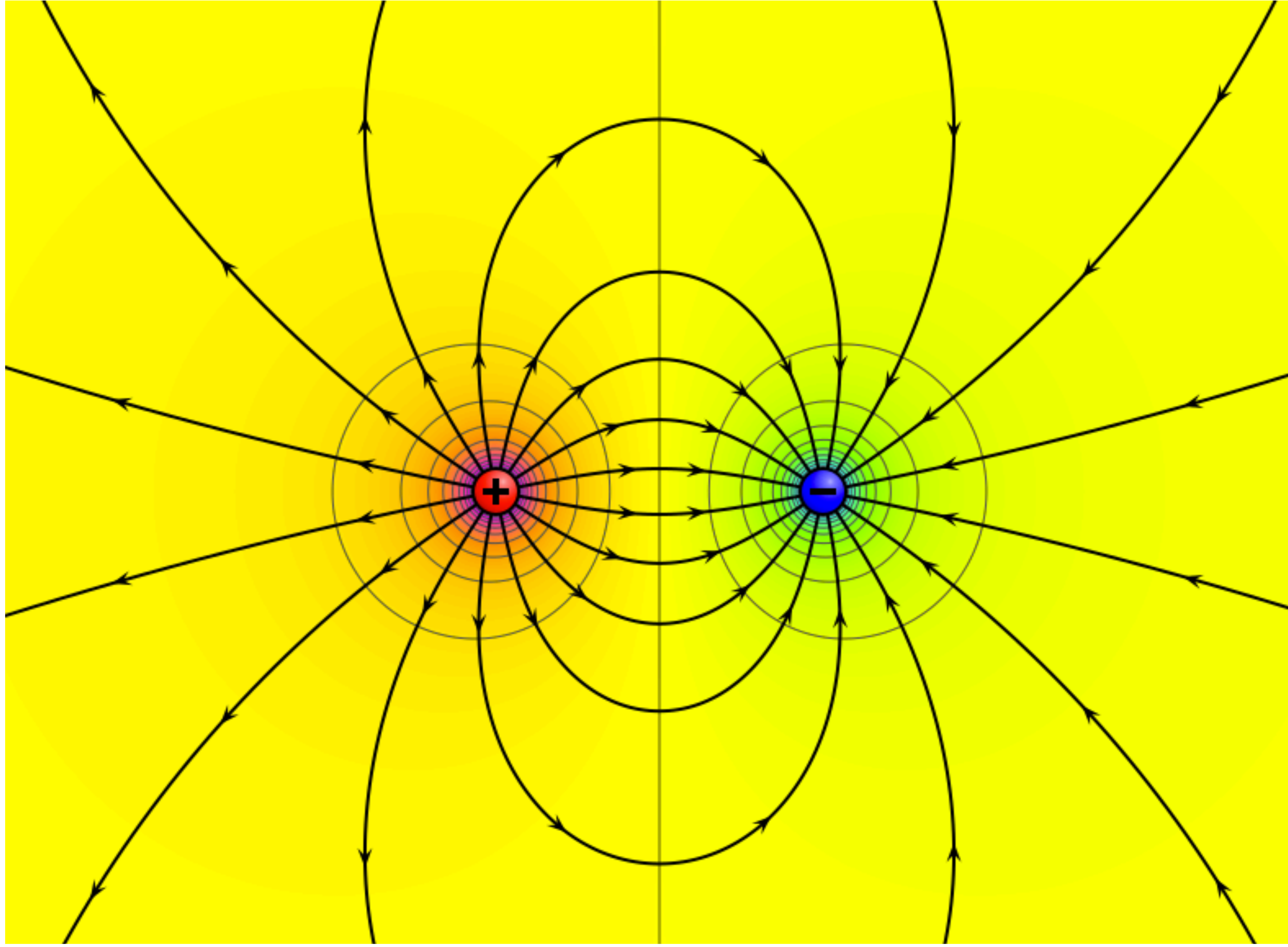
Física 2

Módulo 2: Potencial eléctrico y capacitancia

Héctor Hernández - 2025

V. Potencial eléctrico II



1. Campo a partir del potencial
2. Cálculo del potencial eléctrico
3. Potencial de distribuciones de carga continuas
4. Superficies equipotenciales y conductores
5. Polarización de la materia
6. Campo eléctrico en dieléctricos

Energía electrostática

- Recordemos que el potencial eléctrico en un punto r en un campo eléctrico estático $\vec{E}$ viene dado por la integral de línea, donde C es una trayectoria arbitraria desde algún punto de referencia fijo hasta r $\Rightarrow$ $V = -\int_{\mathcal{C}} \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell}$

- En electrostática, la ecuación de Maxwell-Faraday revela que el rotor de $\vec{E}$ es cero $\Rightarrow$ $\nabla \times \vec{E} = \vec{0}$

- Por lo que el campo eléctrico es conservativo, la integral de línea anterior no depende de la trayectoria específica C, sino sólo de sus puntos finales, resultando que: $\Rightarrow$ $\vec{E} = -\nabla V$

- Es decir, el campo eléctrico apunta hacia tensiones más bajas. Por la ley de Gauss, también se puede encontrar que el potencial satisface la ecuación de Poisson:

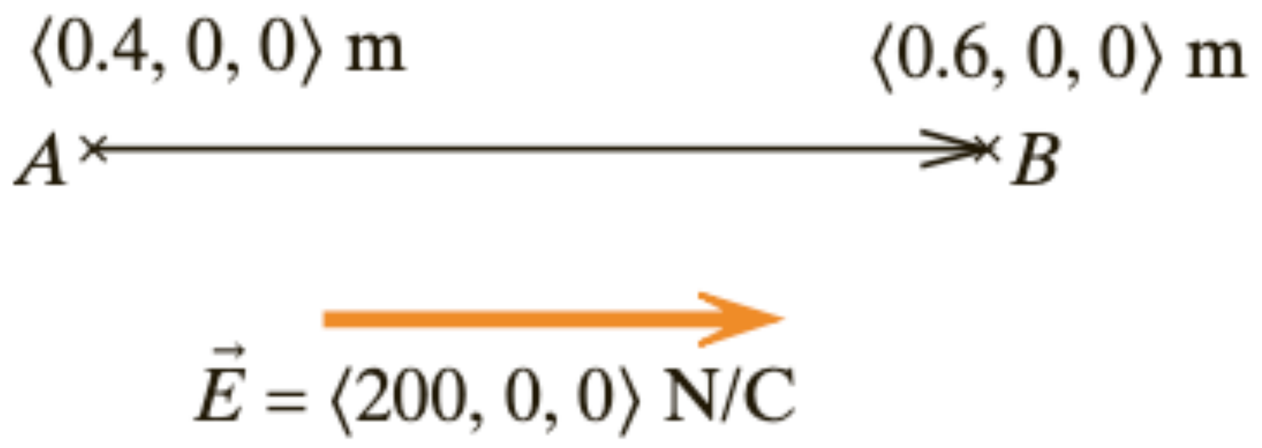
$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \nabla \cdot (-\nabla V) = -\nabla^2 V = \rho/\varepsilon_0$$

- El concepto de potencial eléctrico está estrechamente relacionado con la energía potencial. Una carga de prueba, q, tiene una energía potencial eléctrica dada por: $\Rightarrow$ $U = qV$

- Si la partícula se mueve a través de una diferencia de potencial ΔV, el cambio en la energía potencial eléctrica es $\Rightarrow$ $\Delta U = q\Delta V = q(V_f - V_i)$

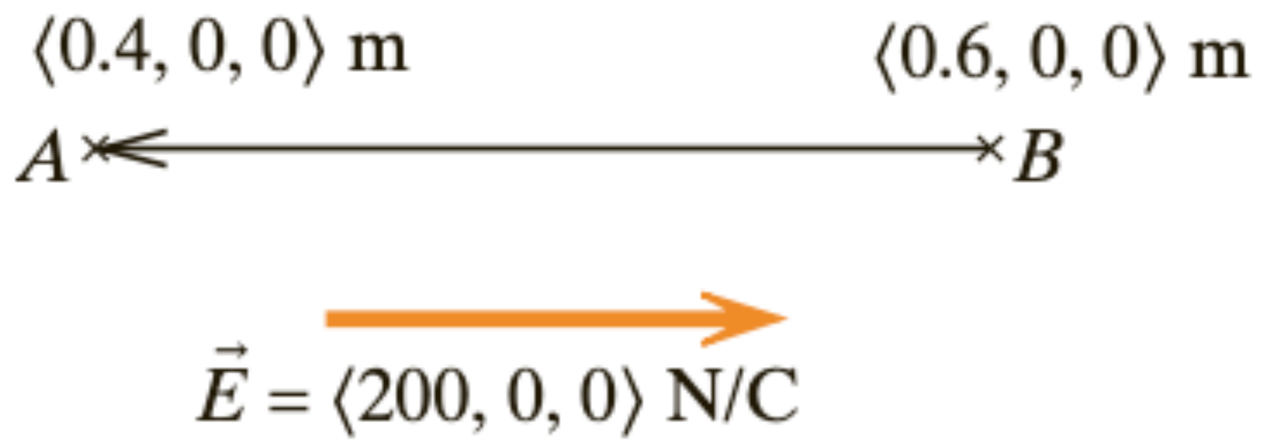
- La diferencia de potencial ΔV puede ser positiva o negativa, el signo determina si una partícula cargada ganará o perderá energía al moverse de un lugar a otro.
- Un aumento de la energía potencial $q\Delta V$ se asocia a una disminución de la energía cinética, mientras que una disminución de la energía potencial $q\Delta V$ se asocia a un aumento de la energía cinética.

- Si la dirección de la trayectoria desde A hasta B es la misma que la dirección de $\vec{E}$, la diferencia de potencial es negativa.



$$\Delta x = (0,6 - 0,4)\text{m} = 0,2 \text{ m}$$
$$\Delta V = -E_x \Delta x = -\left(200 \frac{\text{V}}{\text{m}}\right)(0,2 \text{ m}) = -40 \text{ V}$$

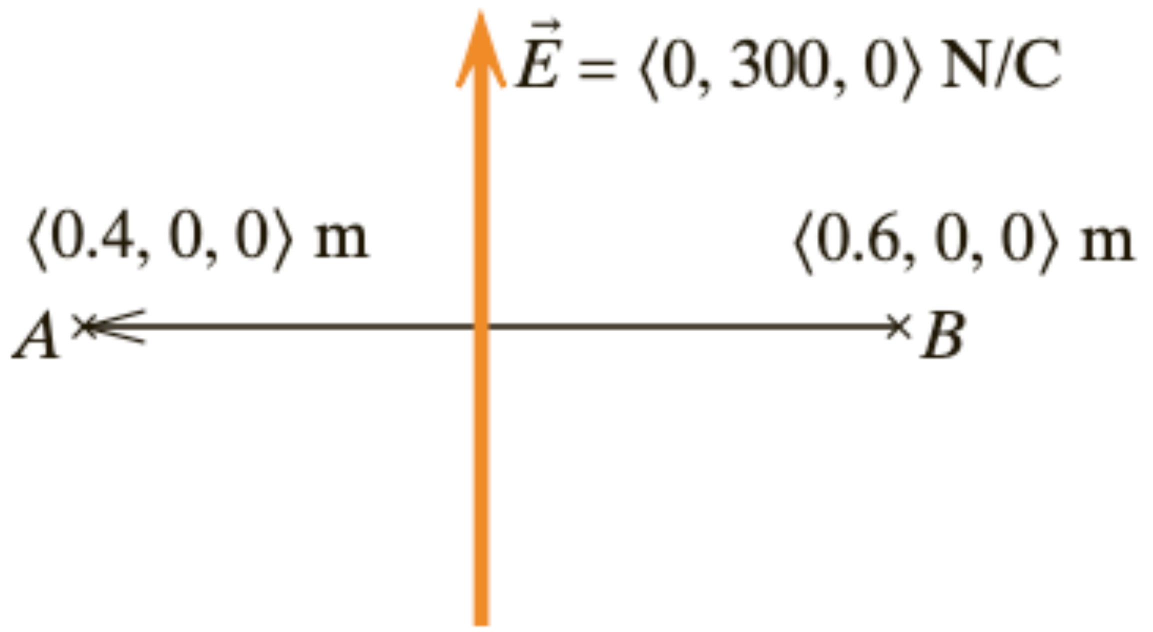
- Si la trayectoria que comienza en B y termina en A se viaja en sentido contrario a $\vec{E}$



$$\Delta V = -E_x \Delta x = -\left(200 \frac{\text{V}}{\text{m}}\right)(-0,2 \text{ m}) = +40 \text{ V}$$

- S la trayectoria que comienza en B y termina en A es perpendicular al campo eléctrico. Entonces

$$\Delta V = -(E_x \Delta x + E_y \Delta y) = -\left(\left(0 \frac{\text{V}}{\text{m}}\right)(-0,2 \text{ m}) + \left(300 \frac{\text{V}}{\text{m}}\right)(0 \text{ m})\right) = 0 \text{ V}$$



1. Campo a partir del potencial

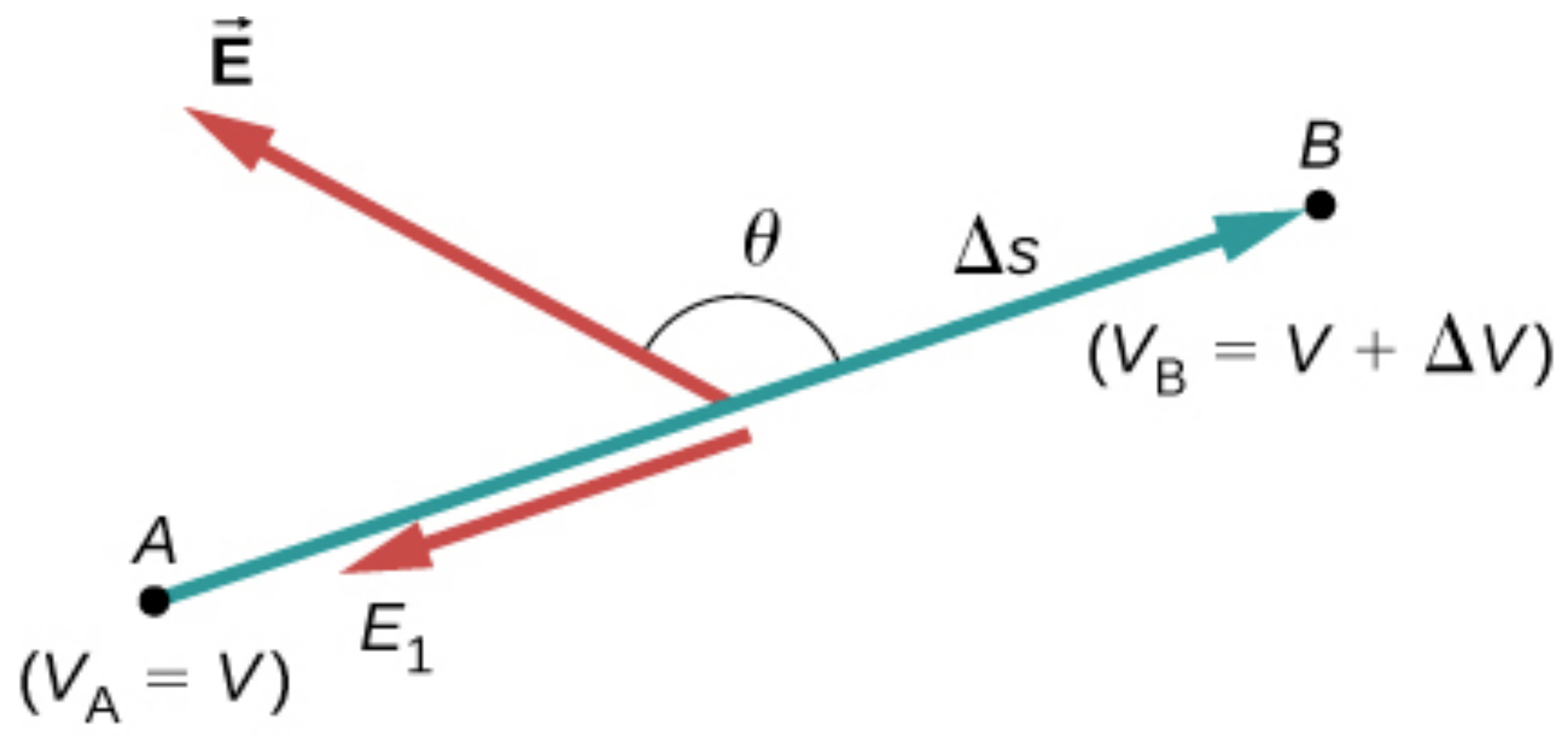
- Existen sistemas en los que es útil calcular V y luego derivar $\vec{E}$ a partir de él.

- Independientemente de que el campo eléctrico sea uniforme, este apunta en la dirección del potencial decreciente, porque la fuerza sobre una carga positiva está en la dirección de $\vec{E}$ y también en la dirección del potencial más bajo V.

- Además, la magnitud de $\vec{E}$ es igual a la velocidad de disminución de V con la distancia. Cuanto más rápido disminuya V con la distancia, mayor será el campo eléctrico.

- Esto nos da el siguiente resultado.

$$E = -\frac{\Delta V}{\Delta s}$$



- Donde Δs es la distancia en la que se produce el cambio de potencial ΔV.
- El signo menos nos indica que $\vec{E}$ apunta en la dirección de la disminución del potencial.
- Se dice que el campo eléctrico es el gradiente del potencial eléctrico.

