

El Título

L. A. Núñez

*Grupo de Investigación en Relatividad y Gravitación
Escuela de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia*

7 de mayo de 2014

1. Cálculo Operacional

Toda ecuación diferencial puede ser descrita de la siguiente forma

$$\frac{-F(x)}{x} = f(x) \implies \mathbb{D}F(x) = f(x) \quad (1)$$

donde $\mathbb{D}(\bullet)$ es un operador diferencial lineal, tal y como los estudiamos en su momento. De esta forma

$$\mathbb{D}(Ax^n + Bx^m) = A\mathbb{D}(x^n) + B\mathbb{D}(x^m) = nAx^{n-1} + mBx^{m-1} \quad (2)$$

y en muchos aspectos ese operador diferencial $\mathbb{D}(\bullet)$ puede ser tratado como un número más.

De esta forma una ecuación diferencial homogénea puede ser descrita en forma de operadores cómo

$$a y'' + b y' + c y = 0 \implies \mathbb{O}|y\rangle = 0 \iff (a \mathbb{D}^2 + b \mathbb{D} + c)|y\rangle = 0 \quad (3)$$

y consecuentemente

$$(\mathbb{D} - r_1)(\mathbb{D} - r_2)|y\rangle = 0 \quad \text{con } r_1 \text{ y } r_2 \text{ raíces de } ar^2 + br + c = 0, \quad (4)$$

con soluciones, como era de esperarse de la forma

$$\begin{array}{lll} r_1 = r_2 = r & \text{reales} & \implies y(x) = (A + Bx)e^{rx} \\ r_1 \neq r_2 & \text{reales} & \implies y(x) = Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x} \\ r_1 = r_2^* & \text{complejas } r_1 = \alpha + i\beta & \implies y(x) = e^{\alpha x}(A \cos(\beta x) + B \sin(\beta x)) \end{array} \quad (5)$$

Esta notación también se presta para algunas curiosidades. Para una ecuación diferencial genérica con coeficientes constantes se tiene

$$y'' - 3y' + 2y = x^2 \implies (\mathbb{D}^2 - 3\mathbb{D} + 2)y = x^2 \implies (\mathbb{D} - 1)(\mathbb{D} - 2)y = x^2 \quad (6)$$

más aún

$$y = \frac{x^2}{(\mathbb{D} - 1)(\mathbb{D} - 2)} \implies y = \frac{x^2}{(\mathbb{D} - 2)} - \frac{x^2}{(\mathbb{D} - 1)} \quad (7)$$

por lo cual expandiendo

$$\frac{1}{\mathbb{D} - 1} = \frac{-1}{1 - \mathbb{D}} = -1 - \mathbb{D} - \mathbb{D}^2 - \mathbb{D}^3 - \mathbb{D}^4 - \dots \quad (8)$$

$$\frac{1}{\mathbb{D}-2} = \frac{-1}{2} \frac{1}{1-\frac{\mathbb{D}}{2}} = -\frac{1}{2} - \frac{\mathbb{D}}{4} - \frac{\mathbb{D}^2}{8} - \frac{\mathbb{D}^3}{16} - \dots \quad (9)$$

de donde

$$y = \left(-\frac{1}{2} - \frac{\mathbb{D}}{4} - \frac{\mathbb{D}^2}{8} - \frac{\mathbb{D}^3}{16} - \dots \right) x^2 - (-1 - \mathbb{D} - \mathbb{D}^2 - \mathbb{D}^3 - \mathbb{D}^4 - \dots) x^2 \quad (10)$$

por lo tanto tendremos la solución particular de la ecuación $y'' - 3y' + 2y = x^2$

$$y = \left(-\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \right) - (-x^2 - 2x - 2) = \frac{x^2}{2} + \frac{3}{2}x + \frac{7}{4} \quad (11)$$

Las operaciones que se usaron arriba están relacionadas muy estrechamente con las propiedades de la integral

$$\int_0^\infty e^{-st} f(t) dt \quad (12)$$

2. El problema de Sturm-Liouville

En el mismo espíritu anterior podemos asociar una ecuación diferencial de segundo orden a un operador diferencial

$$\underbrace{\left(P(x) \frac{d^2}{dx^2} + Q(x) \frac{d}{dx} + R(x) \right)}_{\mathbb{L}} u(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad (P(x)\mathbb{D}^2 + Q(x)\mathbb{D} + R(x)) |u\rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbb{L} |u\rangle = 0 \quad (13)$$

Donde las funciones $P(x)$, $Q(x)$ y $R(x)$ son funciones reales, definidas en el intervalo $[a, b]$ y que cumplen con las siguientes exigencias

- $P''(x)$, $Q'(x)$ y $R(x)$ existen y son continuas en $[a, b]$, y
- $P(x)$ no contiene ceros en (a, b) .

