Variable Compleja...*

L. A. Núñez**
Centro de Física Fundamental,
Departamento de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad de Los Andes, Mérida 5101, Venezuela y
Centro Nacional de Cálculo Científico, Universidad de Los Andes, (CeCalCULA),
Corporación Parque Tecnológico de Mérida, Mérida 5101, Venezuela

Versión α 1.0 Octubre 2006

Índice

1. Series por todos lados

Las series o sucesiones se nos presentan casi por todos lados en Física. Cuando no sabemos resolver un problema analíticamente, lo más cercano serán las soluciones por series, por cuanto las series nos ayudarán a definir funciones y a estudiar su continuidad o derivabilidad.

Representaremos unas serie como

$$S_i = \sum_{n=1}^{i} a_n \qquad \left\{ \begin{array}{lll} i = N & \Longrightarrow & \text{la serie es finita con } N \text{ elementos} \\ i \to \infty & \Longrightarrow & \text{la serie es infinita} \end{array} \right.$$

Nos van a interesar las series infinitas, ellas contienen a las series finitas a las cuales llamaremos sumas parciales. Una serie infinita S_∞ la podremos separar en sumas parciales finitas S_i, y si la suma parcial converge a un número finito S cuando $i \to \infty$ diremos que la serie *converge*. Si no, diremos que *diverge*. Se dirá que la serie *diverge* si el valor de la sumatoria aumenta indeteniblemente, pero también puede oscilar, con lo cual tampoco converge.

$$S_i = \sum_{n=1}^{i} (-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots + (-1)^i + \cdots$$

*** ADVERTENCIA: El presente documento constituye una guía inacabada y en evolución para los estudiantes de Métodos Matemáticos de la Física de la Universidad de Los Andes. Es, en el mejor de los casos, un FORMULARIO y de ninguna manera sustituye a los líbros de texto del curso. La bibliografía de la cual han surgido estas notas se presenta al final de ellas y debe ser consultada por los estudiantes. Es importante resaltar que por ser un documento en evolución es posible que existan versiones más completas y actualizadas en este mismo sitio WEB**

**e-mail: `nunez@ula.ve` Web: http://webdelprofesor.ula.ve/ciencias/nunez/

Esto se puede formalizar un poco diciendo que la condición para la existencia de un límite S es que para cada $\epsilon > 0$ existe un número $N = N(\epsilon)$ tal que

$$\|S - S_i\| < \epsilon \quad \text{para } i > N \qquad \Rightarrow \|S_j - S_i\| < \epsilon \quad \text{para, todo} \;\; i, j > N$$

Esta afirmación se denomina **criterio de Cauchy** [1] sobre la convergencia de las series parciales. Esto es, la condición necesaria y suficiente para que una suma parcial S_i converja y quiere decir que las sumas parciales convergen a medida que avanzamos en los términos de la serie.

1.1. La Suma de la Serie

De las series nos interesερá conocer cuanto suman. Es decir, cuál es el valor de S_i para una serie finita cuando $i = N$ Pero también estaremos interesados en conocer cuánto suma una serie infinita. Empecemos con las finitas.

1.1.1. Las Series de Siempre

De siempre hemos conocido algunas series emblemáticas

Serie aritmética Desde siempre hemos oído hablar de progresiones aritméticas. Ellas son, sencillamente

$$S_N = \sum_{n=0}^{N-1} (a + nd) = a + (a + d) + (a + 2d) + (a + 3d) + (a + 4d) + \cdots + [a + (N-1)d] \,.$$

Es fácil comprobar que al desarrollar la serie en orden inverso y sumar ambas

$$\begin{array}{rcccccc} S_N = & a & +(a+d) & +(a+2d) & +(a+3d) & +\cdots & +[a+(N-1)d] \\ S_N = & [a+(N-1)d] & +[a+(N-2)d] & +[a+(N-3)d] & +[a+(N-4)d] & +\cdots & +a \end{array}$$

Con lo cual

$$S_N = \frac{N}{2}\left[a + a + (N - 1d)\right] \rightarrow S_N = \frac{N}{a}\left[\text{Primer Término} + \text{Ultimo Término}\right]$$

obviamente, si $N \rightarrow \infty$ la serie diverge.

