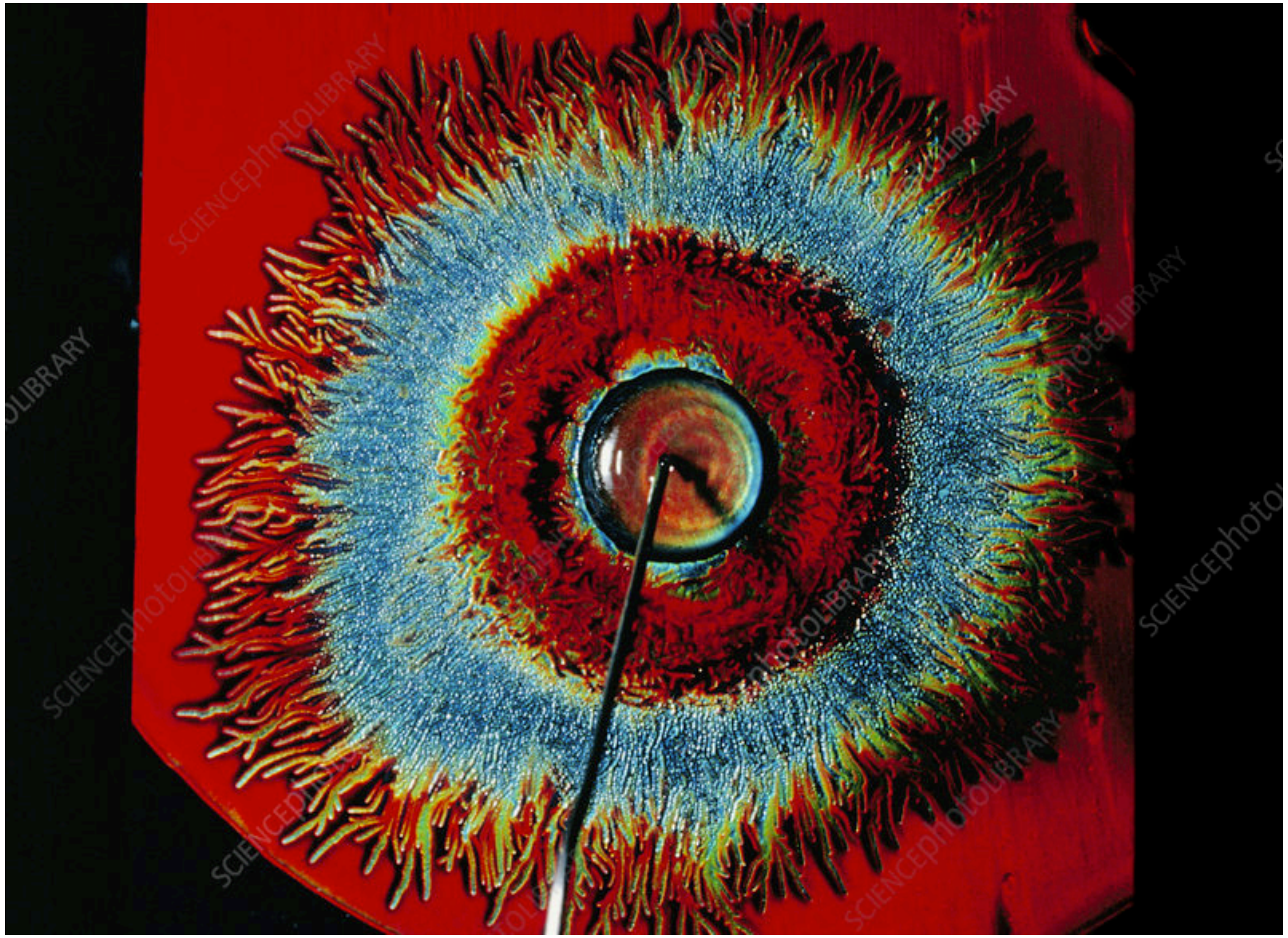
Física II

Módulo 1: Campo Eléctrico

Héctor Hernández - 2025

III. Ley de Gauss



1. Flujo eléctrico
2. Ley de Gauss
3. Aplicación de la ley de Gaus

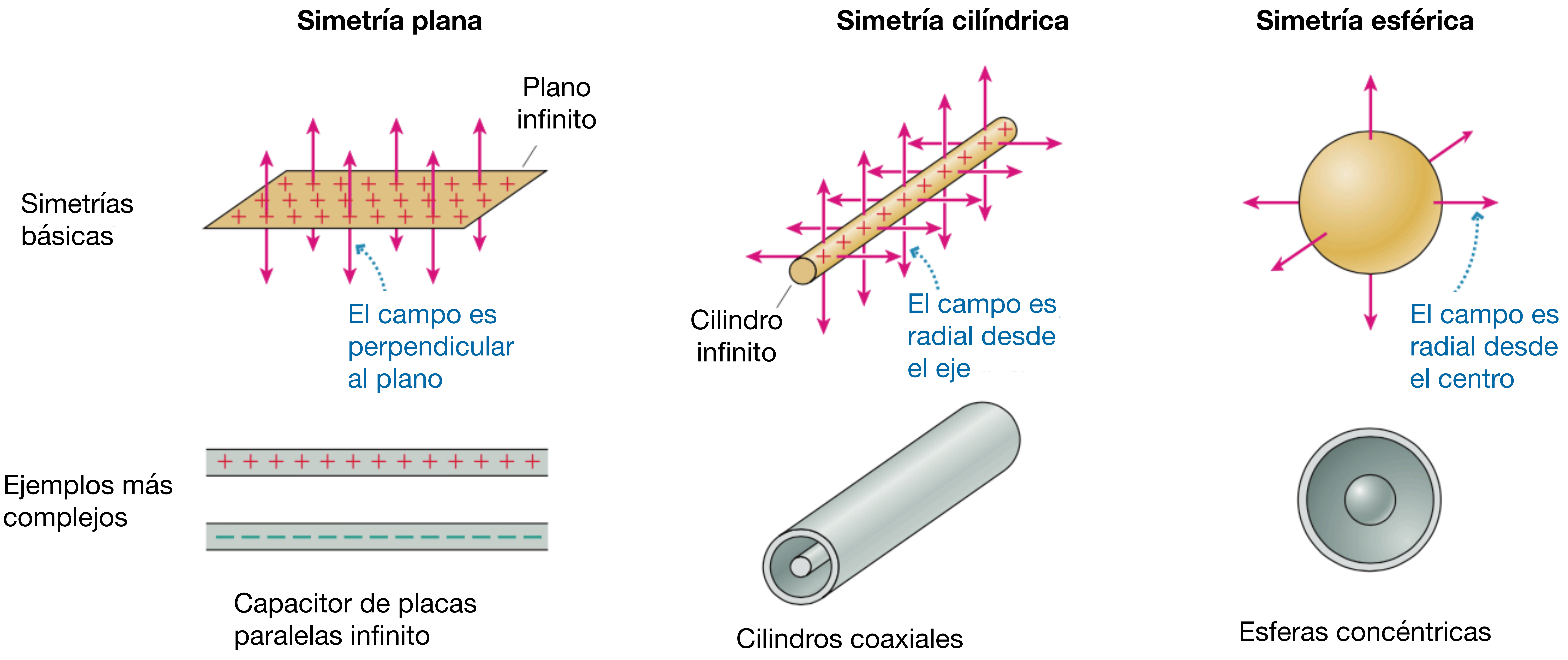
1. Flujo eléctrico

- Calcularemos campos eléctricos con la ley de Gauss.
- El objetivo principal de este capítulo es explicar cómo utilizar la ley de Gauss para encontrar los campos eléctricos de distribuciones de carga espacialmente simétricas.
- Se discute la importancia de elegir una superficie gaussiana y se dan ejemplos de aplicaciones de la ley de Gauss.
- Campos eléctricos en conductores. La ley de Gauss proporciona una visión útil de la ausencia de campos eléctricos en los materiales conductores.