2.1. Operadores diferenciales de segundo orden

Consideremos el espacio de Hilbert de funciones continuas en $[a, b]$, en el cual representaremos a esas funciones como $|u\rangle$ y los operadores lineales actúan en ese espacio de Hilbert de la forma acostumbrada $\mathbb{L} |u\rangle = |\tilde{u}\rangle$. Entonces, a través de la definición del producto interno podemos construir

$$\langle v | \tilde{u} \rangle = \langle \tilde{u} | v \rangle^* \Leftrightarrow \langle v | \mathbb{L} | u \rangle = \langle u | \mathbb{L}^\dagger | v \rangle^*. \quad (14)$$

Sabemos que, los operadores hermíticos (o autoadjuntos y esto es $\mathbb{L} = \mathbb{L}^\dagger$) tendrá autovalores $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n\}$ reales y los correspondientes autovectores $\{|w_1\rangle, |w_2\rangle, |w_3\rangle, \dots, |w_n\rangle\}$ serán ortogonales, $\langle w^i | w_j \rangle \propto \delta_j^i$. El hecho que construyamos una ecuación de autovalores con \mathbb{L} de la forma expresada en (13) implica una ecuación de la forma

$$\mathbb{L} |v_i\rangle = \lambda_i |v_i\rangle \quad \Leftrightarrow \quad (P(x)\mathbb{D}^2 + Q(x)\mathbb{D} + R(x)) |v_i\rangle = \lambda_i |v_i\rangle \quad (15)$$

Con lo cual estaríamos resolviendo una familia de ecuaciones diferenciales homogéneas del tipo

$$P(x) \frac{d^2 y_i(x)}{dx^2} + Q(x) \frac{dy_i(x)}{dx} + (R(x) - \lambda_i) y_i(x) = 0 \quad (16)$$

parametrizadas por el parámetro λ_i . Más aún, con esta estrategia podremos integrar ecuaciones diferenciales de la forma

$$P(x)\frac{d^2y_i(x)}{dx^2} + Q(x)\frac{dy_i(x)}{dx} + (R(x) - \lambda_i w(x))y_i(x) = 0, \quad (17)$$

si consideramos productos internos generalizados con funciones peso $w(x)$ de la forma

$$\langle g | f \rangle = \int_a^b dx w(x) g^*(x) f(x) \quad (18)$$

Varios son los ejemplos de esta forma general de abordar las ecuaciones diferenciales como un problema de autovalores. Entre ellos podemos mencionar:

- El oscilador armónico

$$\underbrace{\left(\frac{d^2}{dx^2} \right)}_{\mathbb{L}} y(x) = -\omega^2 y(x) \quad (19)$$

- La ecuación de Legendre

$$\underbrace{\left((1-x^2) \frac{d^2}{dx^2} - 2x \frac{d}{dx} \right)}_{\mathbb{L}} P_n(x) = -n(n+1) P_n(x) \quad (20)$$

En general toda las familias de polinomios ortogonales, $p_n(x)$ con producto interno definido como

$$\langle \mathbf{p}^m | \mathbf{p}_n \rangle = \int_a^b w(x) p_m(x) p_n(x) dx = h_n \delta_{m,n} \text{ con } w(x) > 0 \text{ una función peso en } a \leq x \leq b$$

$$\underbrace{\left(P(x) \frac{d^2}{dx^2} + Q(x) \frac{d}{dx} \right)}_{\mathbb{L}} p_n(x) = -\alpha_n p_n(x) = 0 \quad (21)$$

Donde las expresiones para $P(x)$, $Q(x)$ y α_n se encuentran especificadas en la Tabla (1)