- Para potenciales que cambian continuamente, ΔV y Δs se convierten en infinitesimales y el campo eléctrico es esencialmente constante, de manera que

$$E = -\frac{\Delta V}{\Delta s} \quad \Rightarrow \quad E_s = -\frac{dV}{ds}$$

- Por tanto, las componentes del campo eléctrico en las direcciones cartesianas vienen dadas por

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x},\ E_y = -\frac{\partial V}{\partial y},\ E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

- Recordando el operador "nabla" en coordenadas cartesianas

$$\vec{\nabla} = \hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

- Podemos calcular el campo eléctrico a partir del potencial con

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V$$

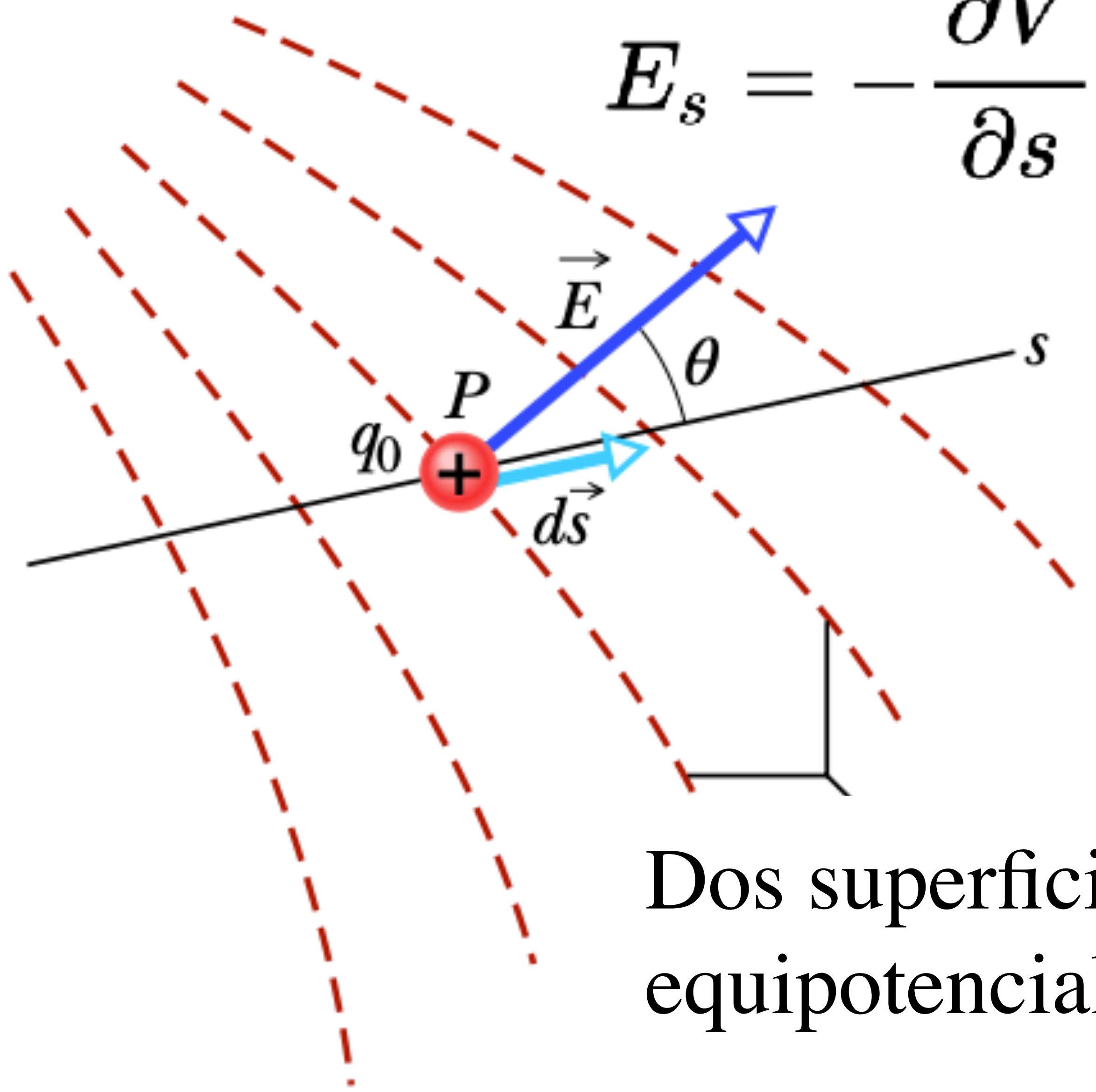
- Un proceso que llamamos el cálculo del gradiente del potencial.

$$W = \left(q_0\vec{E}\right)\cdot d\vec{s}$$

$$-q_0 dV = q_0 E(\cos\theta) ds$$

$$E\cos\theta = -\frac{dV}{ds}$$

$$E_s = -\frac{\partial V}{\partial s}$$



Dos superficies equipotenciales

- En coordenas esféricas y cilíndricas

$$\vec{\nabla}_{esf} = \hat{r}\frac{\partial}{\partial r} + \hat{\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{\varphi}\frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}$$

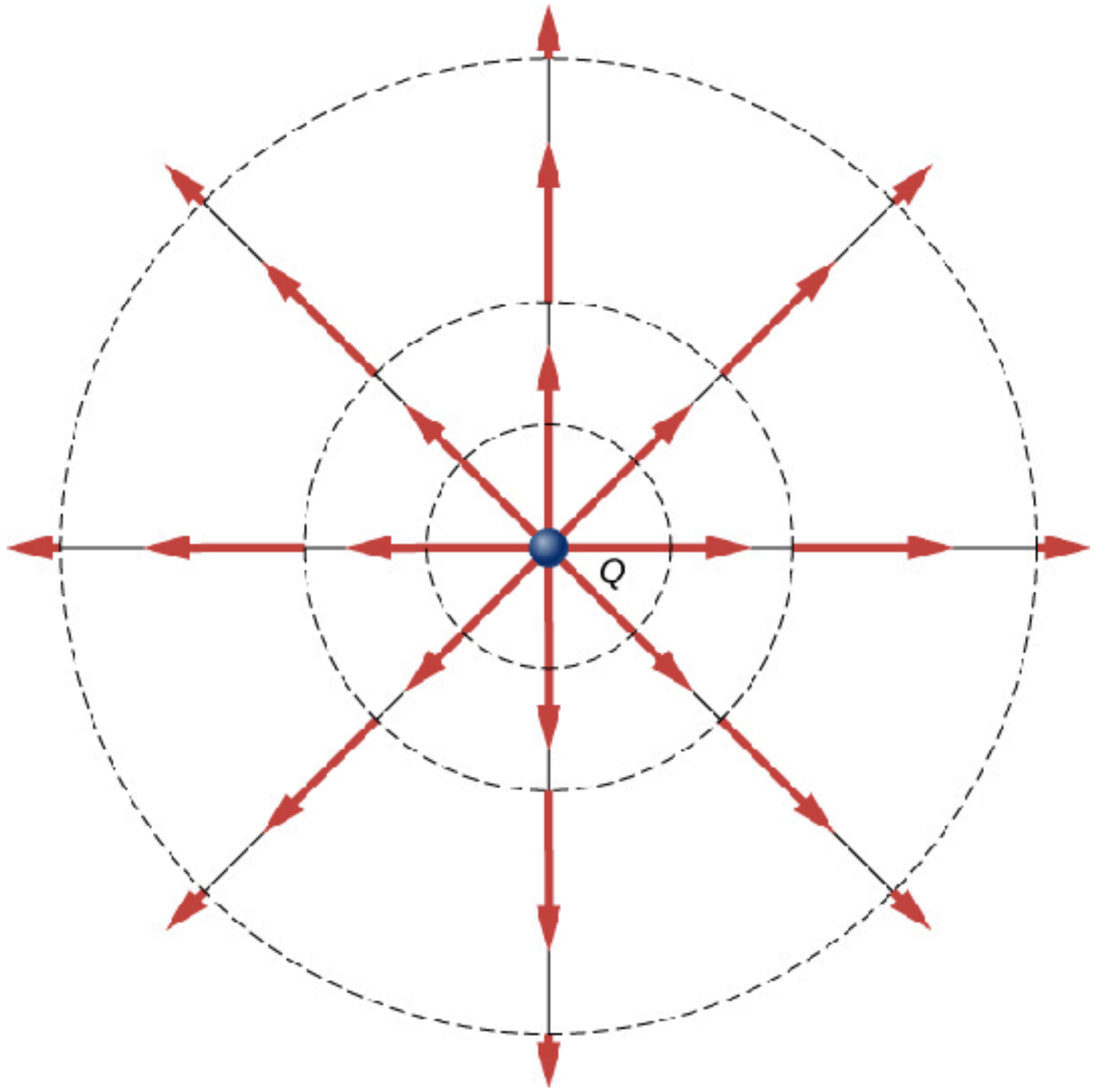
$$\vec{\nabla}_{cil} = \hat{r}\frac{\partial}{\partial r} + \hat{\varphi}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi} + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z}$$

Ejemplo

- El potencial eléctrico para una carga puntual es

$$V(r) = \frac{kq}{r}$$

- Como es un campo escalar son simetría esférica



$$\vec{E} = -\nabla V = -\left[\hat{r}\frac{\partial}{\partial r} + \hat{\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{\varphi}\frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}\right]\frac{kq}{r}$$

$$= -kq\hat{r}\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r} = \frac{kq}{r^2}\hat{r}$$

$$\vec{\nabla}_{esf} = \hat{r}\frac{\partial}{\partial r} + \hat{\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{\varphi}\frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}$$

- No solo hemos obtenido la ecuación para el campo eléctrico de una partícula puntual que hemos visto antes, sino que también tenemos una demostración de que $\vec{E}$ apunta en la dirección de la disminución del potencial,

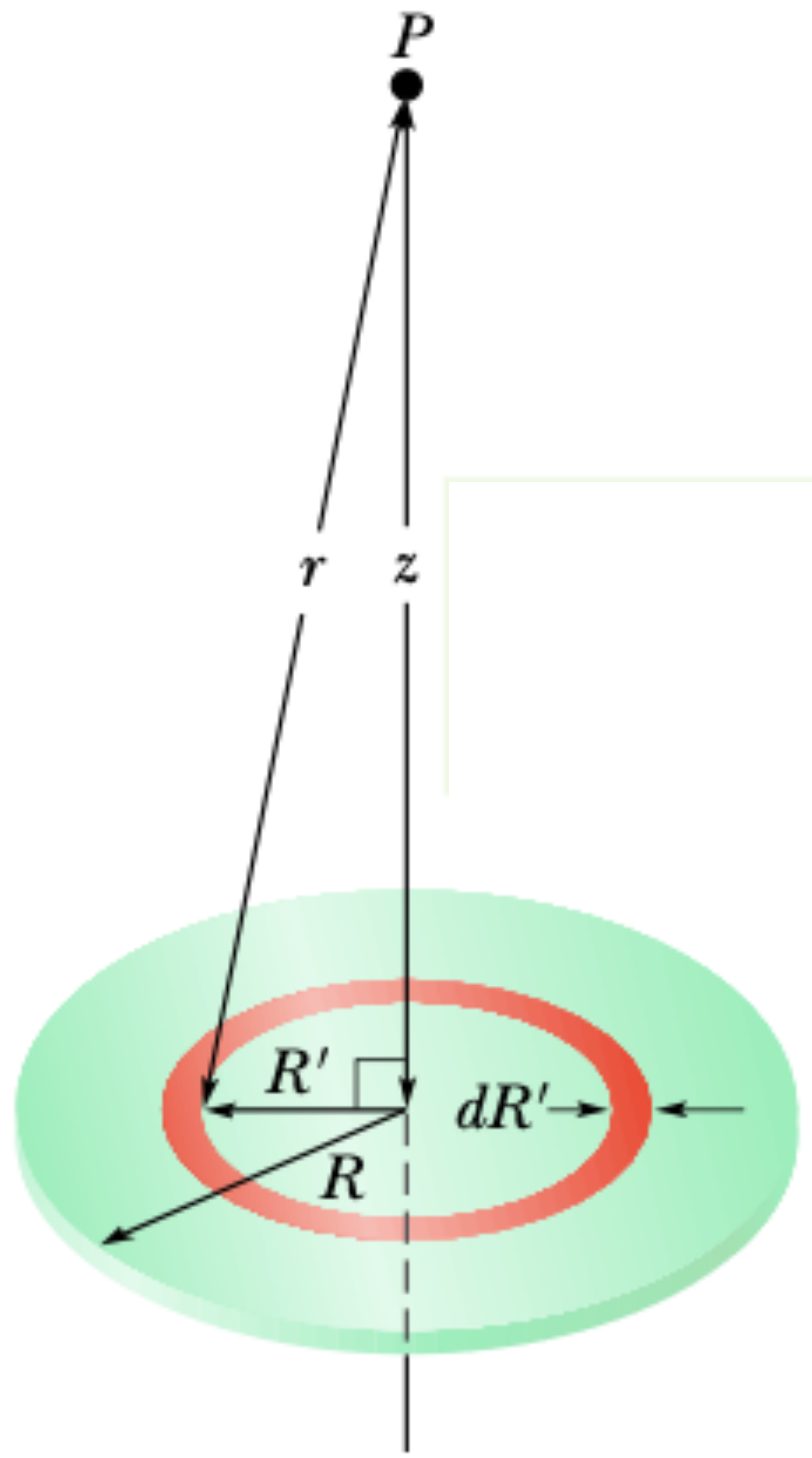
Ejemplo

El potencial eléctrico en cualquier punto del eje central de un disco uniformemente cargado viene dado por:

$$V = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{z^2 + R^2} - z\right)$$

A partir de esta expresión, derivar una expresión para el campo eléctrico en cualquier punto sobre el eje del disco.

$$E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$



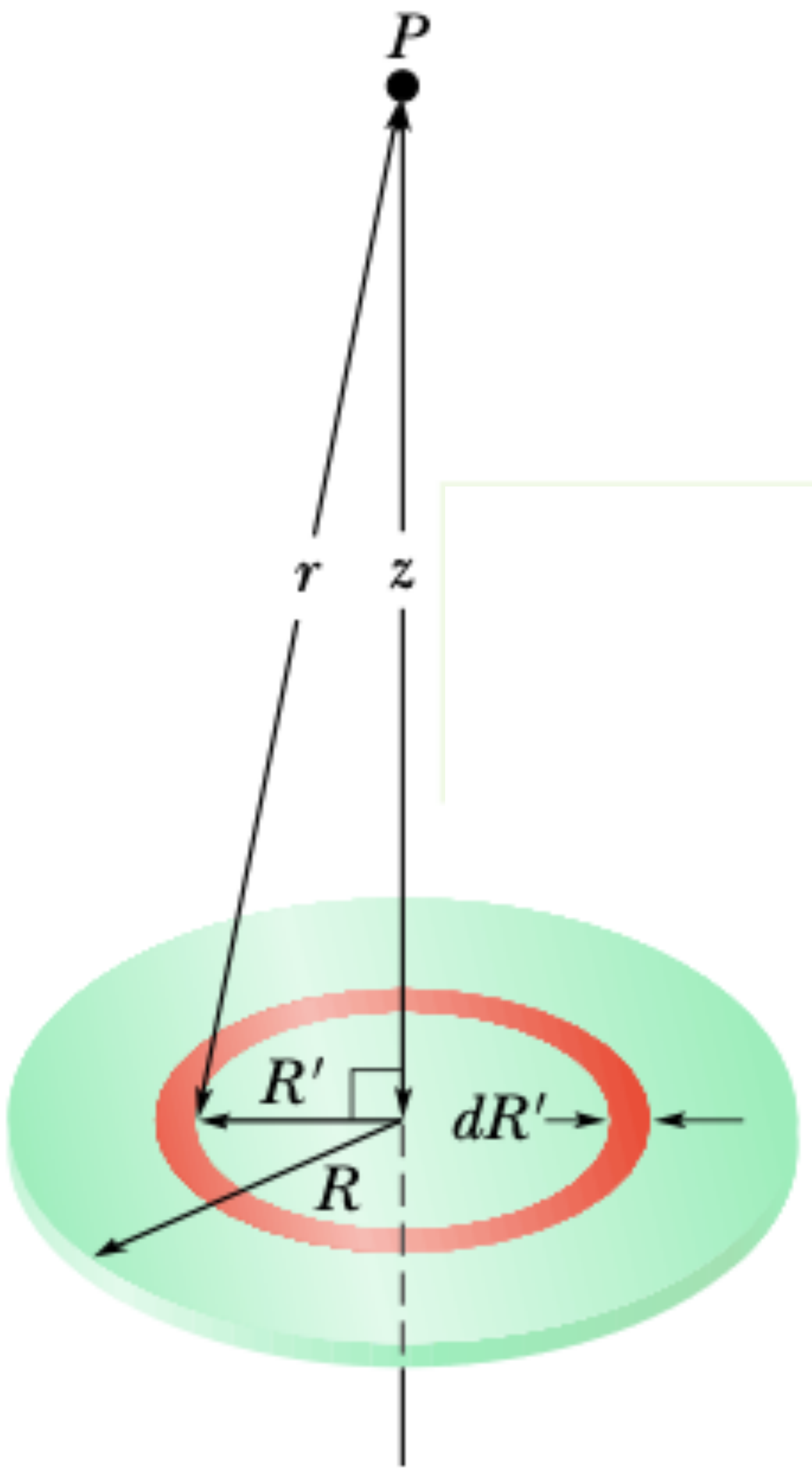
Ejemplo

El potencial eléctrico en cualquier punto del eje central de un disco uniformemente cargado viene dado por:

$$V = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{z^2 + R^2} - z\right)$$

A partir de esta expresión, derivar una expresión para el campo eléctrico en cualquier punto sobre el eje del disco.

$$\begin{aligned} E_z &= -\frac{\partial V}{\partial z} \\ &= -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\frac{d}{dz}\left(\sqrt{z^2 + R^2} - z\right) \\ &= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}}\right) \end{aligned}$$



2. Cálculo del potencial eléctrico

- Las cargas puntuales, como los electrones, y las distribuciones de carga esféricas (como la carga en una esfera metálica) crean campos eléctricos externos exactamente iguales.