- La verdadera importancia de la Ley de Gauss se consolidó cuando James Clerk Maxwell, en 1864, la incorporó como una de las ecuaciones fundamentales en su teoría electromagnética, que unificaba la electricidad y el magnetismo.
- Maxwell mostró que la Ley de Gauss no solo describe cómo las cargas eléctricas producen un campo eléctrico, sino que es una piedra angular en la comprensión de cómo los campos eléctricos y magnéticos interactúan y se propagan en el espacio.

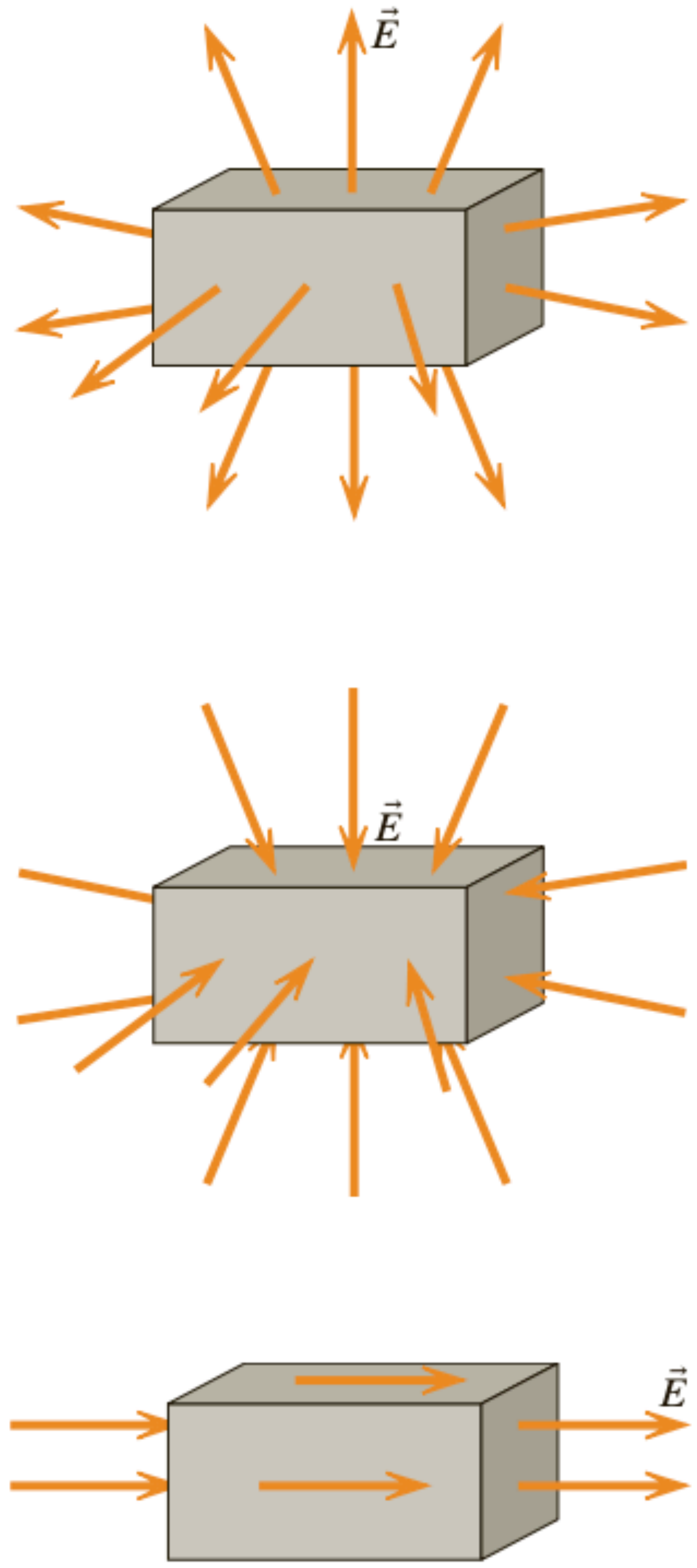
Karl Friedrich Gauss (1777-1855) fue un matemático del siglo XIX. Aunque sus principales aportaciones fueron en el campo de las matemáticas, también realizó importantes trabajos en física y astronomía.

- Los argumentos de simetría permiten descartar muchas formas de campo por ser incompatibles con la simetría de la distribución de cargas.