Polinomio	$P(x)$	$Q(x)$	α_n
P_n	$1 - x^2$	$-2x$	$n(n+1)$
T_n	$1 - x^2$	$-x$	n^2
U_n	$1 - x^2$	$-2x$	$n(n+1)$
H_n	1	$-2x$	$2n$
L_n	x	$1 - x$	n
L_n^α	x	$1 - x + \alpha$	n
$P_n^{\alpha\beta}$	$1 - x^2$	$\beta - \alpha - x(2 + \alpha + \beta)$	$n(n + \alpha + \beta + 1)$

Cuadro 1: Funciones para determinar la ecuación diferencial para la cual son solución los polinomios ortogonales. Con P_n Legendre, T_n Tchebychev 1E; U_n Tchebychev 2E; H_n Hermite; L_n Laguerre; $L_n^\alpha(x)$ Laguerre G; $P_n^{\alpha\beta}(x)$ Jacobi

- La ecuación de Bessel

$$\underbrace{\left(x^2 \frac{d^2}{dx^2} + x \frac{d}{dx} + x^2 \right)}_{\mathbb{L}} J_k(x) = k^2 J_k(x); \quad k \in \mathbb{R} \quad (22)$$

2.2. Operadores diferenciales autoadjuntos

Es claro que las funciones $P(x)$, $Q(x)$ y $R(x)$ tendrán algunas restricciones adicionales a las expresadas arriba, de tal forma que se garantice que el operador \mathbb{L} sea autoadjunto (hermítico).

Para encontrar esas restricciones a los coeficientes, partimos de la definición de producto interno en un espacio de funciones. En general, vimos que, para un espacio de funciones continuas y continuamente diferenciales en $[a, b]$ una posible definición de producto interno es

$$\langle g | f \rangle = \int_a^b dx g^*(x) f(x) \Rightarrow \langle g | \mathbb{L} | f \rangle = \int_a^b dx g^*(x) \mathbb{L} f(x), \quad (23)$$

es decir

$$\langle g | \mathbb{L} | f \rangle = \int_a^b dx g^*(x) P(x) \frac{d^2 f(x)}{dx^2} + \int_a^b dx g^*(x) Q(x) \frac{df(x)}{dx} + \int_a^b dx g^*(x) R(x) f(x) \quad (24)$$

Integrando por partes la primera y segunda integral tendremos

$$\int_a^b dx g^*(x) P(x) \frac{d^2 f(x)}{dx^2} = \left(P(x) g^*(x) \frac{df(x)}{dx} - f(x) \frac{d(P(x) g^*(x))}{dx} \right) \Big|_a^b + \int_a^b dx f(x) \frac{d^2(P(x) g^*(x))}{dx^2} \quad (25)$$

y

$$\int_a^b dx g^*(x) Q(x) \frac{df(x)}{dx} = f(x) Q(x) g^*(x) \Big|_a^b - \int_a^b dx f(x) \frac{d(Q(x) g^*(x))}{dx} \quad (26)$$

Con lo cual podremos escribir

$$\begin{aligned} \langle g | \mathbb{L} | f \rangle &= \int_a^b dx f(x) \underbrace{\left(P(x) \frac{d^2}{dx^2} + \left(2 \frac{dP(x)}{dx} - Q(x) \right) \frac{d}{dx} + \left(R(x) - \frac{dQ(x)}{dx} + \frac{d^2 P(x)}{dx^2} \right) \right)}_{\mathbb{L}^\dagger} g^*(x) \\ &\quad + \left(f(x) \left(Q(x) - \frac{dP(x)}{dx} \right) g^*(x) + P(x) \left(\frac{df(x)}{dx} g^*(x) - \frac{dg^*(x)}{dx} f(x) \right) \right) \Big|_a^b \end{aligned} \quad (27)$$

donde hemos identificado por \mathbb{L}^\dagger al operador adjunto de \mathbb{L} . Ahora bien, si queremos que \mathbb{L} sea autoadjunto (o hermítico) $\mathbb{L} = \mathbb{L}^\dagger$, entonces se debe cumplir que

$$2 \frac{dP(x)}{dx} - Q(x) = Q(x) \quad \text{y} \quad - \frac{dQ(x)}{dx} + \frac{d^2 P(x)}{dx^2} = 0 \quad (28)$$