- El potencial eléctrico V de una carga puntual viene dado por

$$V(r) = \frac{kq}{r}$$

- V para una carga puntual disminuye con la distancia, mientras que $\vec{E}$ para una carga puntual disminuye con la distancia al cuadrado:

$$\vec{E}(r) = \frac{kq}{r^2}\hat{r}$$

- Recordemos que el potencial eléctrico V es un campo escalar mientras que el campo eléctrico $\vec{E}$ es un campo vectorial:
  - Para encontrar el voltaje debido a una combinación de cargas puntuales, se suman los voltajes individuales como números.
  - Para encontrar el campo eléctrico total, hay que sumar los campos individuales como vectores.

- Esto es coherente con el hecho de que V está estrechamente relacionado con la energía, un escalar, mientras que $\vec{E}$ está estrechamente relacionado con la fuerza, un vector.

Ejemplo

- Las cargas de la electricidad estática suelen estar en el rango de nanoculombios (nC) a microculombios (μC).
- ¿Cuál es el voltaje a 5,00 cm del centro de una esfera metálica sólida de 1 cm de diámetro que tiene una carga
- estática de -3,00 nC?

La carga en la esfera metálica se encuentra distribuida uniformemente y produce un campo como el de una carga puntual situada en su centro.

$$\begin{aligned} V &= k\frac{q}{r} \\ &= \left(9,00 \times 10^{9}\ \mathrm{N} \cdot\ \mathrm{m}^{2}/\ \mathrm{C}^{2}\right)\left(\frac{-3,00 \times 10^{-9}\ \mathrm{C}}{5,00 \times 10^{-2}\ \mathrm{m}}\right) \\ &= -539\ \mathrm{V} \end{aligned}$$

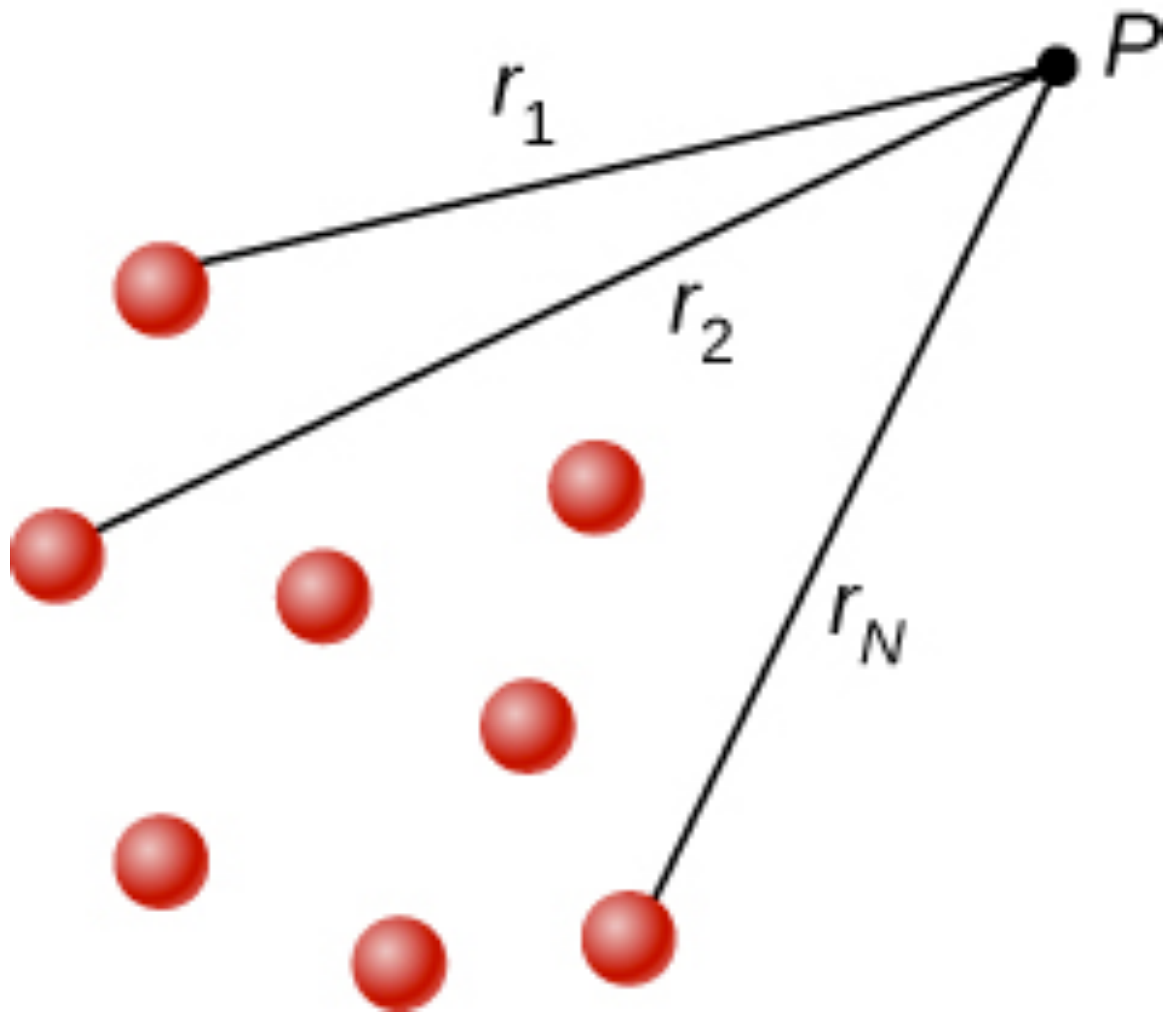
El valor negativo del voltaje significa que una carga positiva sería atraída desde una distancia mayor, ya que el potencial es menor (más negativo) que a distancias mayores. Por el contrario, una carga negativa sería repelida.

- El campo eléctrico en el interior de un conductor es cero. Por lo tanto, cualquier camino desde un punto en la superficie a cualquier punto en el interior tendrá un integrando de cero al calcular el cambio de potencial, y por lo tanto el potencial en el interior de la esfera es idéntico al de la superficie.

Sistemas de múltiples cargas puntuales

- Al igual que el campo eléctrico obedece al principio de superposición, también lo hace el potencial eléctrico.

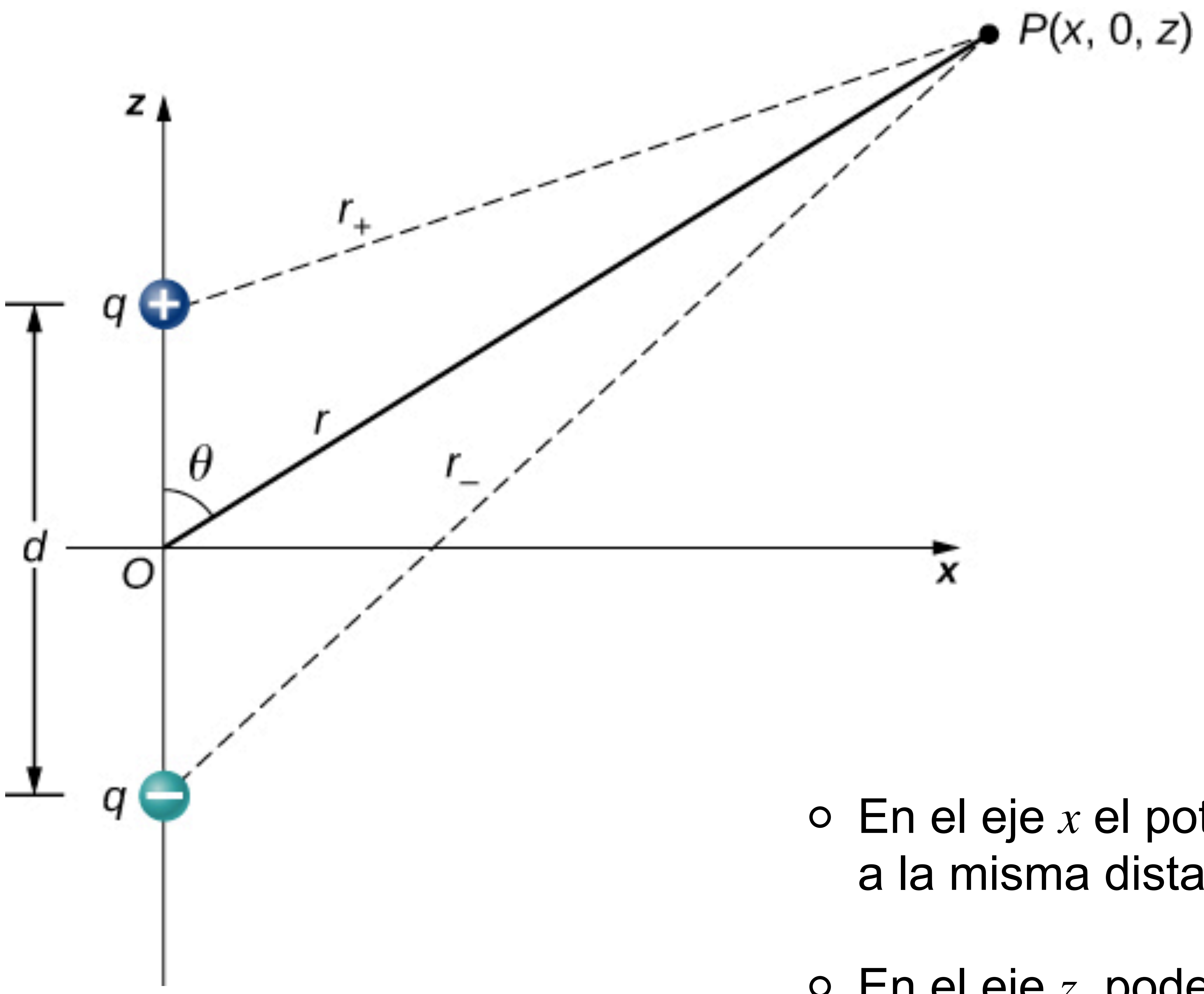
- Consideremos un sistema formado por N cargas $q_1, q_2, \ldots, q_N$, cada una de estas cargas es una carga fuente que produce su propio potencial eléctrico en el punto P, independientemente de las otras cargas

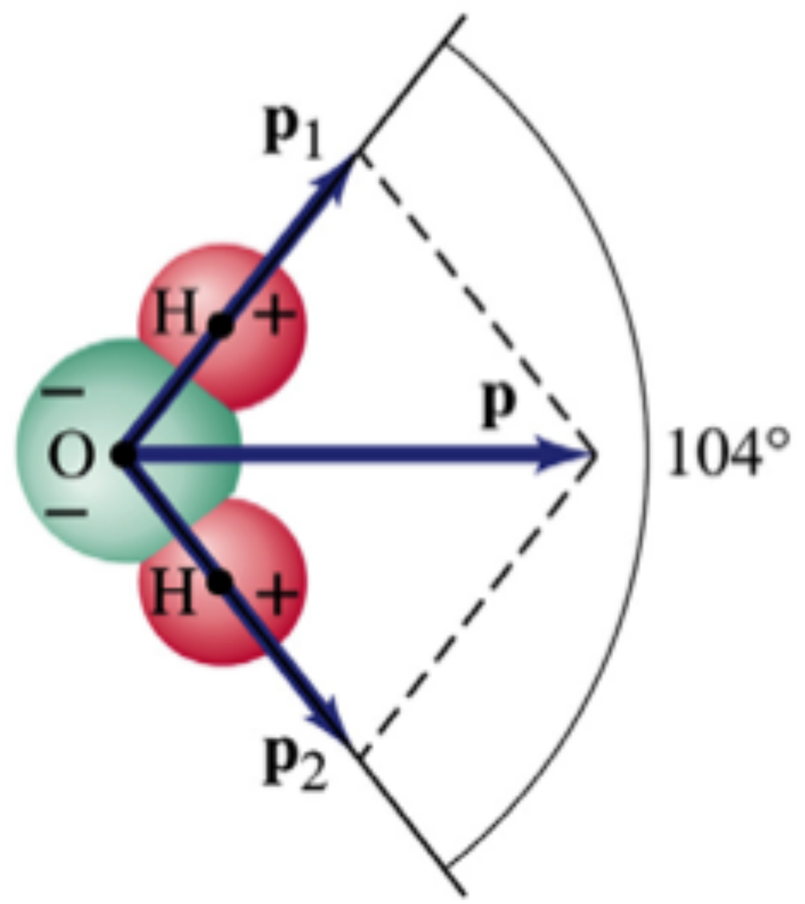


$$V_p = V_1 + V_2 + \ldots + V_N = \sum_{i=1}^{N} V_i$$

$$V_p = \sum_{i=1}^{N} k\frac{q_i}{r_i} = k\sum_{i=1}^{N} \frac{q_i}{r_i}$$

El dipolo eléctrico



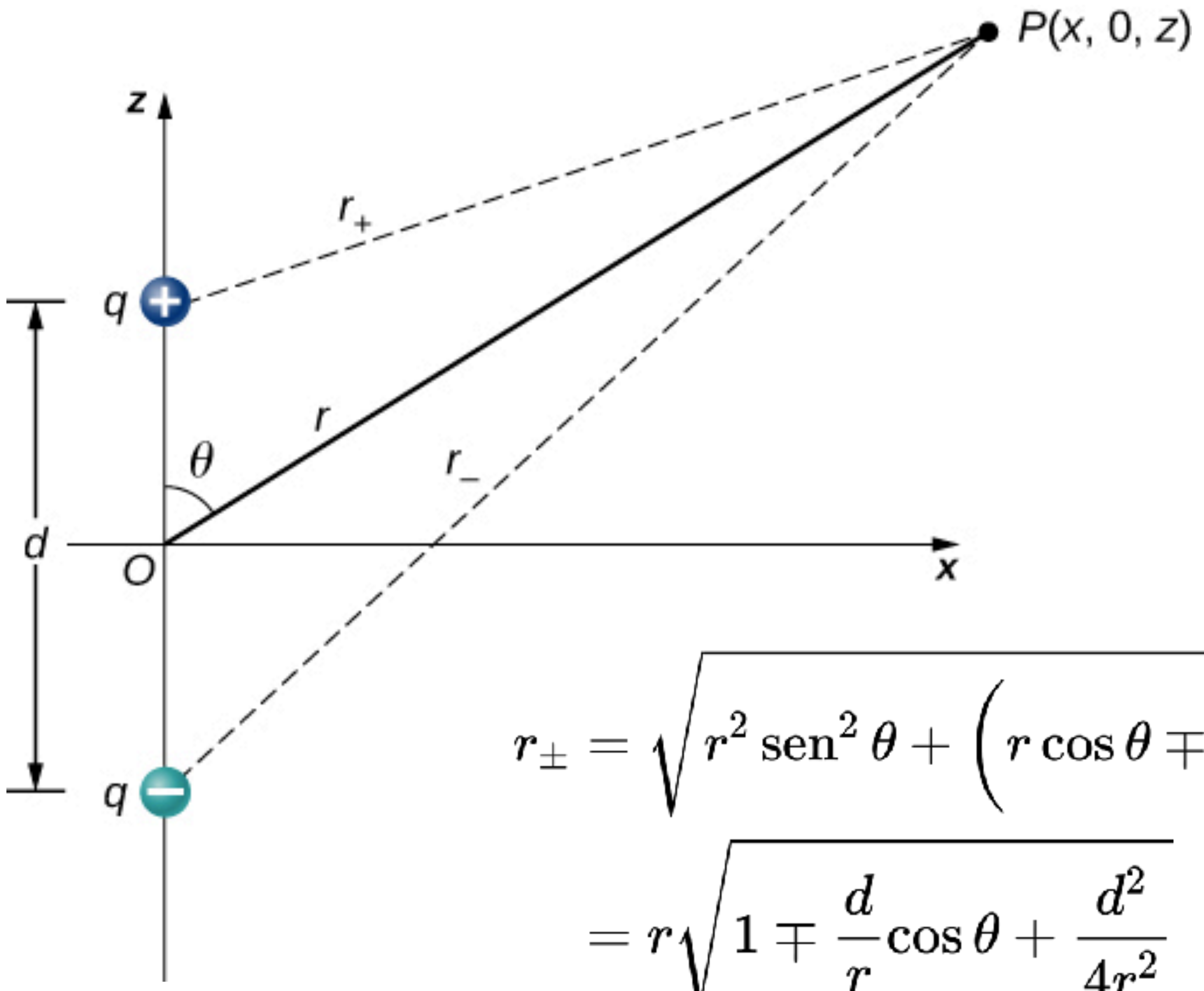


$$V_p = V_+ + V_- = k\left(\frac{q}{r_+} - \frac{q}{r_-}\right)$$

$$r_\pm = \sqrt{x^2 + \left(z \mp \frac{d}{2}\right)^2}$$

- En el eje x el potencial es cero, debido a las cargas iguales y opuestas a la misma distancia de el eje.