Serie Geométrica De ésta también sabemos desde siempre....

$$S_N = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{N-1} = \sum_{i=0}^{N} ar^i$$

y si restamos

$$\begin{array}{rcccccc} S_N = & a & +ar & +ar^2 & +ar^3 & +\cdots & +ar^{N-1} \\ rS_N = & ar & +ar^2 & +ar^3 & +ar^4 & +\cdots & +ar^N \end{array}$$

también es inmediato comprobar que si $\|r\| < 1$

$$S_N = \frac{a(1 - r^N)}{1 - r} \quad \text{con lo cual tendremos que la suma de la serie será} S = \lim_{N\rightarrow\infty} S_N = \frac{a}{1 - r}$$

y, divergerá (u oscilará) si $\|r\| \geqslant 1$

[1] Augustin Louis Cauchy Paris, 1789 - 1857, matemático francés pionero en los estudios de análisis (real y complejo) y de la Teoría de los Grupos de Permutación. Cauchy hizo aportes importantes en los criterios de convergencia y divergencia de series infinitas, así como tambien, en ecuaciones diferenciales, determinantes, probabilidades y Física Matemática

Series Aritmético-geométricas Estas series, un poco más exóticas y como su nombre lo sugiere son una combinación de las anteriores. Estos es

$$S_N = a + (a+d)r + (a+2d)r^2 + (a+3d)r^3 + (a+4d)r^4 + \cdots + [a + (N-1)d]\, r^N = \sum_{n=0}^{N-1} (a+nd)r^n$$

y con la misma estrategia de las geométricas se llega a encontrar el valor de su, nada intuitiva, suma

$$S_N = \frac{a - [a + (N-1)d]\, r^N}{1-r} + \frac{rd(1-r^{N-1})}{(1-r)^2}$$

Otra vez, si si $\|r\| < 1$ entonces cuando $N \to \infty$

$$S = \frac{a}{1-r} + \frac{rd}{(1-r)^2}$$

Ejercicios Algunos ejercicios (respectivos) de las situaciones anteriores lo constituyen

1. Encuentre la suma de los 100 primeros enteros
2. Encuentre la distancia total que recorre una pelota que rebota verticalmente y que en cada rebote pierde 2/3 de su energía cinética
3. Encuentre la suma de la serie $S = 2 + \frac{5}{2} + \frac{8}{4} + \frac{11}{8} + \cdots$

Serie Armónica Quizá no la conocíamos con este nombre (y menos por sus propiedades) pero seguro nos la hemos tropezado

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots \frac{1}{n} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

Esta serie es engañosa, en apariencia parece converger, pero no es así. Si analizamos con más cuidado, veremos que hay sutilezas

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \underbrace{\frac{1}{2}}_{s_0} + \underbrace{\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)}_{s_1} + \underbrace{\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right)}_{s_2} + \underbrace{\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \cdots + \frac{1}{16}\right)}_{s_3} + \cdots$$

y puede ser reescrita como

$$1 + \underbrace{\frac{1}{1+1}}_{s_0} + \underbrace{\frac{1}{2+1} + \frac{1}{2+2}}_{s_1} + \underbrace{\frac{1}{4+1} + \frac{1}{4+2} + \frac{1}{4+3} + \frac{1}{4+4}}_{s_2} + \underbrace{\frac{1}{8+1} + \frac{1}{8+2} + \cdots + \frac{1}{8+8}}_{s_3} + \cdots + \sum_{j=1}^{2^n} \frac{1}{2^n + j} + \cdots$$

con lo cual

$$s_0 = \frac{1}{2}; \quad s_1 = \frac{7}{12} > \frac{1}{2}; \quad s_2 = \frac{533}{840} > \frac{1}{2}; \quad s_3 = \frac{95549}{144144} > \frac{1}{2};$$

y claramente diverge ya que

$$1 + s_0 + s_1 + s_2 + s_3 + \cdots > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots$$

Esta prueba aparentemente se le debe a Nicole D'Oresme[2]. Una de las generalizaciones de la serie harmónica es la función Zeta de Riemann[3] $\zeta(p) = \sum_{n=1}^{\infty} n^p$, la cual analizaremos más adelante en la sección **??**.

[2]**Nicole D'Oresme** (1323-1382) Matemático francés que inventó la geometría coordenada antes de Descartes. Más detalles en http://www-history.mcs.st-and.ac.uk y más detalles sobre la serie harmónica en http://mathworld.wolfram.com/HarmonicSeries.html

[3]**Georg Friedrich Bernhard Riemann** 1826 Hanover, Alemania - 1866 Selasca, Italia, Matemático alemán cuyas ideas sobre las geometría del espacio han tenido un profundo impacto en el desarrollo de la Física Teórica. Igualmente clarificó la noción de integral al introducir el concepto de lo que hoy se conoce como *integral de Riemann*.
Más detalles en http://www-history.mcs.st-and.ac.uk