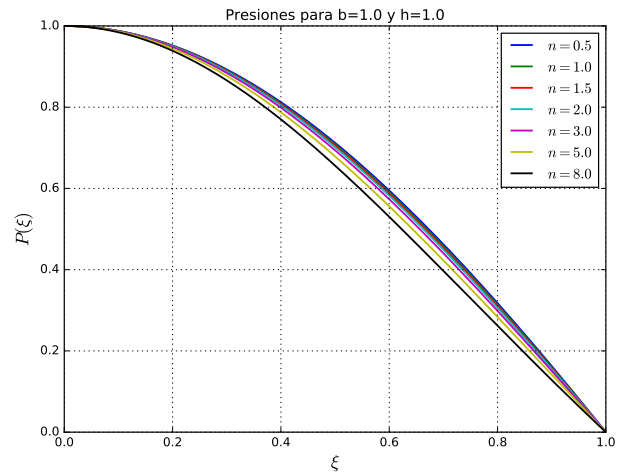
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 2: Integración numérica para Ψ y las presiones internas

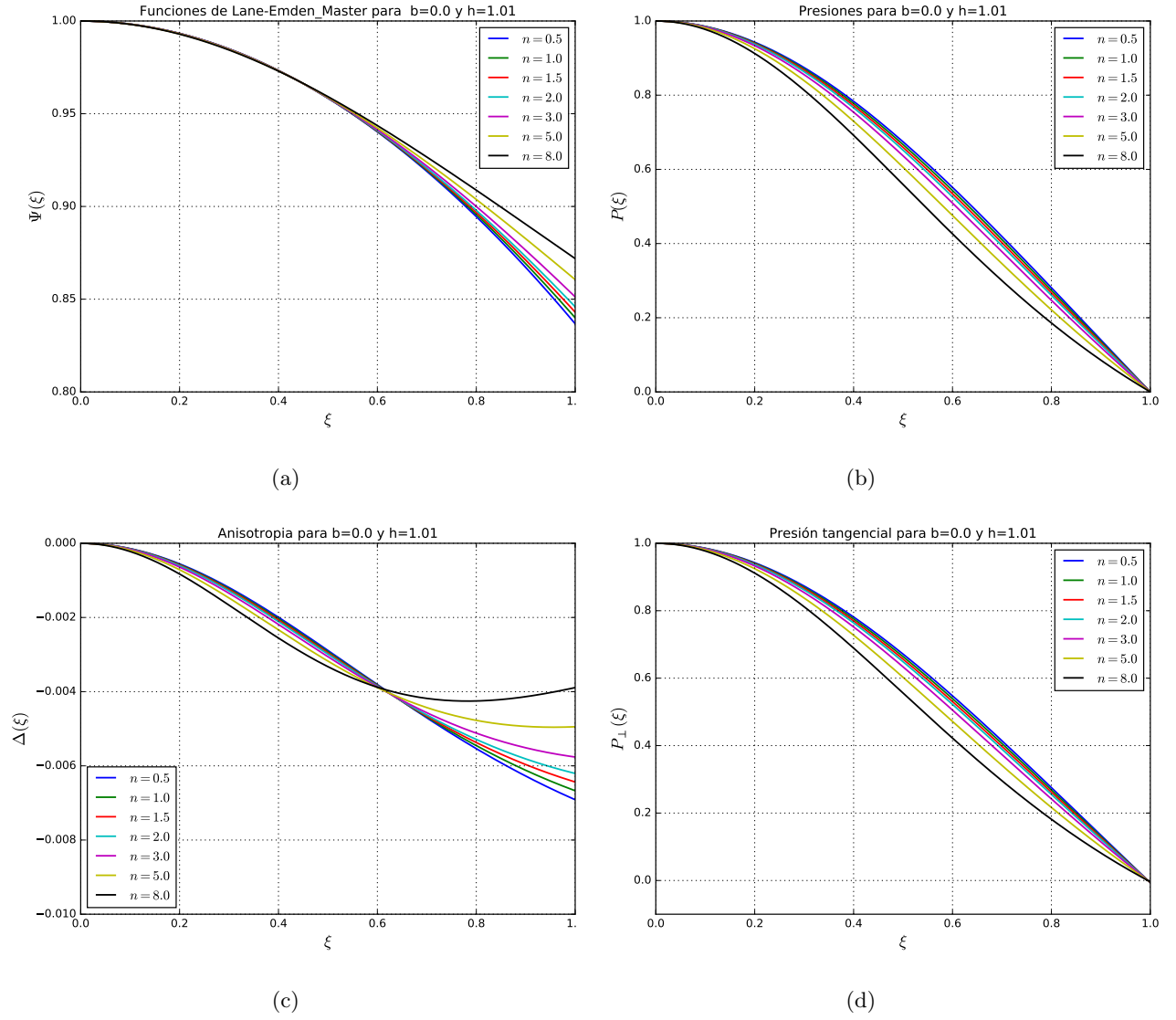


Figura 3: Integración numérica para Ψ y las presiones internas

