**Física II**

# Módulo 1: Campo Eléctrico

**Héctor Hernández - 2025**

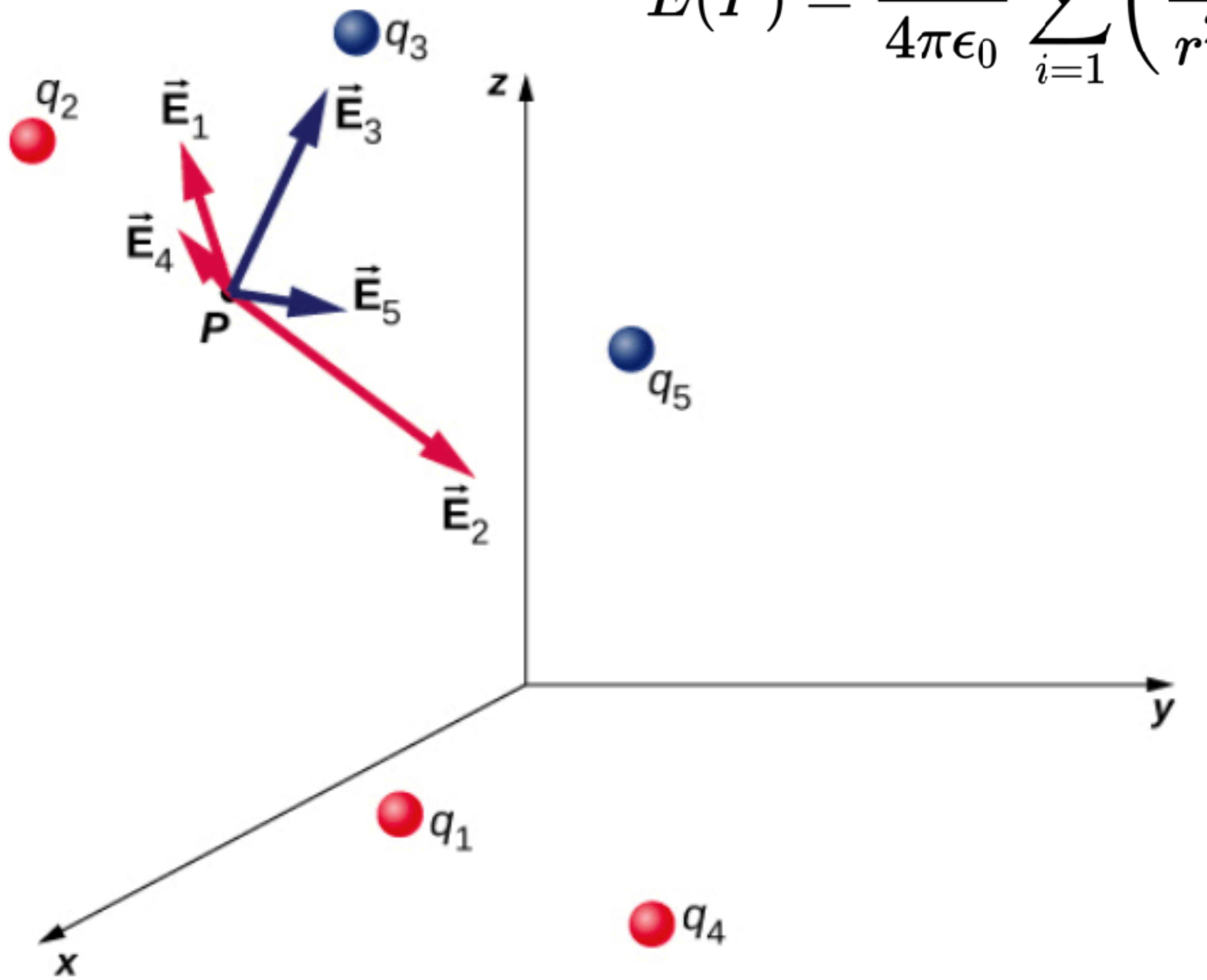
# II. Campo eléctrico y distribuciones de cargas

1. Campo eléctrico de distribuciones de carga
2. Líneas de campo eléctrico
3. Conductores y campo eléctrico
4. Condiciones electrostáticas

# 1. Campo eléctrico de distribuciones de carga

- Las distribuciones de carga que hemos visto hasta ahora han sido discretas: formadas por partículas puntuales individuales.
- Esto contrasta con una distribución de carga continua.
- Si una distribución de carga es continua en lugar de discreta, podemos generalizar la definición del campo eléctrico.
- Simplemente dividimos la carga en trozos infinitesimales y tratamos cada trozo como una carga puntual.

$$\vec{E}(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{q_i}{r^2}\right)\hat{r}$$



- **Densidad de carga lineal**: $\lambda$ ≡ carga por unidad de longitud. $[\mathrm{C/m}]$


$$\lambda = \frac{dq}{dl}$$

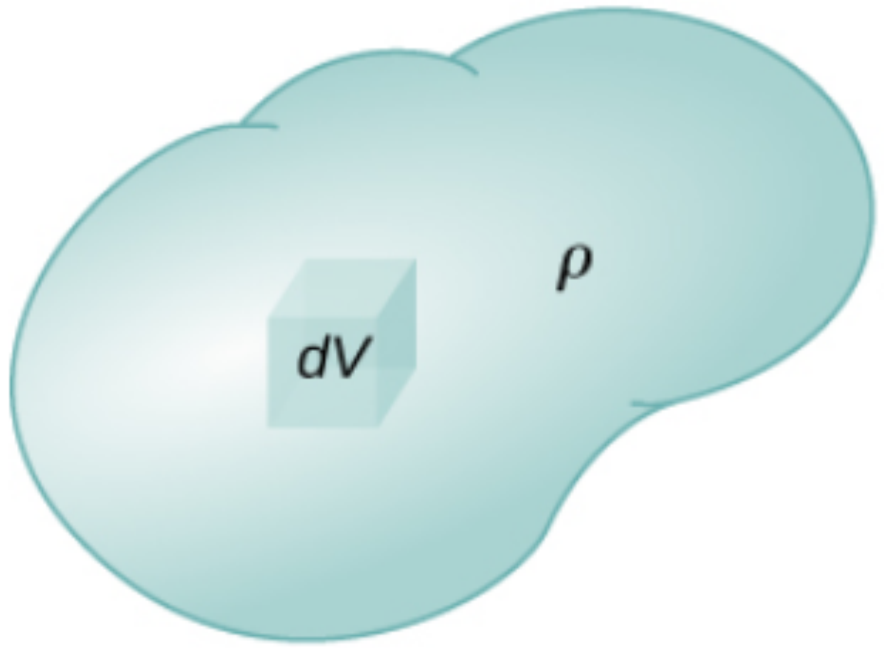
$$\vec{E}(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{\text{linea}}\left(\frac{dq}{r^2}\right)\hat{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{\text{linea}}\left(\frac{\lambda dl}{r^2}\right)\hat{r}$$

- **Densidad de carga superficial:** $\sigma$ ≡ carga por unidad de superficie $[\mathrm{C/m^2}]$


$$\sigma = \frac{dq}{dA}$$

$$\vec{E}(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{\text{sup}}\left(\frac{dq}{r^2}\right)\hat{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{\text{sup}}\left(\frac{\sigma dA}{r^2}\right)\hat{r}$$

- **Densidad de carga volumétrica:** $\rho$ ≡ carga por unidad de volumen $[\mathrm{C/m^3}]$




$$\rho = \frac{dq}{dV}$$

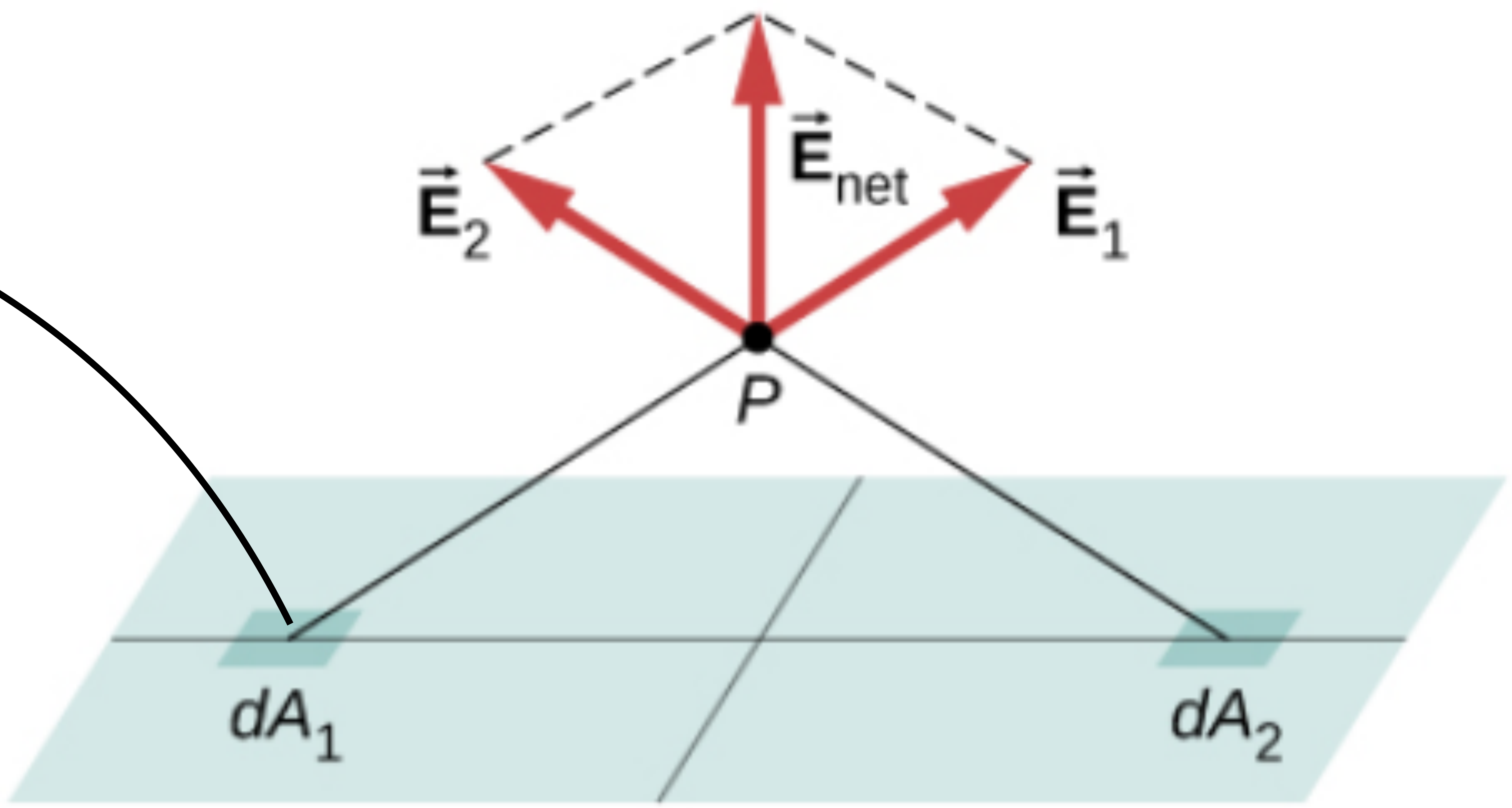
$$\vec{E}(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{\text{vol}}\left(\frac{dq}{r^2}\right)\hat{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{\text{vol}}\left(\frac{\rho dV}{r^2}\right)\hat{r}$$

$$\vec{E}(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{\text{sup}}\left(\frac{dq}{r^2}\right)\hat{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{\text{sup}}\left(\frac{\sigma dA}{r^2}\right)\hat{r}$$

- Las integrales anteriores son generalizaciones de la expresión para el campo de una carga puntual.
- Implícitamente incluyen el principio de superposición.
- La clave para utilizarlas está en conseguir las expresiones correctas para $dl$, $dA$ o $dV$, según sea el caso, expresadas en términos de $r$, y también expresando la función de densidad de carga adecuadamente.
- Las densidades pueden ser constante o pueden depender de la ubicación en la distribución

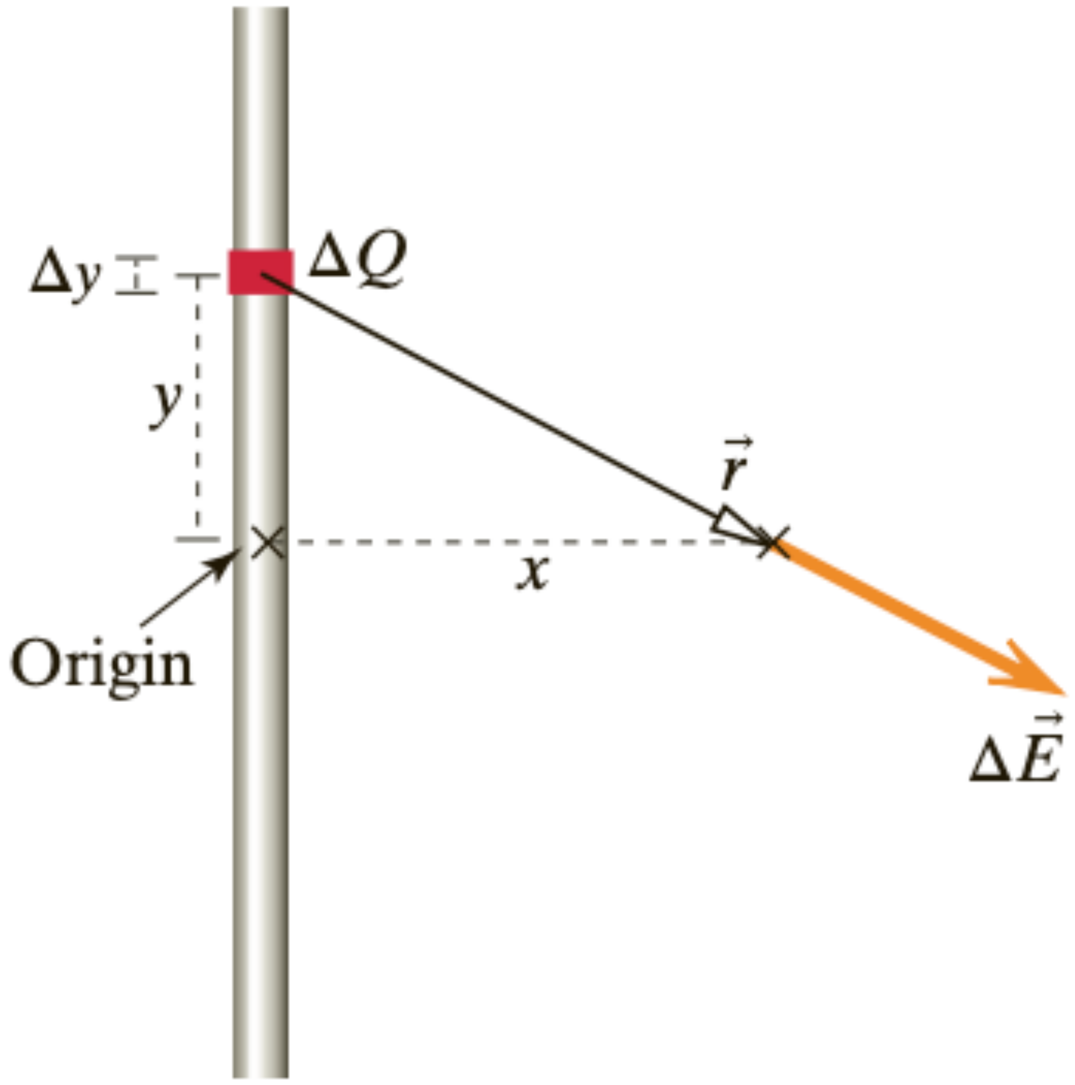
La carga que está distribuida en una área pequeña $\Delta A$ es

$$\Delta q = \sigma\,\Delta A$$




- Supondremos que el objeto estarán cargado uniformemente, a menos que se indique lo contrario, lo que significa que las cargas están repartidas uniformemente sobre el objeto.

## Hilo uniformemente cargado de longitud $L$



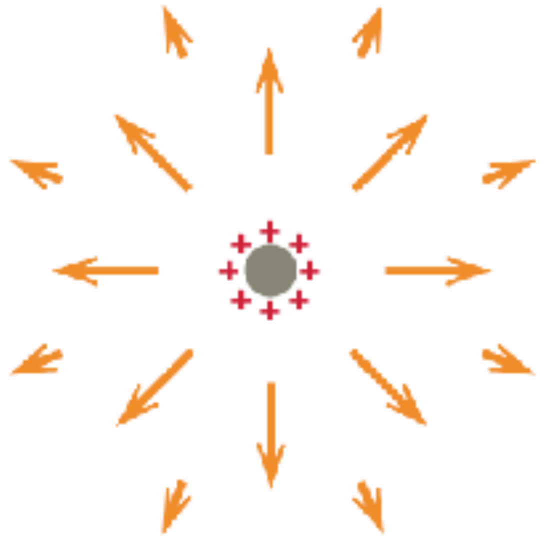

- El proceso de hallar el campo eléctrico debido a la carga distribuida sobre un objeto macroscópico tiene cuatro pasos:

  1. Dividir el objeto cargado en trozos pequeños. Haz un diagrama y dibuja el campo eléctrico $\Delta\vec{E}$ aportado por uno de los trozos.

  2. Elige un origen y unos ejes. Escribe una expresión algebraica para el campo eléctrico $\Delta\vec{E}$ debido a un trozo.

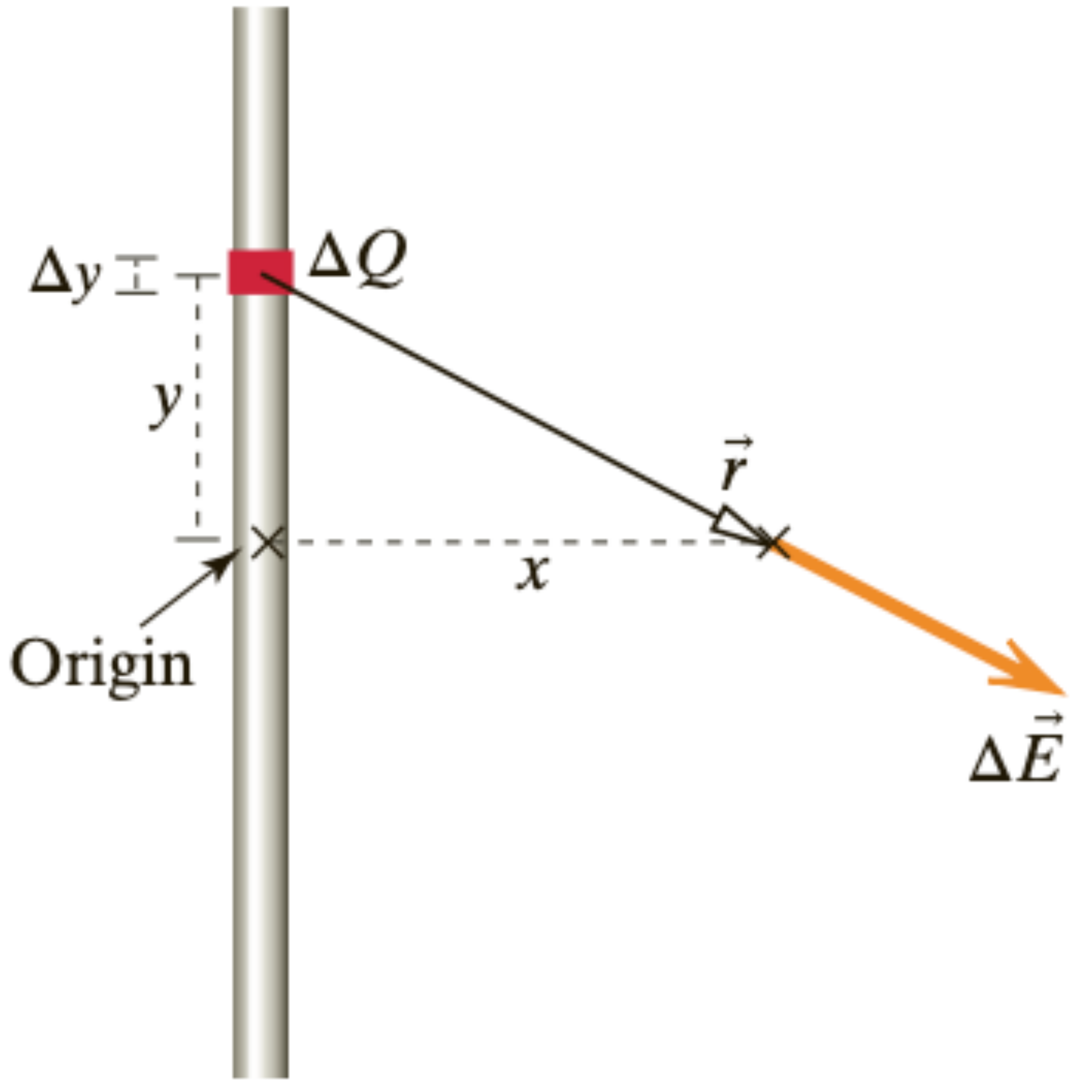
  3. Suma las contribuciones de todas las piezas, numérica o simbólicamente.