y ambas se satisfacen idénticamente si

$$Q(x) = \frac{dP(x)}{dx}. \quad (29)$$

Estas restricciones sobre $P(x)$ y $Q(x)$ son aparentes, porque siempre podremos construir un operador diferencial autoadjunto a partir de cualquier operador diferencial de segundo orden. En efecto, como $P(x)$ únicamente puede tener raíces en los extremos del intervalo $[a, b]$, siempre podremos definir

$$h(x) = \frac{1}{P(x)} \exp \left(\int_a^b dx \frac{Q(x)}{P(x)} \right) \Rightarrow \begin{cases} \bar{P}(x) = h(x) P(x) \\ \bar{Q}(x) = h(x) Q(x) \end{cases} \quad (30)$$

con lo cual se cumple inmediatamente la condición (29), a saber

$$\frac{d\bar{P}(x)}{dx} = \frac{d}{dx} \exp \left(\int_a^b dx \frac{Q(x)}{P(x)} \right) = \frac{Q(x)}{P(x)} \exp \left(\int_a^b dx \frac{Q(x)}{P(x)} \right) = \bar{Q}(x) \quad (31)$$

y entonces $h(x)\mathbb{L}$ siempre será auto adjunto.

Entonces, al utilizar (29) en (13) es fácil convencerse que todo operador autoadjunto puede ser escrito como

$$\mathbb{L} \leftrightarrow \frac{d}{dx} \left(\mathcal{A}(x) \frac{d(\bullet)}{dx} \right) + \mathcal{B}(x) \frac{d(\bullet)}{dx} \quad (32)$$

donde $\mathcal{A}(x) = P(x)$ y $\mathcal{B}(x) = R(x)$. Adicionalmente, la ecuación general (27) quedaría escrita como

$$\langle g | \mathbb{L} | f \rangle = \underbrace{\int_a^b dx f(x) \mathbb{L}^\dagger g^*(x)}_{\langle f | \mathbb{L}^\dagger | g \rangle^*} + \mathcal{A}(x) \left(\frac{df(x)}{dx} g^*(x) - \frac{dg^*(x)}{dx} f(x) \right) \Big|_a^b \quad (33)$$

Claramente, si \mathbb{L} es autoadjunto y $f(x)$ y $g(x)$ son soluciones de una ecuación diferencial autoadjunta, el segundo término se debe anular, y allí habrán de incidir las condiciones de borde que se impongan al problema.

2.3. El Sistema Sturm-Liouville

Evidentemente, si consideramos que $f(x)$ y $g(x)$ son soluciones de una ecuación diferencial autoadjunta (que puede ser representada por un operador lineal de segundo orden autoadjunto \mathbb{L}), entonces la ecuación de autovalores

$$\mathbb{L} |u_i\rangle = -\lambda_i w(x) |u_i\rangle \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{d}{dx} \left(\mathcal{A}(x) \frac{d}{dx} \right) + \mathcal{B}(x) \frac{d}{dx} \right) u_i(x) = -\lambda_i w(x) u_i(x) \quad (34)$$

donde, λ_i son los autovalores, $u_i(x)$ las autofunciones soluciones y $w(x) > 0$ es la función peso descrita en (18). Claramente esta ecuación (34) debe ser complementada con las condiciones de frontera

$$\mathcal{A}(x) u_j^*(x) \frac{du_i(x)}{dx} \Big|_a^b = 0 \quad \forall i, j \quad (35)$$

Las ecuaciones (34) y (35) constituyen Sistema Sturm-Liouville y también se le refiere como el problema de Sturm-Liouville.