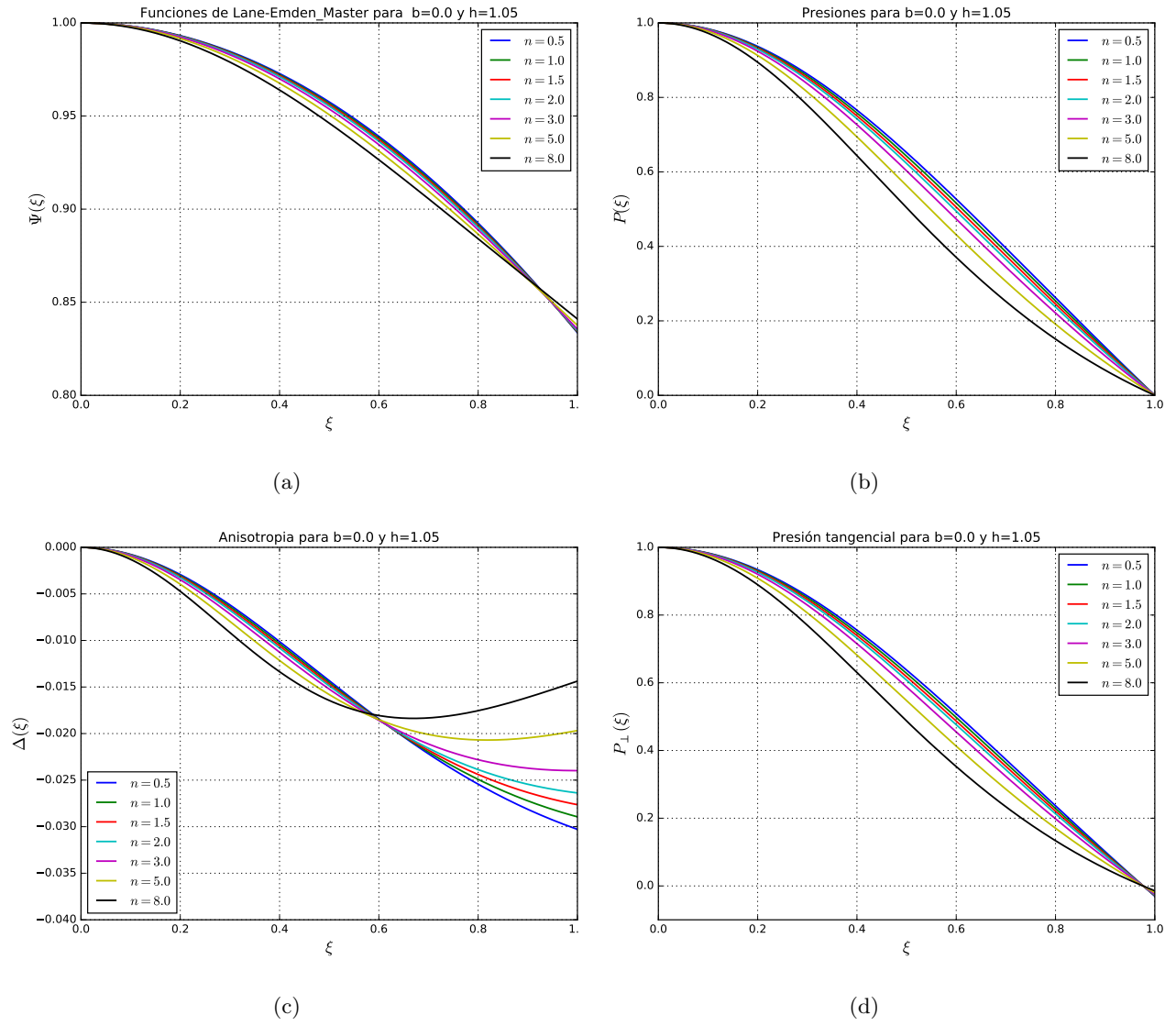


Figura 4: Integración numérica para Ψ y las presiones internas

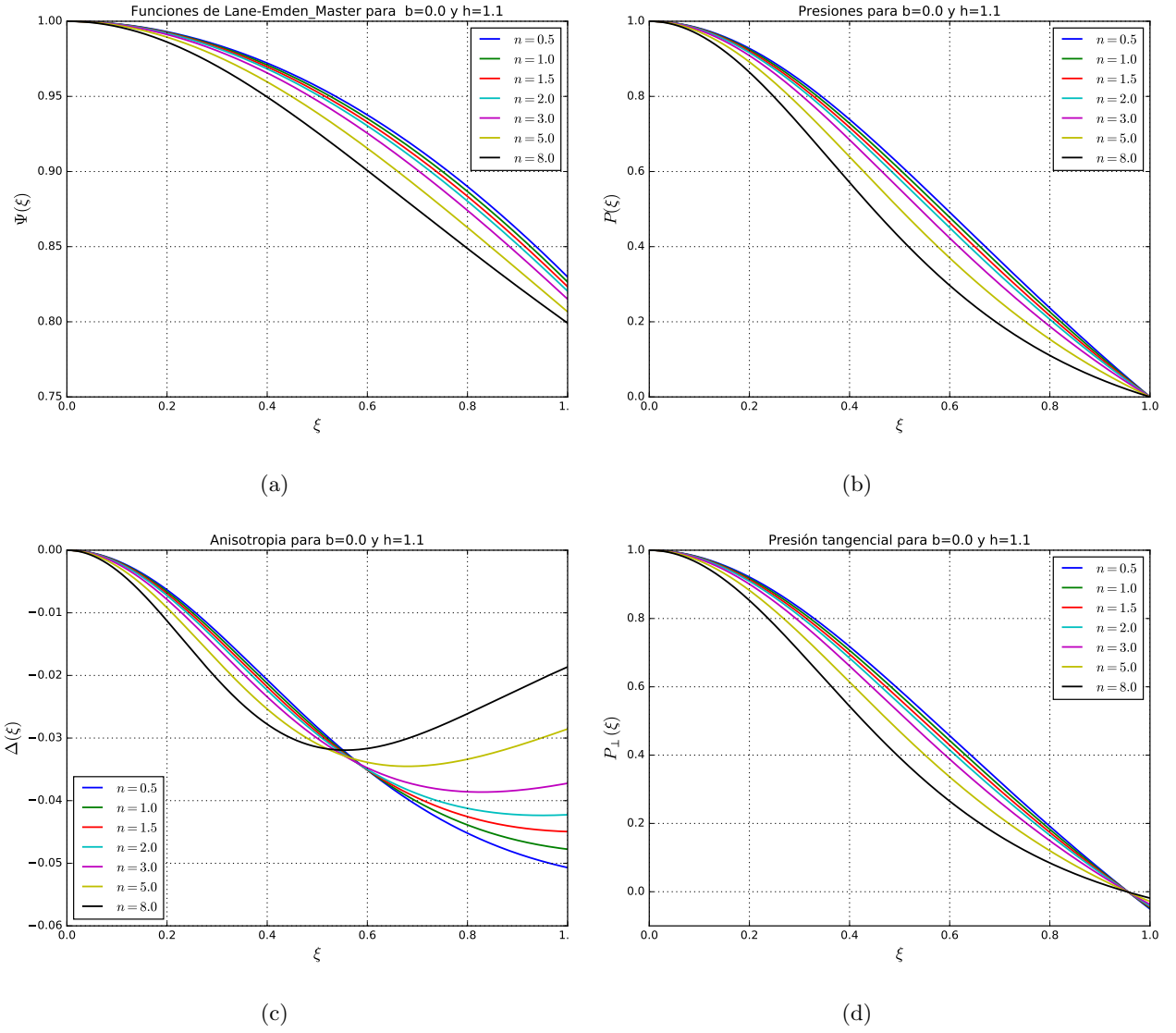
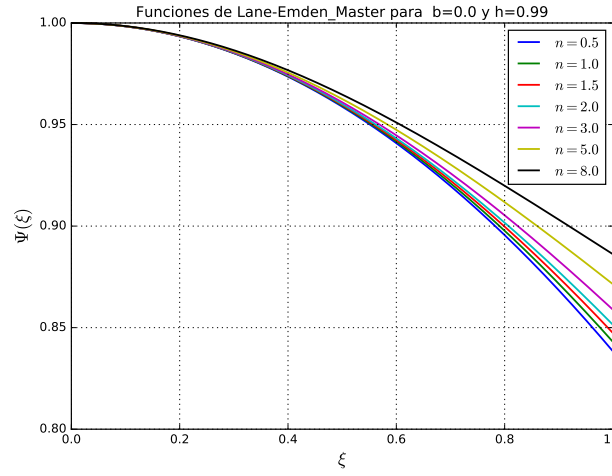
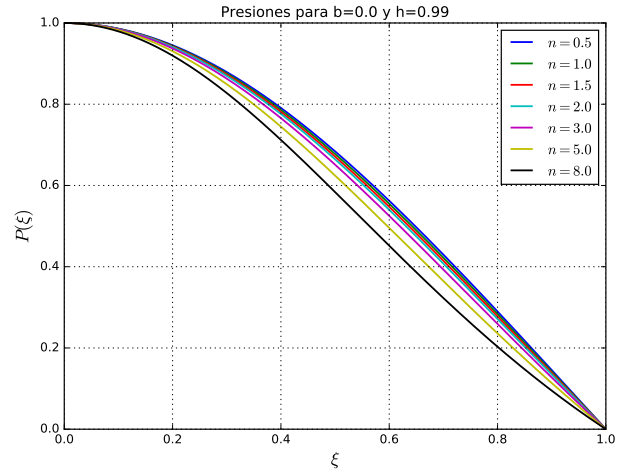