  4. Comprobar que el resultado es físicamente correcto.



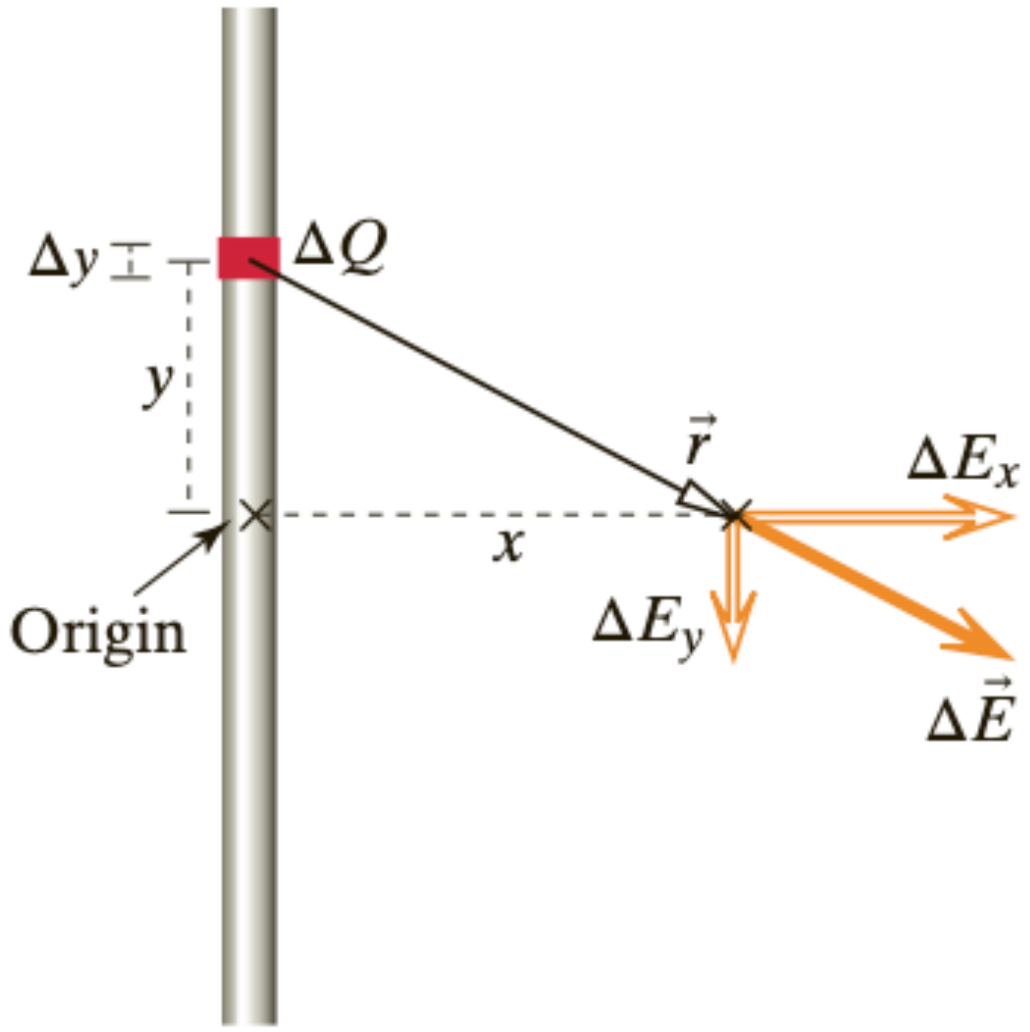
- Podemos tratar el trozo $\Delta Q$ como si fuera una carga puntual, lo que debería ser una aproximación bastante buena siempre que su tamaño sea pequeño comparado con la distancia al lugar de observación.

## Paso 1: Dividir la distribución en trozos; dibujar $\vec{\Delta}$E




- Para simplificar escogeremos un lugar de observación en el plano medio de la varilla (el plano perpendicular a la varilla, que pasa por el punto medio de la misma).

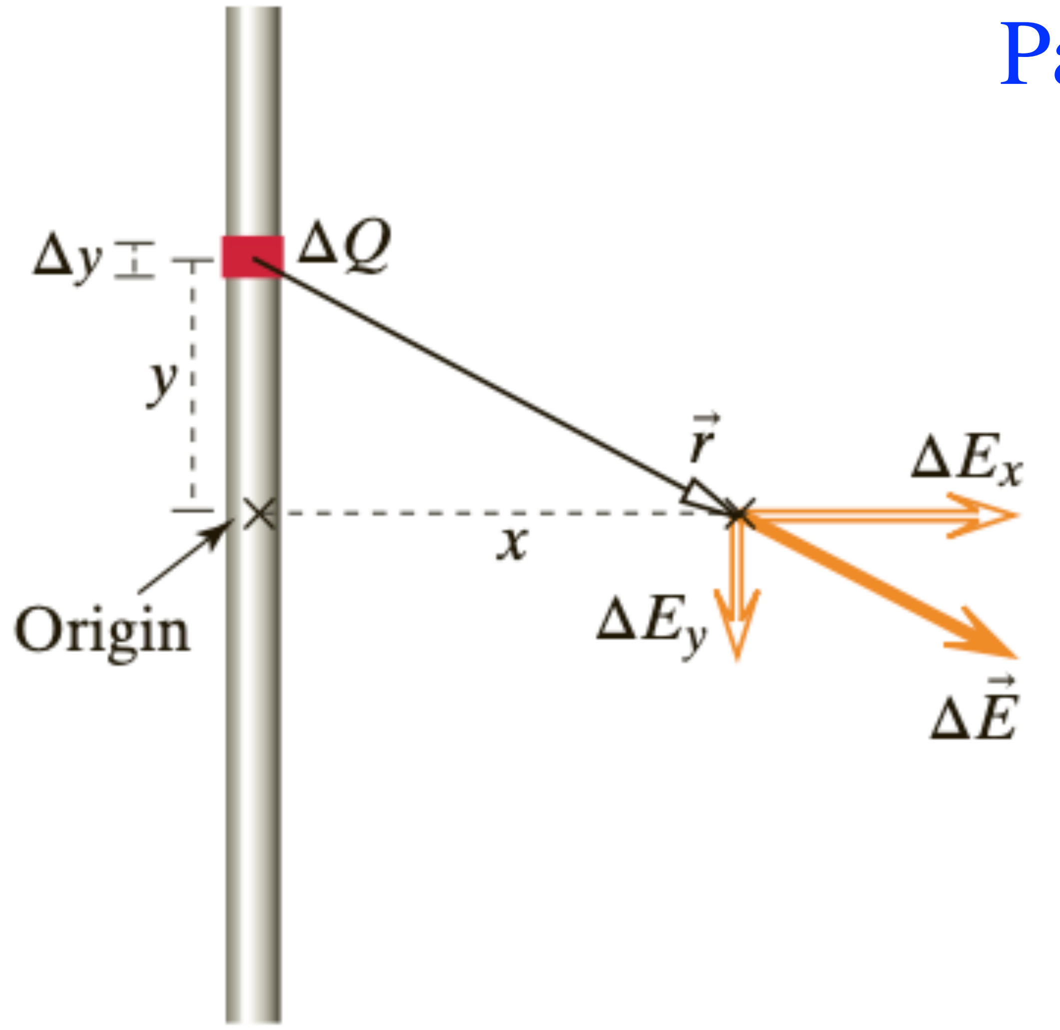
  - La ubicación de una pieza de la varilla depende de $y$.
  - Las coordenadas del lugar de observación deben mantenerse sin cambios.
  - Debemos tener variables que representen la ubicación del segmento de la varilla (variables de integración)




- El vector $\vec{r}$ apunta desde la fuente (el trocito de carga representativo $\Delta Q$) hasta el lugar de observación.

$$\vec{r} = \langle \text{ lug. obs. } \rangle - \langle \text{ lug. fuente } \rangle = \langle x, 0, 0 \rangle - \langle 0, y, 0 \rangle = \langle x, -y, 0 \rangle$$

## Paso 2: Escribir una expresión para el campo eléctrico debido a un trozo de carga




$$\vec{r} = \langle \text{ lug. obs. } \rangle - \langle \text{ lug. fuente } \rangle = \langle x, 0, 0\rangle - \langle 0, y, 0\rangle = \langle x, -y, 0\rangle$$

$$|\vec{r}| = \left[x^2 + (-y)^2\right]^{1/2} = \left[x^2 + y^2\right]^{1/2}$$

$$\hat{r} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = \frac{\langle x, -y, 0\rangle}{\left[x^2 + y^2\right]^{1/2}}$$

- Ahora podemos escribir el vector $\Delta \vec{E}$

$$\Delta \vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\Delta Q}{r^2}\hat{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\Delta Q}{x^2 + y^2}\frac{\langle x, -y, 0\rangle}{\left[x^2 + y^2\right]^{1/2}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\Delta Q}{\left(x^2 + y^2\right)^{3/2}}\langle x, -y, 0\rangle$$

- Es necesario expresar la carga $\Delta Q$ en términos de la variable de integración $y$.

- La varilla está cargada uniformemente con una carga total $Q$ (positiva o negativa), por lo que la cantidad de carga en una sección de longitud $\Delta y$ es igual a

$$\Delta Q = \left(\frac{\Delta y}{L}\right) Q$$

- Lo importante tener claro que $\Delta Q$ es una pequeña fracción de la carga total $Q$, y que hay que expresar $\Delta Q$ en términos de $\Delta y$.

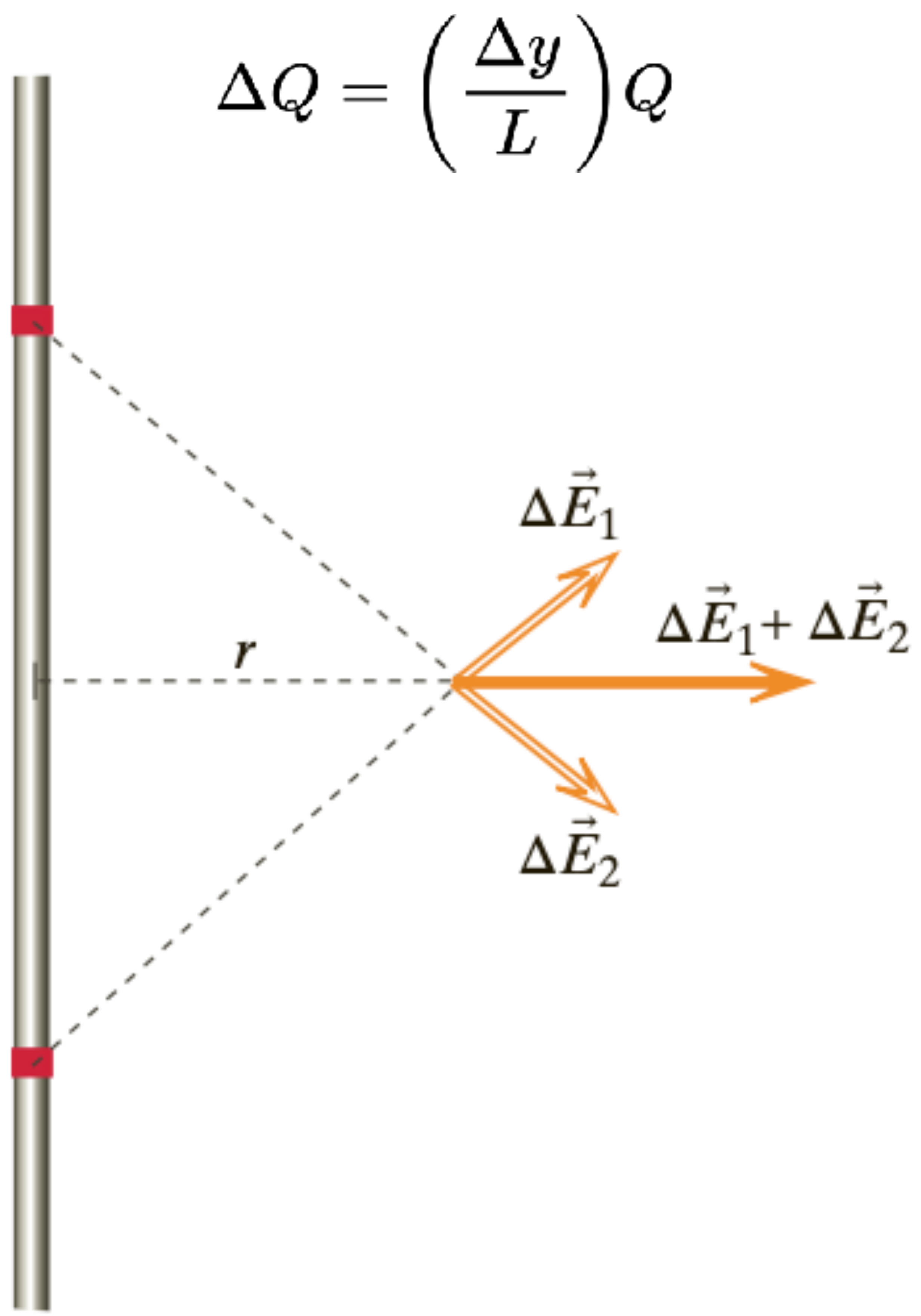
- Las componentes de $\Delta \vec{E}$

$$\Delta E_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{x\Delta Q}{\left(x^2 + y^2\right)^{3/2}}$$

$$\Delta E_y = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{-y\Delta Q}{\left(x^2 + y^2\right)^{3/2}}$$

$$\Delta E_z = 0$$

## Paso 3: Sumar las contribuciones de todas las piezas




### Componentes en $x$

- Cada $\Delta Q$ contribuye con $\Delta E_x$ al campo neto. Si numeramos cada pieza $1, 2, 3, \ldots$

$$\Delta E_x = \Delta E_{x_1} + \Delta E_{x_2} + \Delta E_{x_3} + \cdots$$

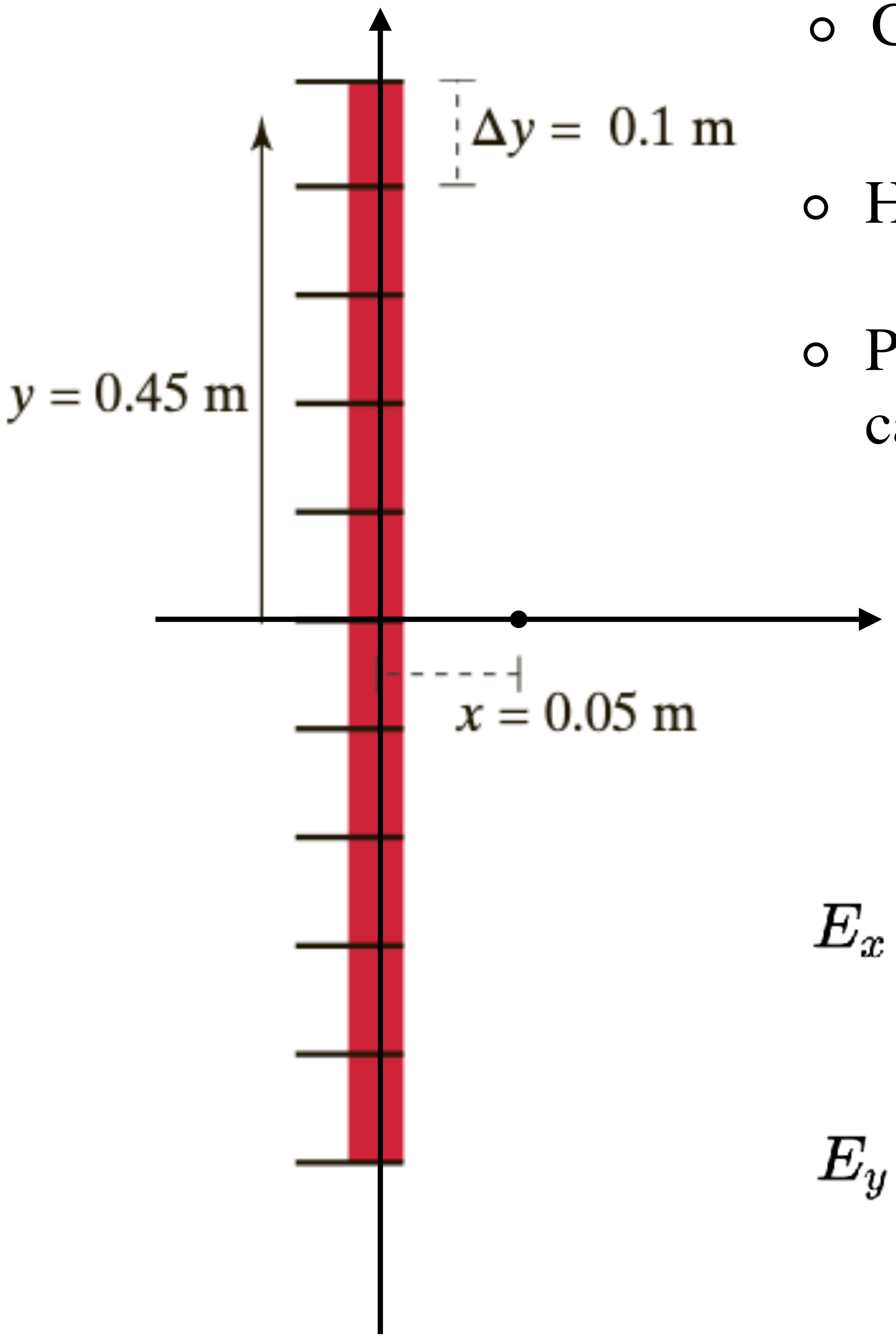
$$E_x = \sum \Delta E_x = \sum \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{L} \frac{x}{\left(x^2 + y^2\right)^{3/2}} \Delta y$$

### Componentes en $y$

$$E_y = \sum \Delta E_y = \sum \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{L} \frac{-y}{\left(x^2 + y^2\right)^{3/2}} \Delta y$$

- ¿Cómo sumar estos términos? Cada término de esta suma es diferente.
- Podemos hacer todas las piezas de la misma longitud $\Delta y$ y sacar $\Delta y$ de la suma, la propia $y$ es diferente para cada pieza a lo largo de la varilla.
- ¿Cómo podemos sumar todas las contribuciones de todas las piezas?