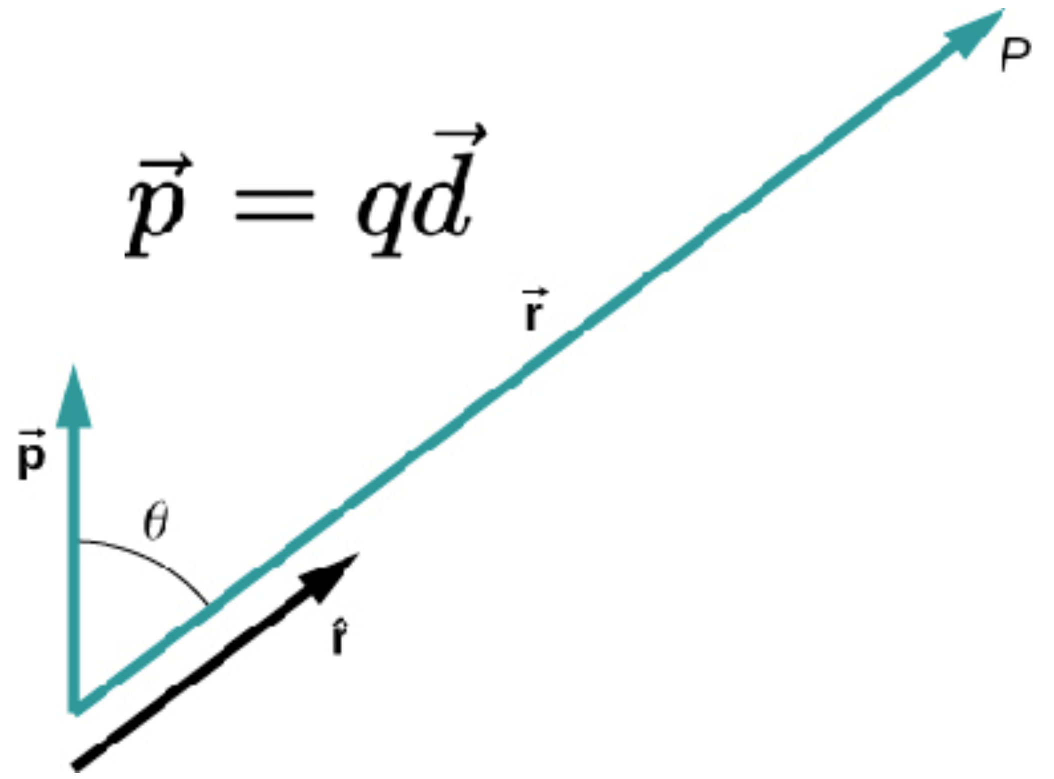
- En el eje z, podemos superponer los dos potenciales y encontraremos que para $z >> d$, de nuevo el potencial va a cero



$$V_p = V_+ + V_- = k\left(\frac{q}{r_+} - \frac{q}{r_-}\right)$$

$$r_\pm = \sqrt{x^2 + \left(z \mp \frac{d}{2}\right)^2}$$

$$\vec{p} = q\vec{d}$$



$$r_\pm = \sqrt{r^2 \operatorname{sen}^2\theta + \left(r\cos\theta \mp \frac{d}{2}\right)^2} = \sqrt{r^2 \operatorname{sen}^2\theta + r^2\cos^2\theta \mp rd\cos\theta + \frac{d^2}{4}} = r\sqrt{\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta \mp \frac{d}{r}\cos\theta + \frac{d^2}{4r^2}}$$

$$= r\sqrt{1 \mp \frac{d}{r}\cos\theta + \frac{d^2}{4r^2}}$$

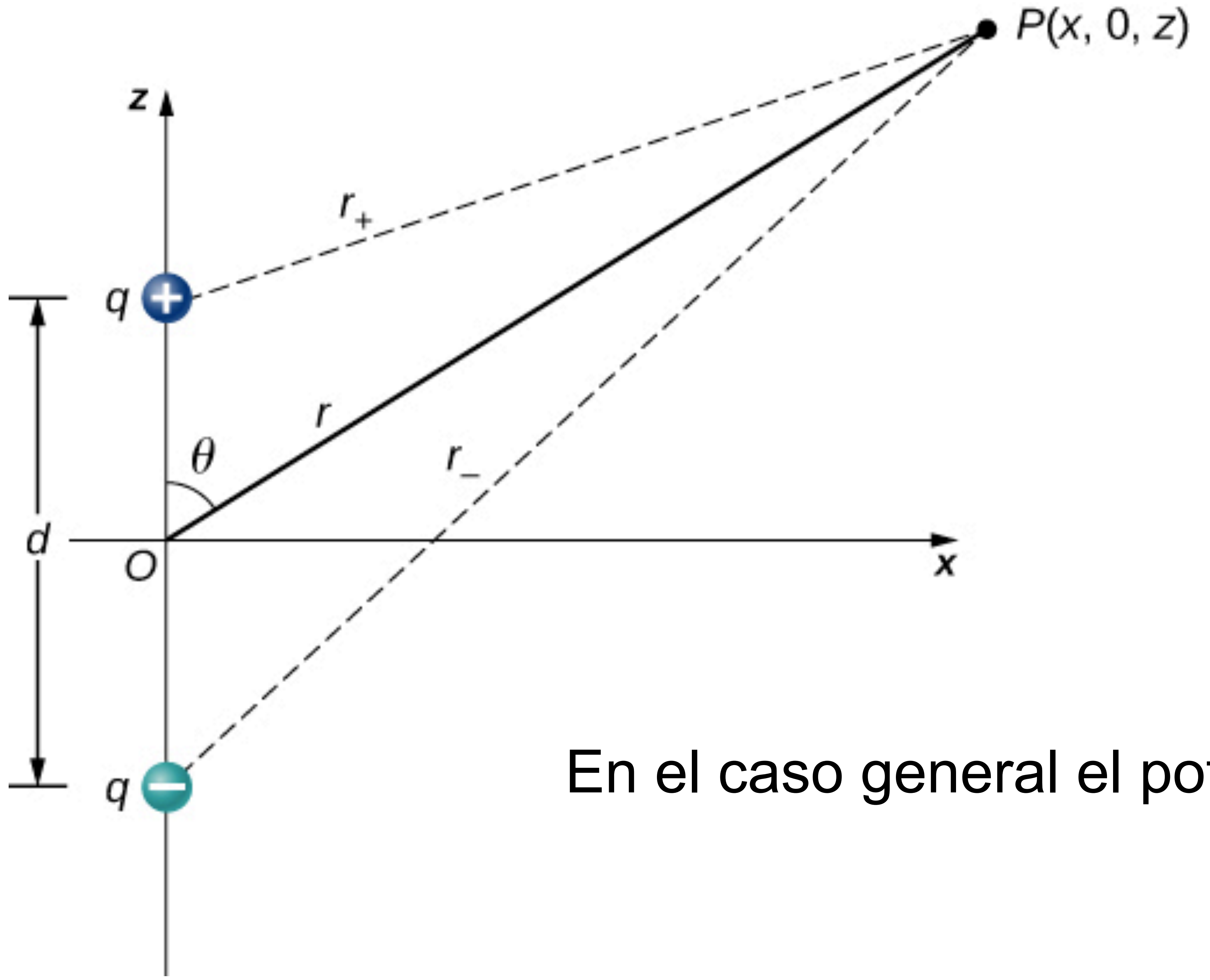
- El último término de la raíz es lo suficientemente pequeño cuando r>>d y se puede despreciar

$$r_\pm = r\sqrt{1 \mp \frac{d}{r}\cos\theta}$$

- Utilizando la aproximación (cuando a es pequeño):

$$\frac{1}{\sqrt{1 \mp a}} \approx 1 \pm \frac{a}{2}$$

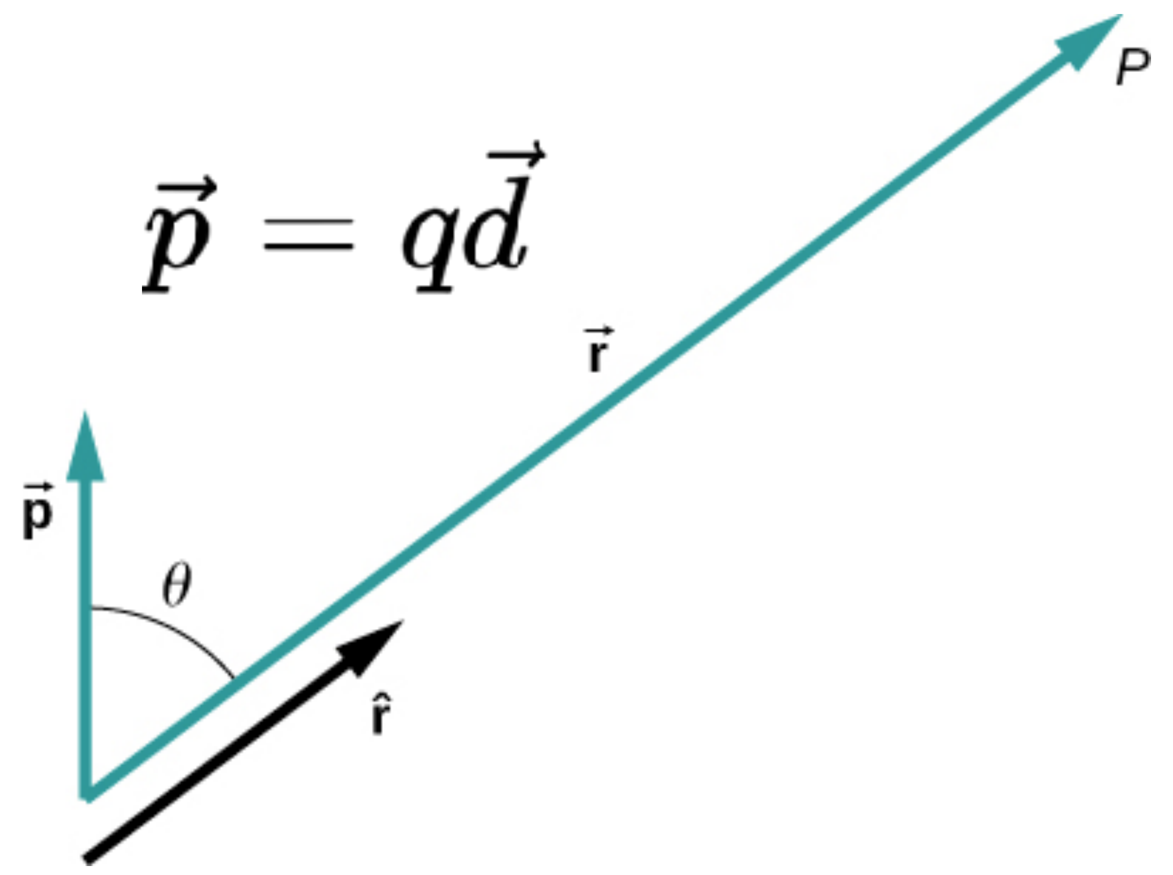
$$V_p = k\left[\frac{q}{r}\left(1 + \frac{d\cos\theta}{2r}\right) - \frac{q}{r}\left(1 - \frac{d\cos\theta}{2r}\right)\right] = k\frac{qd\cos\theta}{r^2} = k\frac{\vec{p}\cdot\hat{r}}{r^2}$$



$$V_p = V_+ + V_- = k\left(\frac{q}{r_+} - \frac{q}{r_-}\right)$$

$$r_\pm = \sqrt{x^2 + \left(z \mp \frac{d}{2}\right)^2}$$

$$\vec{p} = q\vec{d}$$



En el caso general el potencial en el punto *P* en coordenadas polares es:

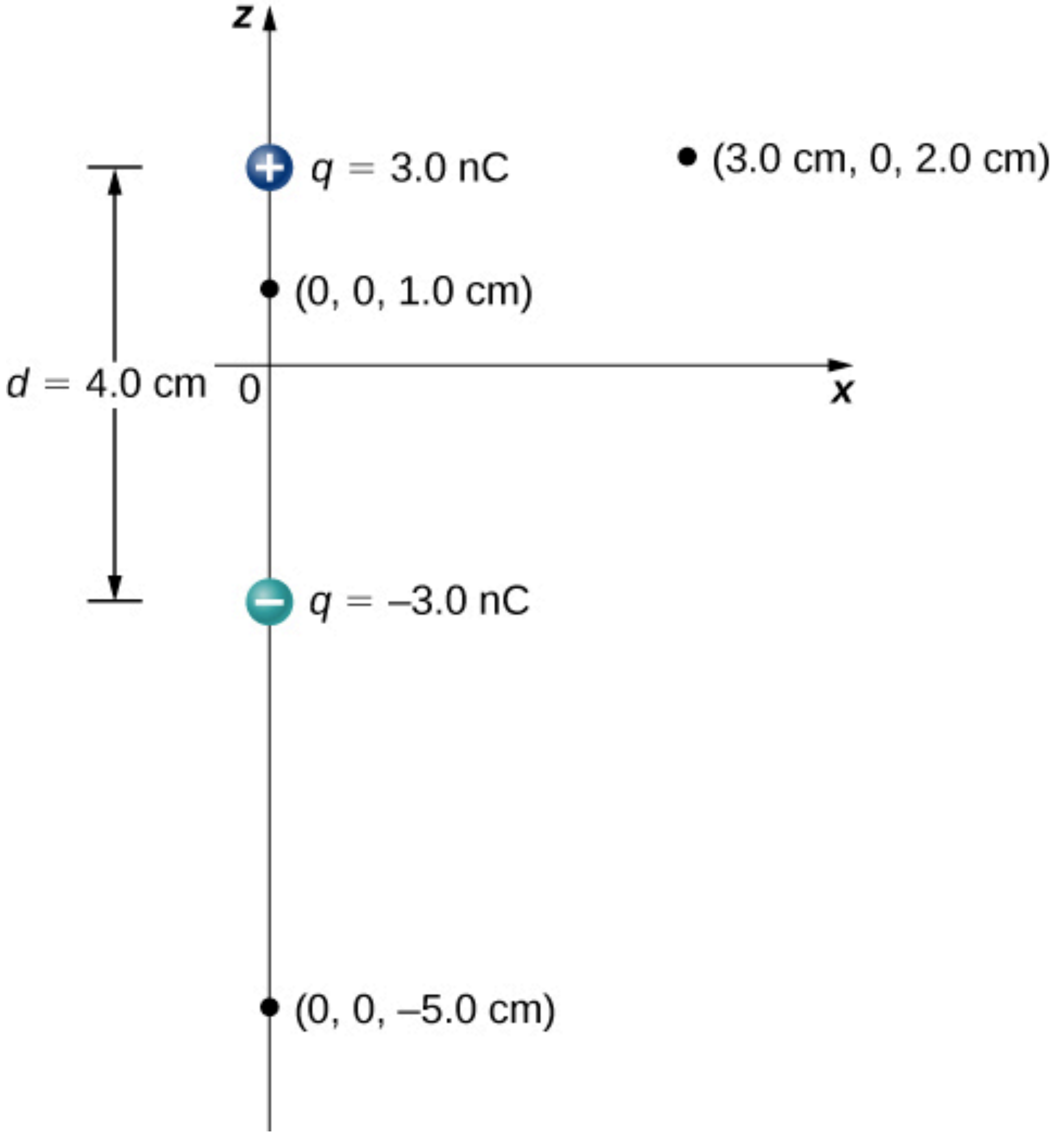
$$V_p = V_+ + V_- = kq\left(\frac{1}{r\sqrt{1 - \frac{d}{r}\cos(\theta) + \frac{d^2}{4r^2}}} - \frac{1}{r\sqrt{1 + \frac{d}{r}\cos(\theta) + \frac{d^2}{4r^2}}}\right)$$

Pero cuando $r>>d$

$$V_p = k\left[\frac{q}{r}\left(1 + \frac{d\cos\theta}{2r}\right) - \frac{q}{r}\left(1 - \frac{d\cos\theta}{2r}\right)\right] = k\frac{qd\cos\theta}{r^2} = k\frac{\vec{p}\cdot\hat{r}}{r^2}$$

Ejemplo

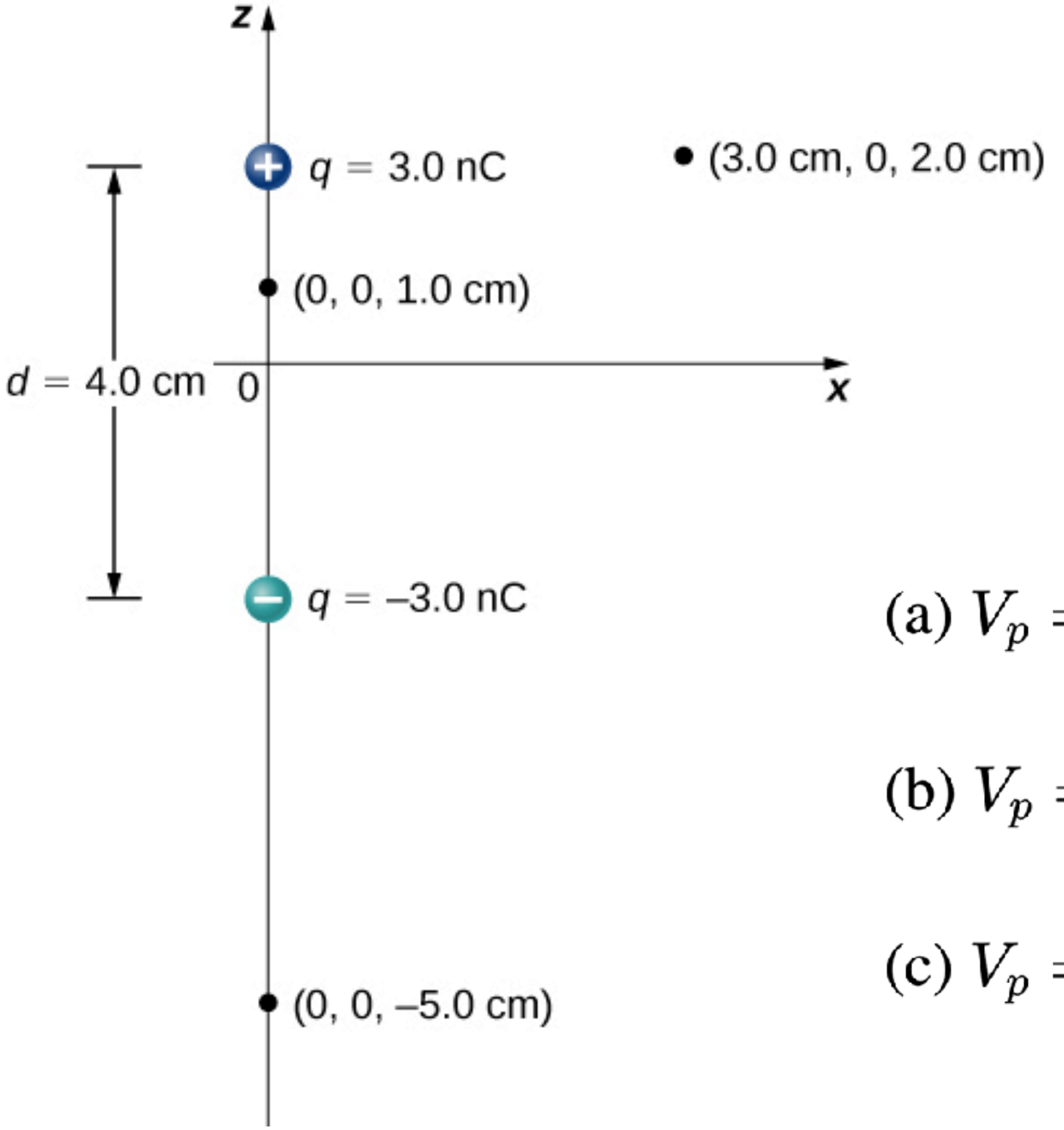
- Considere el dipolo de la figura con la magnitud de carga q=3,0 nC y la distancia de separación d=4,0 cm.
- ¿Cuál es el potencial en los siguientes lugares del espacio? (a) (0; 0; 1,0) cm; (b) (0; 0; -5,0) cm; (c) (3,0; 0; 2,0) cm.