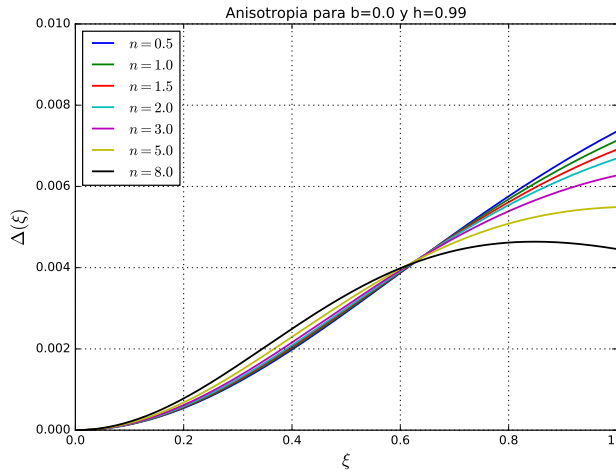
Figura 5: Integración numérica para Ψ y las presiones internas



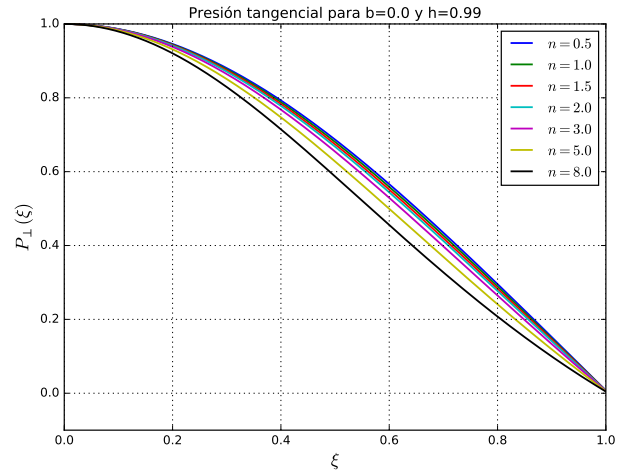
(a)



(b)

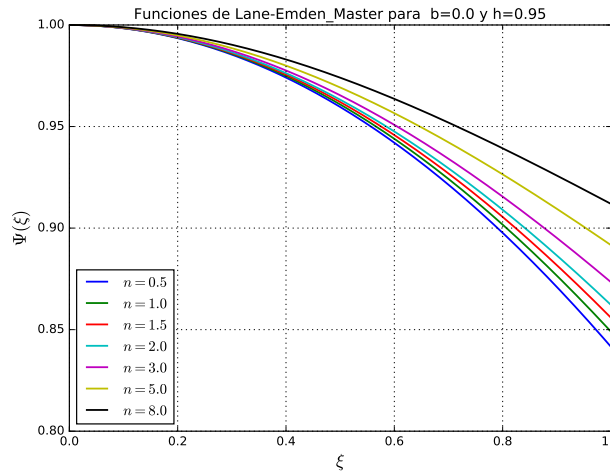


(c)

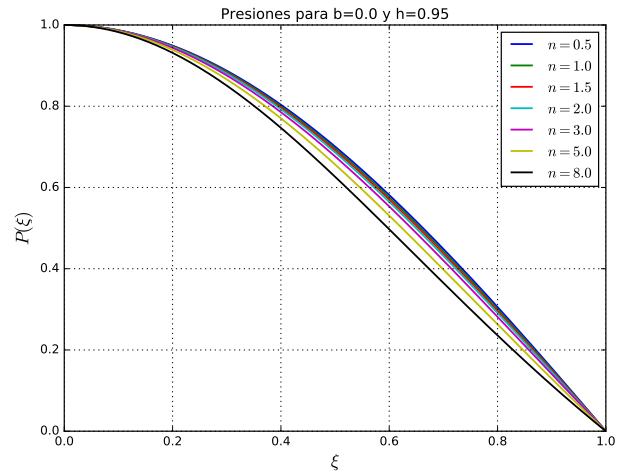


(d)

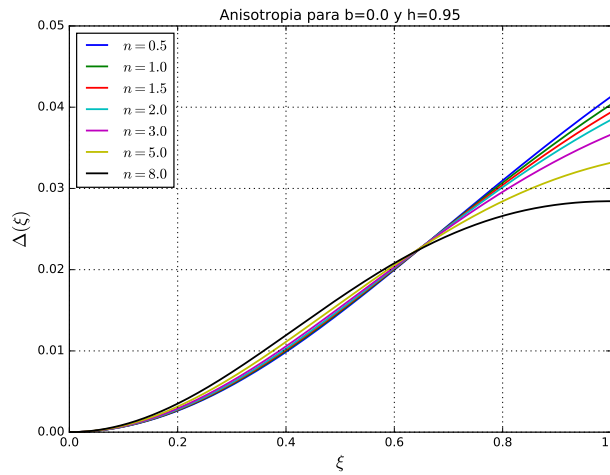
Figura 6: Integración numérica para Ψ y las presiones internas