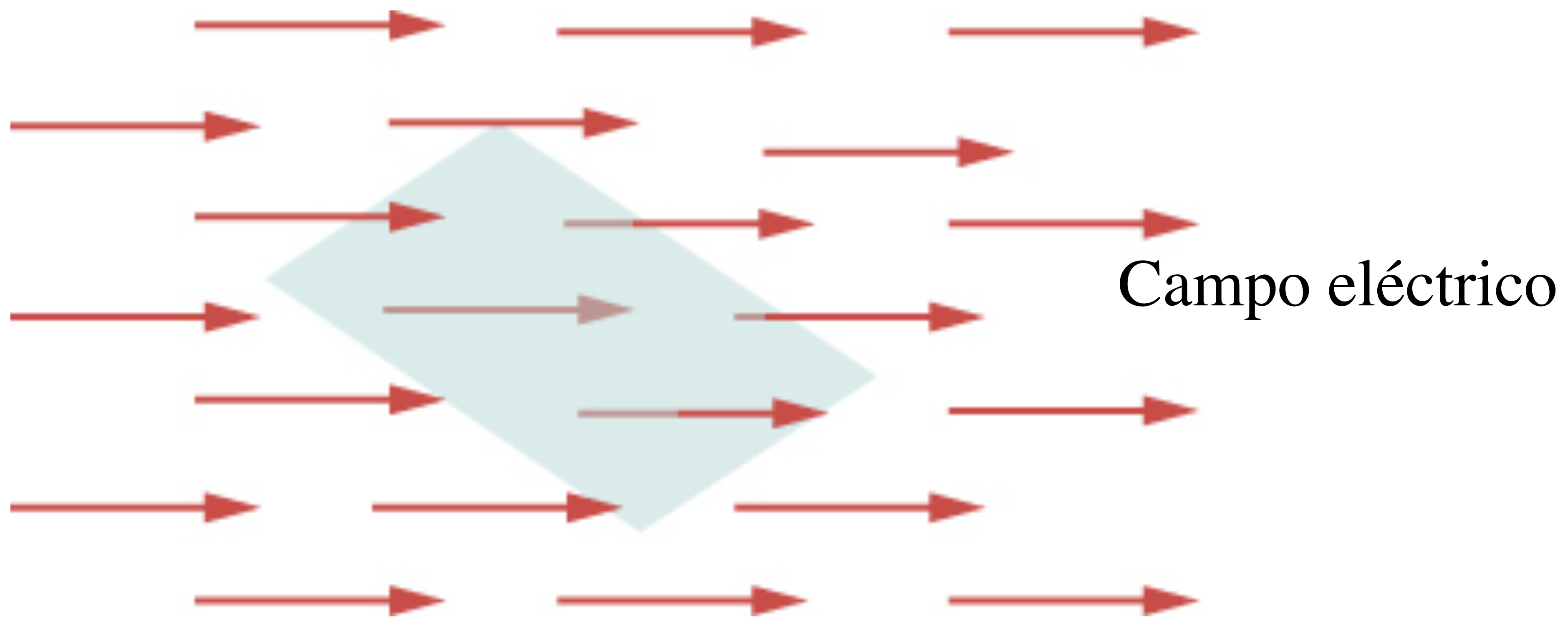
- El razonamiento basado en la simetría es un medio de razonamiento a veces sutil pero siempre poderoso