## Suma numérica

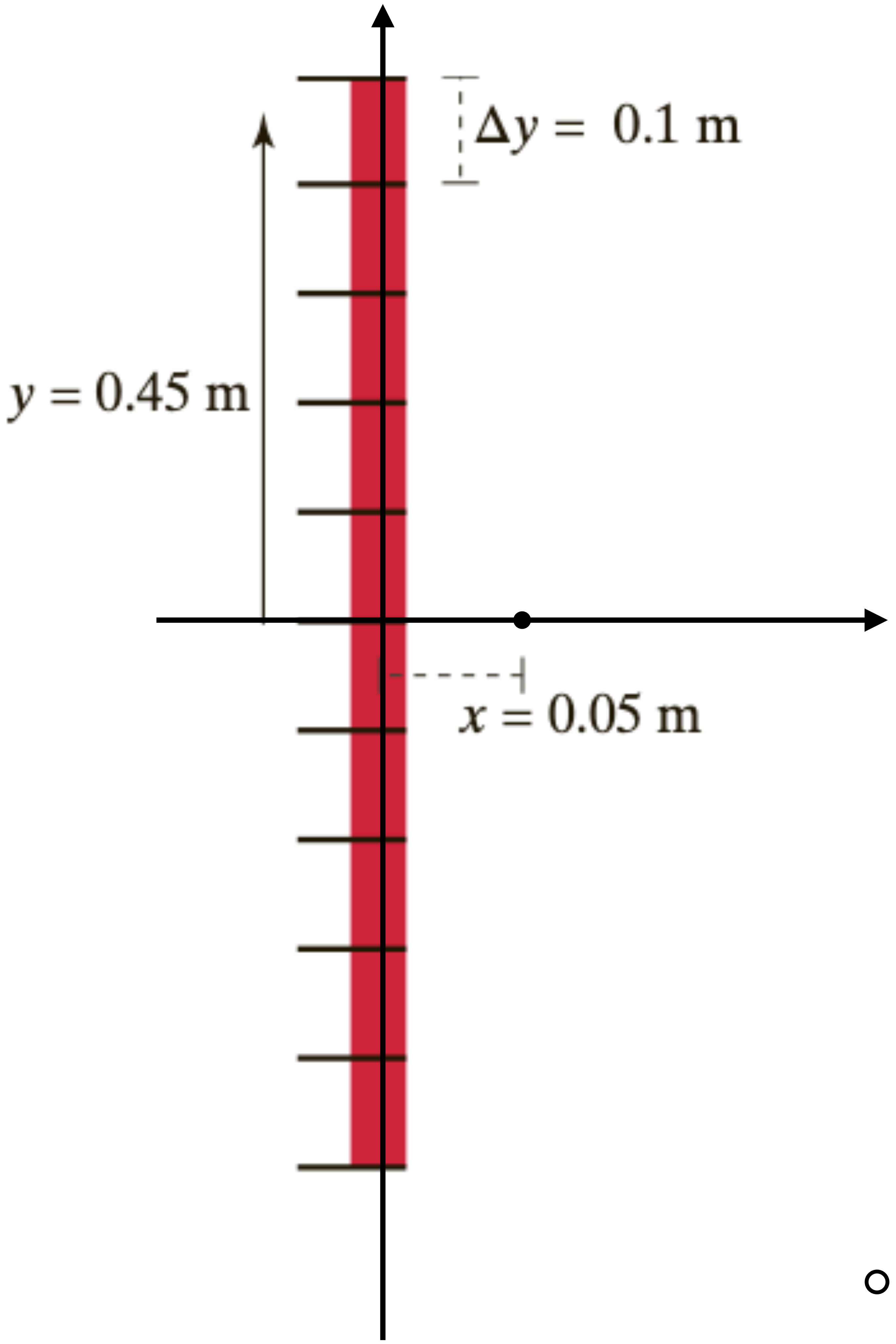



- Podemos dividir la varilla en 10 trozos y sumar cada elemento.
- Calculamos la contribución de cada una de los trozos con $\Delta y = L/10$, y sumar estos 10 números.
- Hagamos este cálculo para el caso de $L = 1$ m, $\Delta y = 0{,}1$ m, $Q = 1$ nC, y $x = 0{,}05$ m.
- Para cada trozo tomaremos $y$ en el centro del trozo, y usaremos una calculadora para evaluar cada término en la suma.

$$E_x = \sum \Delta E_x = \sum \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{L} \frac{x}{\left(x^2 + y^2\right)^{3/2}} \Delta y$$

$$E_y = \sum \Delta E_y = \sum \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{L} \frac{-y}{\left(x^2 + y^2\right)^{3/2}} \Delta y$$

| $y$ | $\Delta E_x$ | $\Delta E_y$ |
|---|---|---|
| +0.45 | | |
| +0.35 | | |
| +0.25 | | |
| +0.15 | | |
| +0.05 | | |
| −0.05 | | |
| −0.15 | | |
| −0.25 | | |
| −0.35 | | |
| −0.45 | | |
| Sum | | |




| $y$ | $\Delta E_x$ | $\Delta E_y$ |
|---|---|---|
| +0.45 | 0.484 | −4.363 |
| +0.35 | 1.018 | −7.127 |
| +0.25 | 2.715 | −13.577 |
| +0.15 | 11.384 | −34.153 |
| +0.05 | 127.279 | −127.279 |
| −0.05 | 127.279 | 127.279 |
| −0.15 | 11.384 | 34.153 |
| −0.25 | 2.715 | 13.577 |
| −0.35 | 1.018 | 7.127 |
| −0.45 | 0.484 | 4.363 |
| Sum | 285.764 | 0.000 |

| **Número de trozos** | $\Delta E_x$ |
|---|---|
| 10 | 285.764 |
| 20 | 353.764 |
| 50 | 358.214 |
| 100 | 358.214 |

- Una de las principales desventajas de sumar las contribuciones numéricamente es que no se obtiene una forma analítica (algebraica) para el campo eléctrico.

- Esto significa que no podemos responder fácilmente a preguntas como: ¿Cómo varía el campo eléctrico con $r$ cerca de una varilla?

- La idea clave del cálculo integral aplicado a problemas como el nuestro es imaginar que no se toman 50 o 100 cortes, sino un número infinito de cortes infinitesimales.

- Dejamos que el número de trozos $N = L/\Delta y$ aumente sin límite, y que la correspondiente longitud del trozo $\Delta y = L/N$ disminuya sin límite. Tomamos el límite cuando $\Delta y$ se hace arbitrariamente pequeño:

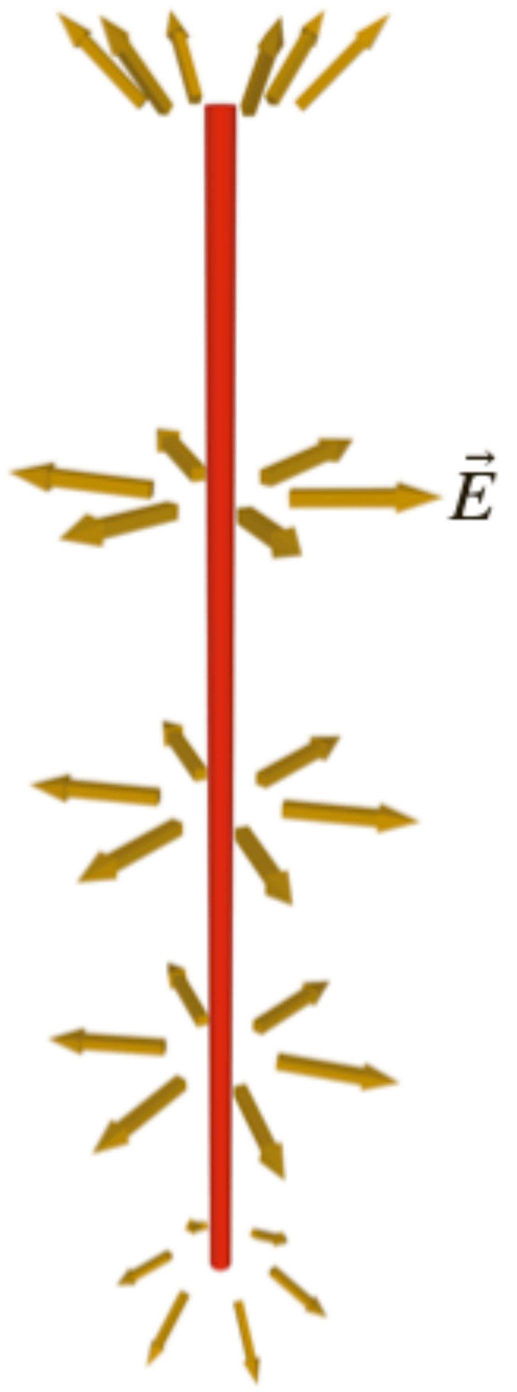
$$E_x = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{L} x \sum \frac{1}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}} \Delta y \quad \Rightarrow E_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{L} x \int_{-L/2}^{+L/2} \frac{1}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}} dy$$

$$\int \frac{1}{\left(x^2+a^2\right)^{3/2}} dx = \frac{x}{a^2\sqrt{x^2+a^2}}$$

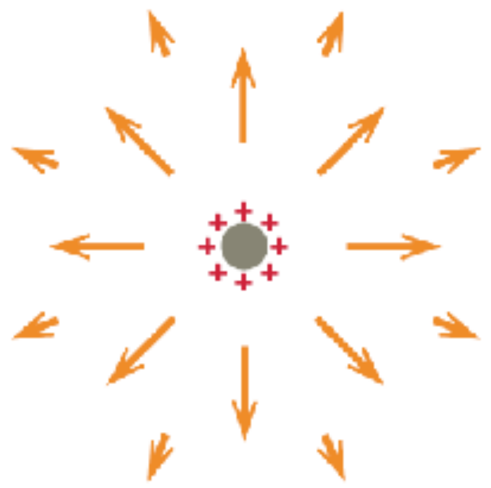
$$\int \frac{x}{\left(x^2+a^2\right)^{3/2}} dx = -\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

$$E_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{L} x \left[ \frac{y}{x^2\sqrt{x^2+y^2}} \right]_{-L/2}^{+L/2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left[ \frac{Q}{x\sqrt{x^2+(L/2)^2}} \right]$$

$$E_y = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{L} \int_{-L/2}^{+L/2} \frac{-y}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}} dy = 0$$




- La varilla y su campo eléctrico asociado tienen simetría cilíndrica, el eje que llamamos eje $x$ podría haber sido girado alrededor de la varilla en cualquier ángulo, y habríamos obtenido la misma respuesta. Para indicar esto, sustituimos $x$ por $r$ en nuestro resultado



$$E_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left[ \frac{Q}{x\sqrt{x^2+(L/2)^2}} \right] \quad \Rightarrow \quad E_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left[ \frac{Q}{r\sqrt{r^2+(L/2)^2}} \right]$$

## Paso 4: Comprobar el resultado

$$E_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{Q}{r\sqrt{r^2+(L/2)^2}}\right]$$

- ¿Dirección: ¿es la dirección cualitativamente correcta? Tenemos el campo eléctrico apuntando en línea recta desde el punto medio de la varilla, lo cual es correcto, dada la simetría de la situación. La componente vertical del campo eléctrico debería ser cero.
- Unidades: ¿tenemos las unidades correctas? Las unidades deben ser las mismas que las de la expresión del campo eléctrico para una partícula puntual:

$$\frac{1}{r\sqrt{r^2+(L/2)^2}} \text{ tiene las mismas unidades } \frac{1}{r^2}$$

Si $r \gg L$, entonces $\dfrac{1}{r\sqrt{r^2+(L/2)^2}} \approx \dfrac{1}{r\sqrt{r^2+0}} = \dfrac{1}{r^2}$. Por lo tanto $E \to \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q}{r^2}$, como debe ser

- Comparar con el cálculo numérico:

Anteriormente realizamos un cálculo numérico para el caso de:

$Q = 1\times 10^{-9}\,\mathrm{C}, L = 1\ \mathrm{m}$, y $r = 0{,}05\ \mathrm{m}$.

Vimos que si utilizábamos 50 o más rodajas el resultado era $E_x = 358{,}214\ \mathrm{N/C}$.

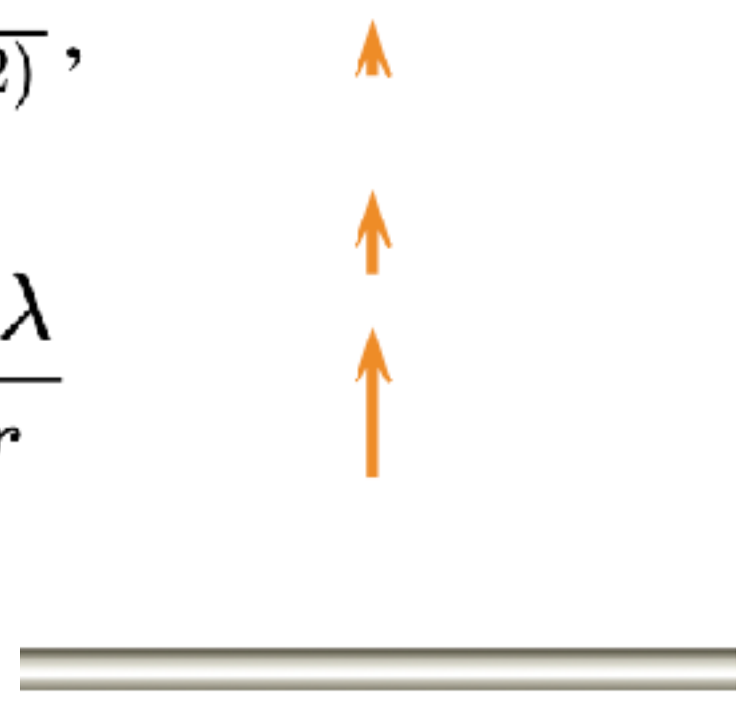
$$E_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r\sqrt{r^2+(L/2)^2}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1\times 10^{-9}}{(0.05)\sqrt{0.05^2+0.5^2}}\right) = 358.213\ \mathrm{N/C}$$

- Caso especial: Un hilo muy largo

Si $L \gg r$, entonces

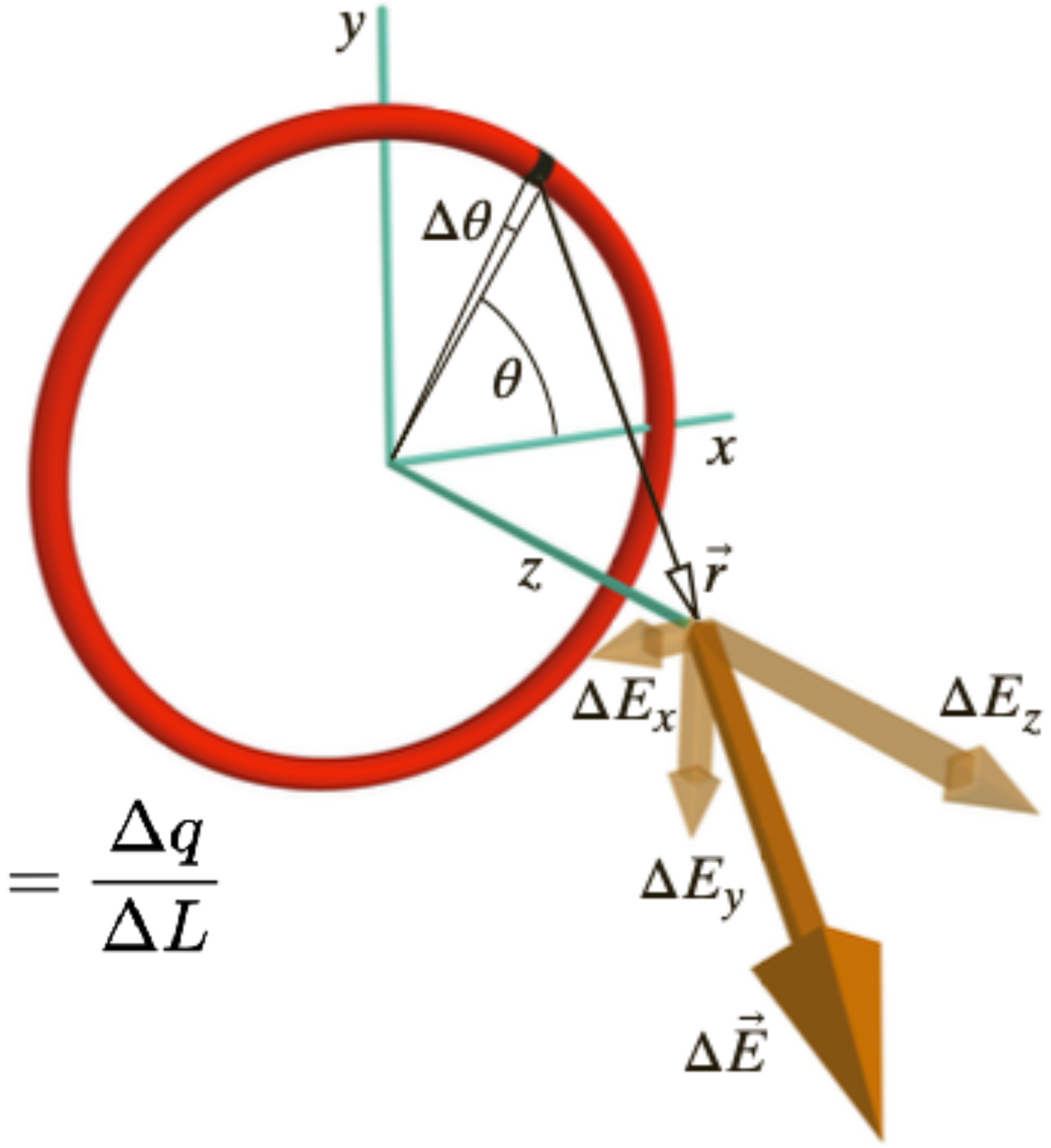
$$\frac{1}{r\sqrt{r^2+(L/2)^2}} \approx \frac{1}{r\sqrt{(L/2)^2}} = \frac{1}{r(L/2)},$$

$$E \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2(Q/L)}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\lambda}{r}$$



✦ Notebook

## Anillo delgado de radio *R* uniformemente cargado




$$\lambda = \frac{\Delta q}{\Delta L}$$

Paso 1: Dividir la distribución en trozos; dibujar $\vec{\Delta}$E

- Una trozo de anillo tiene una longitud angular Δθ

Paso 2: Escribir una expresión para el campo eléctrico debido a un trozo de carga

$$\vec{r} = \langle \text{ Pto. de obs. } \rangle - \langle \text{ Pto. de fte. } \rangle = \langle 0, 0, z \rangle - \langle R\cos\theta, R\sin\theta, 0 \rangle$$
$$= \langle -R\cos\theta, -R\sin\theta, z \rangle$$

$$|\vec{r}| = \sqrt{(-R\cos\theta)^2 + (-R\sin\theta)^2 + z^2} = \left(R^2 + z^2\right)^{1/2}$$