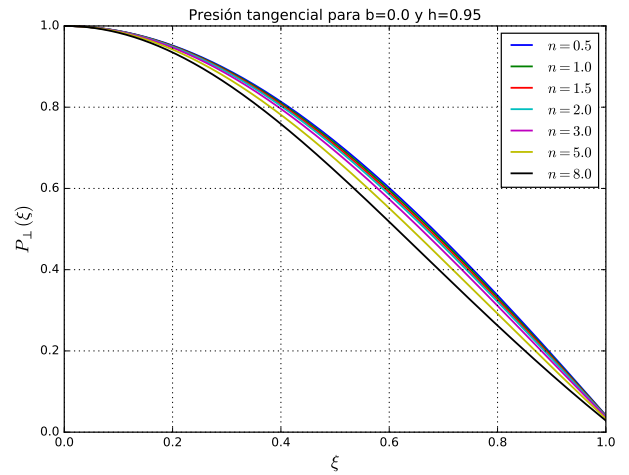
(a)



(b)

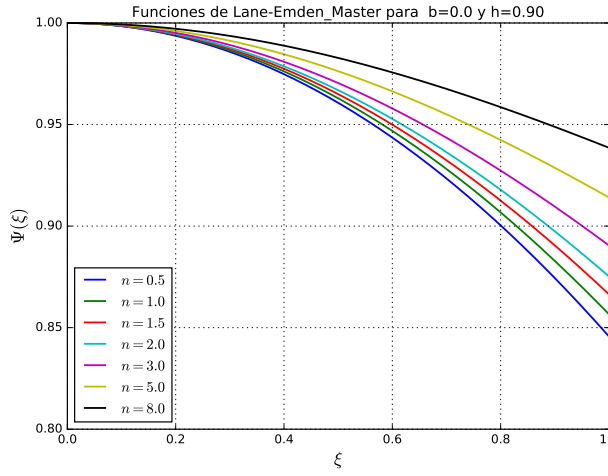


(c)

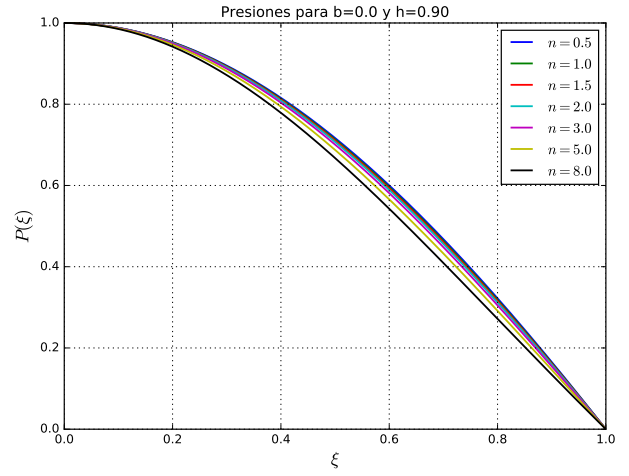


(d)

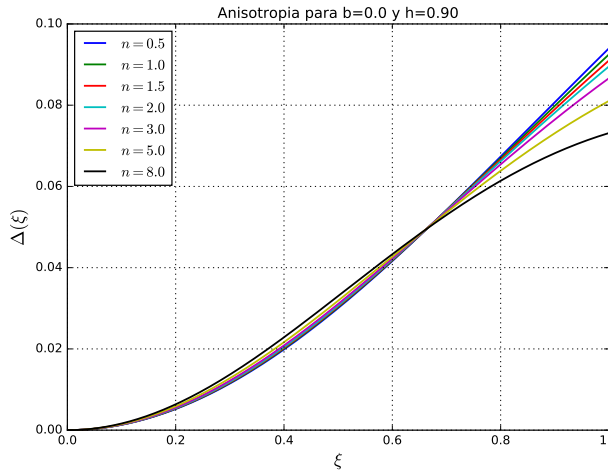
Figura 7: Integración numérica para Ψ y las presiones internas



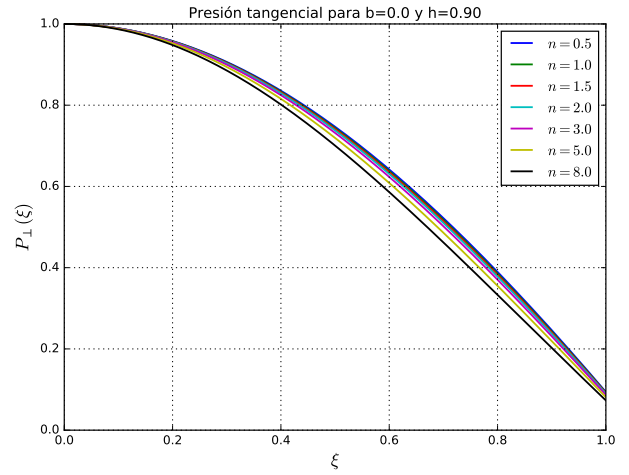
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 8: Integración numérica para Ψ y las presiones internas