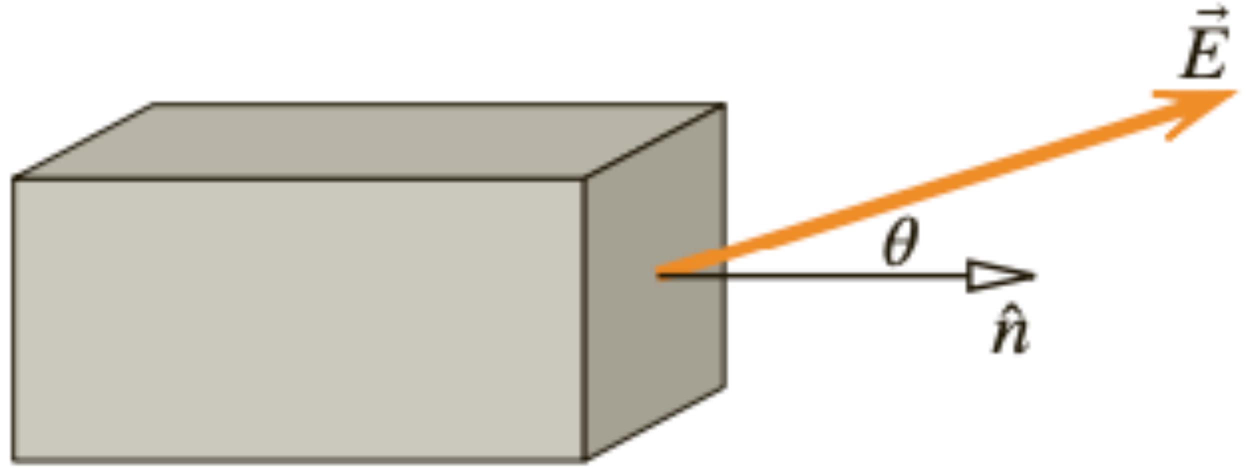


El Flujo eléctrico



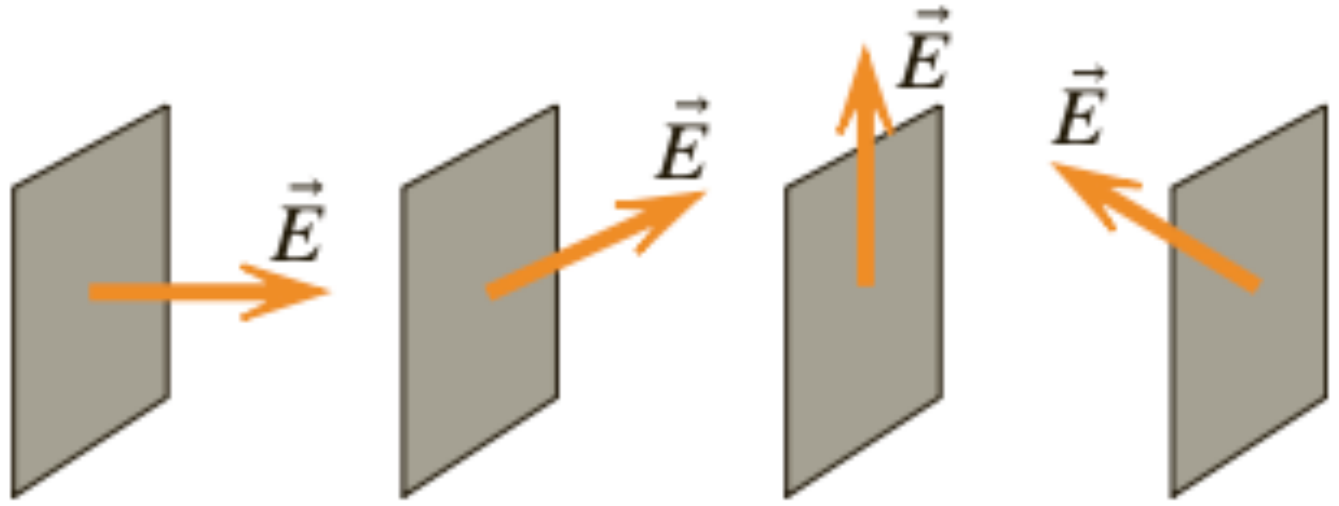
- El concepto de flujo describe una cantidad que atraviesa un área determinada.
- Se puede conceptualizar el flujo de un campo eléctrico como una medida del número de líneas de campo eléctrico que atraviesan un área determinada.
- Cuanto mayor sea el área, más líneas de campo la atraviesan y, por lo tanto, mayor es el flujo.
- Cuanto más fuerte sea el campo eléctrico (representado por una mayor densidad de líneas), mayor será el flujo.
- Si el área gira de forma que el plano esté alineado con las líneas de campo, no pasará ninguna y no habrá flujo.



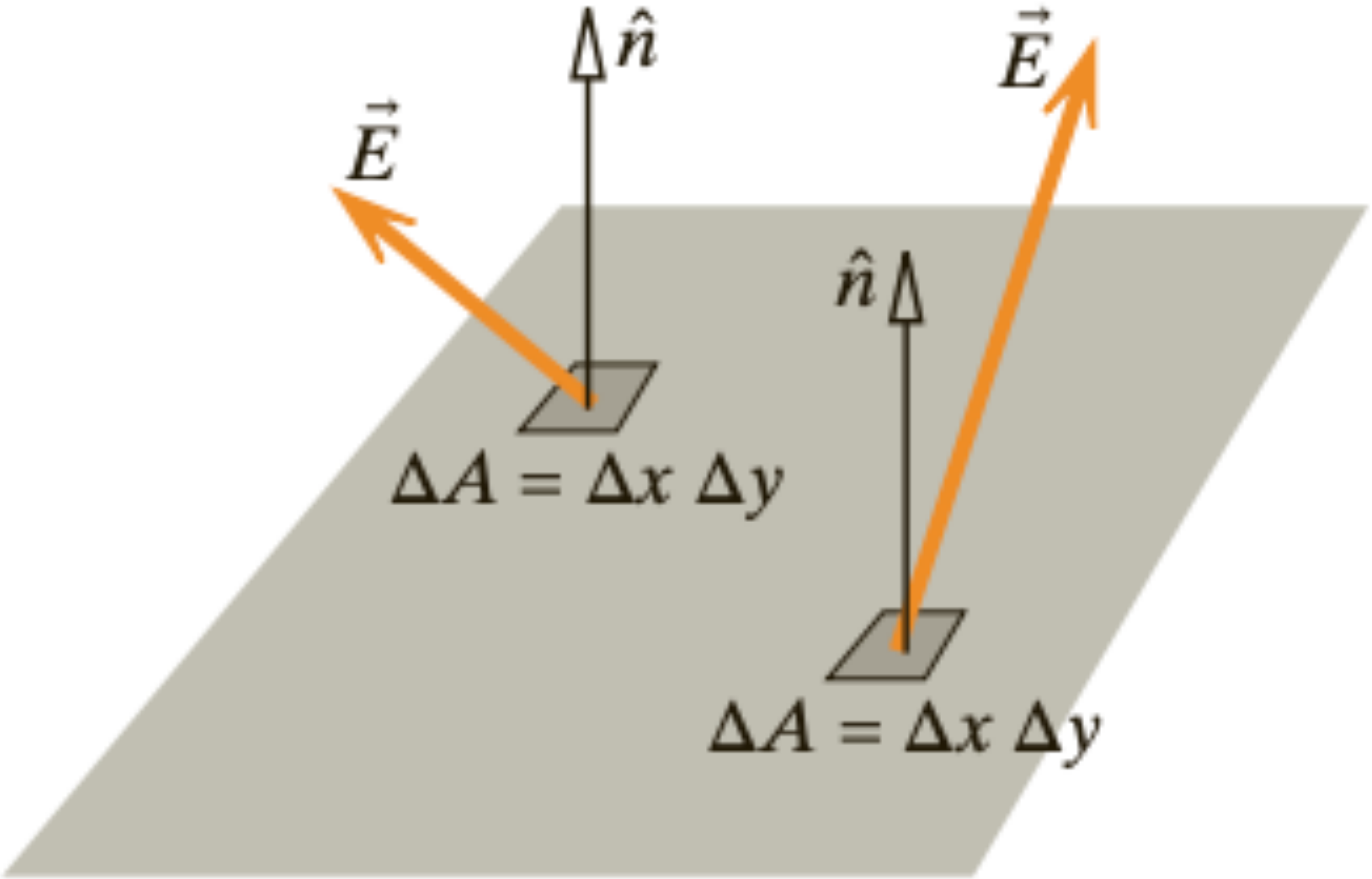


$$E\cos\theta = \vec{E}\cdot\hat{n} = E|\hat{n}|\cos\theta$$

El producto punto $\vec{E}\cdot\hat{n}$ es:
$+E$ si el campo eléctrico es paralelo a $\hat{n}$,
$-E$ si el campo eléctrico es opuesto a $\hat{n}$, y
0 si el campo eléctrico es paralelo a la superficie.