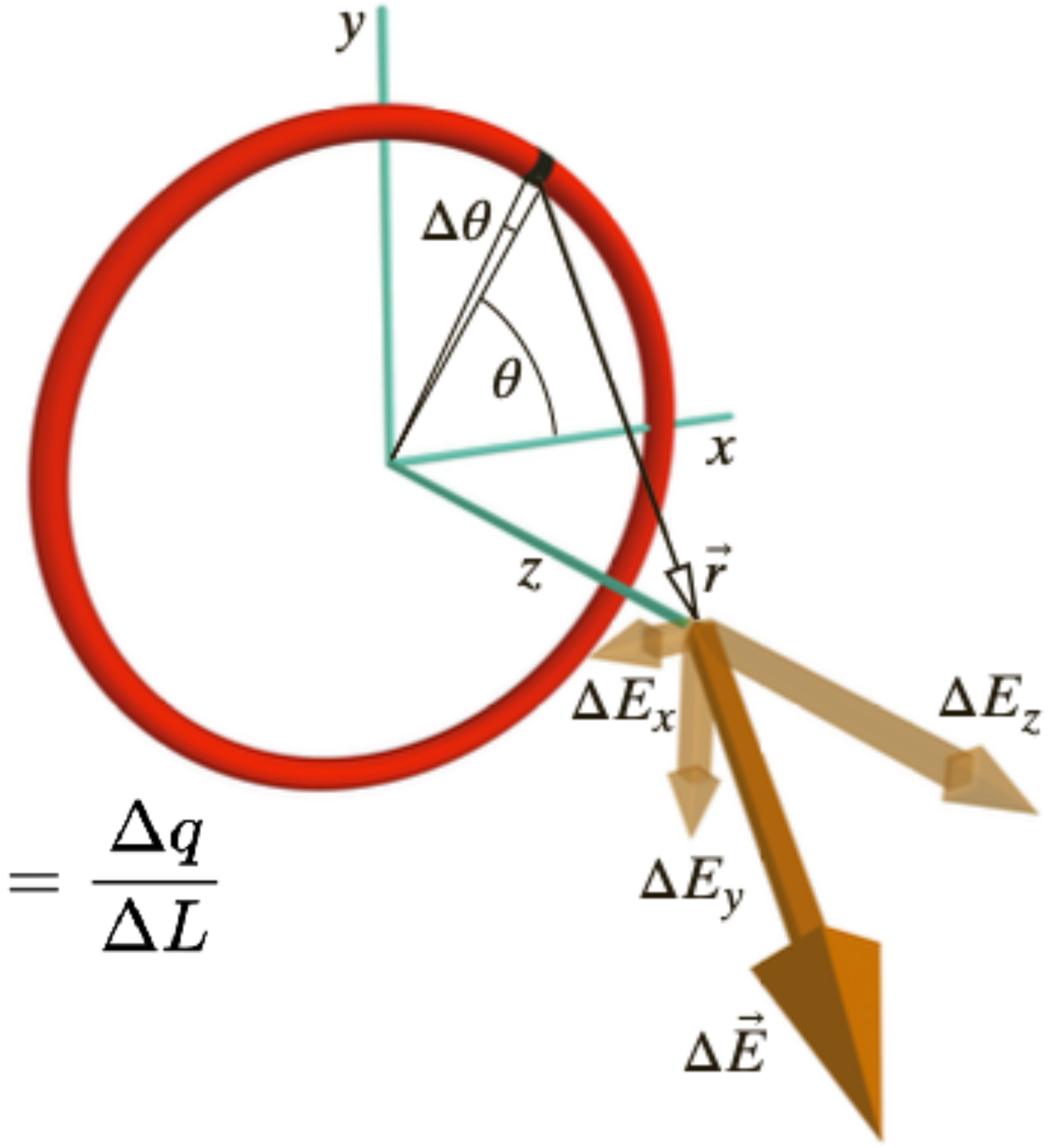
$$\hat{r} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = \frac{\langle -R\cos\theta, -R\sin\theta, z \rangle}{(R^2 + z^2)^{1/2}}$$

Origen: Centro del anillo
Ubicación del trozo de carga: Descrito por $\theta$
Variable de integración: $\theta$

$\Delta q$ es una pequeña fracción de la carga total $Q$, y que hay que expresarla en términos de Δθ.

$$\Delta q = Q\left(\frac{\Delta\theta}{2\pi}\right)$$

## Anillo delgado de radio *R* uniformemente cargado




$$\lambda = \frac{\Delta q}{\Delta L}$$

Paso 1: Dividir la distribución en trozos; dibujar $\vec{\Delta}$E

- Una trozo de anillo tiene una longitud angular Δθ

Paso 2: Escribir una expresión para el campo eléctrico debido a un trozo de carga

$$\vec{r} = \langle \text{ Pto. de obs. } \rangle - \langle \text{ Pto. de fte. } \rangle = \langle 0, 0, z\rangle - \langle R\cos\theta, R\sin\theta, 0\rangle$$
$$= \langle -R\cos\theta, -R\sin\theta, z\rangle$$
$$|\vec{r}| = \sqrt{(-R\cos\theta)^2 + (-R\sin\theta)^2 + z^2} = \left(R^2 + z^2\right)^{1/2}$$
$$\hat{r} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = \frac{\langle -R\cos\theta, -R\sin\theta, z\rangle}{\left(R^2+z^2\right)^{1/2}}$$

Origen: Centro del anillo
Ubicación del trozo de carga: Descrito por $\theta$
Variable de integración: $\theta$

$\Delta Q$ es una pequeña fracción de la carga total $Q$, y que hay que expresarla en términos de Δθ.

$$\Delta Q = Q\left(\frac{\Delta\theta}{2\pi}\right)$$

$$\Delta E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\Delta Q}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\Delta Q}{(R^2+z^2)}$$
$$\Delta\vec{E} = (\Delta E)\hat{r} = \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q\left(\frac{\Delta\theta}{2\pi}\right)}{(R^2+z^2)}\right)\frac{\langle -R\cos\theta, -R\sin\theta, z\rangle}{\left(R^2+z^2\right)^{1/2}}$$
$$\Delta\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{2\pi}\frac{\Delta\theta}{\left(R^2+z^2\right)^{3/2}}\langle -R\cos\theta, -R\sin\theta, z\rangle$$

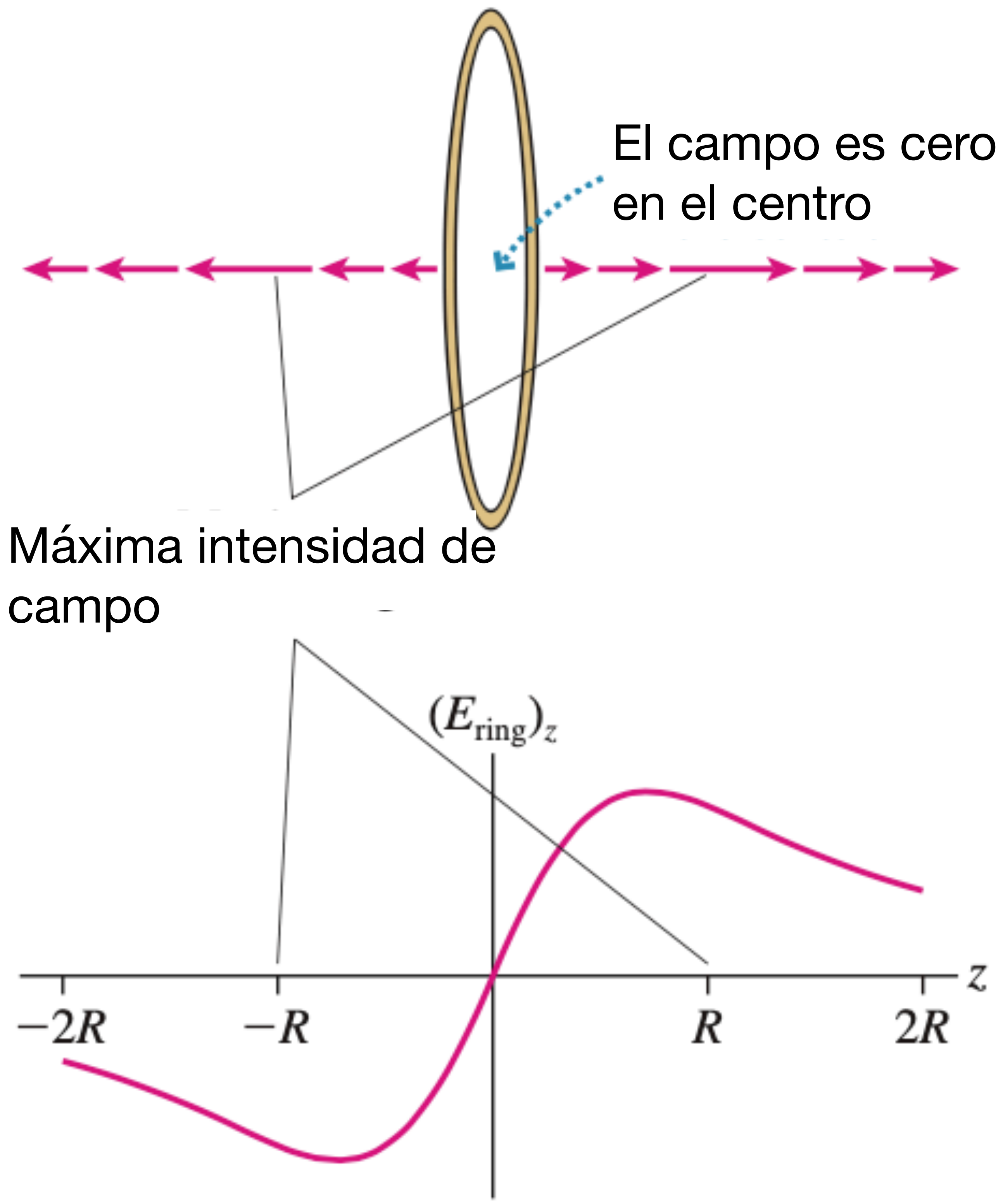
- Por la simetría las componentes $x$ sumarán cero, al igual que las componentes $y$. Las componentes $z$ no se cancelarán, por lo que:

$$\Delta E_z = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{2\pi}\frac{z}{\left(R^2+z^2\right)^{3/2}}\Delta\theta \Rightarrow dE_z = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{2\pi}\frac{z}{\left(R^2+z^2\right)^{3/2}}d\theta$$

## Paso 3: Sumar las contribuciones de todas las piezas

$$E_z = \int_0^{2\pi} dE_z = \int_0^{2\pi}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{2\pi}\frac{z}{\left(R^2+z^2\right)^{3/2}}d\theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{2\pi}\frac{z}{\left(R^2+z^2\right)^{3/2}}\int_0^{2\pi}d\theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qz}{\left(R^2+z^2\right)^{3/2}}$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qz}{\left(R^2+z^2\right)^{3/2}}\langle 0,0,1\rangle$$



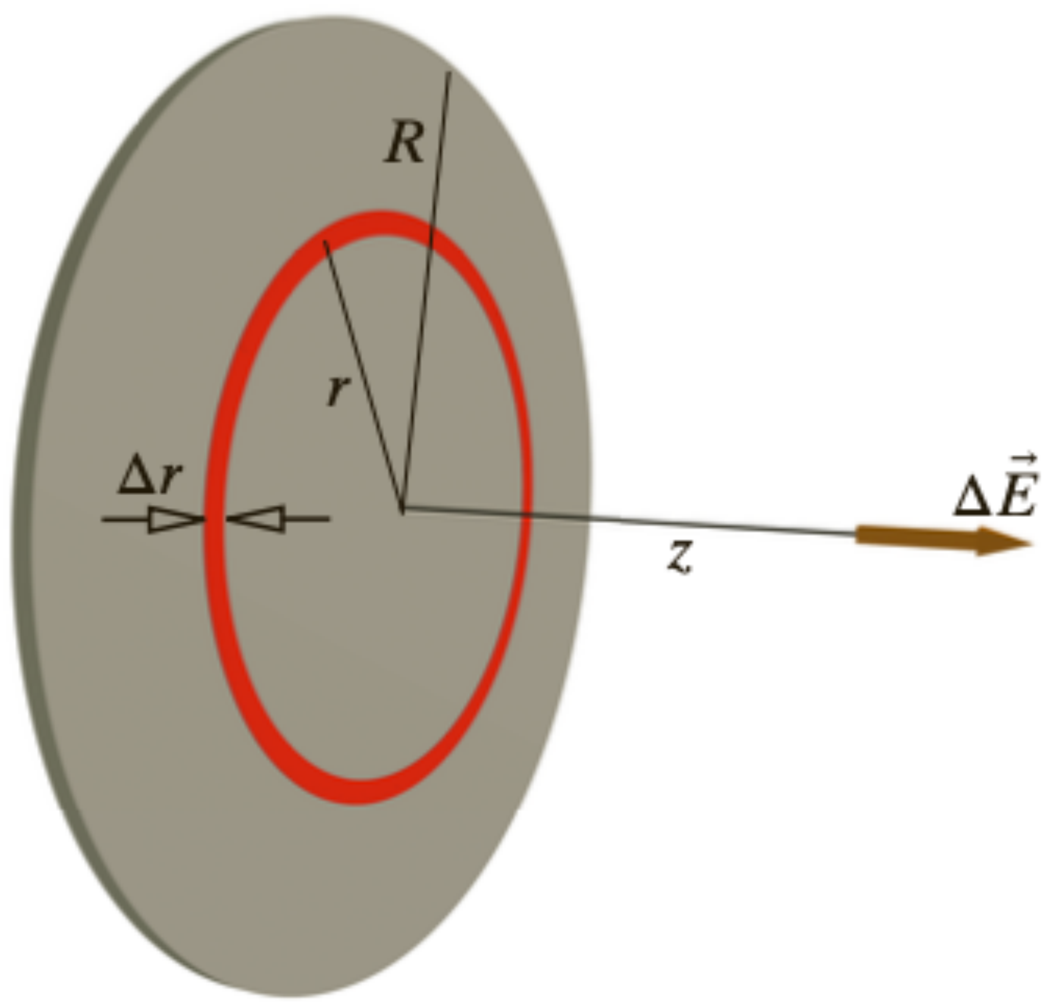

## Paso 4: Comprobar el resultado

Unidades: $\left(\frac{\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^2}{\mathrm{C}^2}\right)\left(\frac{\mathrm{C}\cdot\mathrm{m}}{\left(\mathrm{m}^2\right)^{3/2}}\right) = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}},$ En el centro: $z = 0 \Rightarrow E = 0$

Caso particular: $z \gg R$ :

$\left(R^2+z^2\right)^{3/2} \approx \left(z^2\right)^{3/2} = z^3$, de manera que: $E \propto z/z^3 = 1/z^2$

## Disco de radio *R* uniformemente cargado




Origen: Centro del disco.
Lugar del trozo de carga: Dado por el radio $r$ del anillo.
Variable de integración: $r$


- Utilizaremos anillos concéntricos delgados como piezas puesto que ya conocemos el campo eléctrico de un anillo uniforme.

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qz}{\left(R^2+z^2\right)^{3/2}}\langle 0,0,1\rangle$$

- Aproximaremos cada anillo como si tuviera algún radio medio $r$.

$$\Delta q = Q\frac{(\text{ área del anillo})}{(\text{ área del disco })} = Q\frac{2\pi r\Delta r}{\pi R^2}$$

$$\Delta\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(\Delta Q)z}{\left(r^2+z^2\right)^{3/2}}\langle 0,0,1\rangle = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\left(Q\frac{2\pi r\Delta r}{\pi R^2}\right)z}{\left(r^2+z^2\right)^{3/2}}\langle 0,0,1\rangle$$

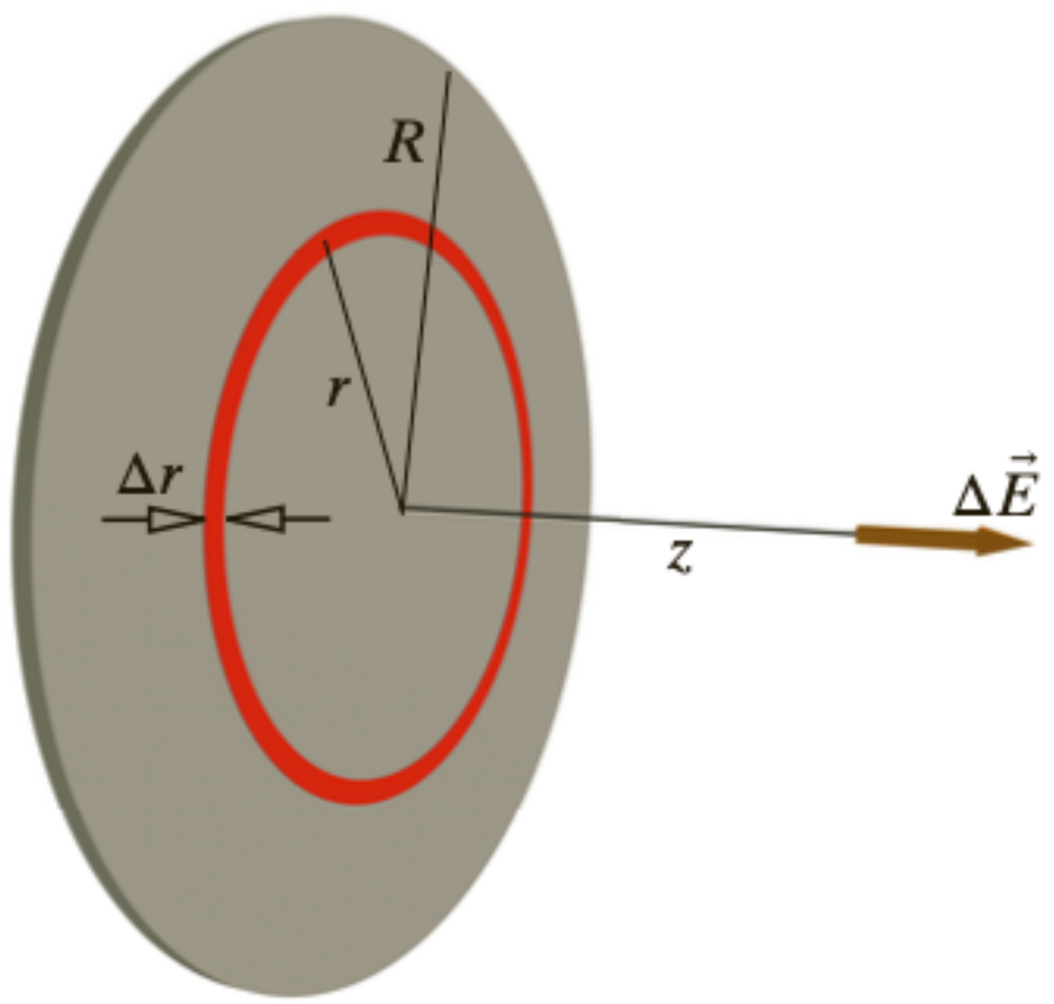
- Nos quedamos solo con la componente en $z$ y simplificamos

$$\Delta E_z = \frac{1}{2\varepsilon_0}\left(\frac{Q}{\pi R^2}\right)\frac{z}{\left(r^2+z^2\right)^{3/2}}r\Delta r \Rightarrow dE_z = \frac{1}{2\varepsilon_0}\left(\frac{Q}{\pi R^2}\right)\frac{z}{\left(r^2+z^2\right)^{3/2}}rdr$$

$$E_z = \int_0^R \frac{1}{2\varepsilon_0}\left(\frac{Q}{\pi R^2}\right)\frac{z}{\left(r^2+z^2\right)^{3/2}}rdr = \frac{1}{2\varepsilon_0}\left(\frac{Q}{\pi R^2}\right)z\int_0^R \frac{r}{\left(r^2+z^2\right)^{3/2}}dr$$

$$E_z = \frac{1}{2\varepsilon_0}\left(\frac{Q}{\pi R^2}\right)\left[1-\frac{z}{\left(R^2+z^2\right)^{1/2}}\right] = \frac{Q/A}{2\varepsilon_0}\left[1-\frac{z}{\left(R^2+z^2\right)^{1/2}}\right] = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[1-\frac{z}{\left(R^2+z^2\right)^{1/2}}\right]$$

## Disco de radio *R* uniformemente cargado




- El campo eléctrico en un punto del eje y a una distancia $z$ del disco apunta en la dirección perpendicular a la superficie del disco.
- El disco tiene una densidad superficial de carga $\sigma$