$$V_p = \sum_{i=1}^{N} k\frac{q_i}{r_i} = k\sum_{i=1}^{N}\frac{q_i}{r_i}$$

Ejemplo

- Considere el dipolo de la figura con la magnitud de carga q=3,0 nC y la distancia de separación d=4,0 cm.
- ¿Cuál es el potencial en los siguientes lugares del espacio? (a) (0; 0; 1,0) cm; (b) (0; 0; -5,0) cm; (c) (3,0; 0; 2,0) cm.



$$V_p = \sum_{i=1}^{N} k\frac{q_i}{r_i} = k\sum_{i=1}^{N}\frac{q_i}{r_i}$$

$$\text{(a) } V_p = \left(9,0 \times 10^9 \text{ N}\frac{\text{m}^2}{\text{C}^2}\right)\left(\frac{3{,}0\times10^{-9}\text{C}}{0{,}010 \text{ m}} - \frac{3{,}0\times10^{-9}\text{C}}{0{,}030 \text{ m}}\right) = 1,8 \times 10^3 \text{ V}$$

$$\text{(b) } V_p = \left(9,0 \times 10^9 \text{ N}\frac{\text{m}^2}{\text{C}^2}\right)\left(\frac{3{,}0\times10^{-9}\text{C}}{0{,}070 \text{ m}} - \frac{3{,}0\times10^{-9}\text{C}}{0{,}030 \text{ m}}\right) = -5,1 \times 10^2 \text{ V}$$

$$\text{(c) } V_p = \left(9,0 \times 10^9 \text{ N}\frac{\text{m}^2}{\text{C}^2}\right)\left(\frac{3{,}0\times10^{-9}\text{C}}{0{,}030 \text{ m}} - \frac{3{,}0\times10^{-9}\text{C}}{0{,}050 \text{ m}}\right) = 3,6 \times 10^2 \text{ V}$$

Campo eléctrico producido por el dipolo eléctrico en coordenadas polares

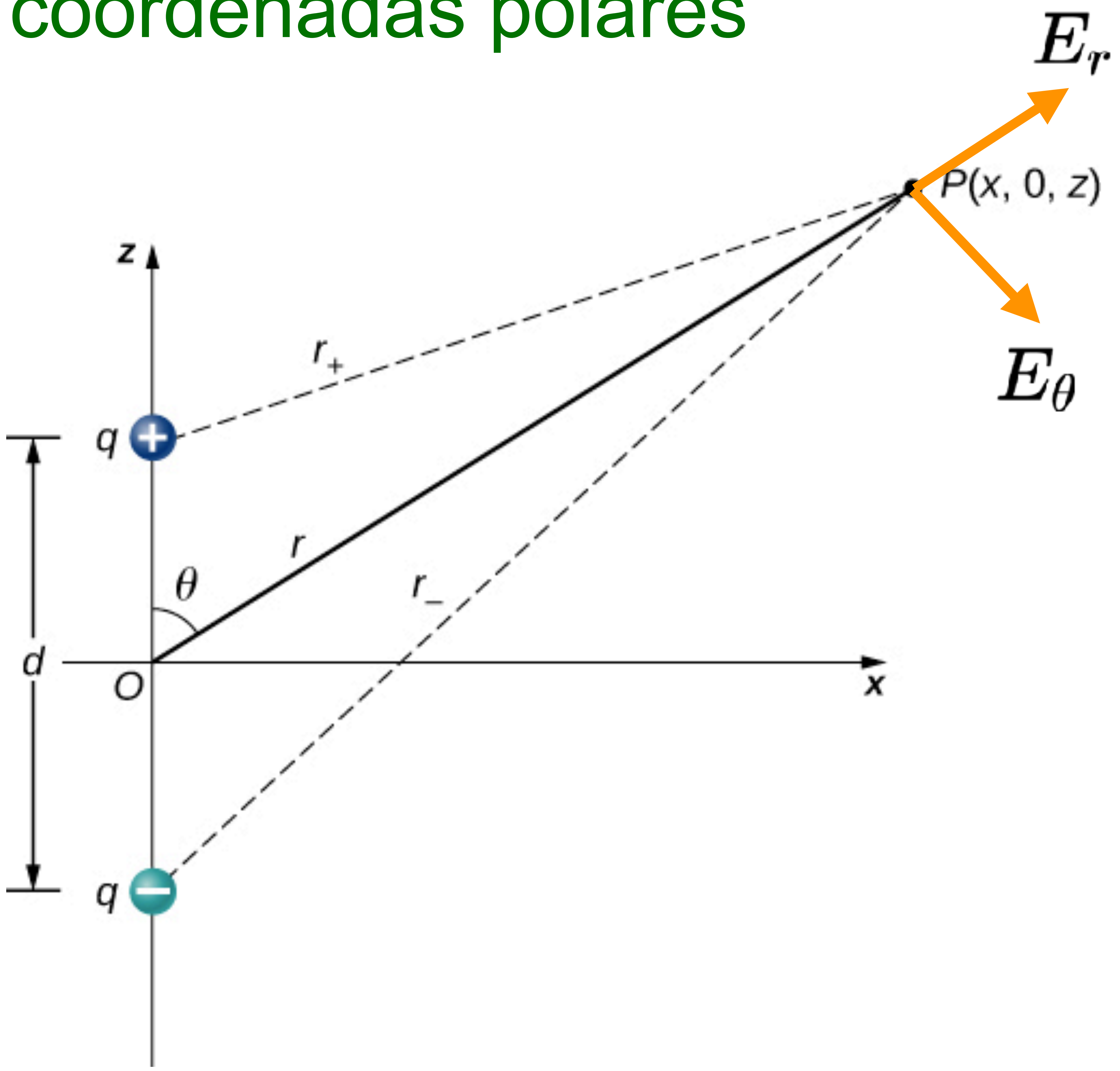
Cuando $r >> d$

$$V_p(r,\theta) = k\frac{qd\cos\theta}{r^2}$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V = -\left[\hat{r}\frac{\partial V}{\partial r} + \hat{\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\right]$$

$$-\left[-\frac{2dkq\cos(\theta)}{r^3}\hat{r} - \frac{dkq\sin(\theta)}{r^3}\hat{\theta}\right]$$

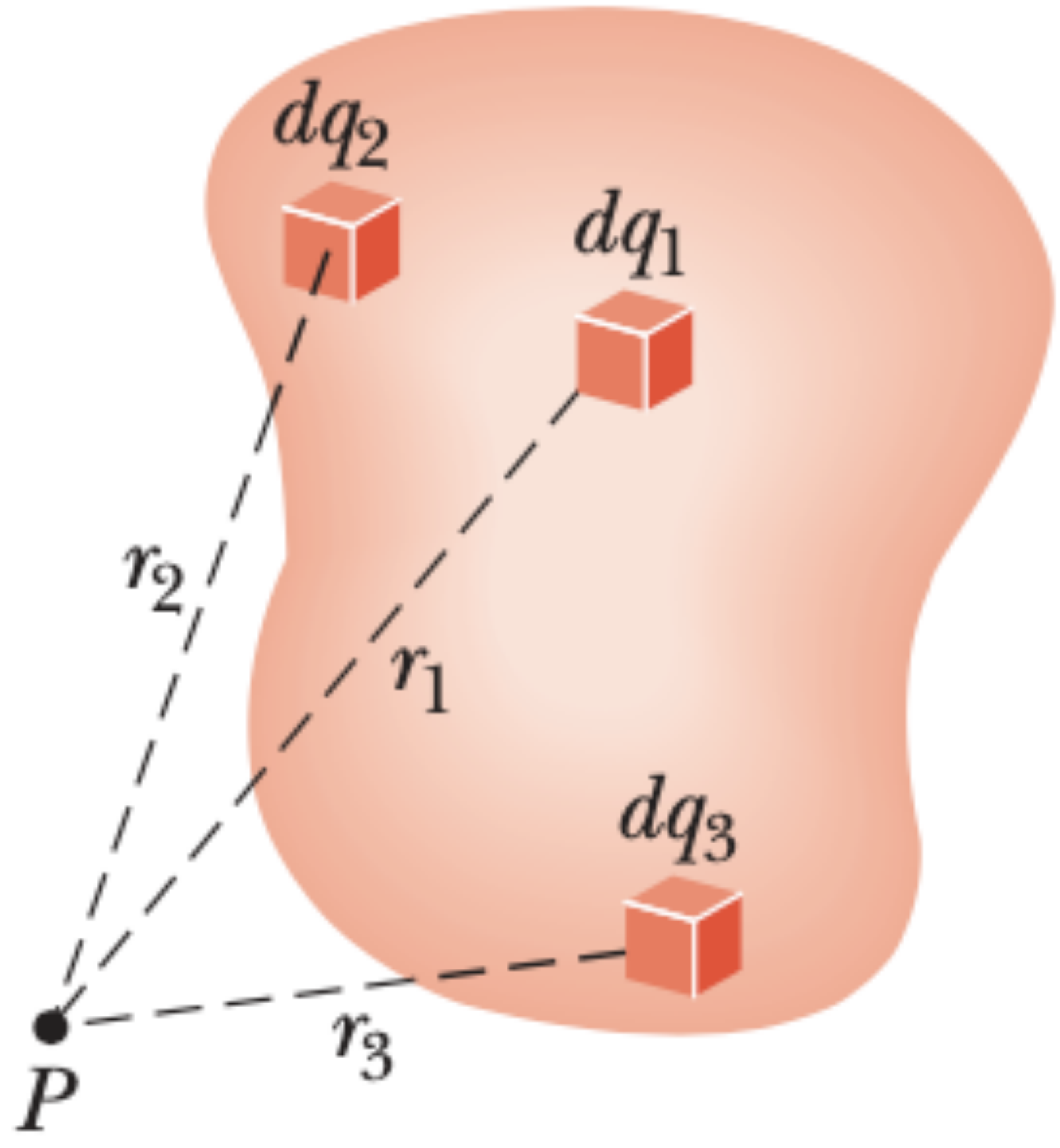
$$\frac{kp}{r^3}\left[2\cos(\theta)\,\hat{r} + \sin(\theta)\,\hat{\theta}\right]$$



$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$$
$$\hat{r} = \cos\theta\,\hat{\imath} + \mathrm{sen}\,\theta\,\hat{\jmath}$$
$$\hat{\theta} = -\,\mathrm{sen}\,\theta\,\hat{\imath} + \cos\theta\,\hat{\jmath}$$

3. Potencial de distribuciones de continuas de carga

$$V_p = k\sum_{i=1}^{N}\frac{q_i}{r_i} \Rightarrow V_p = k\int\frac{dq}{r}$$



- Para el potencial en un punto P, observemos que r es la distancia de cada punto individual de la distribución de cargas al punto P.

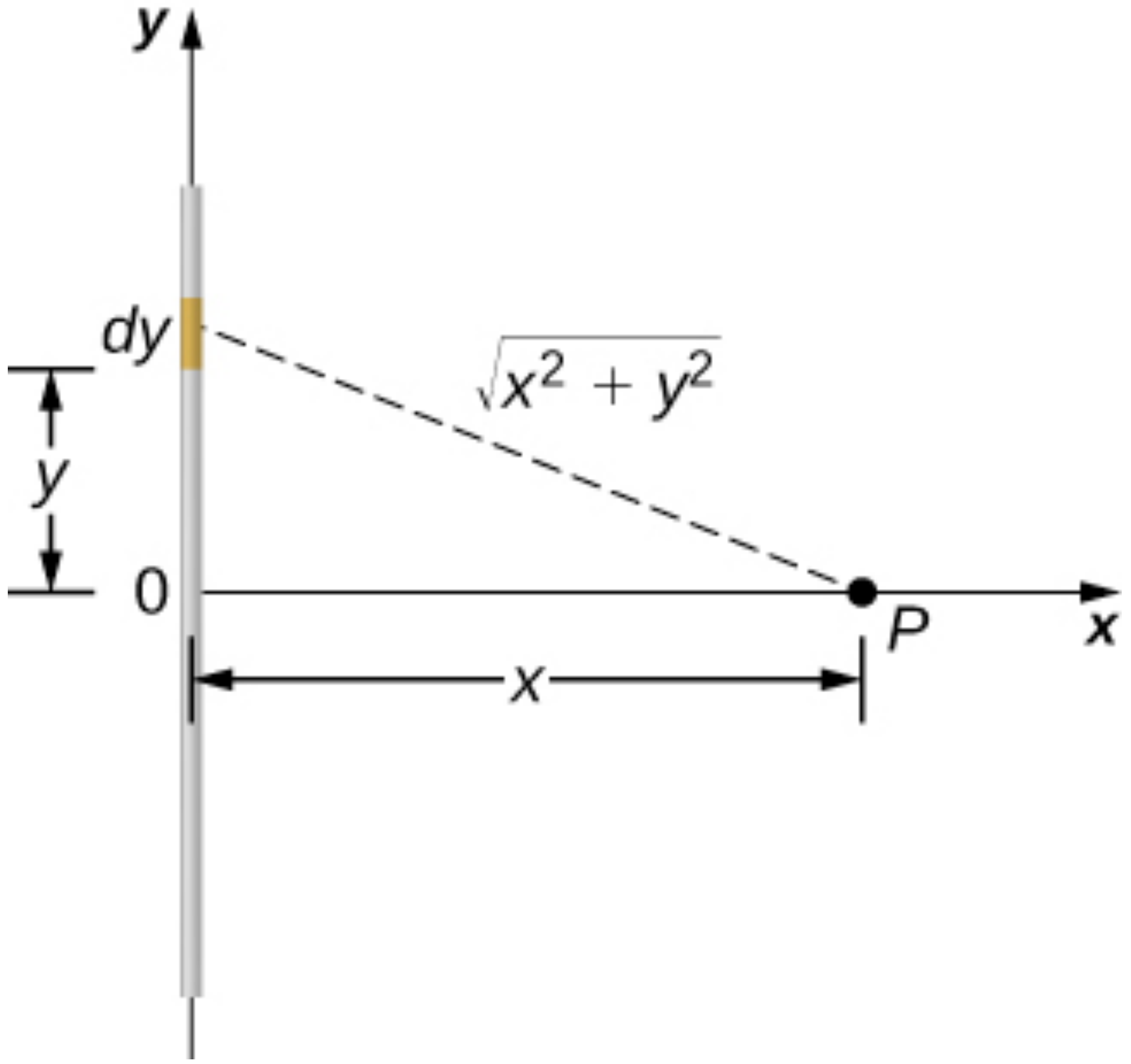
- Como vimos anteriormente las cargas infinitesimales vienen dadas por

  - Linea: $\underbrace{dq = \lambda dl}_{1\,\mathrm{D}}$
  - Superficie: $\underbrace{dq = \sigma dA}_{2\,\mathrm{D}}$
  - Volumen: $\underbrace{dq = \rho dV}_{3\,\mathrm{D}}$

$$dV_p = k\frac{dq}{r}$$

Potencial producido por una línea de carga

- Encontremos el potencial eléctrico de un alambre no conductor uniformemente cargado con densidad lineal λ y longitud L en un punto que se encuentra en una línea que divide el alambre en dos partes iguales.



Considere un pequeño elemento de la distribución de carga entre y y $y + dy$. La carga en esta celda es $dq = \lambda dy$ y la distancia de la celda al punto de campo P es: $\sqrt{x^2 + y^2}$. Por lo tanto, el potencial se convierte en

$$V_p = k\int \frac{dq}{r} = k\int_{-L/2}^{L/2} \frac{\lambda dy}{\sqrt{x^2+y^2}} = k\lambda \left[\ln\left(y + \sqrt{y^2+x^2}\right)\right]_{-L/2}^{L/2}$$

$$= k\lambda\left[\ln\left(\frac{L}{2} + \sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + x^2}\right) - \ln\left(-\frac{L}{2} + \sqrt{\left(-\frac{L}{2}\right)^2 + x^2}\right)\right]$$

$$= k\lambda \ln\left[\frac{L + \sqrt{L^2 + 4x^2}}{-L + \sqrt{L^2 + 4x^2}}\right].$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\, dx = \operatorname{asinh}\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$\operatorname{asinh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$$

- Nótese que podríamos haber hecho este problema de forma equivalente en coordenadas cilíndricas; el único efecto sería sustituir r por x y z por y.