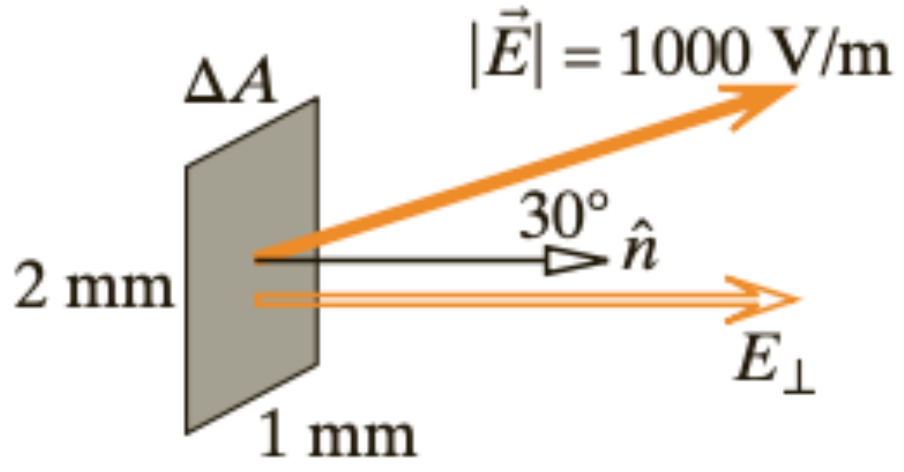
Hacia afuera:	$\vec{E}\cdot\hat{n} = \langle +E,0,0\rangle \cdot \langle 1,0,0\rangle = +E+0+0 = +E$
Hacia dentro:	$\vec{E}\cdot\hat{n} = \langle -E,0,0\rangle \cdot \langle 1,0,0\rangle = -E+0+0 = -E$
Parelelos:	$\vec{E}\cdot\hat{n} = \langle 0,E,0\rangle \cdot \langle 1,0,0\rangle = 0+0+0 = 0$



Una definición útil del flujo eléctrico sobre un área pequeña $\Delta A = \Delta x \Delta y$ sería: $\vec{E}\cdot\hat{n}\ \Delta A$, y consiste en sumar todas esas contribuciones sobre una superficie extendida para obtener el flujo eléctrico sobre toda esa superficie, que llamaremos Φ_{e}.

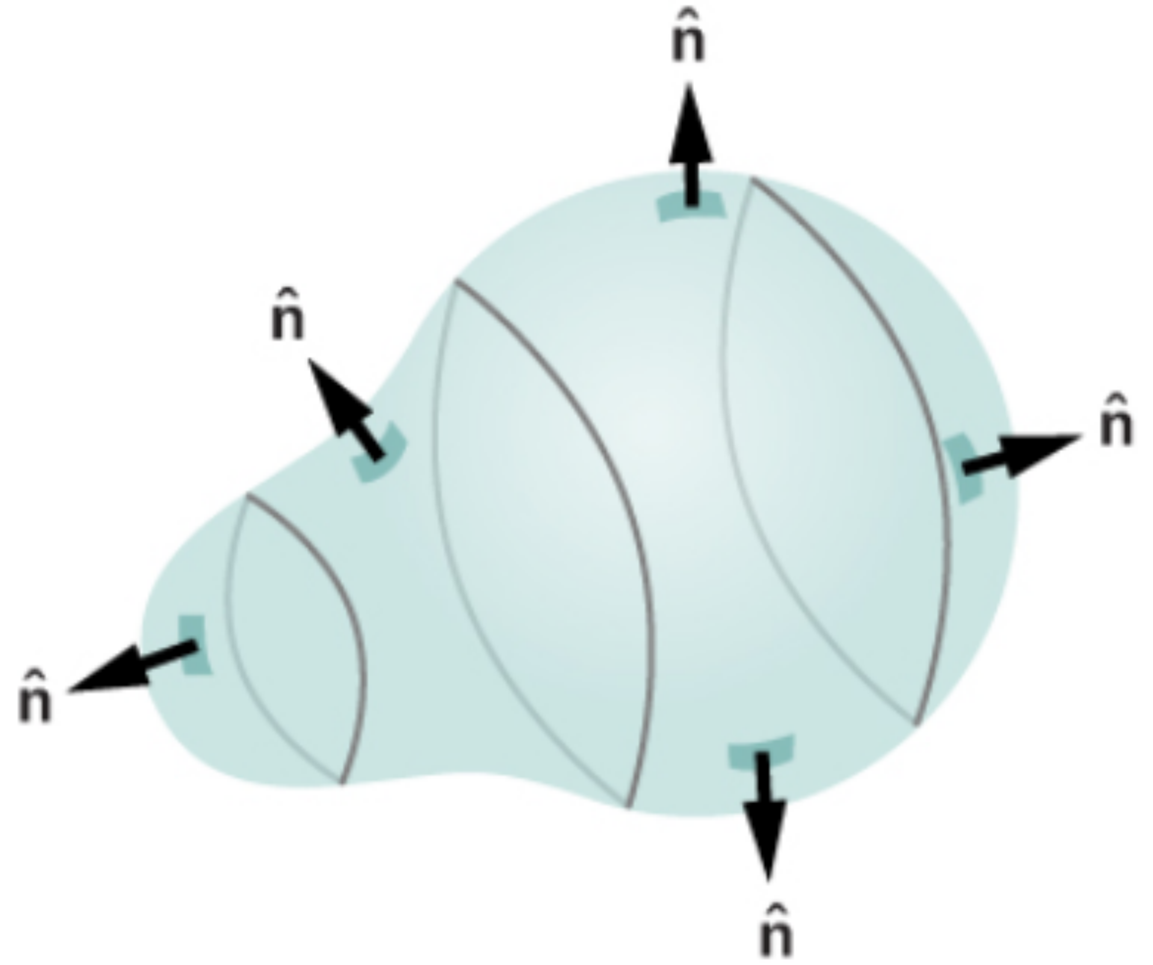
$$\Phi_{\mathrm{e}} = \sum_{\text{superficie}} \vec{E}\cdot\hat{n}\ \Delta A$$

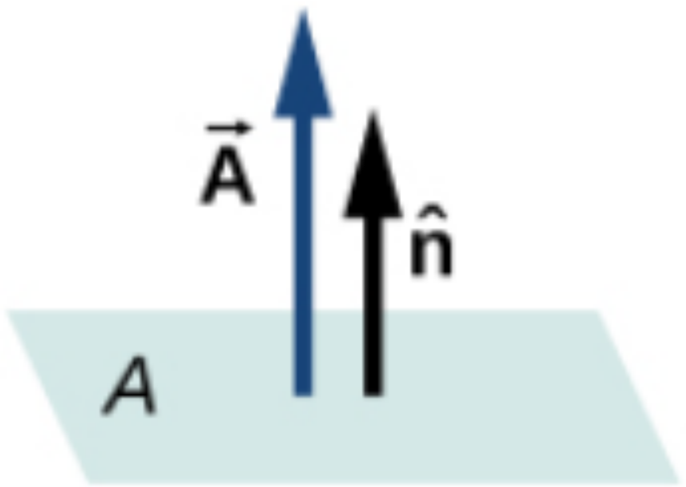
- **Ejercicio**: La magnitud del campo eléctrico es de 1000 V/m, y el campo forma un ángulo de 30º con la normal saliente. Cuál es el flujo en el pequeño rectángulo cuyas dimensiones son 1 mm por 2 mm?