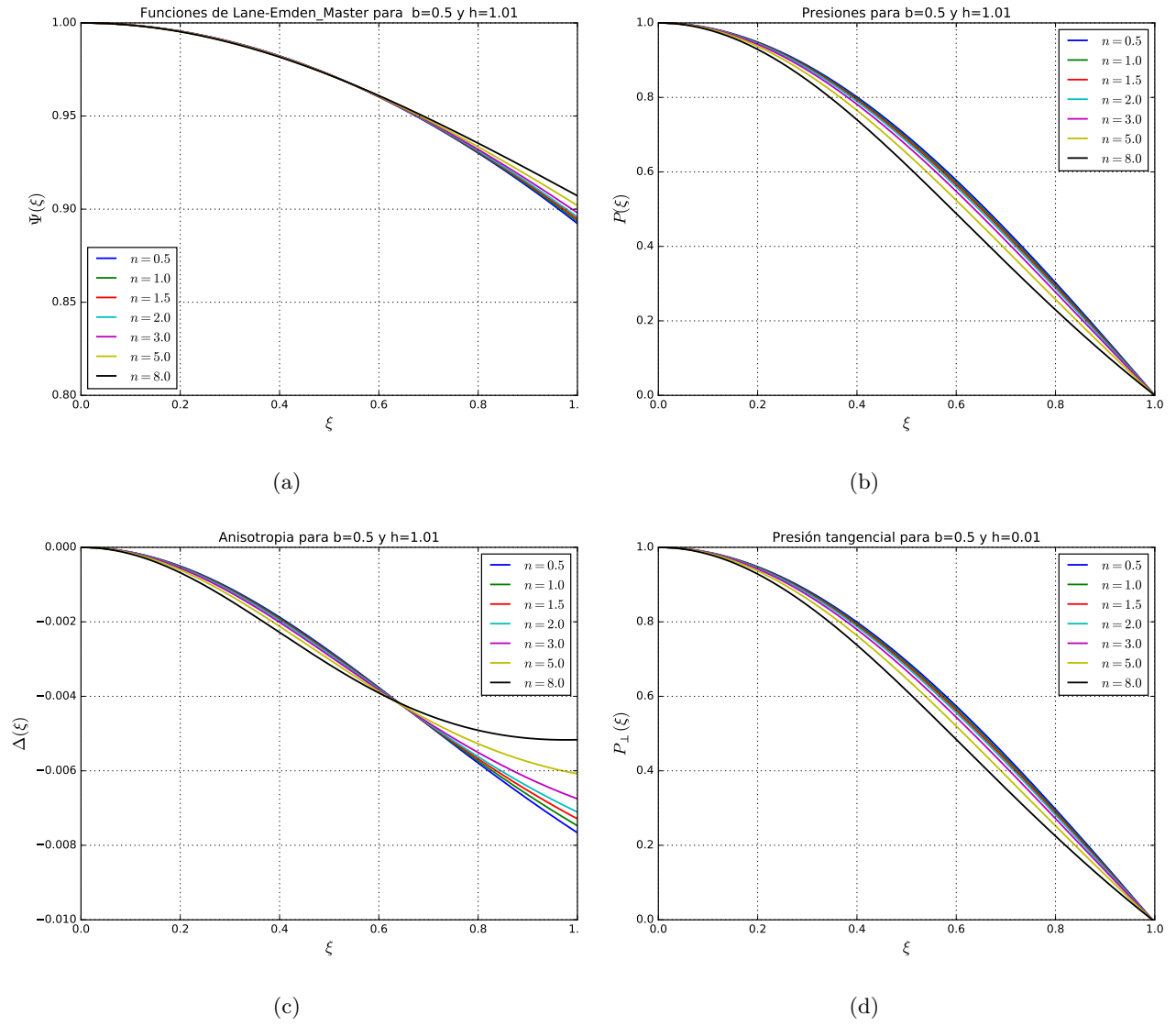


Figura 9: Integración numérica para Ψ y las presiones internas

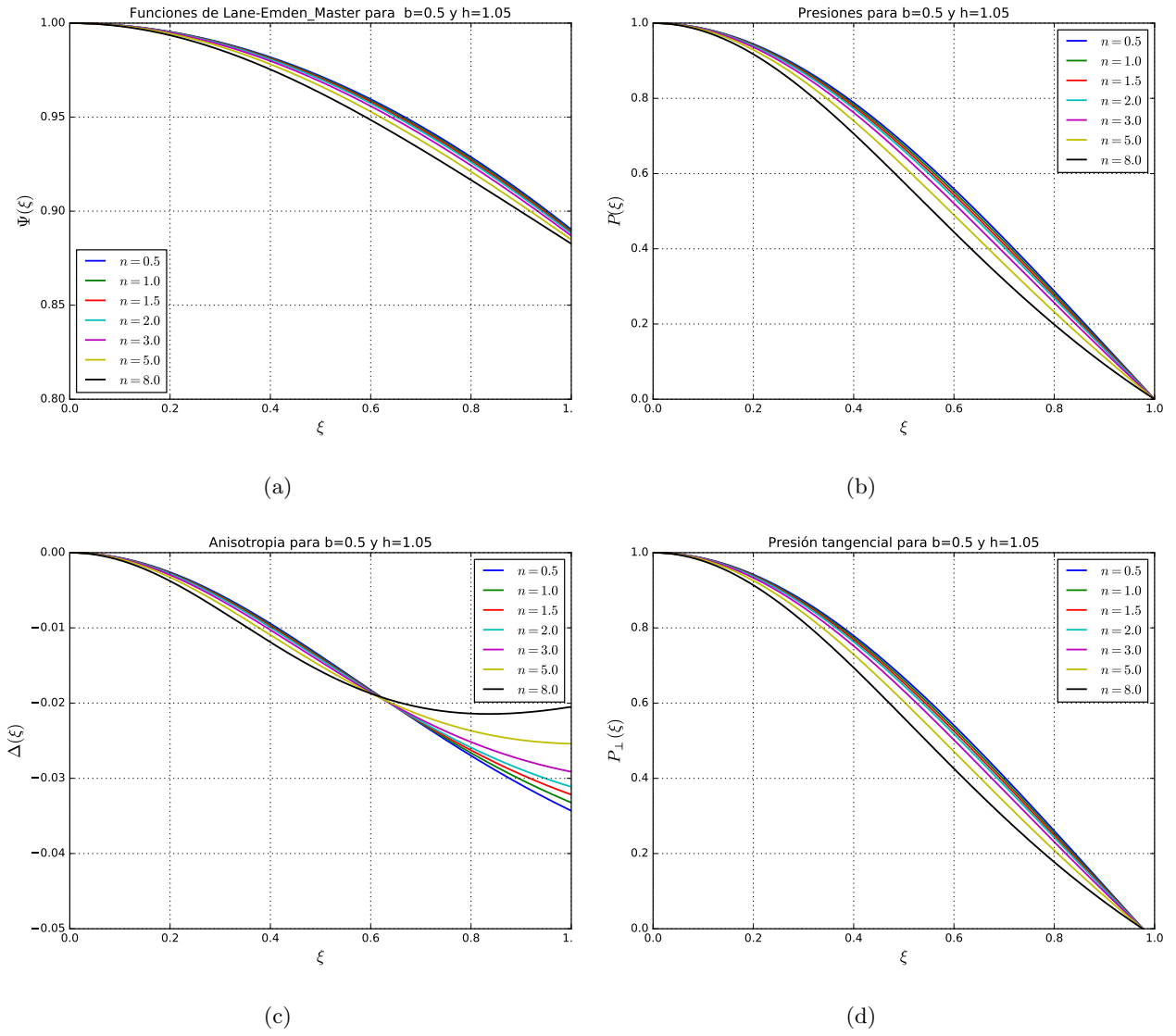
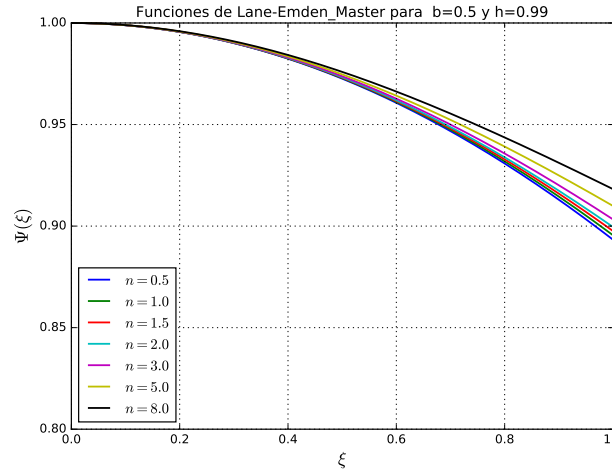
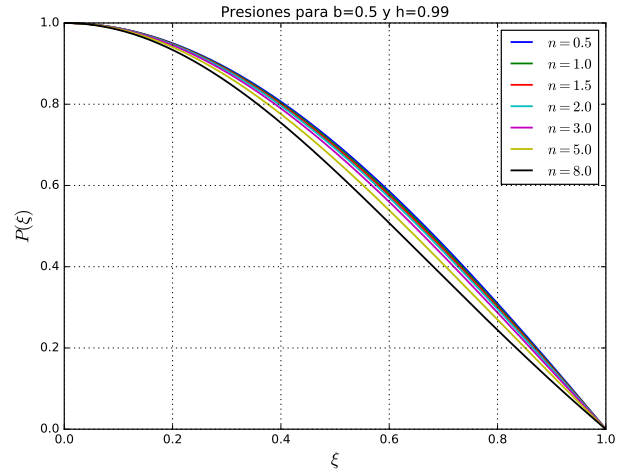