Se distinguen dos posibles situaciones con las condiciones de frontera:

1. **Condiciones Regulares:** Para este caso se especifican los valores de una combinación de las funciones y las derivadas, $\beta_1 u_i(x) + \gamma_1 \frac{du_i(x)}{dx} = C_1$ y $\beta_2 u_i(x) + \gamma_2 \frac{du_i(x)}{dx} = C_2$ en los extremos $x = a$ y $x = b$. Estos valores son finitos en todo el intervalo de validez de las funciones. Claramente de ésta pueden derivarse cuatro tipos de condiciones de frontera
 - a) **Condiciones Regulares Puras:** Para este caso se especifican los valores para la combinación lineal completa, con $\beta_1 \neq 0$, $\beta_2 \neq 0$, $\gamma_1 \neq 0$ y $\gamma_2 \neq 0$
 - b) **Condiciones de Dirichlet:** Para este caso se especifican los valores de la función $u_i(x)$ en los extremos, $x = a$ y $x = b$. Esto es para $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$

- c) **Condiciones de Neumann:** Para este caso se especifican los valores de las derivadas $\frac{du_i(x)}{dx}$ en los extremos, $x = a$ y $x = b$. Esto es para $\beta_1 = \beta_2 = 0$
- d) **Condiciones Mixtas:** Cuando se especifican los valores de un tipo de condiciones de frontera en un extremo y otro en el otro. Esto es para $\beta_1 = \gamma_2 = 0$ o $\gamma_1 = \beta_2 = 0$
2. **Condiciones Periódicas:** Para este caso el valor de la función y su derivada es el mismo en los extremos $u_i(a) = u_i(b)$ y $\frac{du_i(x)}{dx}\Big|_a = \frac{du_i(x)}{dx}\Big|_b$. Otra vez, estos valores son finitos en todo el intervalo de validez de las funciones.
3. **Condiciones Singulares:** Para este caso encontramos valores singulares para las funciones y sus derivadas.

2.4. Algunos ejemplos ilustrativos

Vamos a analizar el caso muy simple de la ecuación diferencial tipo oscilador armónico libre. Esto es

$$\frac{d^2y(x)}{dx^2} + \lambda y(x) = 0 \quad (36)$$

y veremos como cambia cuando se tienen en cuenta distintos tipos de condiciones de frontera.

2.4.1. Condición Regular con $y(0) = 0 \wedge \frac{dy(x)}{dx}\Big|_{x=\pi} = 0$

Este caso corresponde una condición de frontera regular con $\gamma_1 = \beta_2 = 0$ y, en principio, tendrá soluciones distintas para $\lambda > 0$, $\lambda = 0$, y $\lambda < 0$

$\lambda = 0$ Para $\lambda = 0$ la solución será de la forma $y(x) = C_1x + C_2$ como $y(0) = 0$ tendremos que $C_2 = 0$ y como $\frac{dy(x)}{dx}\Big|_{x=\pi} = 0$ necesariamente $C_1 = 0$. Con lo cual la única solución es $y(x) = 0$ y λ no será un autovalor de la ecuación (36).

$\lambda < 0$ Para $\lambda < 0$ podemos re-escribirla con $\lambda = -\mu^2$. Entonces la solución general para (36) tendrá la forma $y(x) = C_1e^{\mu x} + C_2e^{-\mu x}$. Las condiciones de frontera imponen

$$0 = C_1 + C_2 \quad \wedge \quad 0 = \mu (C_1e^{\mu\pi} - C_2e^{-\mu\pi})$$

y otra vez, tendremos como única solución $0 = C_1 = C_2$ y λ no será un autovalor de la ecuación (36).

$\lambda > 0$ Para el caso $\lambda > 0$ usamos $\lambda = \mu^2$ y la solución será del tipo $y(x) = C_1 \cos(\mu x) + C_2 \sin(\mu x)$. Las condiciones de frontera imponen: $y(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$ y

$$\frac{dy(x)}{dx}\Big|_{x=\pi} = C_2\mu \cos(\mu\pi) = 0 \Rightarrow \mu_n = \pm \frac{2n+1}{2} \Rightarrow \lambda_n = \frac{(2n+1)^2}{4} \quad \text{para } n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Es decir, tendremos infinitos auto valores asociados con infinitas autofunciones $y_i(x) = \sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right)$ para $n = 0, 1, 2, 3, \dots$. En primer lugar, es importante señalar un que, por ser \mathbb{L} un operador hermítico sus autovalores son reales y cumplen $\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 \dots$, es decir son crecientes para índices crecientes de las autofunciones. En segundo lugar que las infinitas autofunciones funciones forman una base ortogonal y, por lo tanto la suma de todas esas soluciones, también será solución de (36), con las condiciones de frontera $y(0) = 0 \wedge \frac{dy(x)}{dx}\Big|_{x=\pi} = 0$ y $\lambda > 0$ puede ser escrita como