El vector área

- El vector área de una superficie plana de área A tiene la siguiente magnitud y dirección:
  - La magnitud es igual al área A
  - La dirección es a lo largo de la normal a la superficie $\hat{n}$; es decir, perpendicular a la superficie.





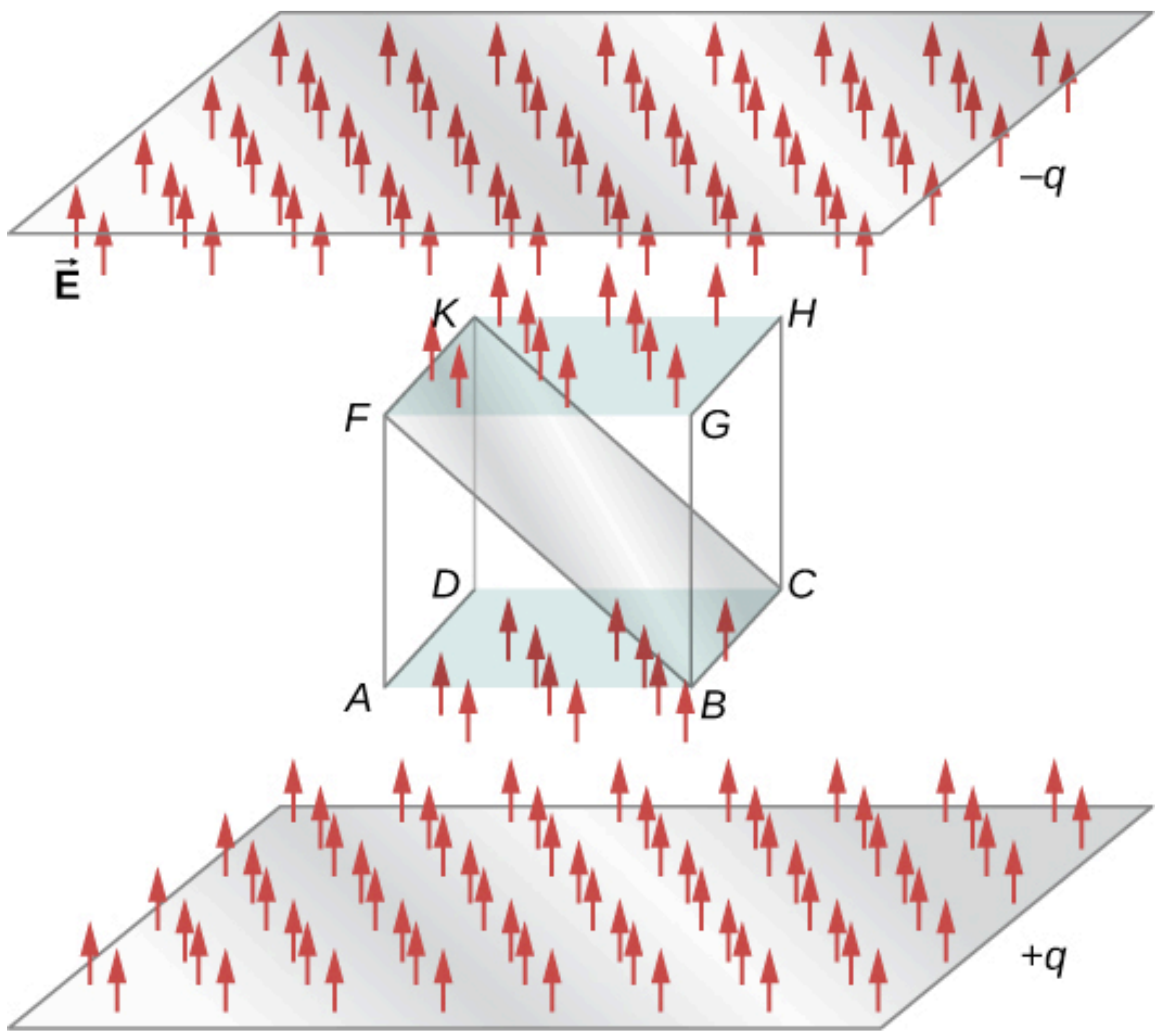
Si una superficie es cerrada, entonces la superficie encierra un volumen. En ese caso, la dirección del vector normal en cualquier punto de la superficie apunta desde el interior hacia el exterior.

Se elige $\hat{n}$ normal hacia el exterior en cada punto, para ser coherente con la convención de signos de la carga eléctrica.

Ejemplo

- Definimos el flujo eléctrico de un campo eléctrico uniforme a través de un área plana como el producto escalar del campo eléctrico y el vector área:

$$\Phi = \vec{E} \cdot \vec{A}$$



Por la cara superior del cubo: $\Phi = \vec{E} \cdot \vec{A} = EA$

A través de la cara inferior del cubo: $\Phi = \vec{E} \cdot \vec{A} = -EA$

porque el vector área apunta hacia abajo.

En los otros cuatro lados, la dirección del vector área es perpendicular a la dirección del campo eléctrico. Por lo tanto, el producto escalar del campo eléctrico con el vector área es cero, dando un flujo cero.

$$\Phi_{\texttt{net}} = EA - EA + 0 + 0 + 0 + 0 = 0$$

El flujo neto de un campo eléctrico uniforme a través de una superficie cerrada es cero.

- Cualquier superficie lisa y no plana puede sustituirse por un conjunto de pequeñas superficies aproximadamente planas.