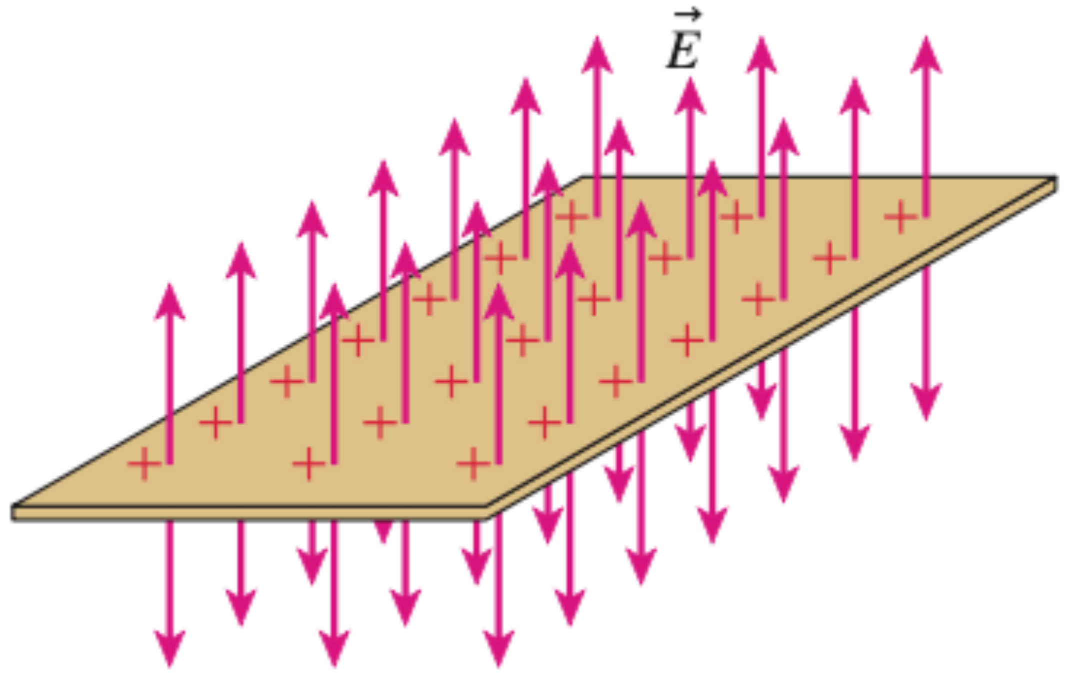
$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[1 - \frac{z}{(R^2+z^2)^{1/2}}\right]\langle 0, 0, 1\rangle$$

$$0 \ll z \ll R:$$

$$E \approx \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[1 - \frac{z}{R}\right]$$

$$\frac{z}{r} \approx 0$$

$$E \approx \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

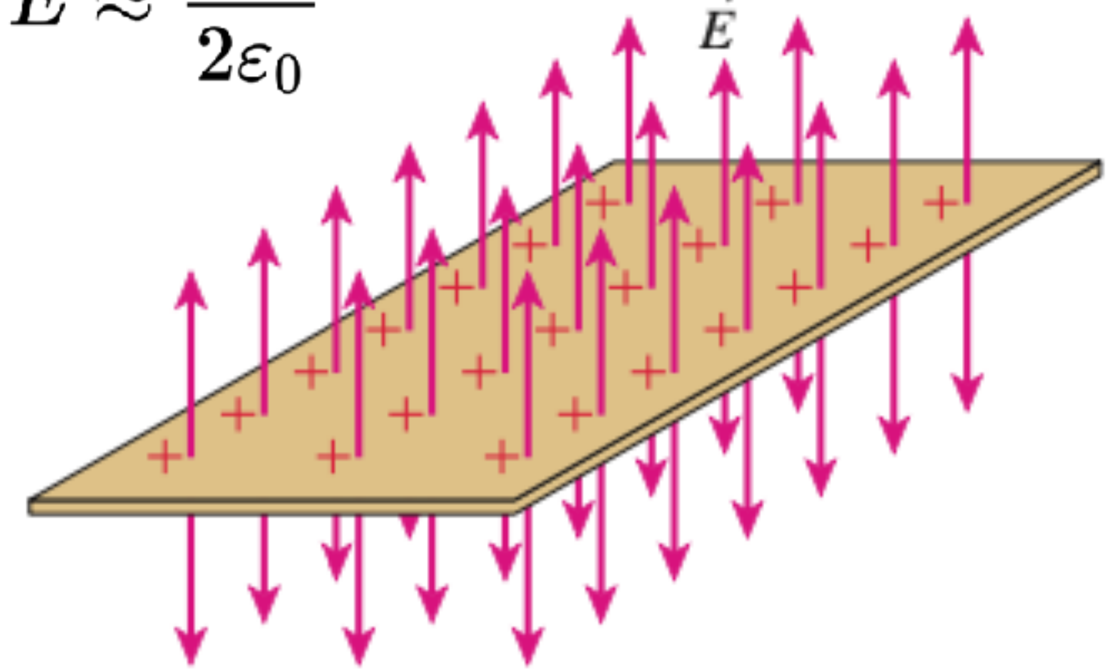


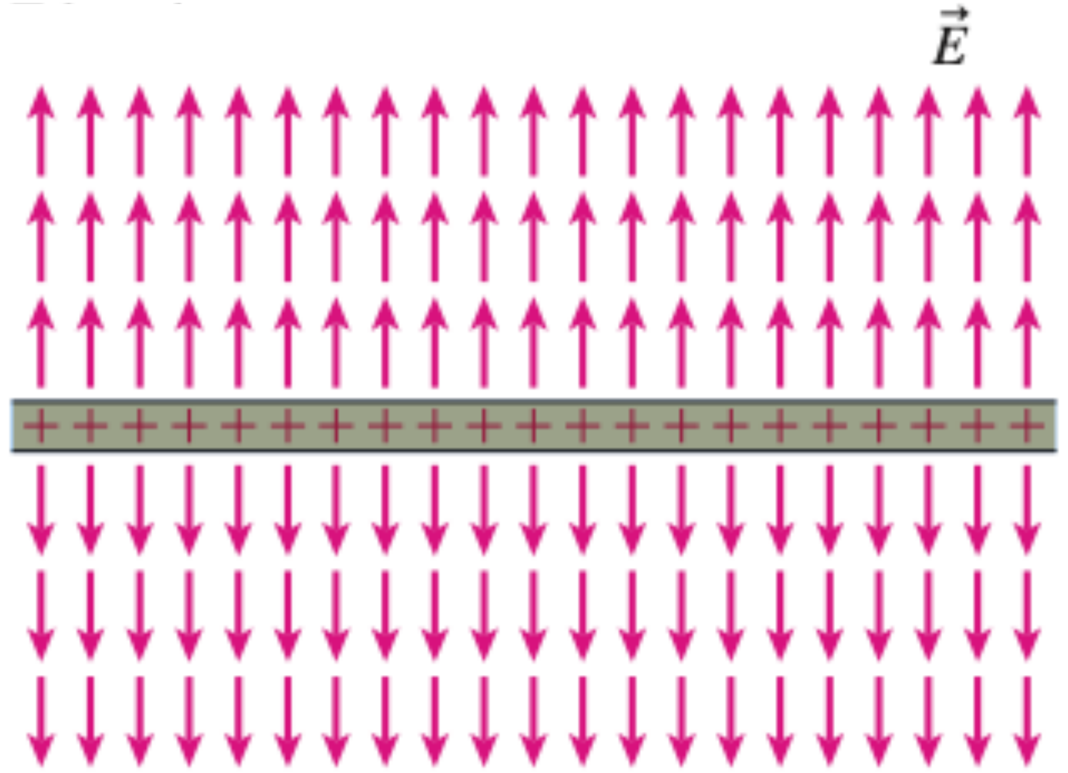

**Ejercicio:**

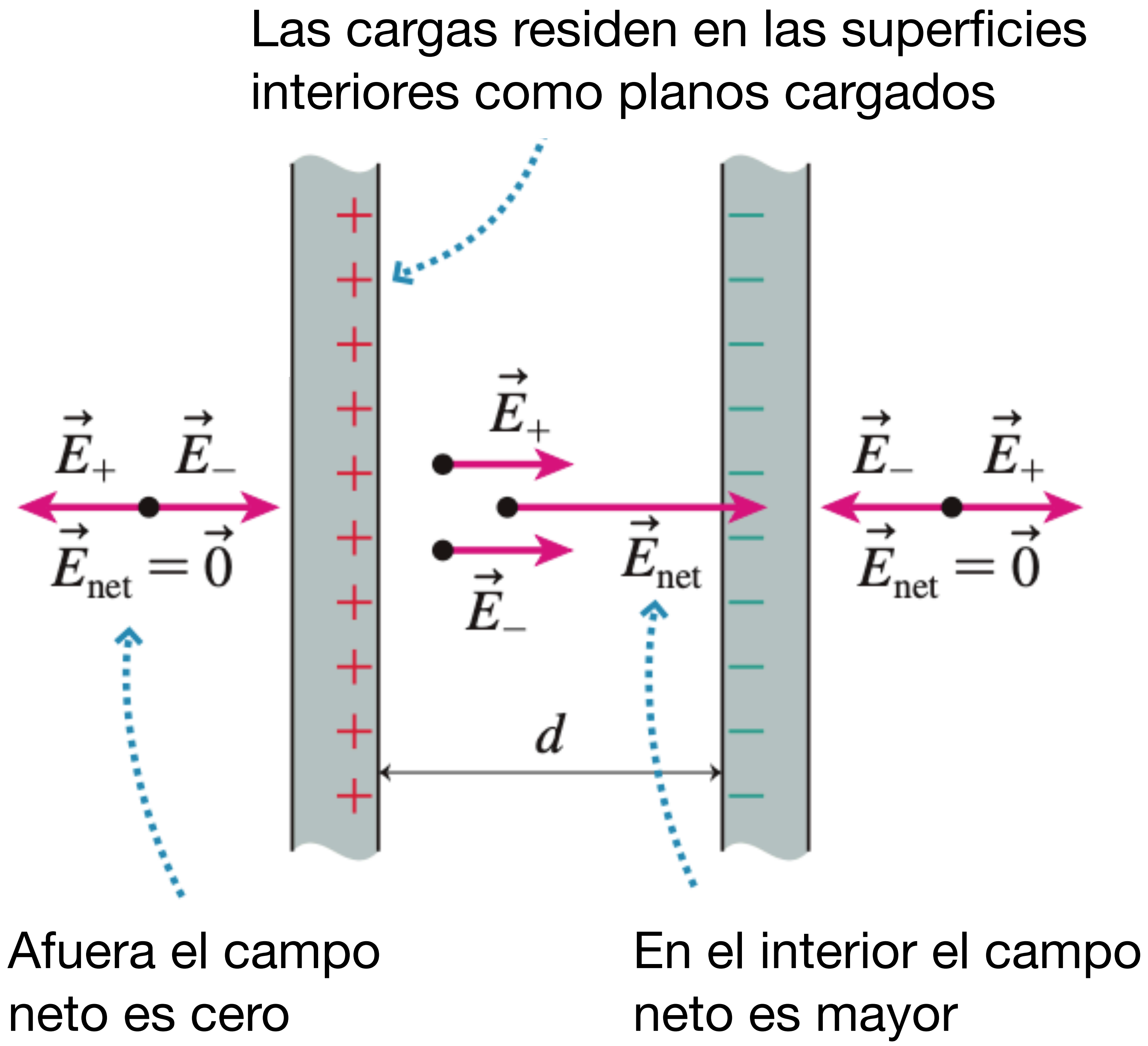
- Dos anillos de radio 5 cm están separados 20 cm y son concéntricos con un eje horizontal común. El anillo de la izquierda lleva una carga uniformemente distribuida de +35 nC, y el anillo de la derecha lleva una carga uniformemente distribuida de -35 nC. (a) ¿Cuál es la magnitud y dirección del campo eléctrico en el eje, a medio camino entre los dos anillos? (b) Si se colocara una carga de -5 nC a mitad de camino entre los anillos, ¿cuál sería la magnitud y dirección de la fuerza ejercida sobre esta carga por los anillos? (c) ¿Cuál es la magnitud y dirección del campo eléctrico a mitad de camino entre los anillos si ambos anillos llevan una carga de +35 nC?

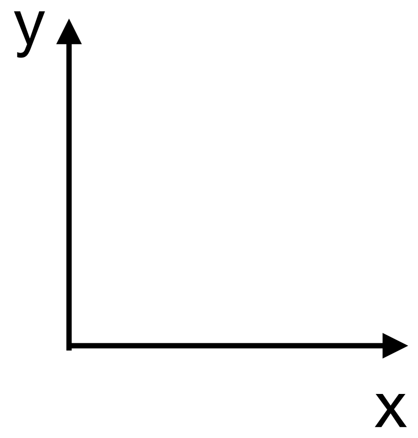
## Campo eléctrico entre dos planos infinitos

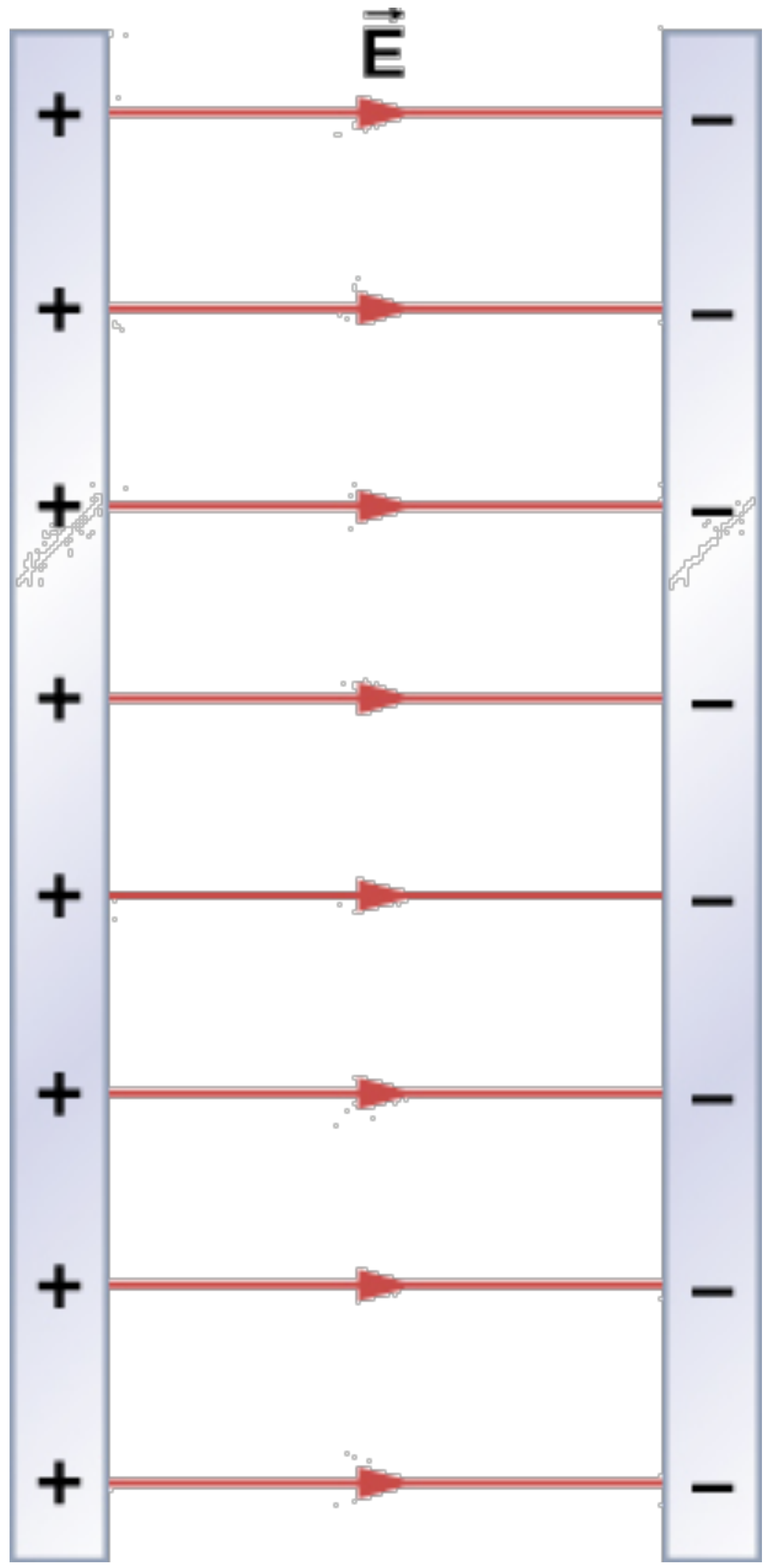
$$E \approx \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$



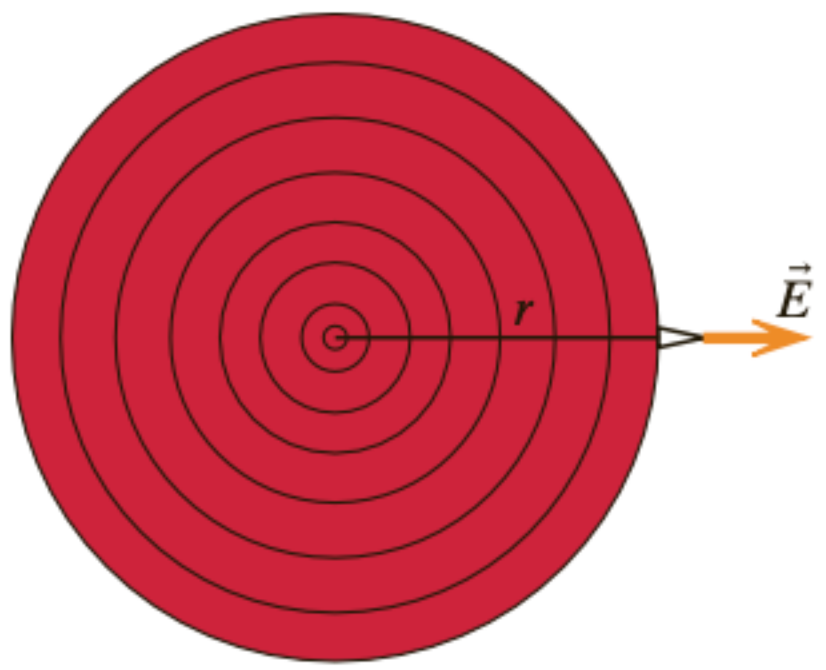




El campo eléctrico apunta lejos del plano cargado positivamente y hacia el plano cargado negativamente. Como los $\sigma$ son iguales y opuestos, esto significa que en la región fuera de los dos planos, los campos eléctricos se cancelan entre sí hasta llegar a cero.
Sin embargo, en la región entre los planos, los campos eléctricos se suman, y obtenemos

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\,\hat{\mathbf{i}}$$

## Una esfera solida cargada

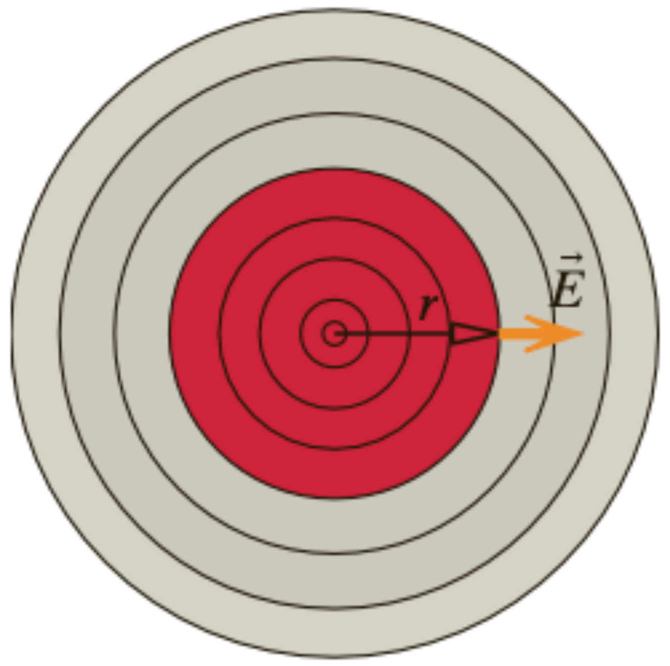
- Podemos modelar la esfera como una serie de casquetes esféricos concéntricos.