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right) \quad (37)$$

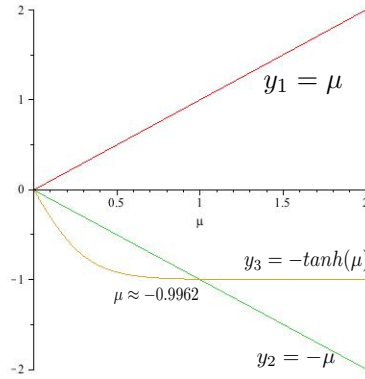


Figura 1: Las posibles soluciones $\mu = -\tanh(\mu\pi)$, tanto para $\mu > 0$ como para $\mu < 0$ para el intervalo $[0, 2]$ se muestra claramente en la figura. Para $\mu > 0$ no existe solución, pero para $\mu < 0$, se encuentra numéricamente que $\mu \approx -0,9962$

Esta hecho nos permitirá resolver el problema inhomogéneo, $\mathbb{L}|u\rangle = |f\rangle$, y será analizado en detalle más adelante.

2.4.2. Condición Regular con $y(0) = 0 \wedge y(\pi) + \frac{dy(x)}{dx}\bigg|_{x=\pi} = 0$

Para este caso tendremos una condición de frontera regular con $\gamma_1 = 0$ y, en principio, tendrá soluciones distintas para $\lambda > 0$, $\lambda = 0$, y $\lambda < 0$

$\lambda = 0$ Para $\lambda = 0$ Se cumplen las mismas situaciones que el caso anterior y se demuestra que sólo es posible la solución trivial $y(x) = 0$

$\lambda < 0$ Para el caso $\lambda < 0$, una vez más hacemos $\lambda = -\mu^2$ y la solución general tendrá la forma $y(x) = C_1 e^{\mu x} + C_2 e^{-\mu x}$. Las condiciones de frontera imponen

$$C_1 = -C_2 \quad \wedge \quad 0 = (C_1 e^{\mu\pi} + C_2 e^{-\mu\pi}) + \mu (C_1 e^{\mu\pi} - C_2 e^{-\mu\pi})$$

con lo cual

$$\mu = -\frac{(e^{\mu\pi} - e^{-\mu\pi})}{(e^{\mu\pi} + e^{-\mu\pi})} \equiv -\tanh(\mu\pi)$$

Esta ecuación trascendente se tiene que resolver numéricamente. Si $\mu > 0$ no existirá solución para $\mu = -\tanh(\mu\pi)$. Esto se ilustra claramente en la figura 1. No hay punto de corte entre las dos funciones. Por lo tanto volvemos al caso de la solución trivial $y(x) = 0$. Si $\mu < 0$ entonces, al resolver numéricamente, encontramos que $\mu \approx -0,9962$, con lo cual $\lambda \approx -0,9924$ y consecuentemente $y(x) \approx C_1 (e^{-0,9962x} - e^{0,9962x})$

$\lambda > 0$ Para el caso $\lambda > 0$, una vez más hacemos $\lambda = \mu^2$ y la solución será del tipo $y(x) = C_1 \cos(\mu x) + C_2 \sin(\mu x)$. Las condiciones de frontera imponen: $y(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$ y, para este caso

$$y(\pi) = 0 = C_2 (\sin(\mu\pi) + \mu \cos(\mu\pi)) \Rightarrow \mu = -\tan(\mu\pi)$$

Otra vez, la ecuación trascendente $\mu = -\tan(\mu\pi)$, se tiene que resolver numéricamente. No obstante, procedemos a analizar una posible representación gráfica que se muestra en la Figura 2. Claramente,

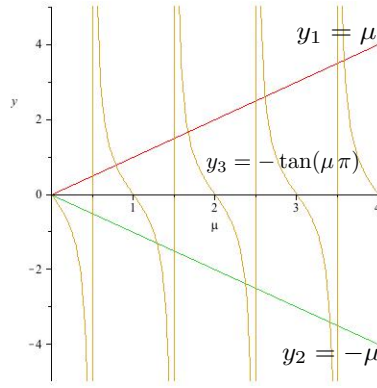


Figura 2: Las posibles soluciones de $\mu = -\tan(\mu\pi)$, tanto para $\mu > 0$ como para $\mu < 0$ para el intervalo $[0, 4]$ se muestra claramente en la figura. Tanto para $\mu > 0$ como para $\mu < 0$ existen infinitas soluciones.