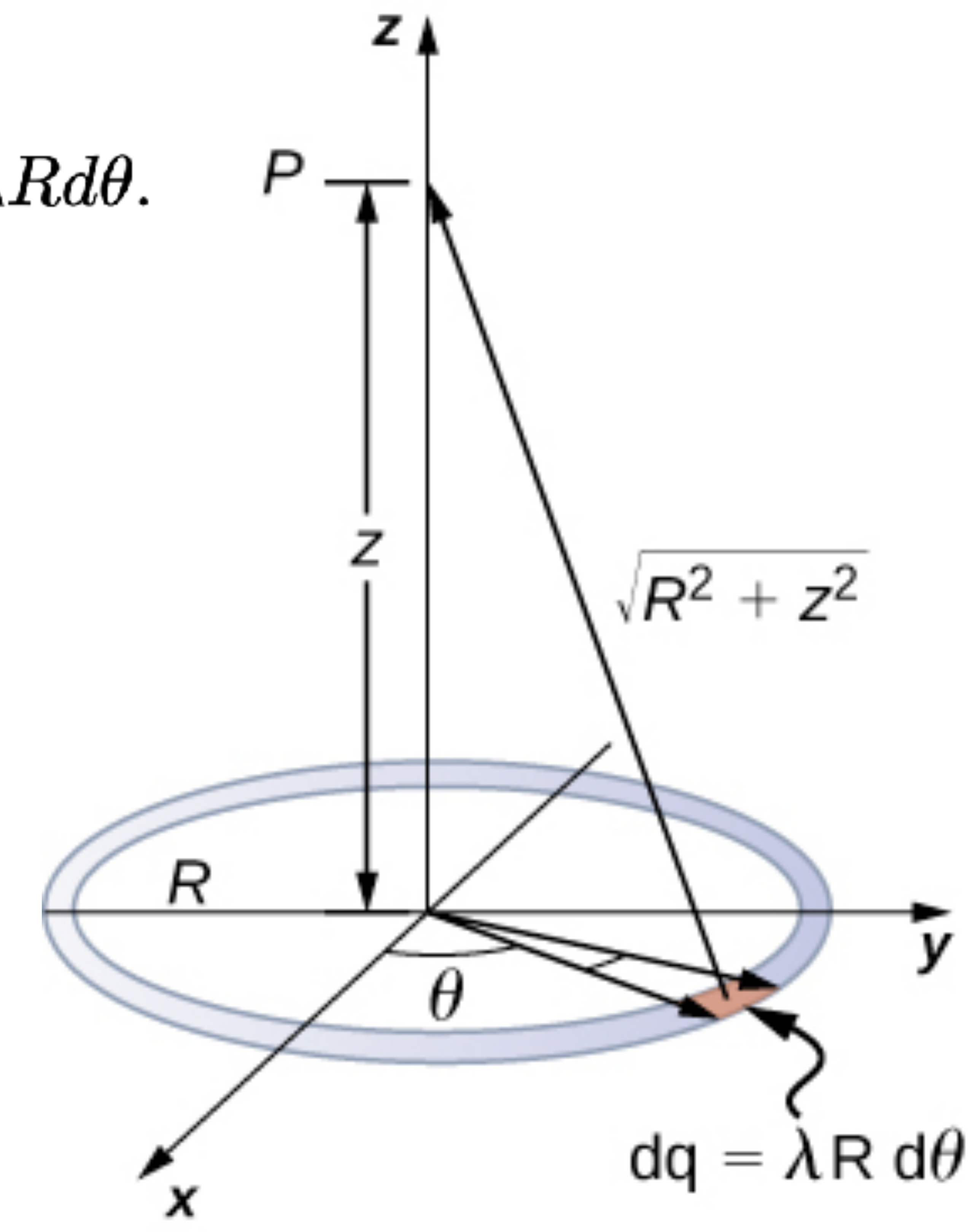
- ¿Como podríamos encontrar el potencial eléctrico debido a un alambre infinitamente largo y uniformemente cargado?

  - **Ejercicio**: Encuentre el campo eléctrico a partir de la expresión para el potencial

Potencial debido a un anillo de carga

- Un anillo tiene una densidad de carga uniforme λ . Encontrar el potencial eléctrico en un punto del eje que pasa por el centro del anillo.

Un elemento general de arco entre θ y $\theta + d\theta$ es de longitud $Rd\theta$ y contiene una carga igual a $\lambda R d\theta$.



El elemento está a una distancia de $\sqrt{z^2 + R^2}$ de P, y por tanto el potencial es

$$V_p = k\int \frac{dq}{r} = k\int_0^{2\pi} \frac{\lambda R d\theta}{\sqrt{z^2 + R^2}}$$

$$= \frac{k\lambda R}{\sqrt{z^2 + R^2}} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{2\pi k\lambda R}{\sqrt{z^2 + R^2}}$$

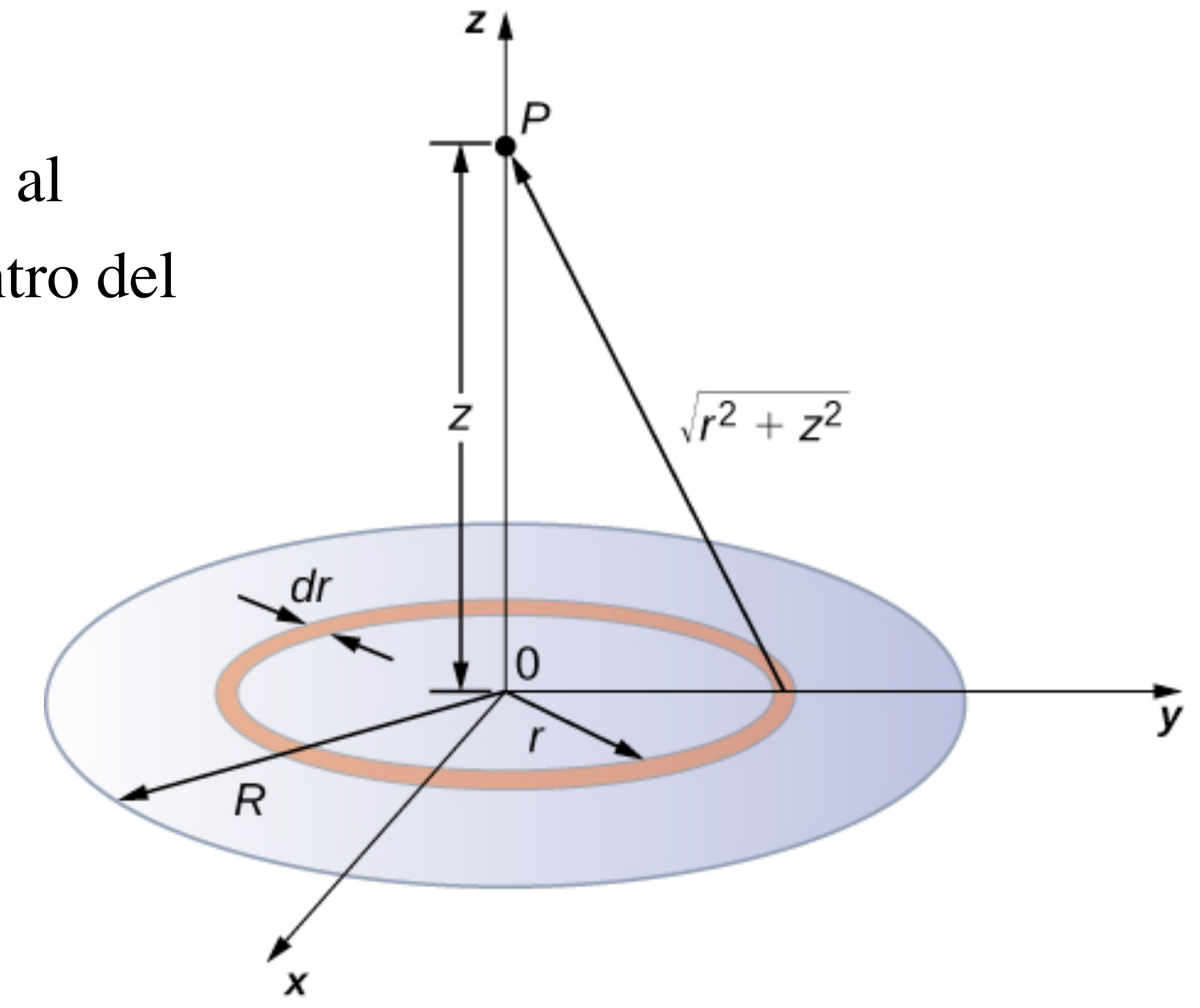
$$= k\frac{Q}{\sqrt{z^2 + R^2}}$$

- Derivando respecto a z

$$E_z = -\frac{dV}{dz} \quad \Rightarrow \quad E_z = -\frac{d}{\partial z}\frac{kQ}{\sqrt{z^2 + R^2}} = \frac{kQz}{\left(z^2 + R^2\right)^{3/2}}.$$

Potencial debido a un disco de carga uniforme

- Un disco de radio R tiene una densidad de carga uniforme σ con unidades de culombios al cuadrado. Encontrar el potencial eléctrico en cualquier punto del eje que pasa por el centro del disco.



Una anillo de anchura infinitesimal entre las coordenadas cilíndricas r y $r+dr$ será un anillo de cargas cuyo potencial eléctrico dVp en el punto de campo tiene la siguiente expresión

$$dV_p = k\frac{dq}{\sqrt{z^2 + r^2}}$$

Donde $dq = \sigma 2\pi r dr$

La superposición de potenciales de todos los anillos infinitesimales que componen el disco da el potencial neto en el punto P. Esto se consigue integrando desde r=0 hasta r=R

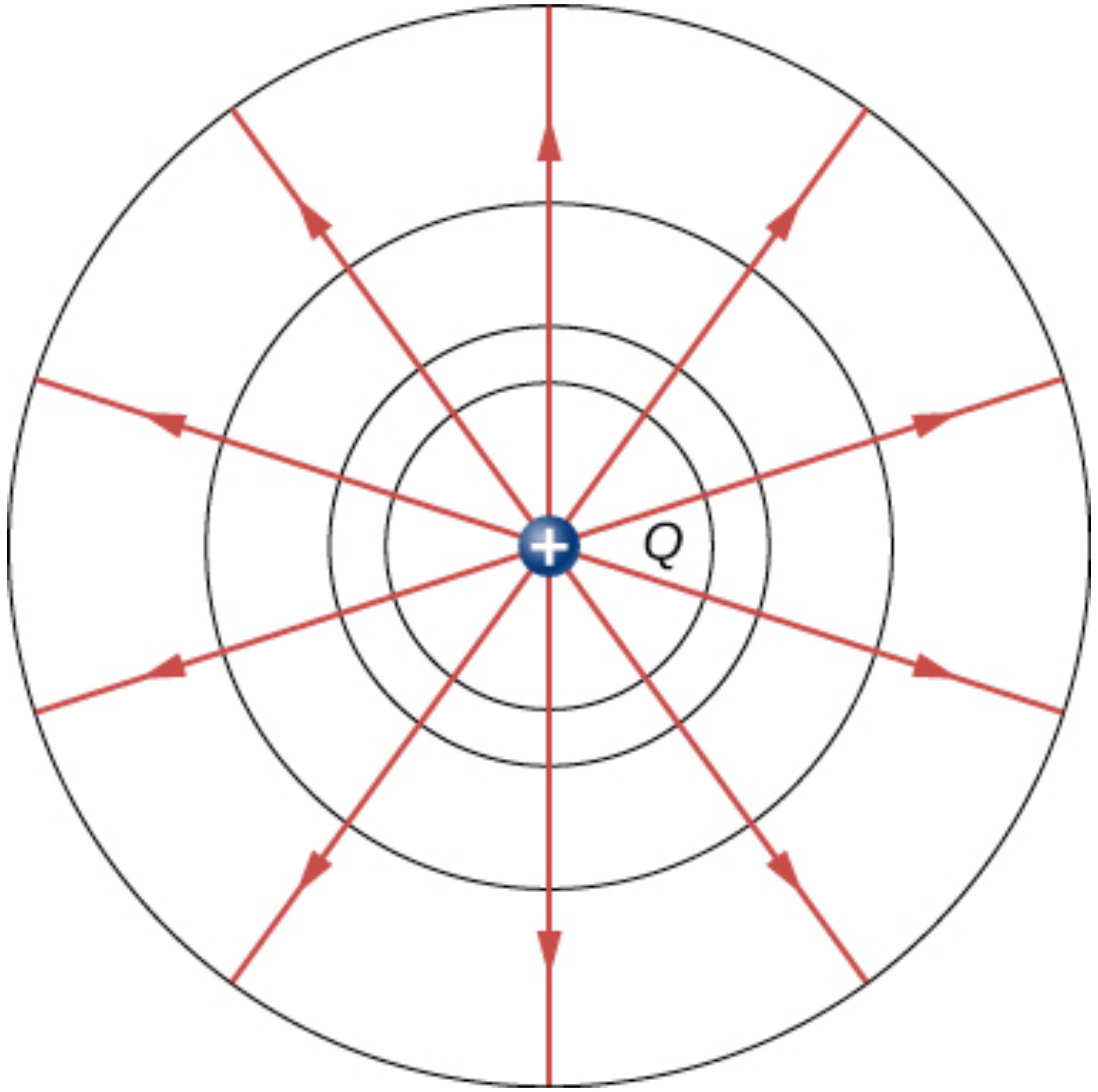
$$V_p = \int dV_p = k2\pi\sigma \int_0^R \frac{rdr}{\sqrt{z^2 + r^2}}$$
$$= k2\pi\sigma\left(\sqrt{z^2 + R^2} - \sqrt{z^2}\right)$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx = \sqrt{x^2 + a^2}$$

- **Ejercicio**: Encuentre el campo eléctrico a partir de la expresión para el potencial

4. Superficies equipotenciales y conductores

- Usamos vectores para representar la magnitud y la dirección del campo eléctrico, y usamos líneas para representar lugares donde el potencial eléctrico es constante. Estas líneas se denominan superficies equipotenciales en 3D dimensiones, o líneas equipotenciales en 2D.



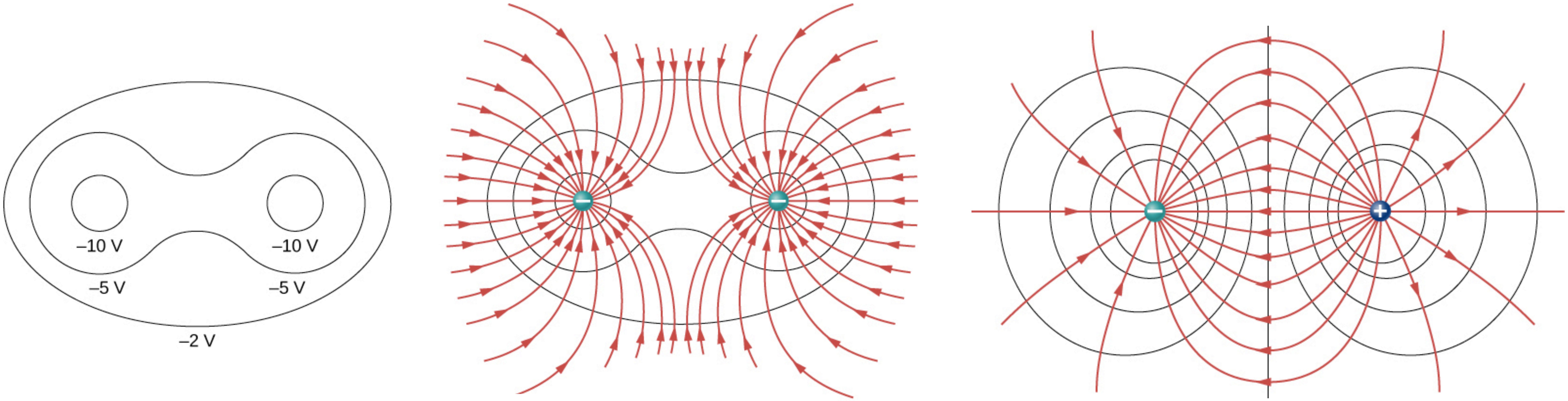
- El potencial de una carga puntual es el mismo en cualquier parte de una esfera imaginaria de radio *r* que rodea a la carga. El potencial para una carga puntual viene dado por $V=kq/r$ y, por lo tanto, tiene el mismo valor en cualquier punto que esté a una determinada distancia r de la carga.

- Las líneas equipotenciales son siempre perpendiculares a las líneas de campo eléctrico. No se requiere ningún trabajo para mover una carga a lo largo de una equipotencial, ya que $\Delta V=0$. Por tanto, el trabajo es:

$$W = -\Delta U = -q\Delta V = 0$$

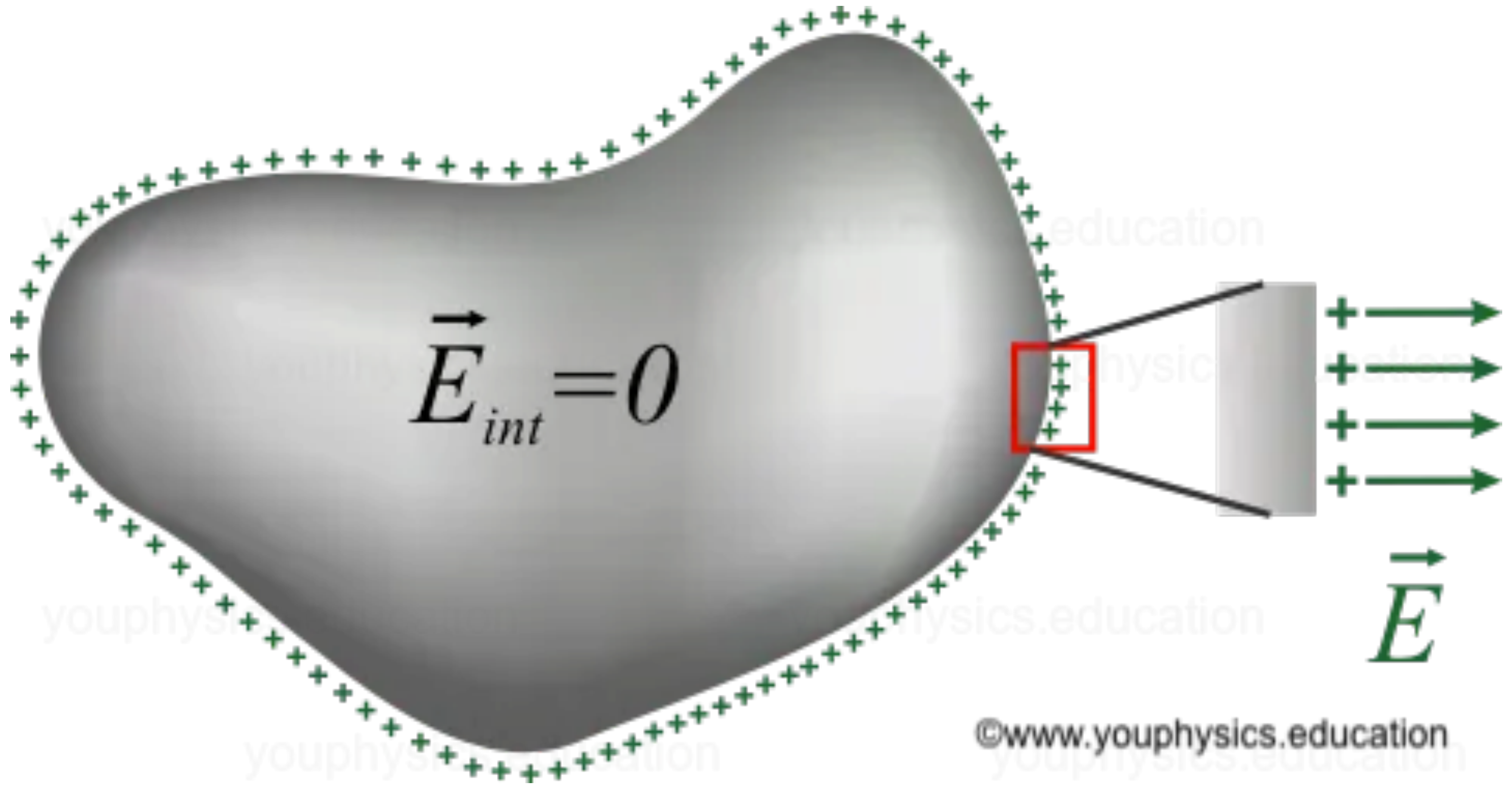
- El trabajo es cero si la dirección de la fuerza es perpendicular al desplazamiento. La fuerza está en la misma dirección que $\vec{E}$, por lo que el movimiento a lo largo de un equipotencial debe ser perpendicular a $\vec{E}$.

$$W = \vec{F}\cdot\vec{d} = q\vec{E}\cdot\vec{d} = qEd\cos\theta = 0$$



- La figura muestra el campo eléctrico y las líneas equipotenciales para dos cargas iguales (izquierda) y para un dipolo (derecha).
- Dadas las líneas de campo eléctrico, las líneas equipotenciales pueden dibujarse simplemente haciéndolas perpendiculares a las líneas de campo eléctrico. Y a la inversa, dadas las líneas equipotenciales, las líneas de campo eléctrico pueden dibujarse haciéndolas perpendiculares a los equipotenciales.