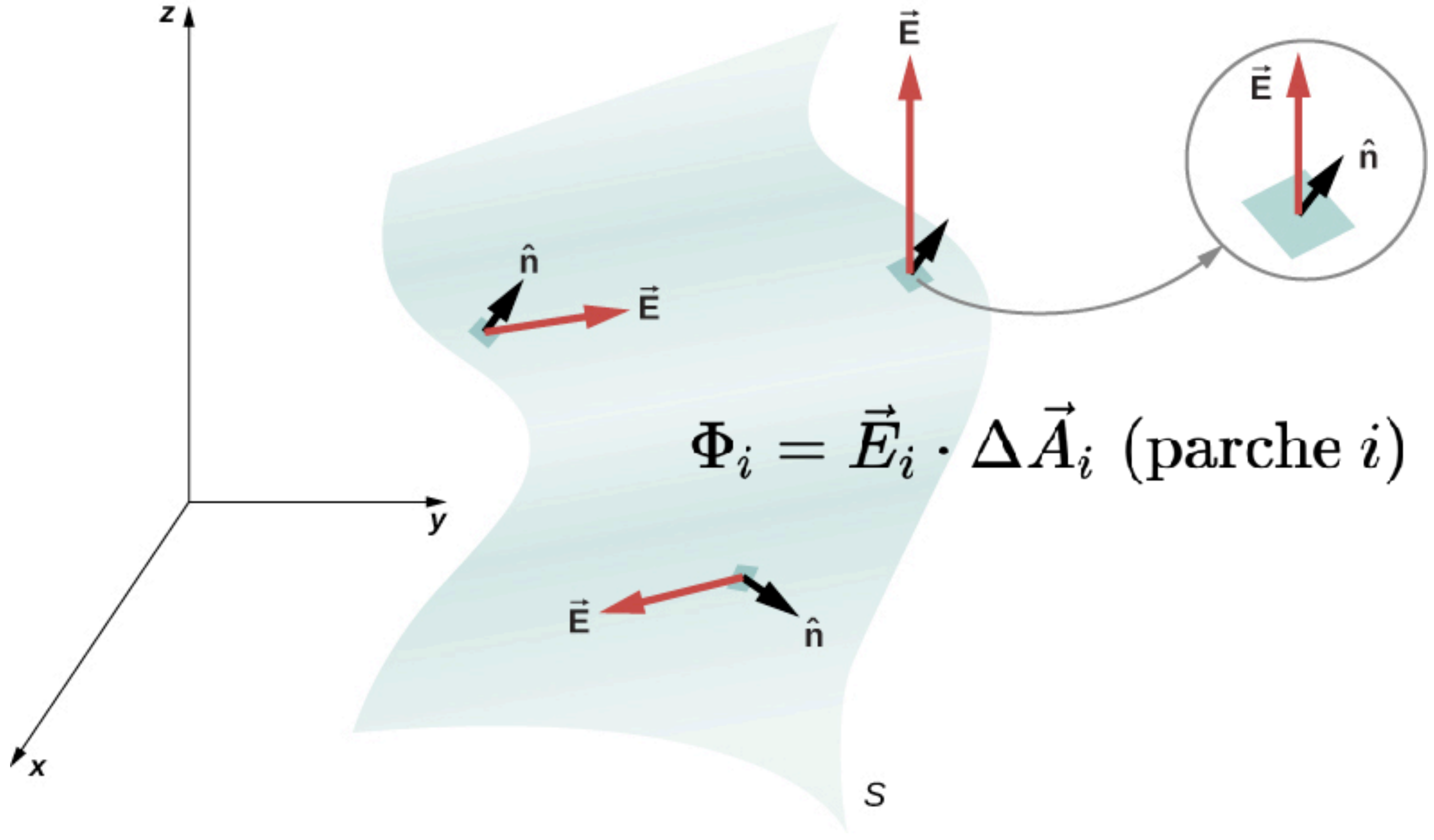
- Si dividimos una superficie S en pequeños parches, observamos que, a medida que los parches se hacen más pequeños, pueden ser aproximados por superficies planas.

- Definimos el vector de área para cada parche como el área del parche apuntado en la dirección de la normal.

- Denotemos el vector área para el i-ésimo parche por $\Delta\vec{A}_i$.

- Con parches suficientemente pequeños, podemos aproximar el campo eléctrico sobre cualquier parche dado como uniforme.

- Denotemos el campo eléctrico medio en la ubicación del parche i-ésimo por $\vec{E}_i$.



$$\Phi = \sum_{i=1}^{N} \Phi_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{E}_i \cdot \Delta\vec{A}_i$$

$$\Phi = \int_S \vec{E} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dA = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{A} \quad \text{(superficie abierta)}$$

$$\Phi = \oint_S \vec{E} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dA = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} \quad (\text{ superficie cerrada })$$