tanto para $\mu > 0$ como para $\mu < 0$ existen infinitas soluciones. Si resolvemos numéricamente para el caso $\mu > 0$ encontramos que

$$\mu_1 \approx 0,7876, \mu_2 \approx 1,6716, \mu_3 \approx 2,6162 \dots \Rightarrow \lambda_1 \approx 0,6204, \lambda_2 \approx 2,7943, \lambda_3 \approx 6,8446 \dots$$

Del mismo modo, para $\mu < 0$ se obtiene

$$\tilde{\mu}_1 \approx -1,2901, \tilde{\mu}_2 \approx -2,3731, \tilde{\mu}_3 \approx -3,4092 \dots \Rightarrow \tilde{\lambda}_1 \approx 1,6644, \tilde{\lambda}_2 \approx 5,6314, \tilde{\lambda}_3 \approx 11,6225 \dots$$

Por lo tanto la solución, se podrá escribir,

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sin(\mu_n x) - \sin(|\tilde{\mu}_n| x) \quad (38)$$

2.4.3. Condiciones Periódicas

En el caso de condiciones de frontera periódicas tendremos $y(0) = y(L)$ y $\frac{dy(x)}{dx}\bigg|_{x=0} = \frac{dy(x)}{dx}\bigg|_{x=L}$. Una vez más se distinguen tres casos.

$\lambda = 0$. En este caso, la solución vuelve a ser $y(x) = C_1 x + C_2$ y las condiciones de frontera imponen

$$y(0) = y(L) \Rightarrow C_2 = C_1 L + C_2 \Rightarrow C_1 = 0 \quad \frac{dy(x)}{dx}\bigg|_{x=0} = \frac{dy(x)}{dx}\bigg|_{x=L} \Rightarrow C_2 = C_2$$

Por lo tanto, para $\lambda = 0$, la solución (36) con condiciones de borde periódicas, será $y(x) = C_2$

$\lambda < 0$. Una vez más, $\lambda = -\mu^2$ y la solución general tendrá la forma $y(x) = C_1 e^{\mu x} + C_2 e^{-\mu x}$. Las condiciones de frontera imponen

$$y(0) = y(L) \Rightarrow C_1 (1 - e^{\mu L}) = C_2 (e^{-\mu L} - 1)$$

y

$$\frac{dy(x)}{dx}\bigg|_{x=0} = \frac{dy(x)}{dx}\bigg|_{x=L} \Rightarrow C_1 (1 - e^{\mu L}) = -C_2 (e^{-\mu L} - 1)$$

Por lo tanto, $C_1 = C_2 = 0$, y obtenemos la solución trivial $y(x) = 0$ para valores de $\lambda < 0$.

$\lambda > 0$. Al igual que en los casos anteriores hacemos $\lambda = \mu^2$ y la solución será del tipo $y(x) = C_1 \cos(\mu x) + C_2 \sin(\mu x)$. Las condiciones de frontera imponen:

$$y(0) = y(L) \Rightarrow C_1 (1 - \cos(\mu L)) = C_2 \sin(\mu L)$$

y

$$\left. \frac{dy(x)}{dx} \right|_{x=0} = \left. \frac{dy(x)}{dx} \right|_{x=L} \Rightarrow C_2 (1 - \cos(\mu L)) = -C_1 \sin(\mu L)$$

con lo cual, al resolver para C_2 se obtiene

$$2C_1 (1 - \cos(\mu L)) = 0 \Rightarrow \cos(\mu L) = 1 \Rightarrow \mu_n = \pm \frac{2n\pi}{L} \Rightarrow \lambda_n = \left(\frac{2n\pi}{L} \right)^2 \text{ para } n = 0, 1, 2, 3 \dots$$

por lo cual, para cada autovalor λ_n tendremos asociadas dos autofunciones: $y_1(x) = \cos\left(\frac{2n\pi}{L}x\right)$ y $y_2(x) = \sin\left(\frac{2n\pi}{L}x\right)$