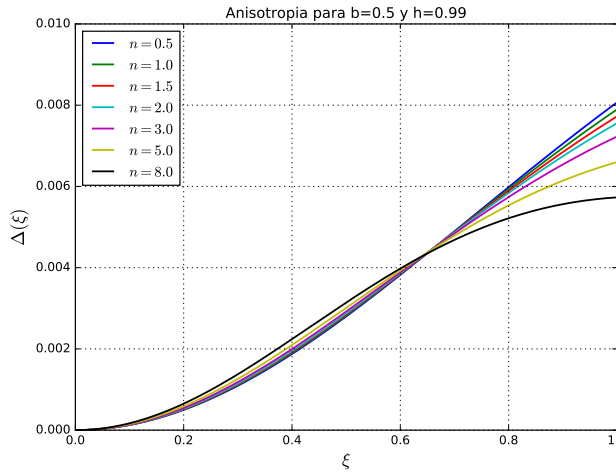
Figura 10: Integración numérica para Ψ y las presiones internas



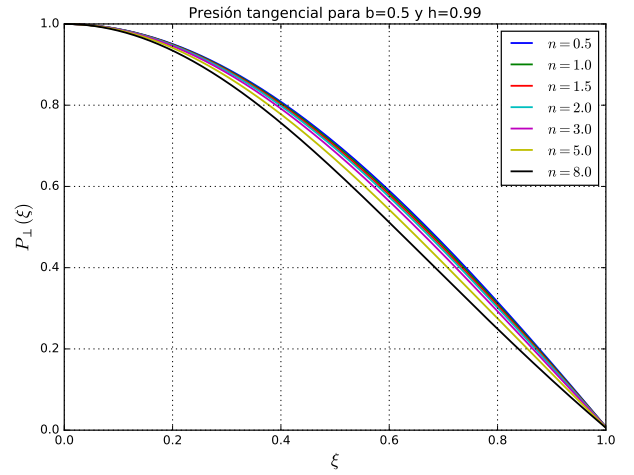
(a)



(b)

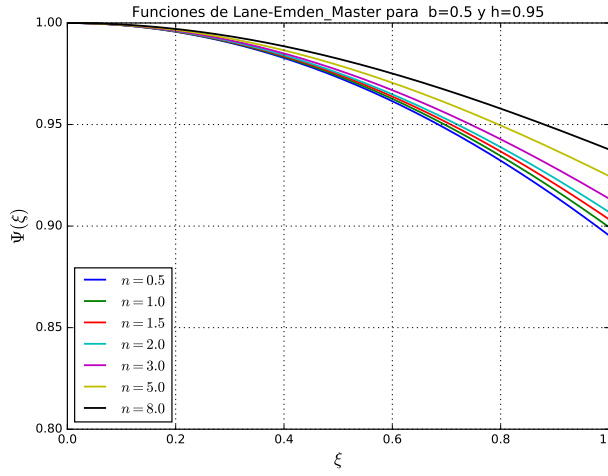


(c)

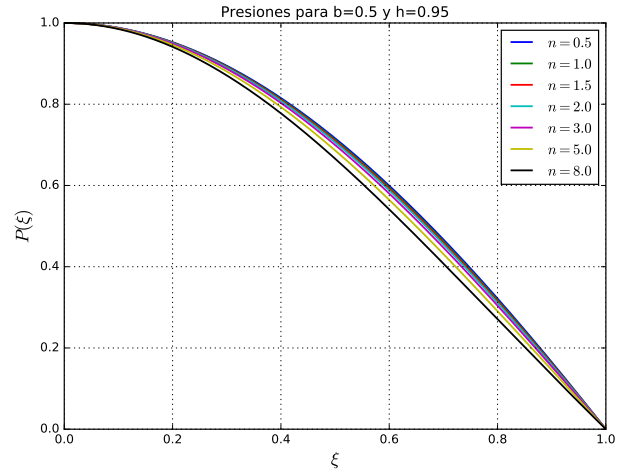


(d)

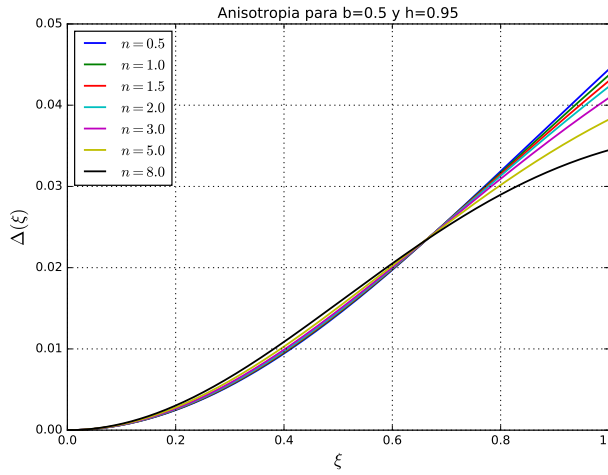
Figura 11: Integración numérica para Ψ y las presiones internas