- En un lugar fuera de la esfera, y por tanto fuera de todas las envolturas, cada envoltura parece una carga puntual en el centro de la esfera. Por tanto, fuera de la esfera:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2} \quad \text{for } r > R$$

- En el interior, cada una de estas cáscaras parece una carga puntual en el centro de la esfera. Para obtener el $\vec{E}$ total en este lugar debemos sumar las contribuciones de todas las cáscaras interiores. Las cáscaras interiores juntas contribuirán



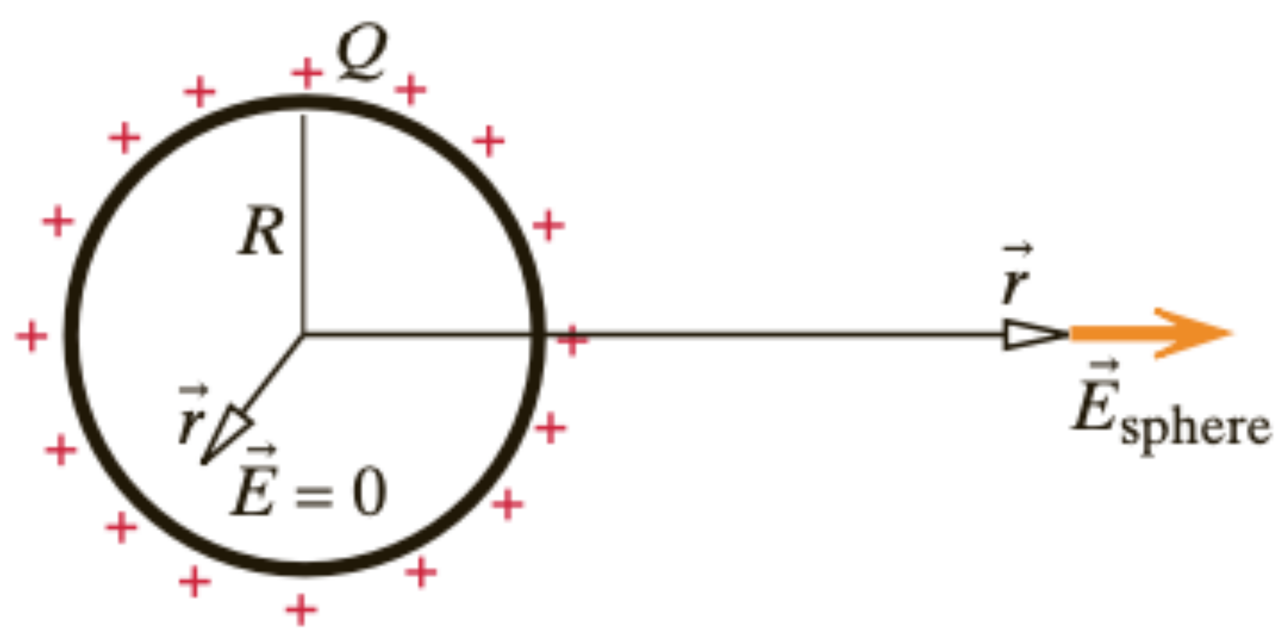

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\Delta Q}{r^2}$$

$$\Delta Q = Q\frac{(\text{volumen de las cáscaras int.})}{(\text{volumen de la esfera})} = Q\frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R^3}r \quad \text{for } r < R$$

- Dentro de la esfera el campo es proporcional a $r$

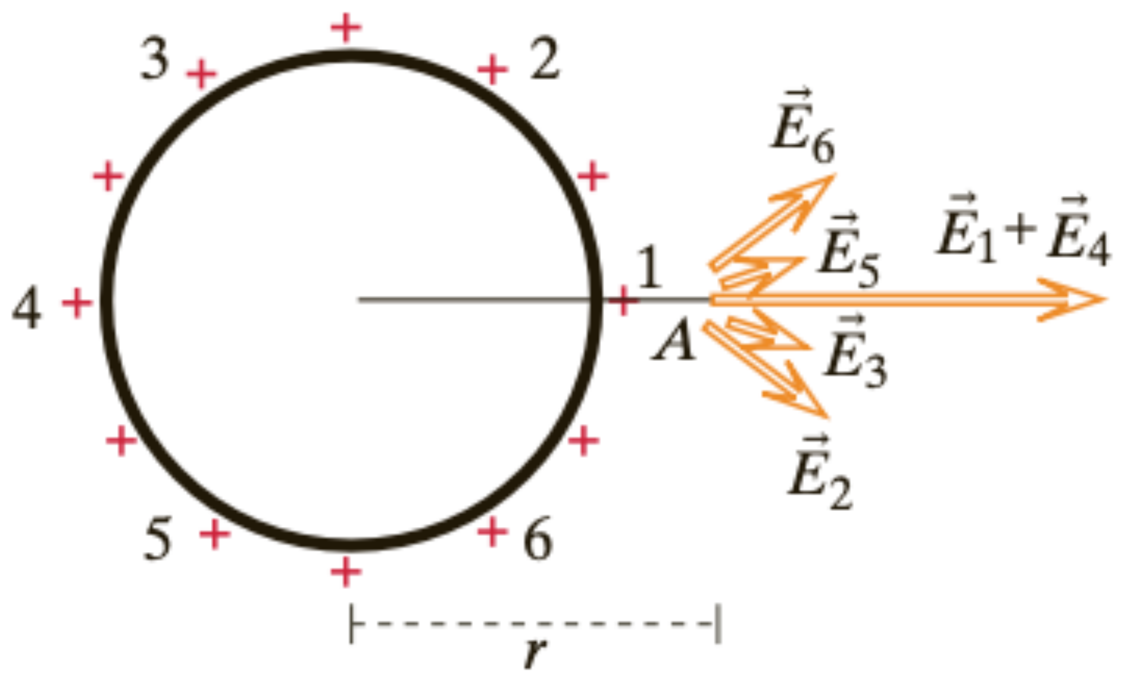
## Una cáscara esférica de carga



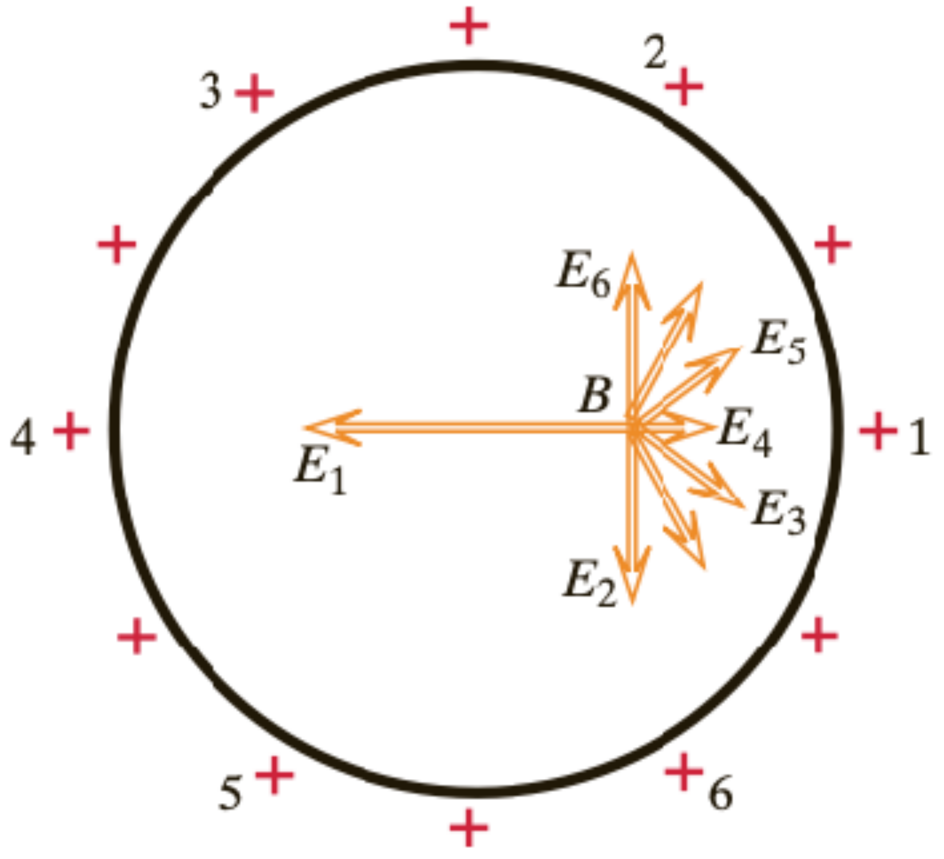

$$\vec{E}_{\text{esfera}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\hat{r} \quad \text{para } r > R \text{ (fuera de la esfera}$$

$$\vec{E}_{\text{esfera}} = 0 \quad \text{para } r < R \text{ (dentro de la esfera)}$$

- $Q$ es la carga total en la superficie de la esfera y $R$ es el radio de la esfera. de la esfera.




- Consideremos el campo en la ubicación $A$ fuera de la cáscara a una distancia $r$ desde el centro de la esfera.
- Por simetría, el campo eléctrico neto es horizontal y hacia la derecha, porque la componente vertical del campo neto se cancela para pares de campos como $\vec{E}_2$ y $\vec{E}_6$, o $\vec{E}_3$ y $\vec{E}_5$.
- Está claro que el campo neto (la superposición de las contribuciones de todas las cargas fuente) es radialmente hacia fuera desde el centro de la esfera.




- Consideremos ahora un lugar $B$ dentro de la cáscara.
- Un pequeño número de cargas cerca de $B$ (región 1) hacen una gran contribución a la izquierda, mientras que un gran número de cargas lejos de $B$ (regiones 3, 4 y 5) hacen cada una pequeñas contribuciones a la derecha.
- Dado que la superficie de una porción de la esfera es proporcional a $r^2$ mientras que el campo eléctrico aportado por esta región es proporcional a $1/r^2$, estas contribuciones se anulan exactamente entre sí.
- El campo eléctrico en el lugar $B$ debido a las cargas en la superficie de la esfera resulta ser exactamente cero. Aunque intuitivamente plausible, no es un resultado obvio.

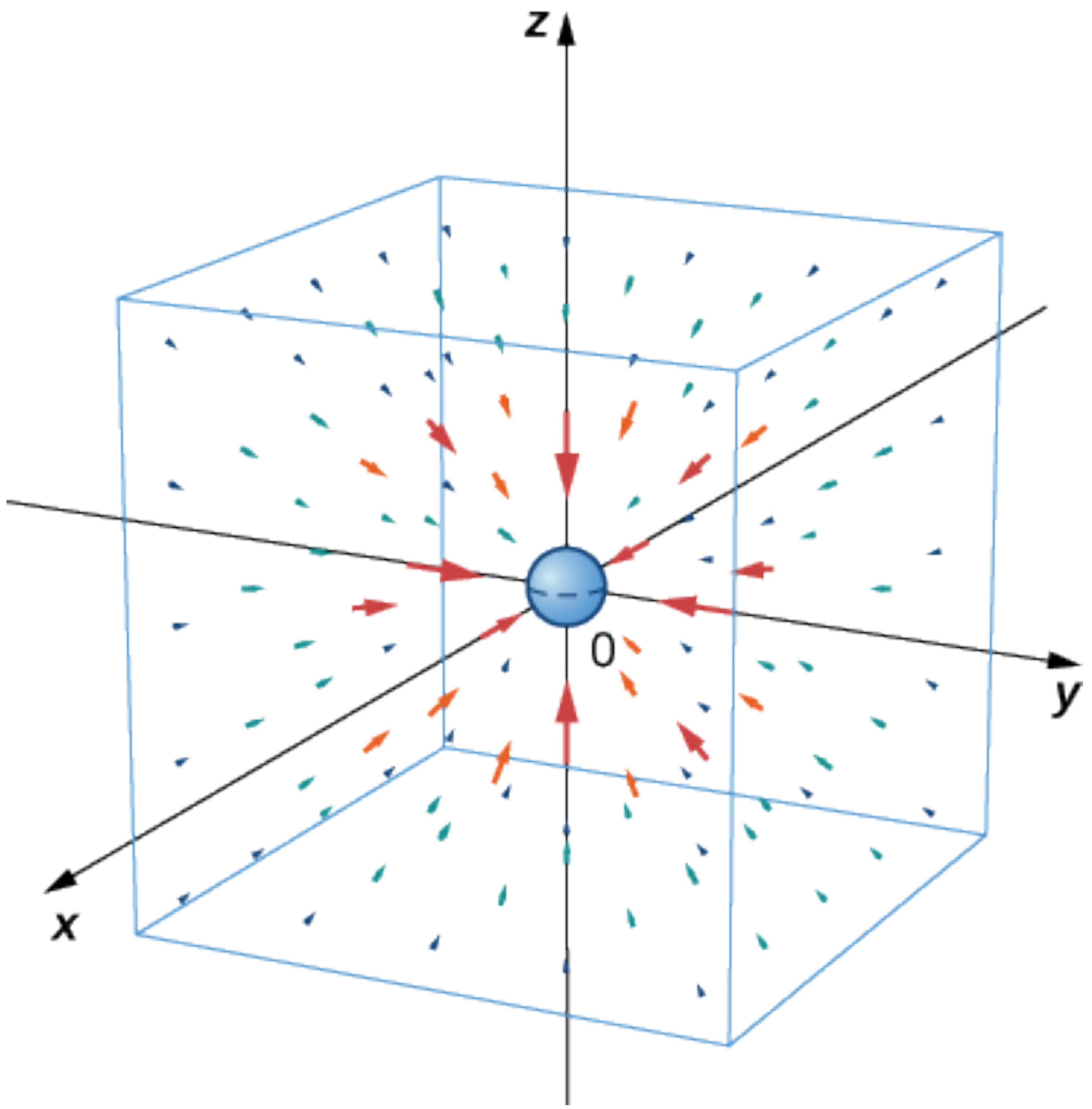
# 2. Líneas de campo eléctrico

- Una carga altera el espacio que la rodea, de tal manera que cuando se coloca otro objeto cargado en esa región del espacio, esa carga de prueba experimenta una fuerza eléctrica.

- El concepto de líneas de campo eléctrico, y de diagramas de líneas de campo eléctrico, nos permite visualizar la forma en que se altera el espacio

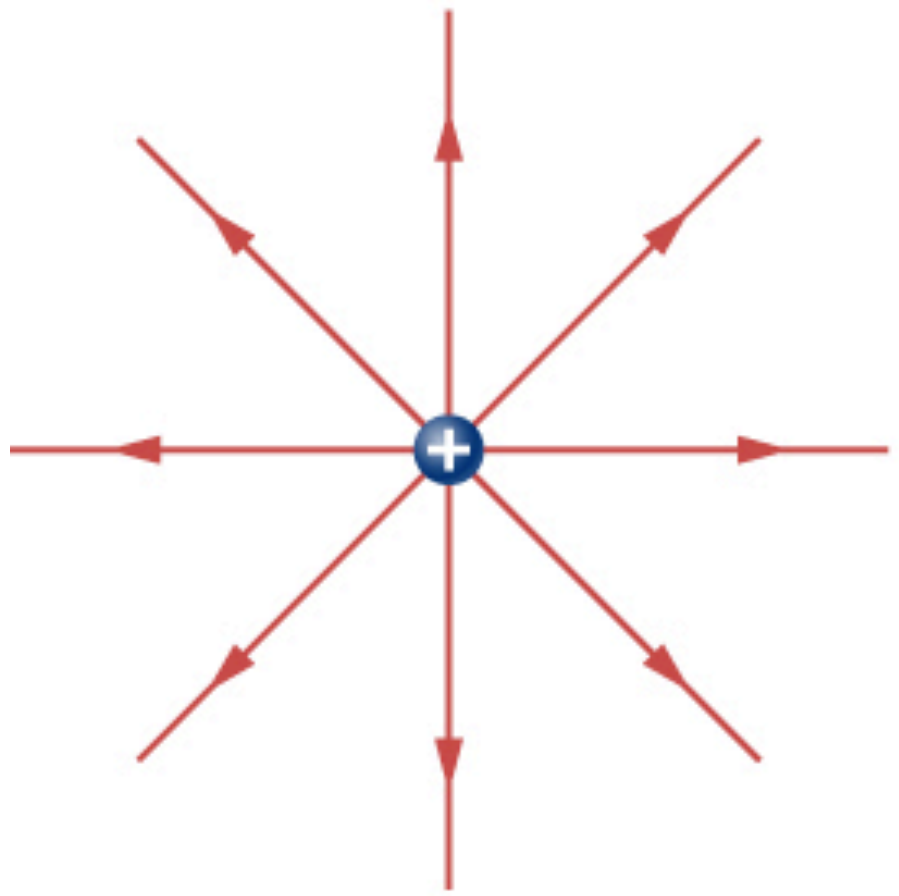
- Es importante recordar que los campos eléctricos son tridimensionales.

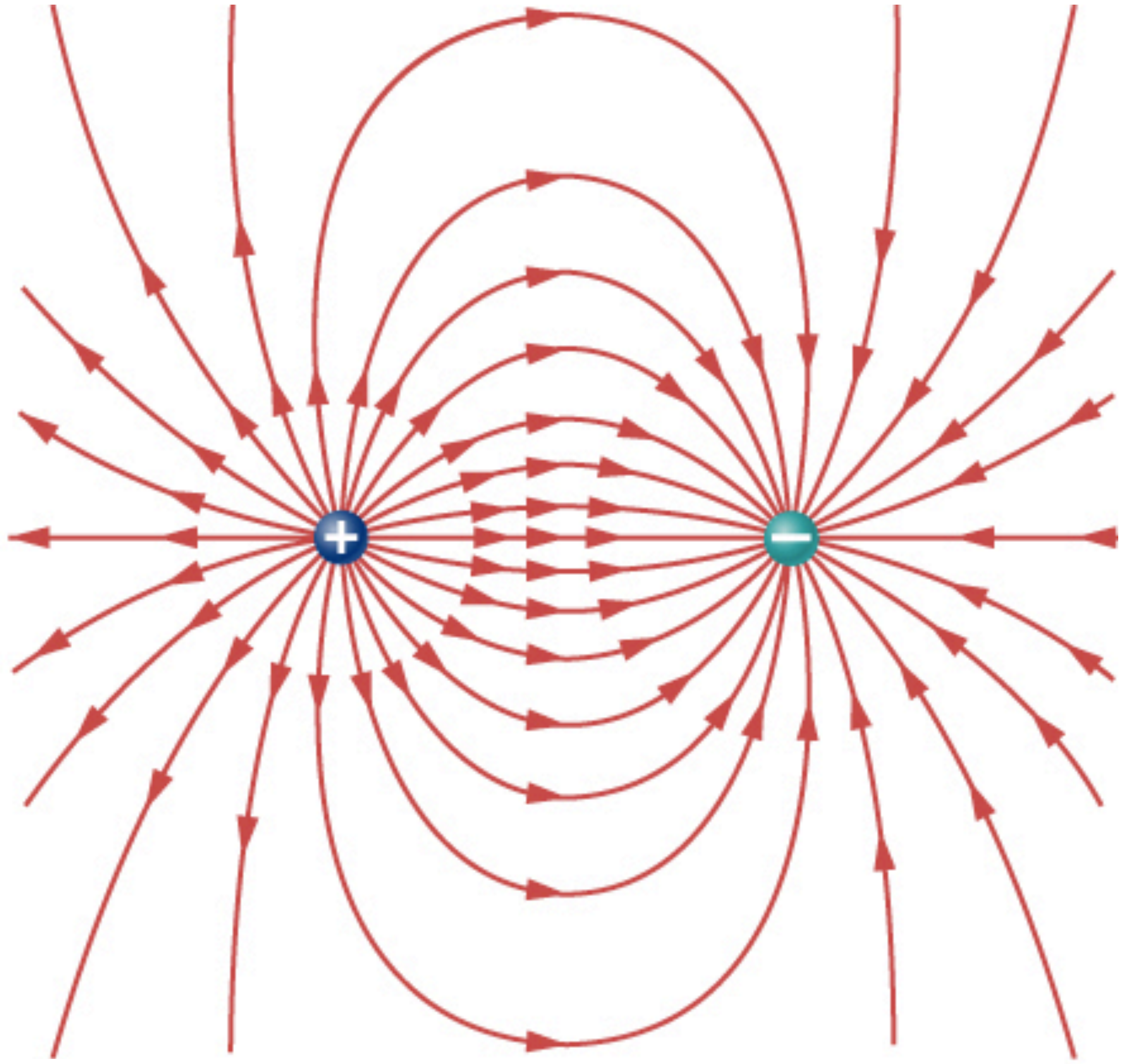
- Por definición, los vectores del campo eléctrico apuntan en la misma dirección que la fuerza eléctrica que experimentaría una carga de prueba positiva.




  - Las flechas en cada punto del espacio indican tanto a la magnitud como a la dirección del campo en ese punto.
  - Para una carga fuente puntual, la longitud disminuye en función del cuadrado de la distancia a la carga fuente.
  - Además, la dirección del vector campo se aleja radialmente de la carga fuente.

- En lugar de dibujar un gran número de flechas podemos conectarlas formando líneas y curvas continuas.
- Estos diagramas de campo transmiten la misma información sobre el campo eléctrico que los diagramas vectoriales.
- La dirección del campo en cada punto es simplemente la dirección del vector campo en ese mismo punto.