- El campo eléctrico debe ser perpendicular a la superficie de cualquier conductor, esto implica que un conductor es una superficie equipotencial en situaciones estáticas.
- No puede haber una diferencia de voltaje a través de la superficie de un conductor, o las cargas se moverían.
- Uno de los usos de este hecho es que un conductor puede fijarse en lo que consideramos cero voltios conectándolo a la tierra con un buen conductor, un proceso llamado conexión a tierra.

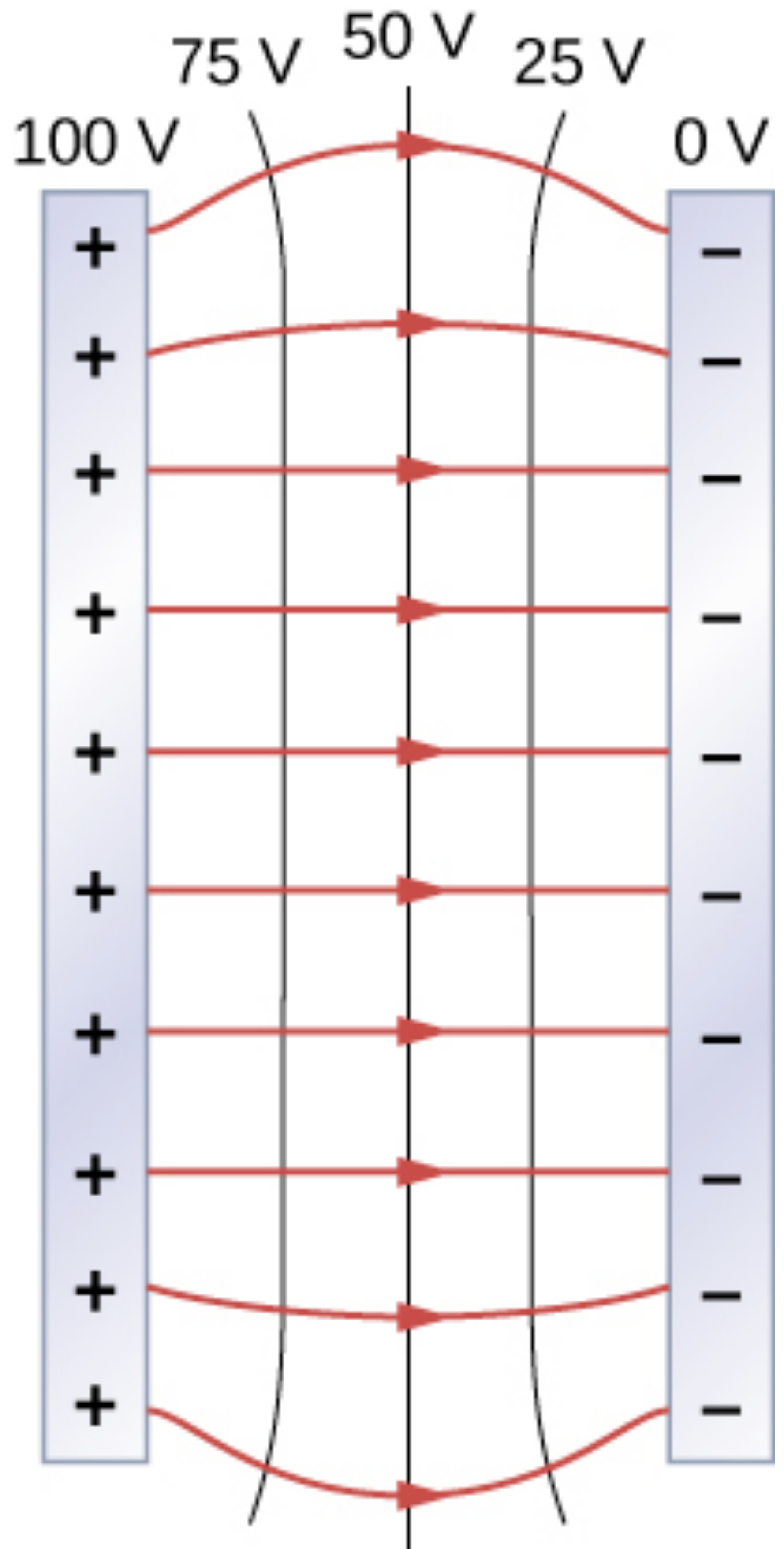


- Así un conductor esférico cargado puede sustituir a la carga puntual, y el campo eléctrico y las superficies de potencial fuera de él no cambiarán, confirmando la afirmación de que una distribución de carga esférica es equivalente a una carga puntual en su centro.

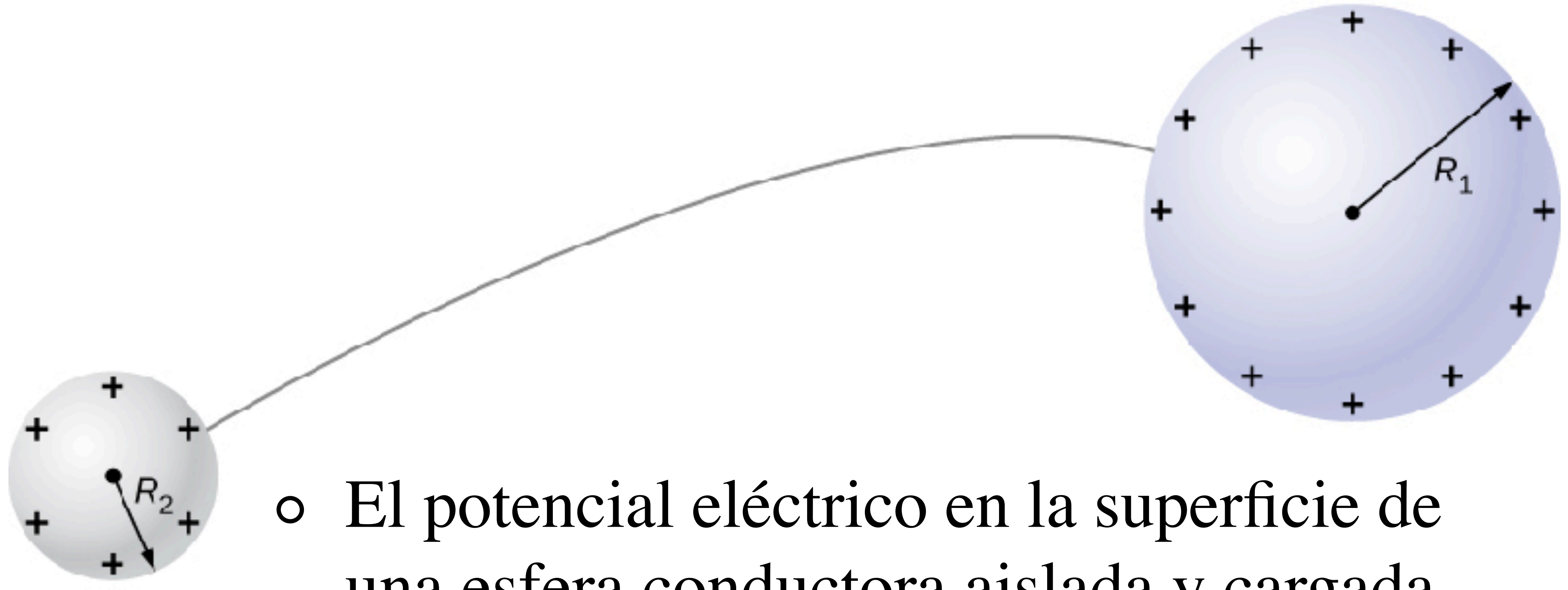
- Para el caso de las placas conductoras paralelas, entre las placas, los equipotenciales están uniformemente espaciados y son paralelos.

- Se podría mantener el mismo campo colocando placas conductoras en las líneas equipotenciales a los potenciales mostrados.

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$



- Consideremos dos esferas conductoras de radios R_1 y R_2, con densidades de carga superficial σ_1 y σ_2 que están conectadas por un cable fino.
- Las esferas están suficientemente separadas para que cada una pueda ser tratada como si estuviera aislada.
- Obsérvese que la conexión por el cable significa que todo este sistema debe ser equipotencial.



- El potencial eléctrico en la superficie de una esfera conductora aislada y cargada de radio R es

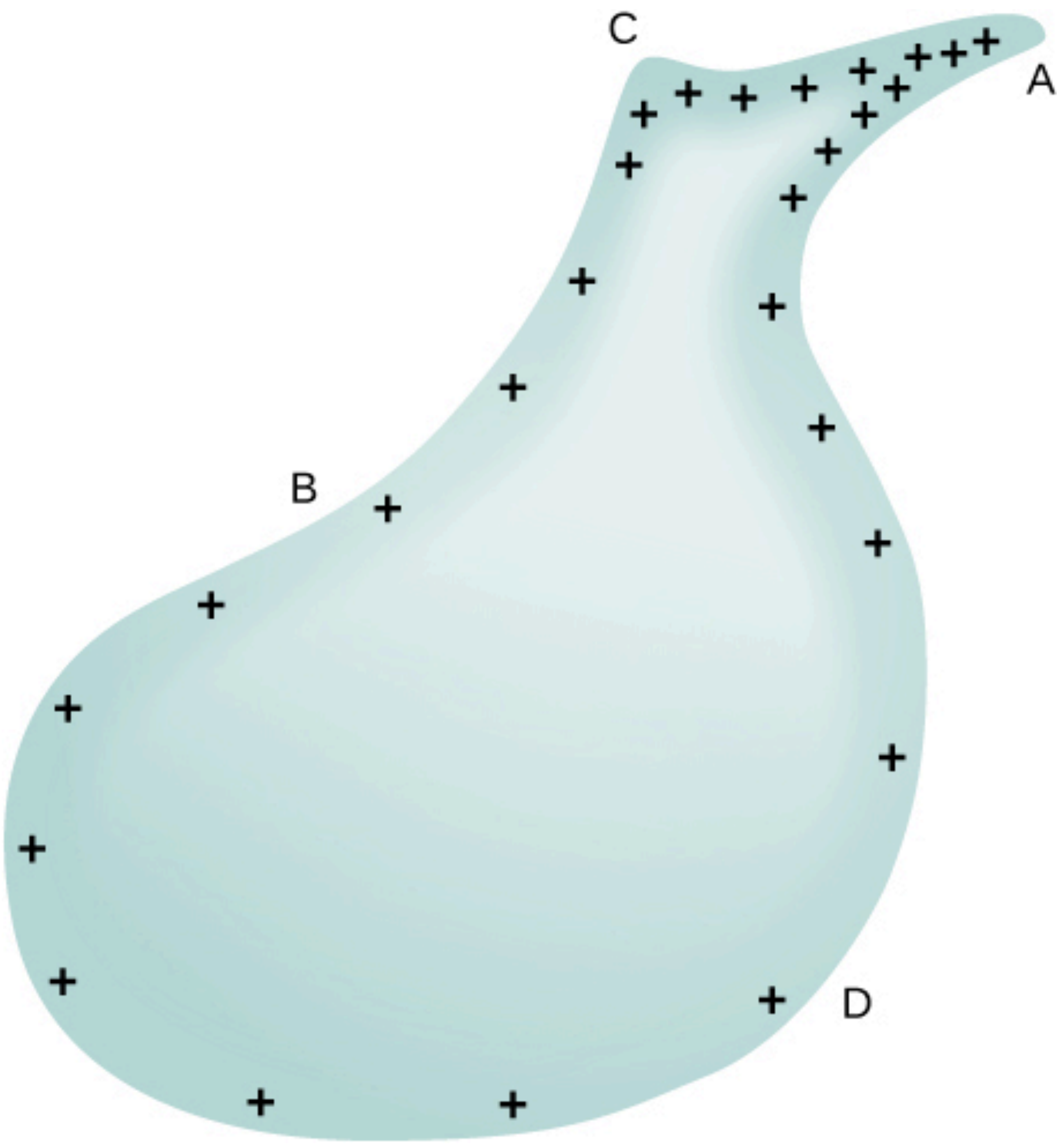
$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{R}$$

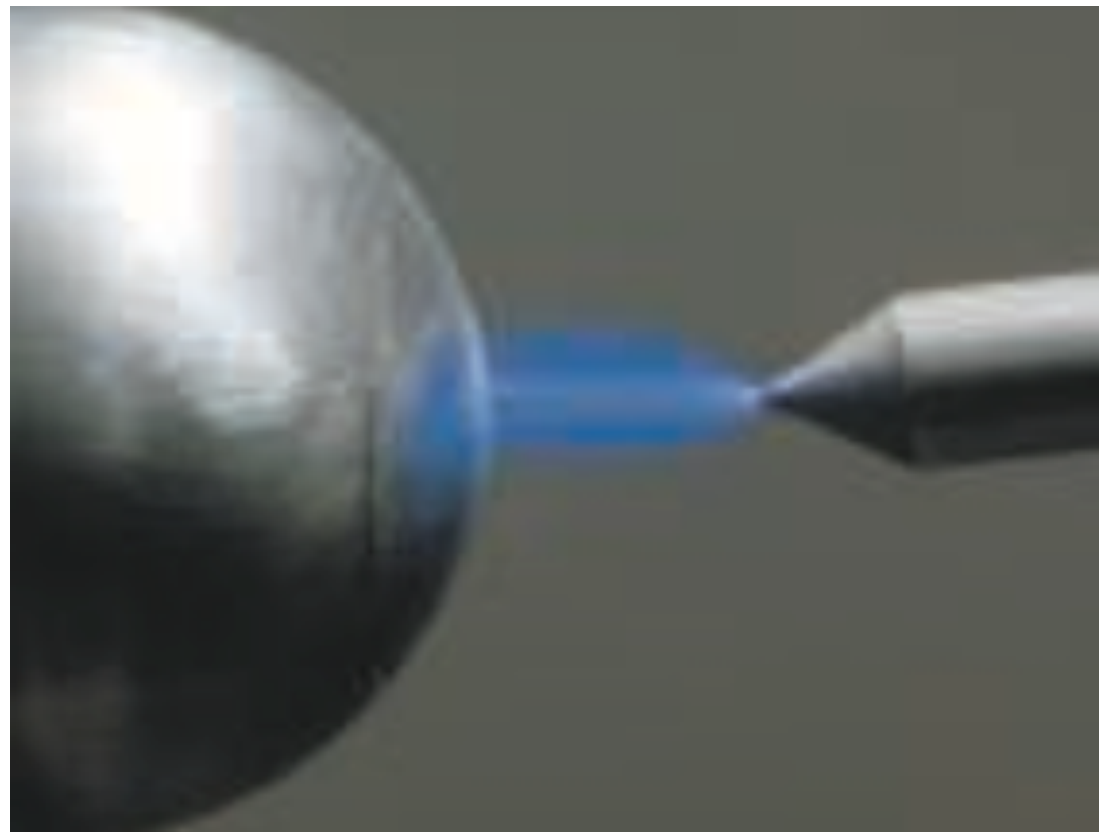
- Las esferas están conectadas por un conductor y por lo tanto están al mismo potencial:

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1}{R_1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_2}{R_2}$$

$$q = \sigma\left(4\pi R^2\right) \qquad \frac{q_1}{R_1} = \frac{q_2}{R_2}$$

$$\sigma_1 R_1 = \sigma_2 R_2$$



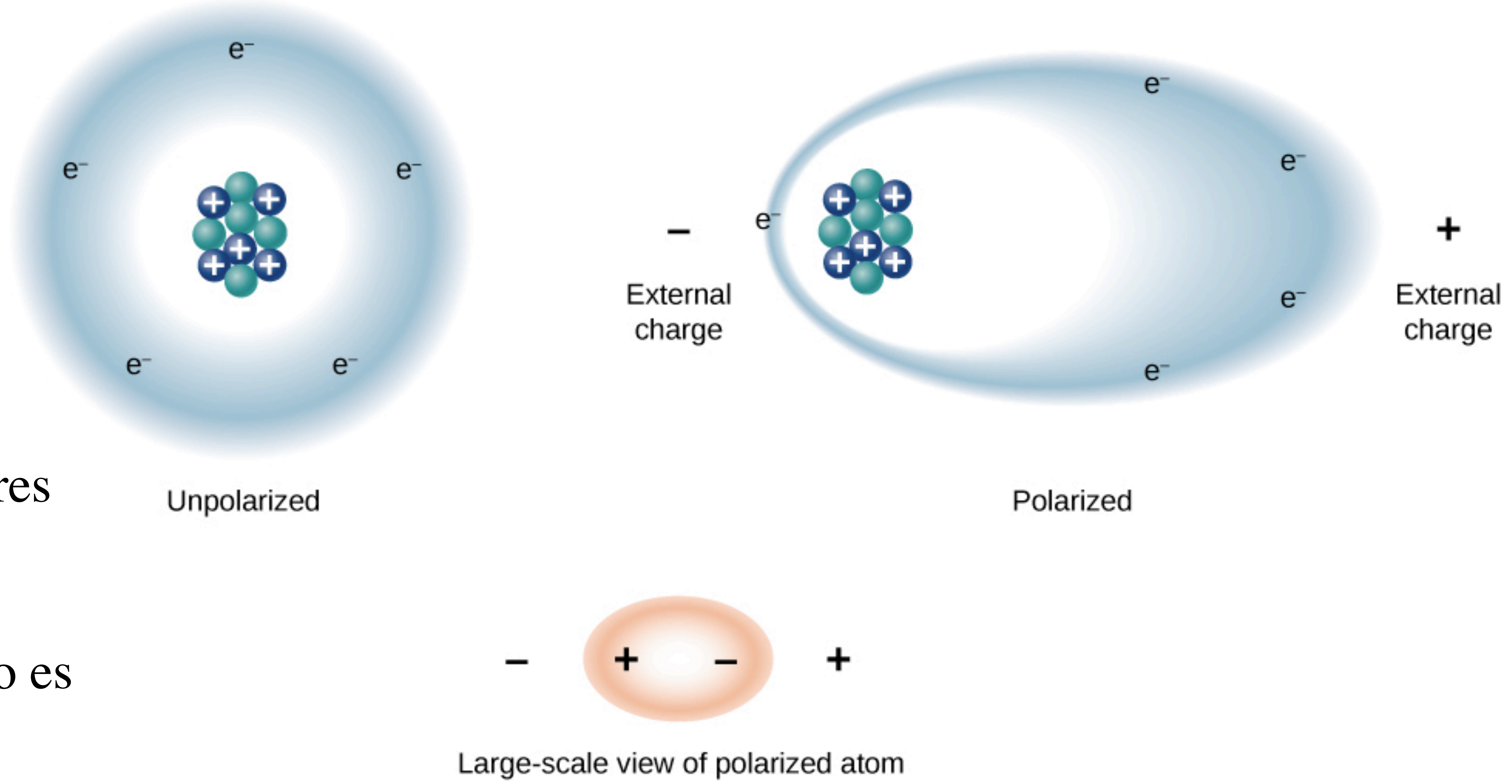


- Este resultado proporciona una idea cualitativa de cómo varía la densidad de carga sobre la superficie de un conductor.

- Cuando el radio de curvatura es grande (puntos B y D de la figura), σ y E son pequeños.

5. Polarización de la materia

- Podemos entender el efecto de un dieléctrico en la capacitancia observando su comportamiento a nivel molecular.
- Las moléculas pueden clasificarse como polares o no polares.
- Hay una separación neta de cargas positivas y negativas en una molécula polar aislada, mientras que no hay separación de cargas en una molécula no polar aislada



- Las moléculas polares tienen momentos eléctricos dipolares permanentes y las moléculas no polares no.

- Una molécula de agua es polar y una molécula de oxígeno es no polar.

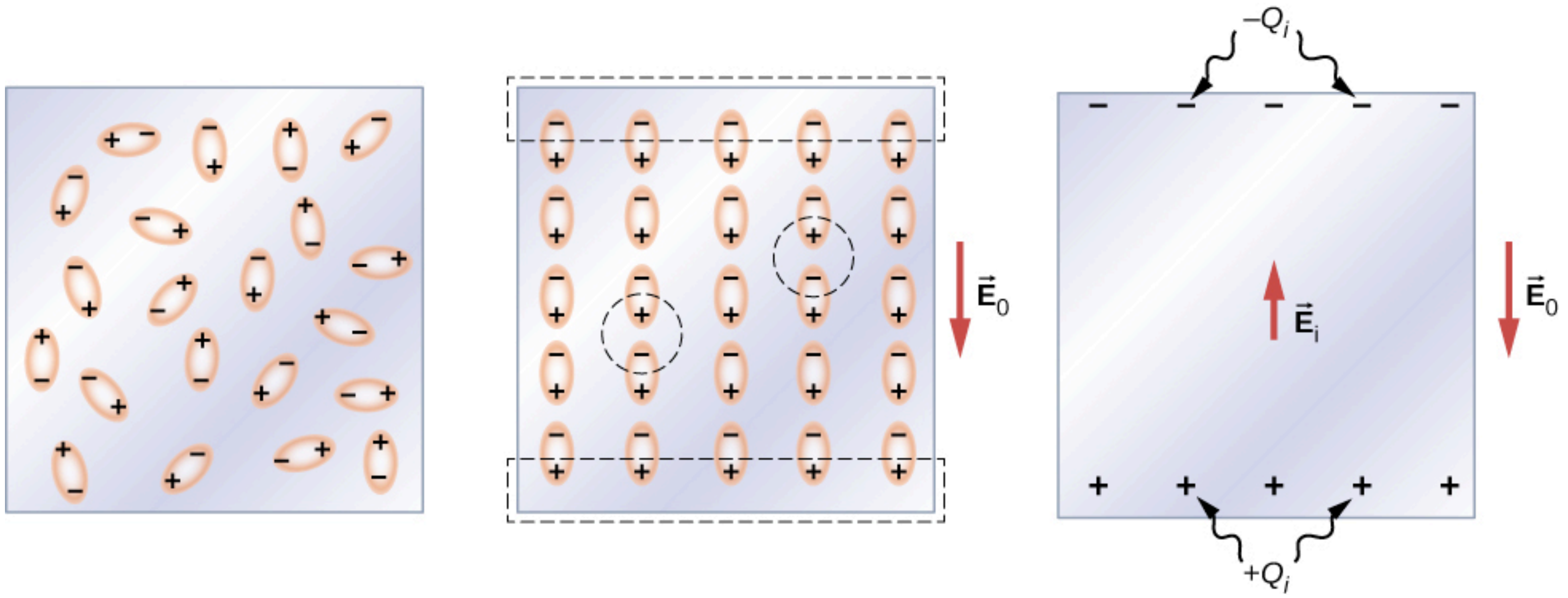
- Las moléculas no polares pueden convertirse en polares en presencia de un campo eléctrico externo, lo que se denomina polarización inducida.

6. Campo eléctrico en dieléctricos

- Consideremos un dieléctrico compuesto por moléculas polares. En ausencia de cualquier campo eléctrico externo, los dipolos eléctricos se orientan al azar.
- Sin embargo, si el dieléctrico se coloca en un campo eléctrico externo $\vec{E}_0$, las moléculas polares se alinean con el campo externo.

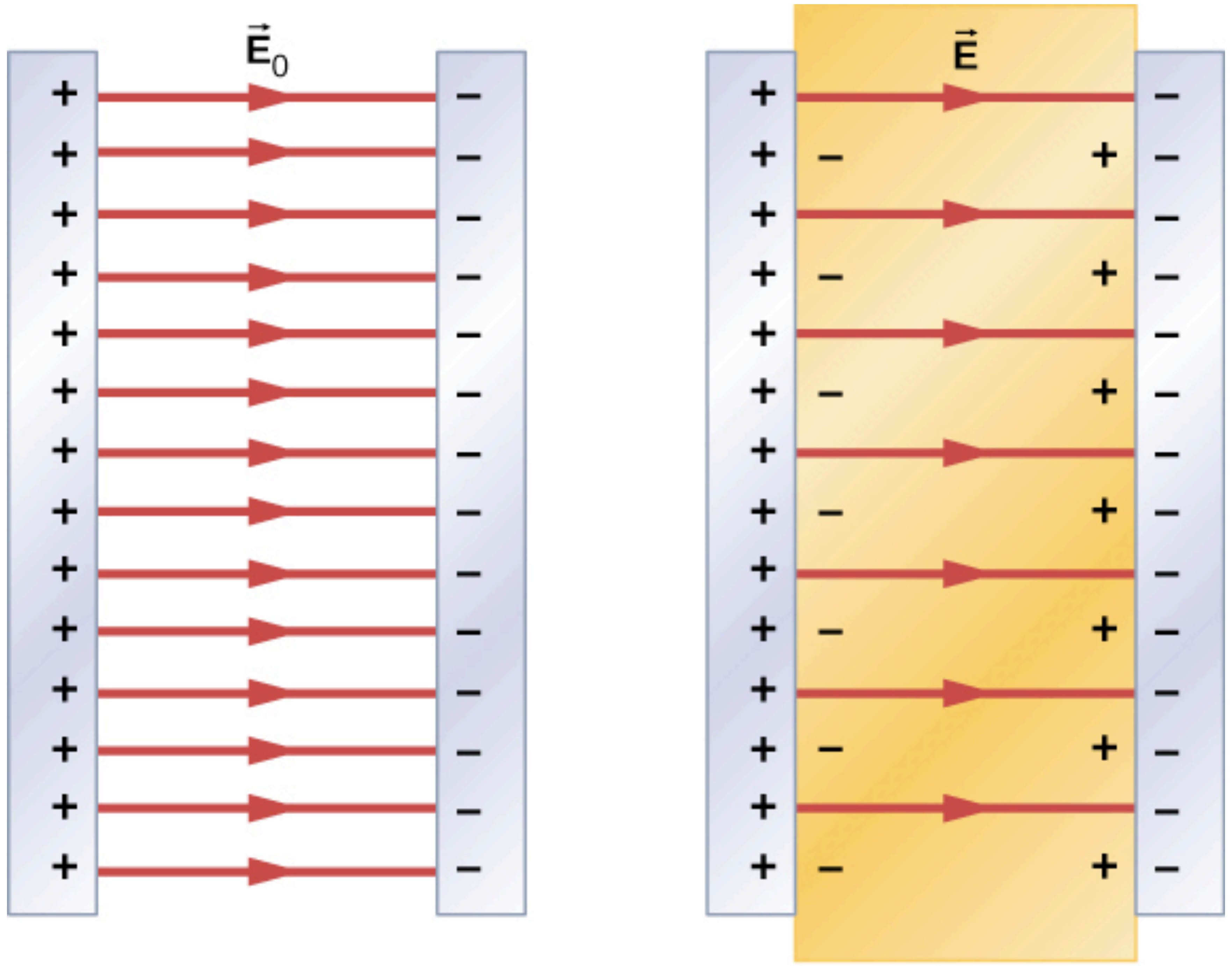
- Las cargas opuestas de los dipolos adyacentes dentro del volumen del dieléctrico se neutralizan mutuamente, por lo que no hay carga neta dentro del dieléctrico (círculos discontinuos).

- Sin embargo, este no es el caso muy cerca de las superficies superior e inferior que bordean el dieléctrico donde la alineación sí produce una carga neta.



- Dado que el campo eléctrico externo simplemente alinea los dipolos, el dieléctrico en su conjunto es neutro, y las cargas superficiales inducidas en sus caras opuestas son iguales y opuestas. Estas cargas superficiales inducidas $+Q_i$ y $-Q_i$ producen un campo eléctrico adicional $\vec{E}_i$ (un campo eléctrico inducido), que se opone al campo externo $\vec{E}_0$.

- El mismo efecto se produce cuando las moléculas de un dieléctrico son no polares.
- Una molécula no polar adquiere un momento eléctrico-dipolar inducido porque el campo externo $\vec{E}_0$ provoca una separación entre sus cargas positivas y negativas.
- Los dipolos inducidos de las moléculas no polares se alinean con $\vec{E}_0$ de la misma manera que se alinean los dipolos permanentes de las moléculas polares.
- El campo eléctrico dentro del dieléctrico se debilita independientemente de si sus moléculas son polares o no polares.



- En resumen: cuando la región entre las placas paralelas de un capacitor cargado se llena con un dieléctrico, dentro del dieléctrico hay un campo eléctrico $\vec{E}_0$ debido a la carga libre Q_0 en las placas del capacitor y un campo eléctrico $\vec{E}_i$ debido a la carga inducida Q_i en las superficies del dieléctrico.
- Su suma vectorial da el campo eléctrico neto $\vec{E}$ dentro del dieléctrico entre las placas del capacitor

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_i$$

- Este campo neto puede considerarse como el campo producido por una carga efectiva Q_0-Q_i en el capacitor.

- En la mayoría de los dieléctricos, el campo eléctrico neto $\vec{E}$ es proporcional al campo $\vec{E}_0$ producido por la carga libre. En términos de estos dos campos eléctricos, la constante dieléctrica κ del material se define como:

$$\kappa = \frac{E_0}{E}$$

- Como $\vec{E}_0$ y $\vec{E}_i$ apuntan en direcciones opuestas, la magnitud E es menor que la magnitud $\vec{E}_0$ y, por tanto, $\kappa > 1$.
- Combinando las ecuaciones anteriores se obtiene una expresión para el campo eléctrico inducido en un dieléctrico:

$$\vec{E}_i = \left(\frac{1}{\kappa} - 1\right)\vec{E}_0$$

- Cuando la magnitud de un campo eléctrico externo es demasiado grande, las moléculas del material dieléctrico comienzan a ionizarse.

- Una molécula o un átomo se ioniza cuando los electrones se convierten en electrones libres. Cuando esto sucede, el material puede conducir, permitiendo así que la carga se mueva a través del dieléctrico.

Material	**Constante dieléctrica k**
Aceite de silicón	2.5
Agua	4.9
Aire (seco)	1.000 59
Baquelita	4.9
Cloruro de polivinilo	3.4
Cuarzo fundido	3.78
Hule de neopreno	6.7
Mylar	3.2
Nylon	3.4
Papel	3.7
Papel impregnado en parafina	3.5
Poliestireno	2.30
Porcelana	6
Teflón	2.1
Titanato de estroncio	233
Vacío	1.000 00
Vidrio pírex	5.6

Problemas propuestos - Potencial eléctrico

1. Una esfera de plástico de 0,500 cm de diámetro, utilizada en una demostración de electricidad estática, tiene una carga de 40,0 pC distribuida uniformemente en su superficie ¿Cuál es el potencial cerca de su superficie?

   Sol: $V = 144$ V

2. En una región determinada, el potencial eléctrico viene dado por $V = -xy^2z + 4xy$ ¿Cuál es el campo eléctrico en esta región? ¿El campo encontrado es conservativo?

   Sol: $\vec{E} = (y^2z - 4y)\,\mathbf{i} + (2xyz - 4x)\,\mathbf{j} + (xy^2)\,\mathbf{k}$. Y si es un campo conservativo.

3. a) ¿La intensidad del campo eléctrico entre dos placas conductoras paralelas superará la intensidad de ruptura del aire seco, que es $3{,}0 \times 10^6$ V/m, si las placas están separadas por 2,0 mm y una diferencia de potencial de $5{,}0 \times 10^3$ V? (b) ¿A qué distancia pueden estar las placas con este voltaje aplicado?

   Sol: (a) $E = 2{,}5 \times 10^6$ V/m $< 3{,}0 \times 10^6$ V/m, no la superará. (b) $d = 1{,}7$ mm.

4. Un dipolo con momento $p = 10^{-29}$ Cm y de longitud 10^{-10} m se encuentra en un ángulo de $+\pi/6$ con respecto a un campo eléctrico uniforme a lo largo del eje x, $\mathbf{E} = 0,5\ \mathbf{i}$ N/C. (a)¿Cuál es el torque? (b) ¿Qué trabajo será necesario para alinearlo un ángulo π?

   Sol: (a) $\tau = 2{,}5 \times 10^{-30}$ Vm $\mathbf{k}$. (b) $W = 5\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \times 10^{-30}$ Nm

Problemas propuestos

1. Una esfera metálica de radio 3 mm tiene una carga de -2×10^{-9} C ¿Cuál es el potencial en el punto P, que está a 5 mm del centro de la esfera?

   Sol: $V_P = V_P - V_\infty = -3600$ V.

2. Calcular, a partir del potencial, el campo eléctrico de una carga lineal infinita, en todo el espacio.

   Sol: $\vec{E} = 2k\lambda \frac{1}{r}\hat{r}$

3. Te han asignado la tarea de medir la velocidad de los protones cuando salen de un pequeño acelerador. Para ello, decides medir cuánto voltaje es necesario a través de un capacitor de placas paralelas para detener los protones. El capacitor tiene una separación de placas de 2,0 mm y un pequeño orificio en una de ellas por el que se disparan los protones. Al llenar el espacio entre las placas con un gas de baja densidad, puedes ver (con un microscopio) un ligero brillo de la región donde los protones chocan y excitan las moléculas del gas. La amplitud del resplandor indica la distancia que recorren los protones antes de detenerse e invertir la dirección. Variando el voltaje a través del capacitor se obtienen los siguientes datos:

Voltaje (V)	Anchura del brillo (mm)
1000	1,7
1250	1,3
1500	1,1
1750	1,0
2000	0,8

   ¿Qué valor obtendrás para la velocidad de los protones?

   Sol: $v_i = 4{,}1 \times 10^5$ m/s.