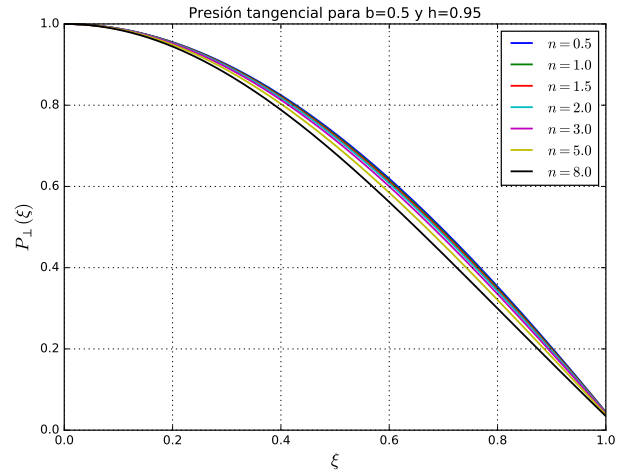
(a)



(b)

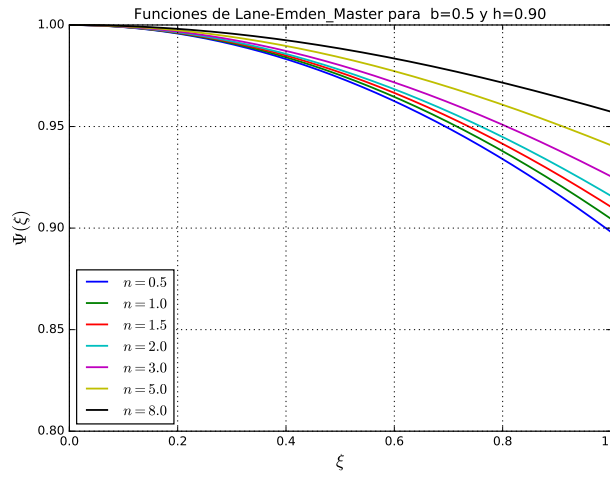


(c)

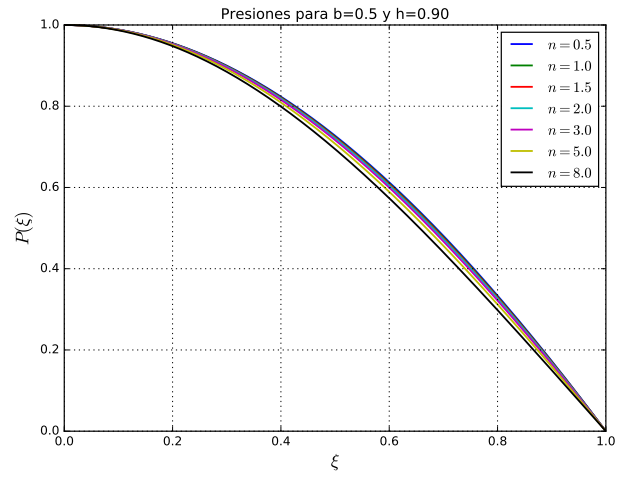


(d)

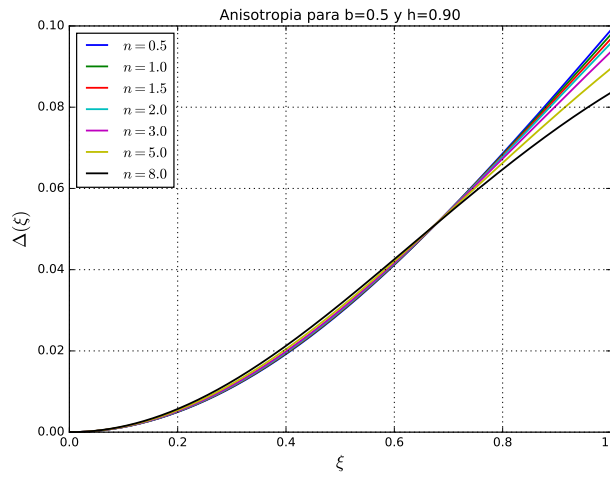
Figura 12: Integración numérica para Ψ y las presiones internas



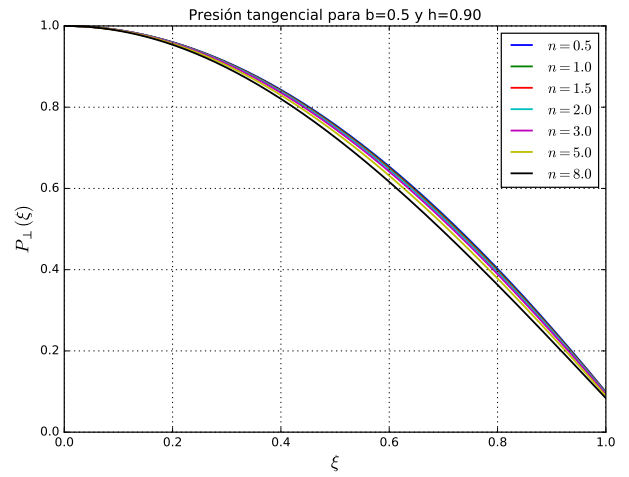
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 13: Integración numérica para Ψ y las presiones internas