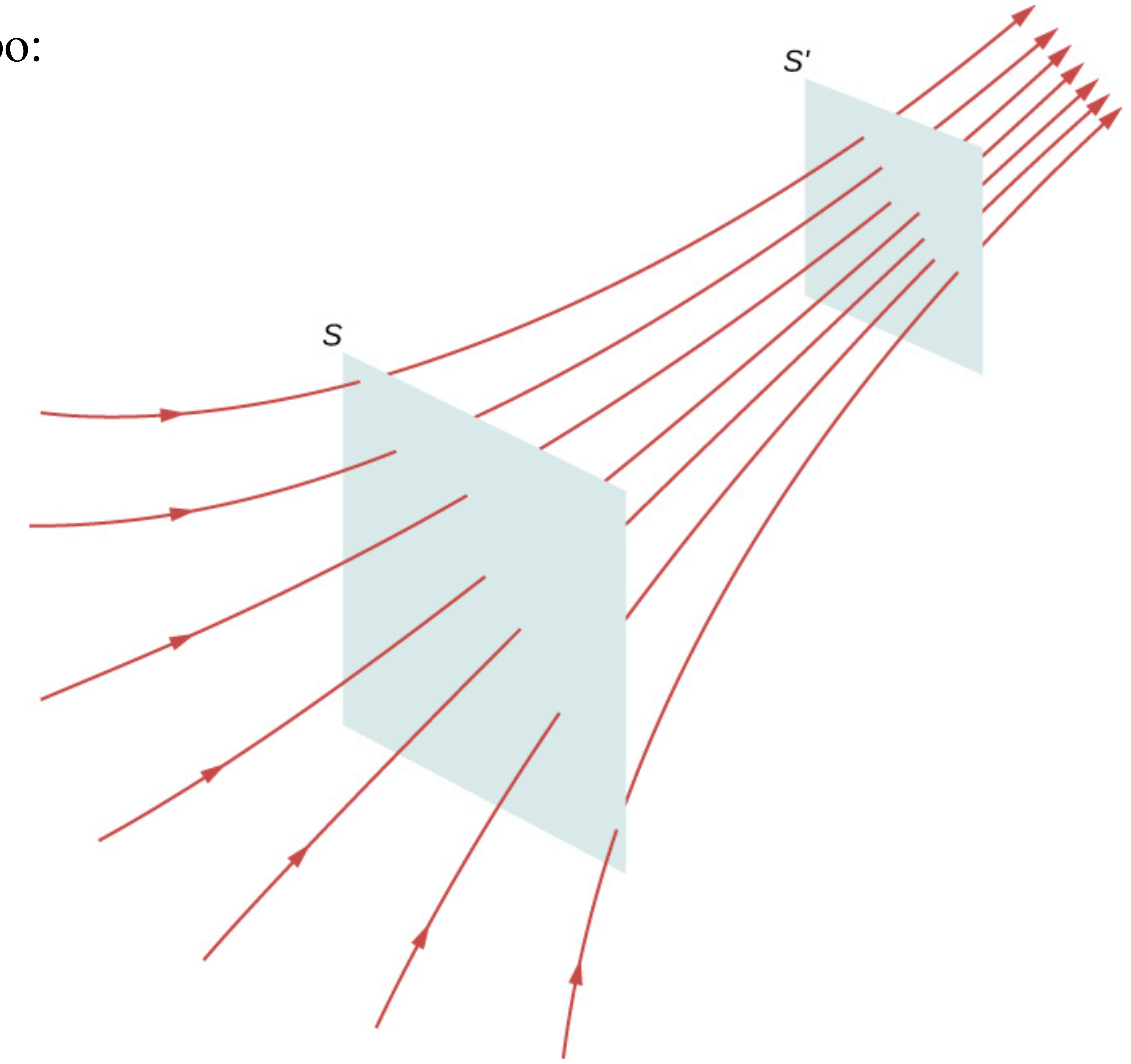




- El campo vectorial de un dipolo.

- En cualquier punto del espacio, el vector campo es tangente a la línea de campo en ese mismo punto.
- La punta de flecha sobre una línea de campo indica su dirección.

- La magnitud del campo, se indica mediante la densidad de líneas de campo: el número de líneas de campo por unidad de superficie que pasan por una sección transversal perpendicular al campo eléctrico.

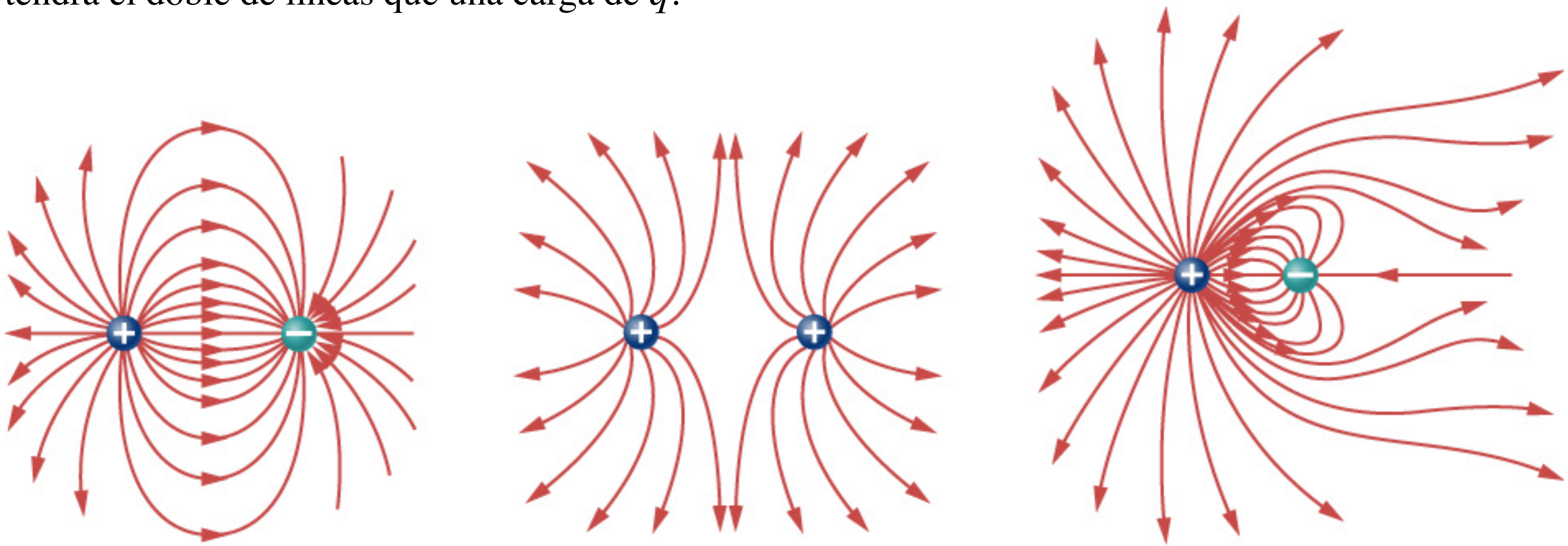



    - La densidad de líneas de campo se dibuja proporcional a la magnitud del campo en esa sección transversal.
    - Si las líneas de campo están muy juntas, la densidad de líneas de campo es mayor, la magnitud del campo es grande en ese punto.
    - Si las líneas de campo están muy separadas en la sección transversal, esto indica que la magnitud del campo es pequeña.

- Por ambas superficies ($S$ y $S'$ ) pasa el mismo número de líneas, pero la superficie $S$ es mayor que la superficie $S'$.
- La densidad de líneas de campo (número de líneas por unidad de superficie) es mayor en la ubicación de $S'$, lo que indica que el campo eléctrico es más fuerte en la zona de $S'$ que en $S$.

- Las líneas de campo eléctrico se originan en cargas positivas y terminan en cargas negativas.

- El número de líneas de campo que se originan o terminan en una carga es proporcional a la magnitud de dicha carga. Una carga de $2q$ tendrá el doble de líneas que una carga de $q$.



(a) (b) (c)

- En cada punto del espacio, el vector campo es tangente a la línea de campo en ese mismo punto.

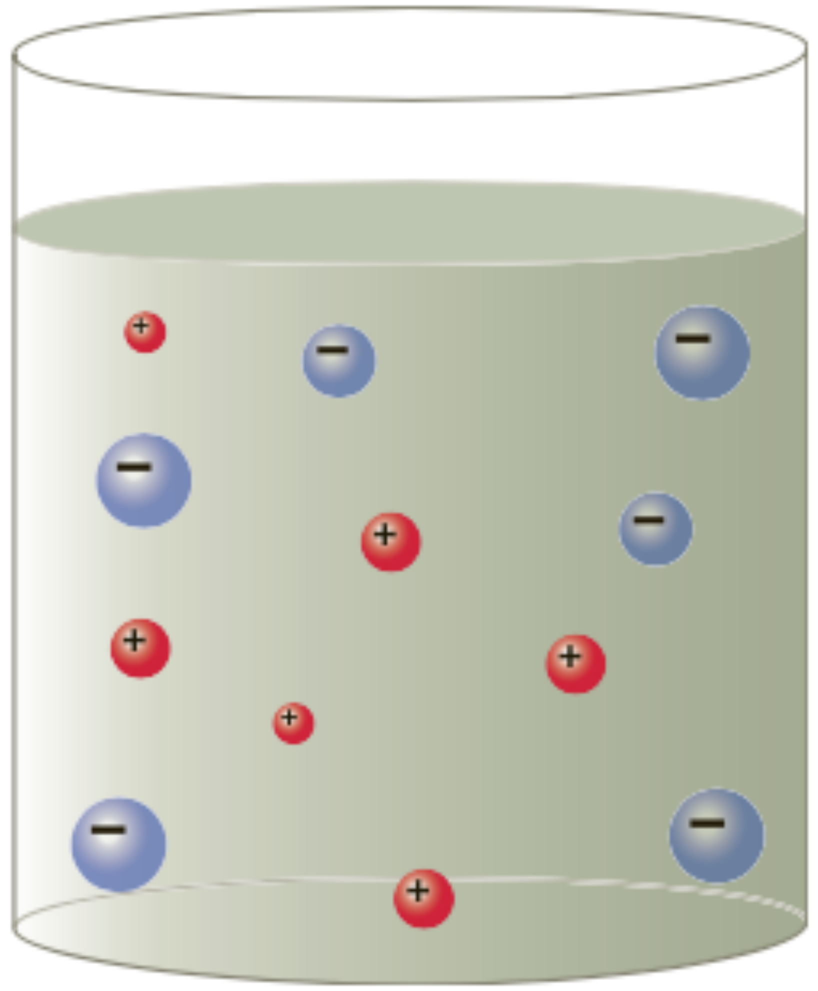
- La densidad de líneas de campo en cualquier punto del espacio es proporcional a la magnitud del campo.

- Las líneas de campo nunca pueden cruzarse ya que implicaría que el campo eléctrico apunta en dos direcciones diferentes en un mismo punto.

# 3. Conductores y Campo Eléctrico

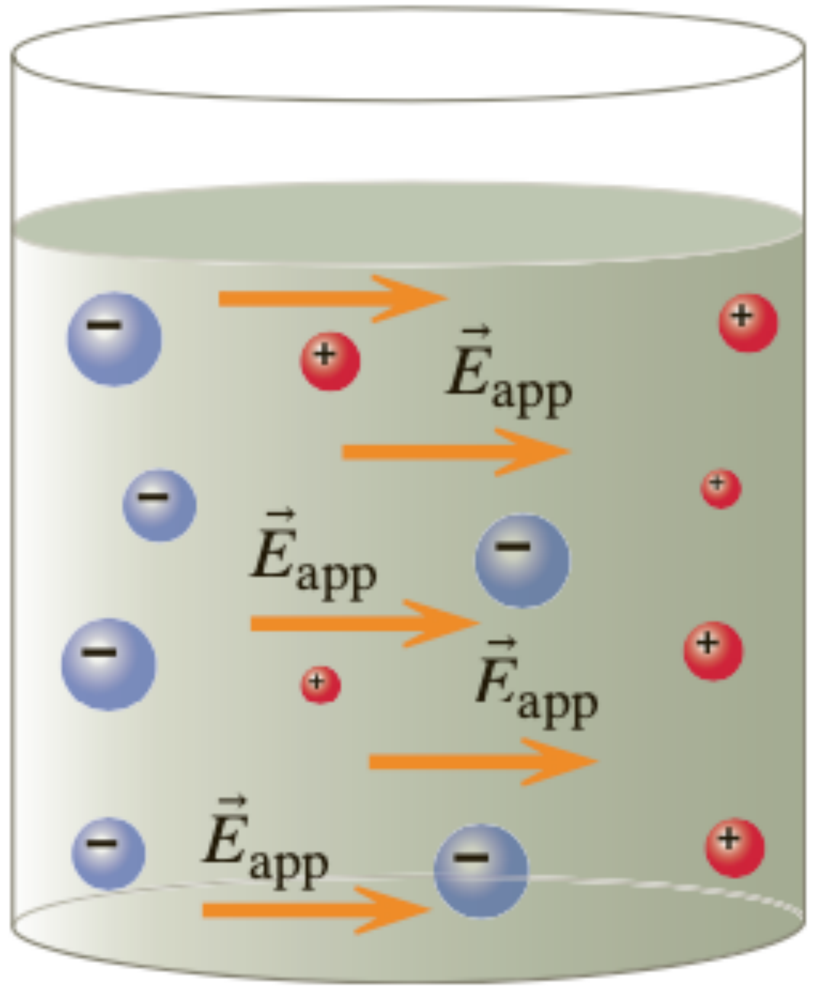
## Polarización en materiales conductores

- Un conductor tiene algún tipo de partículas cargadas que pueden moverse libremente por todo el material.
- A diferencia de un aislante, en el que los electrones y los núcleos sólo pueden moverse una distancia muy pequeña



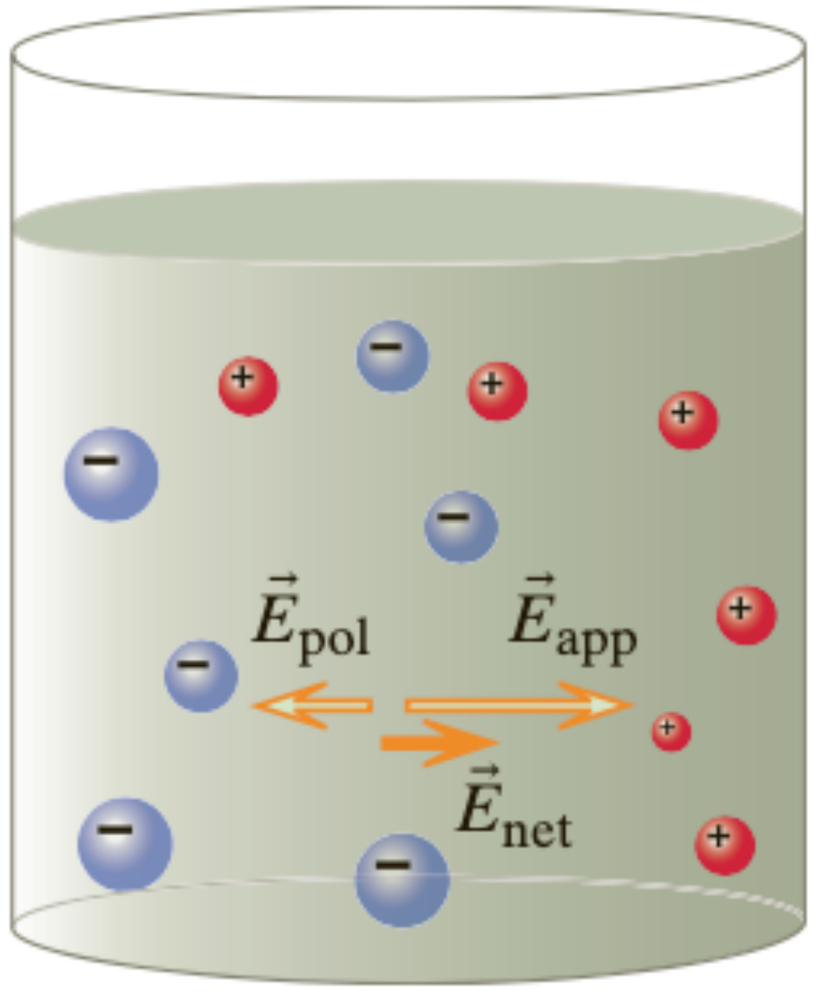
Un vaso que contiene una solución iónica (agua salada).

  - Cuando se aplica un campo eléctrico a un conductor, las partículas cargadas comienzan a moverse en la dirección de la fuerza ejercida.
  - A medida que las cargas se mueven, comienzan a amontonarse en un lugar, creando una concentración de carga que a su vez crea un campo eléctrico en la región ocupada por las cargas móviles restantes.
  - El campo eléctrico neto en la región es la superposición del campo aplicado (externo) y el campo eléctrico creado por las cargas reubicadas.
  - Los iones están en constante movimiento, por lo que la situación real no es sencilla.
  - Además, el interior del líquido está lleno de iones positivos y negativos; sólo hay un ligero exceso de concentración de iones cerca de los lados del vaso.




Bajo la influencia de un campo eléctrico aplicado, el líquido se polariza

- Para que los iones de una solución salina se muevan a una velocidad constante, hay que aplicar un campo eléctrico constante a la solución.



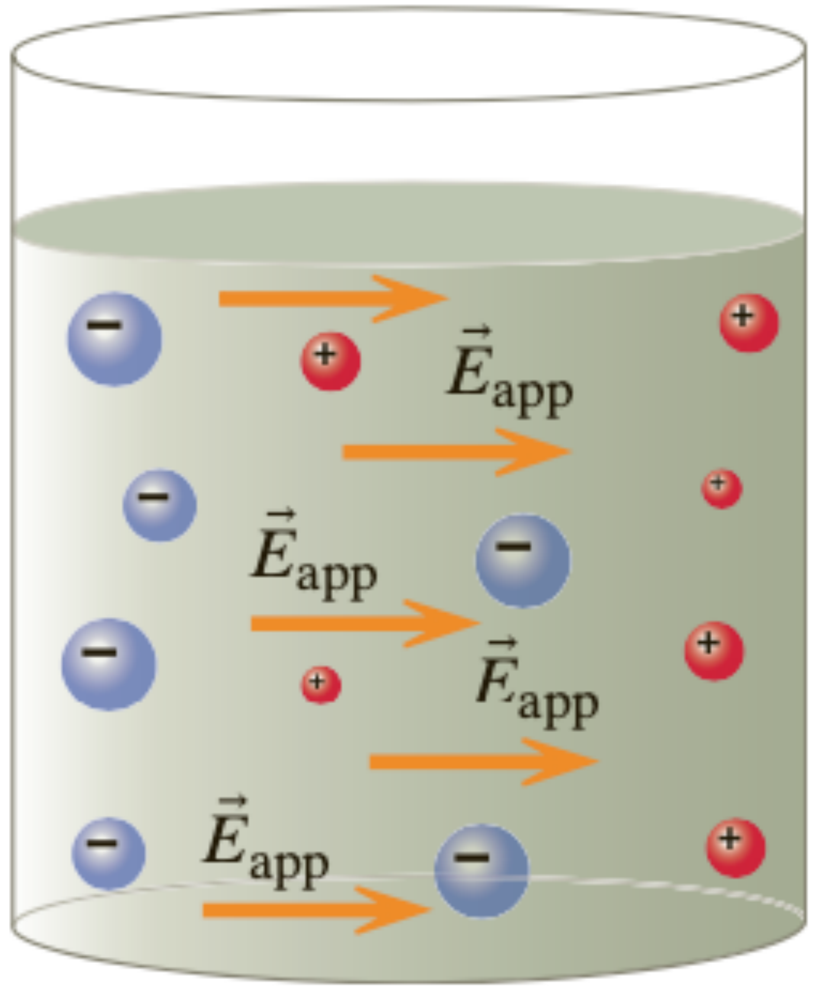

- La velocidad a la que las cargas móviles (los iones de sodio o cloruro) se mueven a través del conductor se denomina **velocidad de deriva**.

- La velocidad de deriva es proporcional al campo eléctrico neto en la ubicación de la carga. La constante de proporcionalidad se llama movilidad de las cargas móviles.

$$\bar{v} = uE_{\text{net}}$$

- El conductor alcanzará el equilibrio a nivel microscópico: no hay movimiento neto de cargas móviles en ninguna dirección.

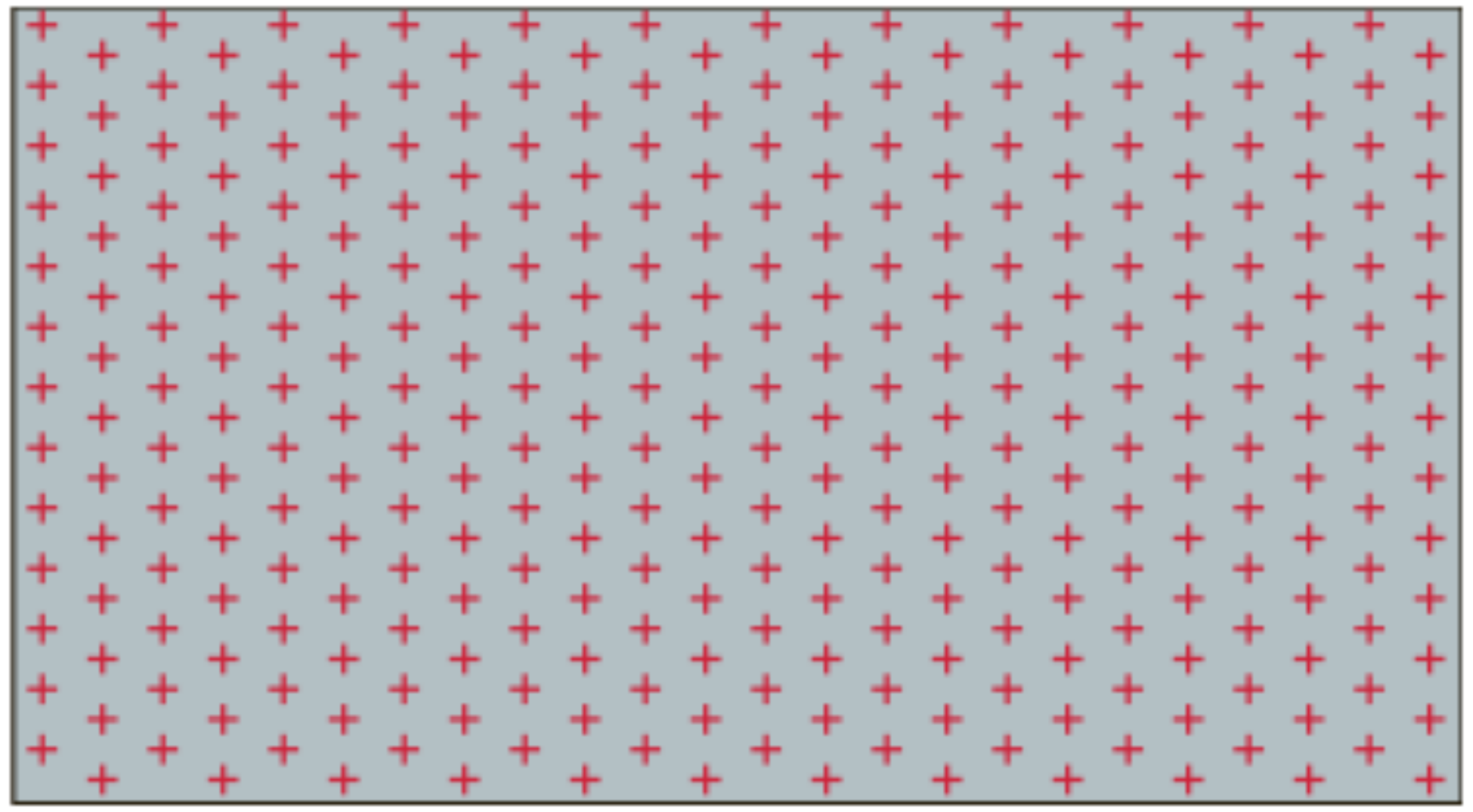
$$\bar{v} = 0$$




  - El campo eléctrico neto en una solución iónica en equilibrio debe ser cero.

- Los metales son muy buenos conductores eléctricos.

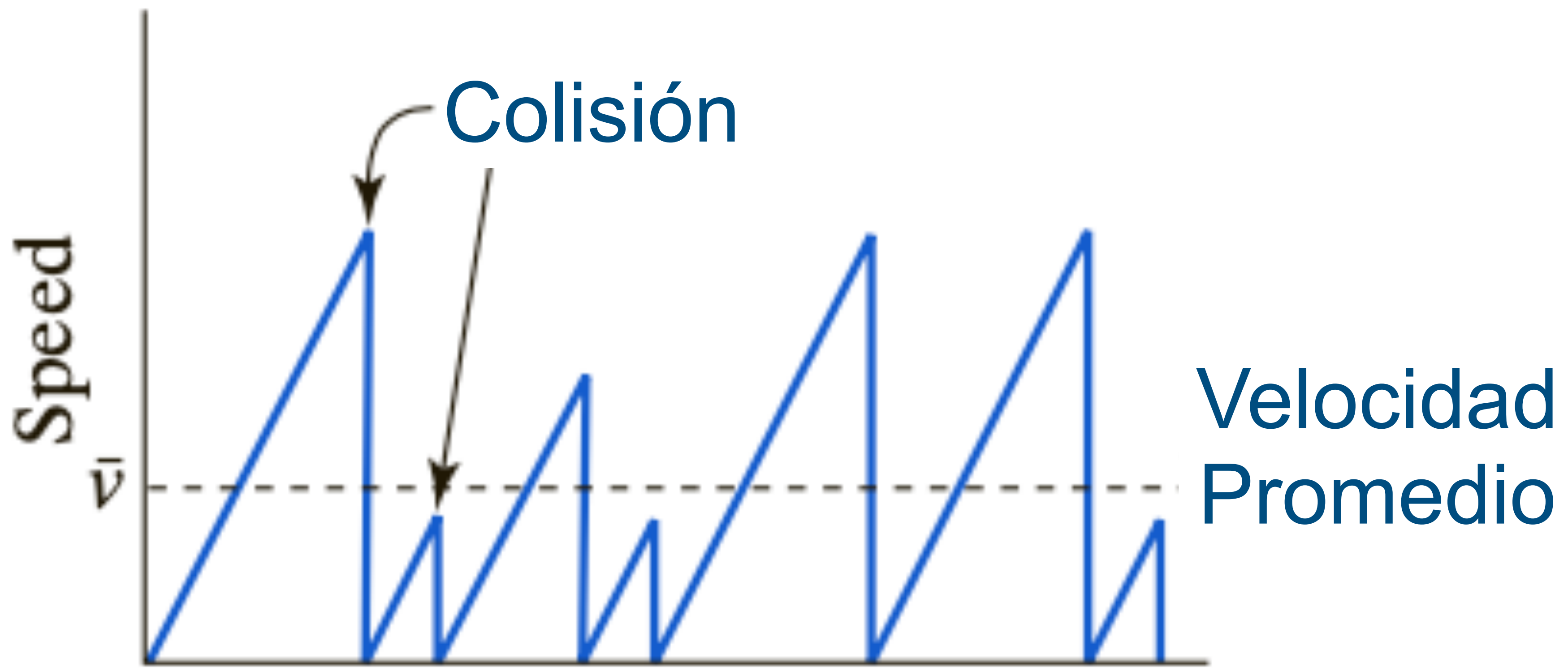
- En casi todos los metales, las partículas cargadas móviles son los electrones y se dice que existe un "mar" de electrones que son libres de moverse por toda la pieza macroscópica de metal sólido.



Un corte 2D de un metal no polarizado: mar de electrones móviles uniforme (gris), núcleos atómicos positivos ("+" rojos).

- Aunque los electrones itinerantes se repelen fuertemente, esta repulsión entre electrones es neutralizada en promedio por las atracciones ejercidas por los núcleos atómicos positivos.

- El efecto es que, en promedio, el campo eléctrico neto dentro de un trozo de metal en equilibrio es cero.




- Modelo clásico simple del movimiento de los electrones: un electrón móvil en el metal, bajo la influencia del campo eléctrico dentro del metal, se acelera y gana energía, pero luego pierde esa energía al colisionar con la red de núcleos atómicos, que está vibrando debido a su propia energía térmica y adquiere más energía térmica debido a las colisiones de los electrones con la red.

- Después de una colisión, un electrón vuelve a acelerarse y vuelve a colisionar. Este proceso es el que hace que el filamento metálico de una bombilla se caliente.

# Velocidad de deriva y movilidad de los electrones

- La velocidad media de un electrón se llama velocidad de “deriva". Decimos que el electrón "deriva" a través del metal.
- El movimiento lento de deriva se superpone al movimiento de alta velocidad de los electrones en todas las direcciones dentro del metal.
- Modelo clásico para comprender la mayoría de los aspectos importantes de los circuitos a nivel microscópico.

$$\frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t} = \vec{F}_{\text{net}}$$

$$\Delta p = F_{\text{net}}\,\Delta t = eE_{\text{net}}\,\Delta t$$

Supondremos que el electrón pierde todo su momento durante cada colisión

$$\Delta p = p - 0 = eE_{\text{net}}\Delta t$$

$$v = \frac{p}{m_e} = \frac{eE_{\text{net}}\Delta t}{m_e}$$

El tiempo entre colisiones no es el mismo para todos los electrones.

$$\bar{v} = \frac{eE_{\text{net}}\overline{\Delta t}}{m_e}$$

El tiempo medio entre colisiones de los electrones con los núcleos atómicos, está determinado por el movimiento aleatorio de los electrones y por la temperatura $T$ del metal.

A mayor temperatura, el movimiento térmico de los núcleos atómicos es mayor, y el tiempo medio entre colisiones se reduce, lo que conduce a una menor velocidad de deriva para el mismo $E$.

Si el aumento $E$ no hace un cambio significativo de $T$, al duplicar $E$ se duplica la velocidad de deriva

$$\bar{v} = uE_{\text{net}}$$

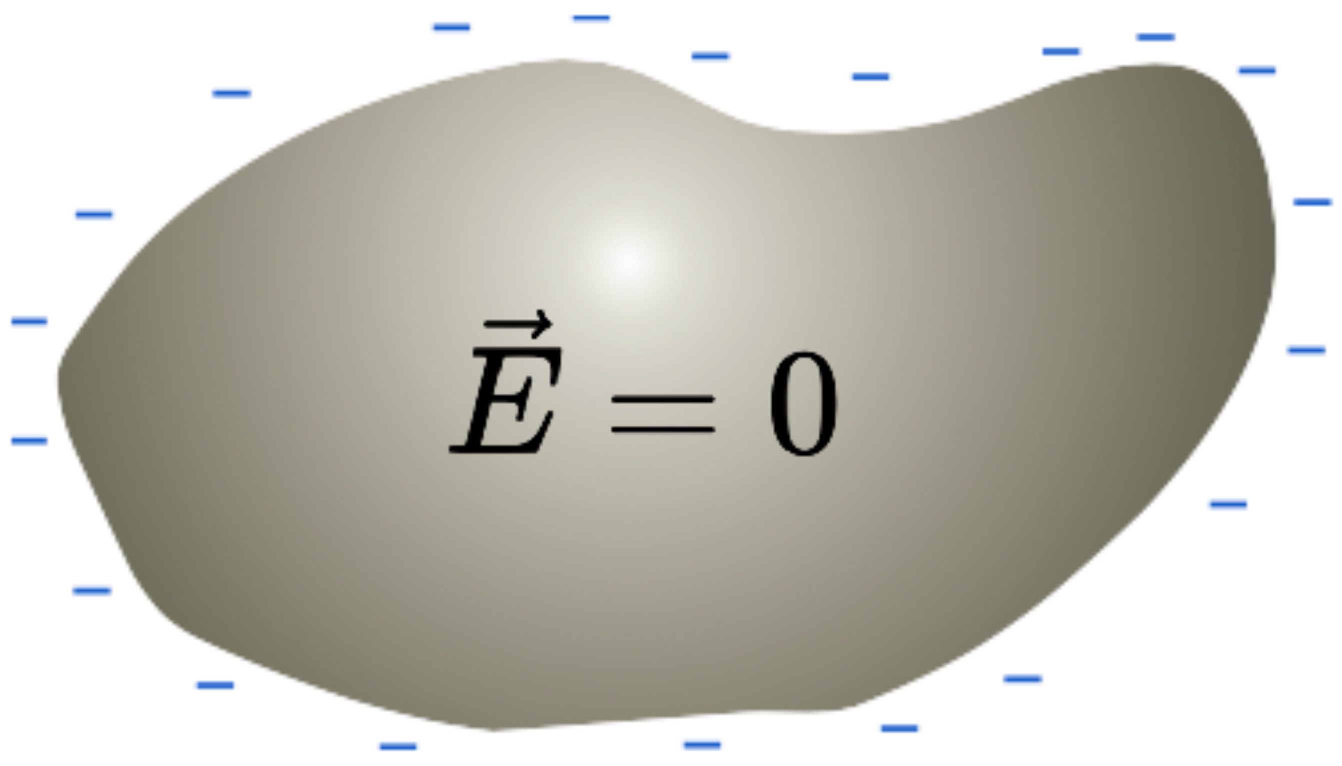
$$u = \frac{e}{m_e}\overline{\Delta t}$$

Diferentes metales tienen diferentes $u$.
La dirección de la velocidad de deriva de un electrón móvil (-$e$) es opuesta a la dirección del $E$.

# 4. Condiciones electrostáticas

- La propiedad básica de los materiales conductores en electrostática es el estado de *equilibrio electrostático*.

- Este estado es aquel en que las cargas del conductor no se mueven, aunque podrían hacerlo. Si no se mueven es porque se encuentran en equilibrio y la fuerza sobre cada una de ellas es nula.




En un metal, la carga se reparte por toda la superficie (no necesariamente de manera uniforme), y no hay exceso de carga en el interior.

- Si se modifican las condiciones exteriores (cambiando E) se produce una nueva redistribución de la carga hasta que se llegue a un nuevo estado de equilibrio, en el que las cargas estarán en una posición diferente.

- El periodo durante el cual las cargas se están moviendo entre equilibrio y equilibrio, se denomina el periodo transitorio y suele ser muy corto en la mayoría de los materiales (microsegundos o menos).

- Un conductor en equilibrio electrostático se caracteriza porque en él las cargas se encuentran en reposo, aunque tendrían la posibilidad de moverse.

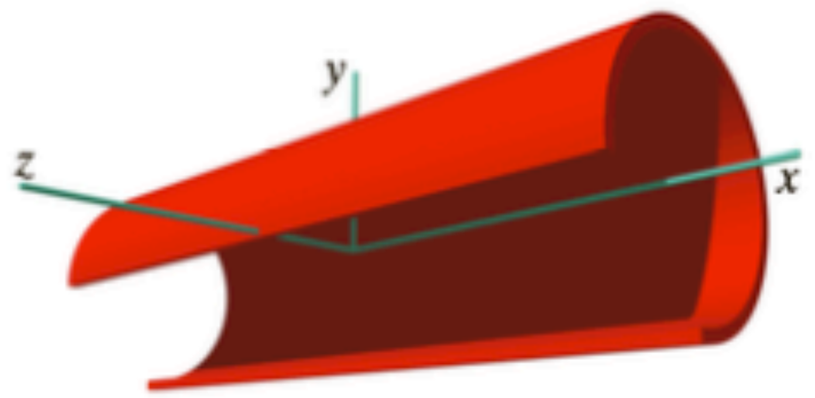
- Lo anterior implica que el campo eléctrico en el material conductor es nulo

- Si no fuera así, habría fuerza sobre las cargas y estas se moverían.

## Problemas propuestos

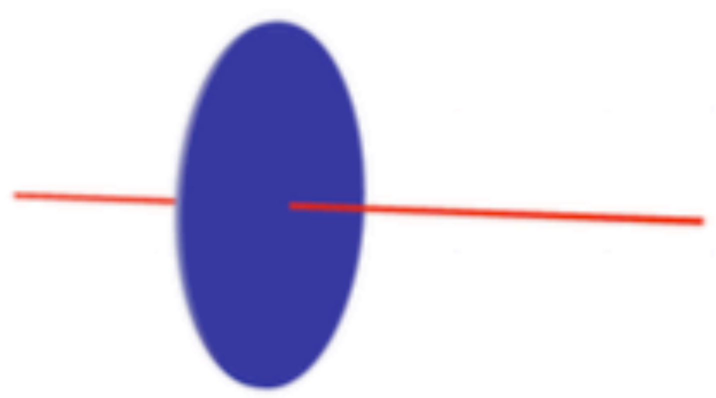
1. Un cilindro hueco de 3/4 lleva una carga positiva $Q$ repartida uniformemente por su superficie. El radio del cilindro es $R$, y su longitud es $L$, donde $L \gg R$. Calcular el campo eléctrico en el centro del cilindro.

   Nota: Considere que el cilindro está compuesto por un gran número de varillas cargadas muy finas.



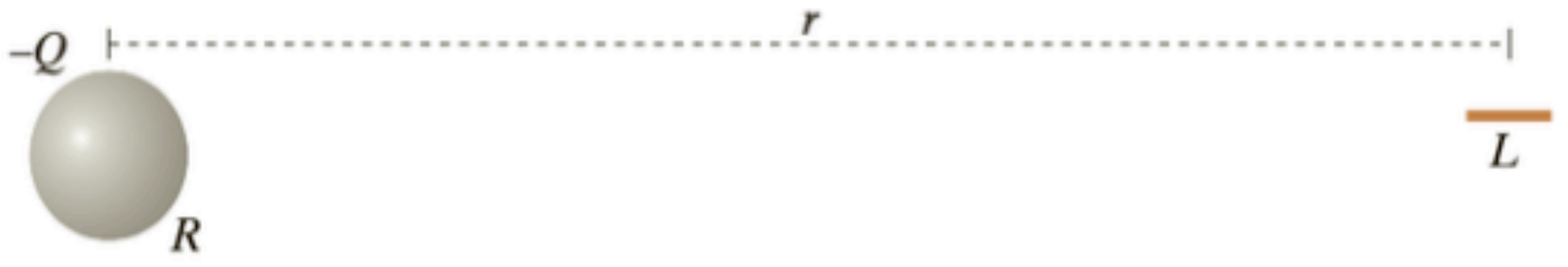

Sol: $\vec{E} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\langle 0; -\dfrac{4Q}{3\pi LR}; \dfrac{4Q}{3\pi LR}\right\rangle \dfrac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}$

2. Un disco delgado de plástico de radio 0,6 m está cargado uniformemente con $Q_\mathrm{d} = -3 \times 10^{-7}$ C y está unido a una varilla delgada de vidrio de longitud 2.4 m que está cargada uniformemente con $Q_\mathrm{v} = 5 \times 10^{-8}$ C. El centro de la varilla y el centro del disco están en el origen. La varilla se encuentra a lo largo del eje $x$ y el disco se encuentra en el plano $yz$ ¿Cuál es el campo eléctrico en la posición $\langle 0{,}02; 0{,}01; 0\rangle$ m?



Sol: $\vec{E} = \vec{E}_\mathrm{d} + \vec{E}_\mathrm{v} \approx \langle -1{,}49; 3{,}75; 0\rangle \times 10^4$ N/C

3. El centro de una pequeña bola metálica esférica de radio $R$, que lleva una carga negativa $-Q$, se encuentra a una distancia $r$ del centro de un cable de cobre corto, delgado y neutro de longitud $L$. La bola y el alambre se mantienen en posición por medio de hilos que no se muestran. Si $R = 5$ mm, $Q = 1 \times 10^{-9}$ C, $r = 10$ cm y $L = 4$ mm, calcule la fuerza que la bola ejerce sobre el hilo.




Sol: $F \approx \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q^2L^3}{4r^5} = 1{,}4 \times 10^{-11}$ N