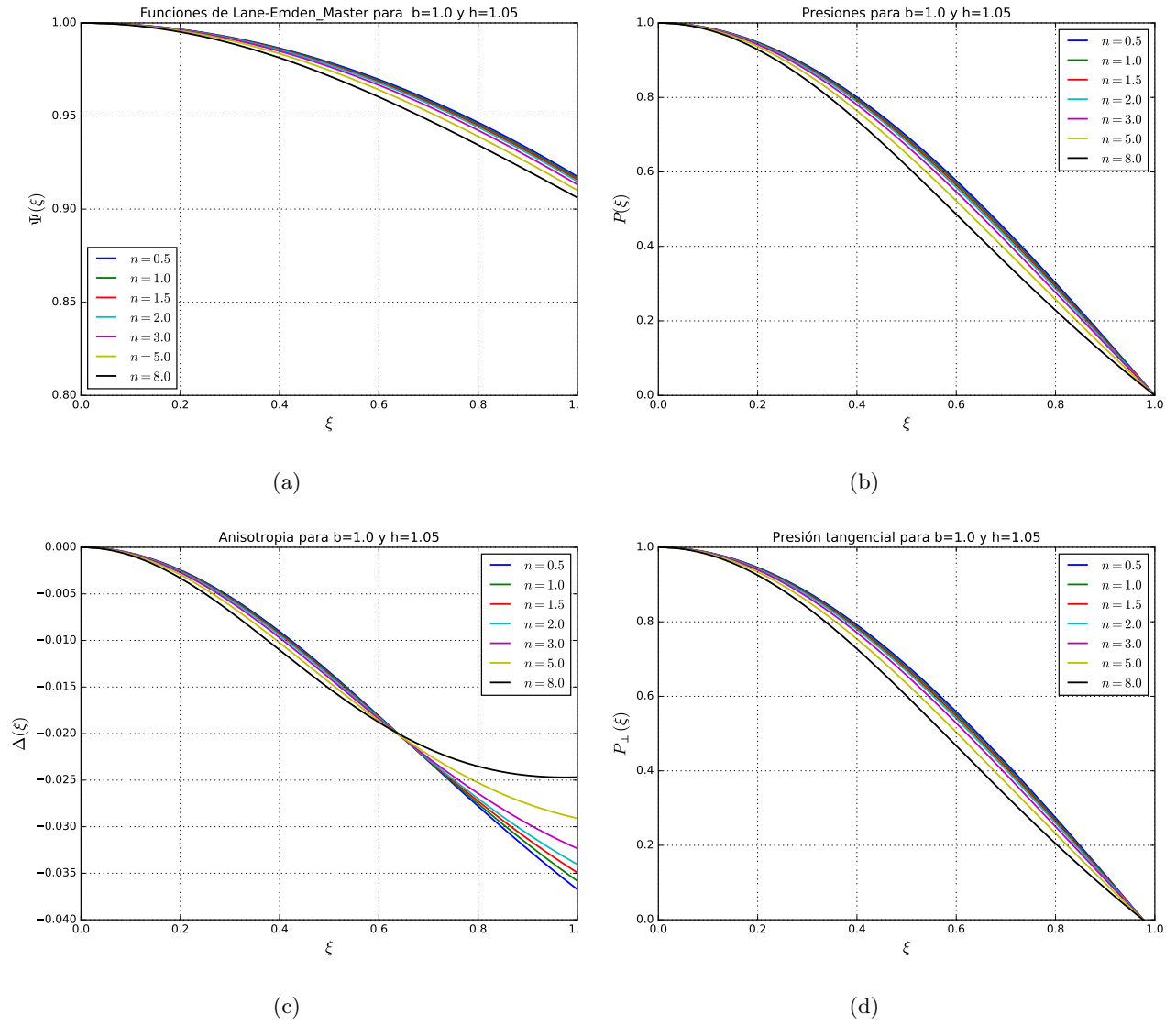
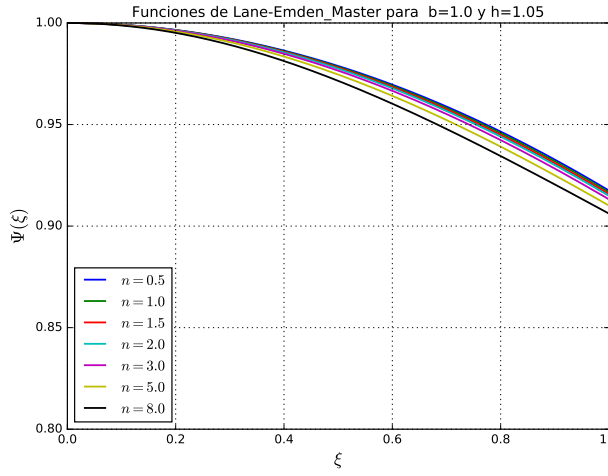
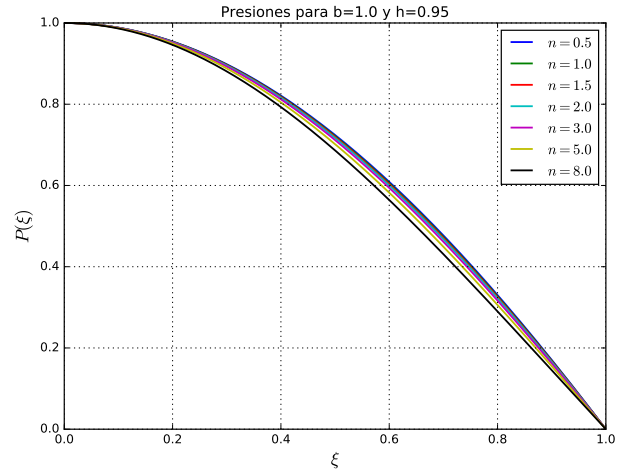


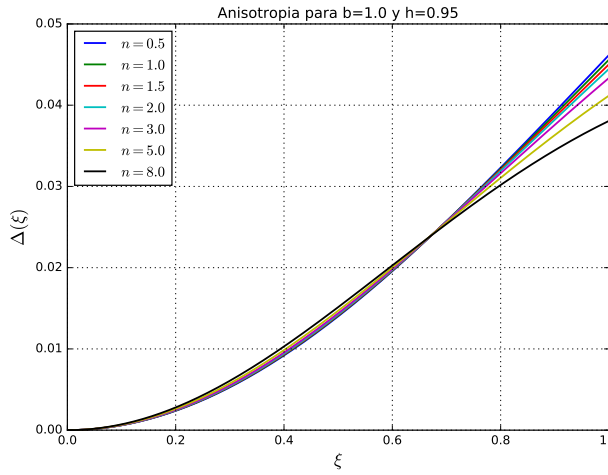
Figura 14: Integración numérica para Ψ y las presiones internas



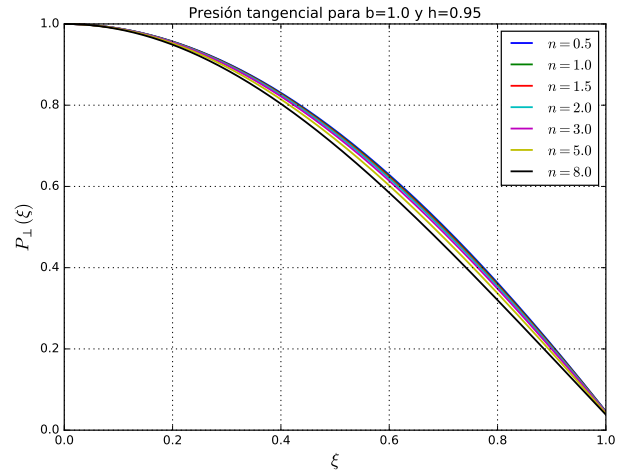
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 15: Integración numérica para Ψ y las presiones internas