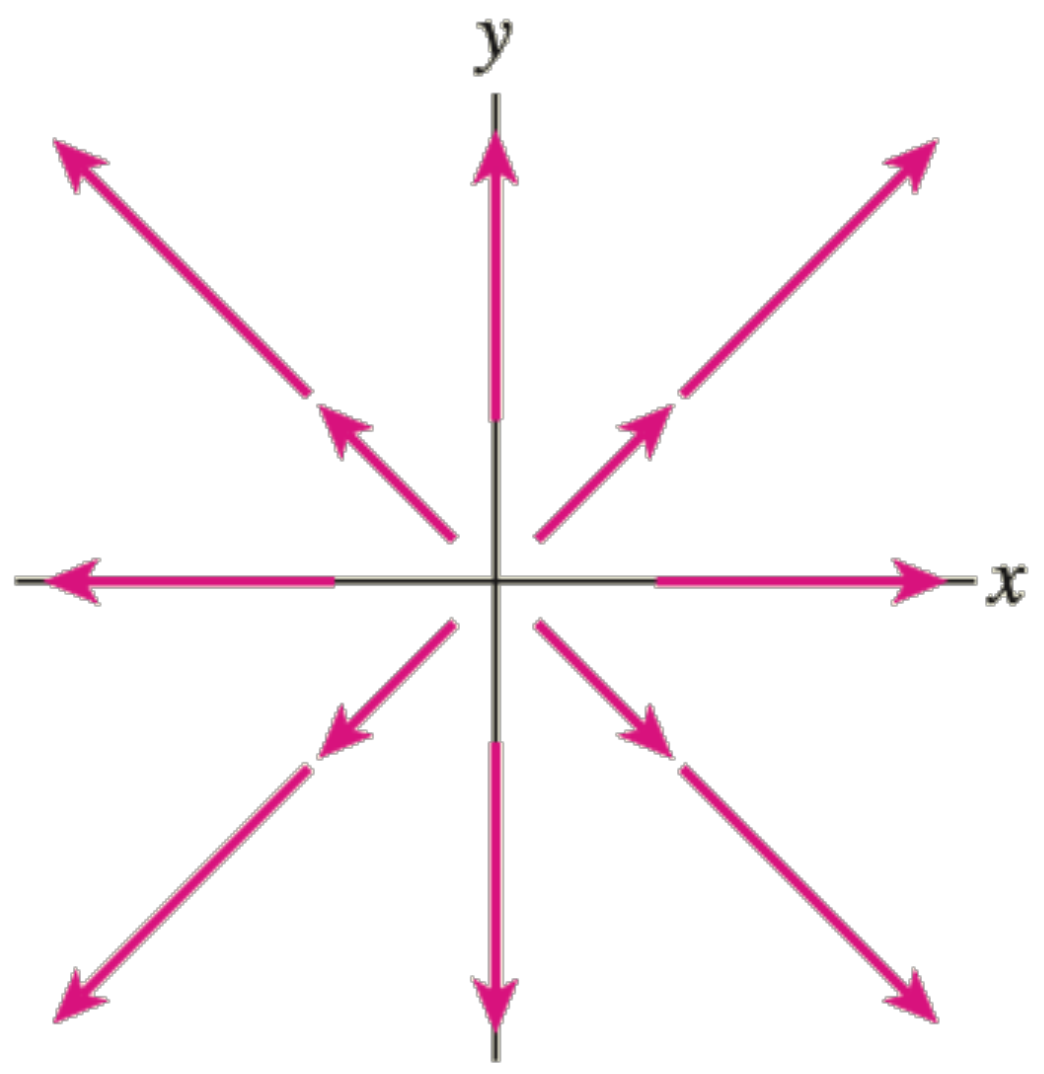
Cálculo del flujo eléctrico a través de un cilindro cerrado

Ejemplo: Una distribución de carga con simetría cilíndrica ha creado el campo eléctrico

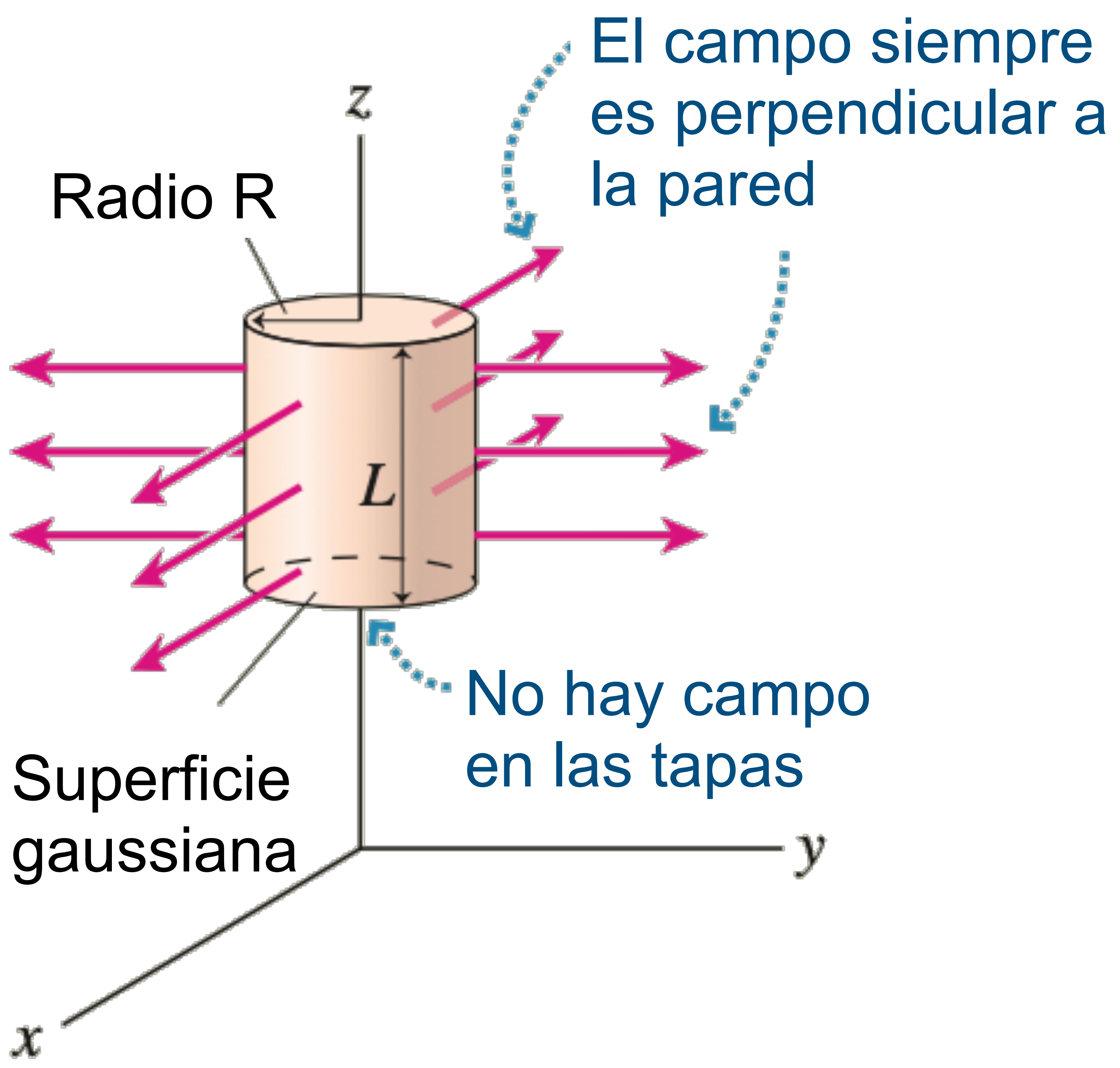
$$\vec{E} = E_0\left(r^2/r_0^2\right)\hat{r}$$

donde E_0 y r_0 son constantes y donde el vector unitario se encuentra en el plano xy.

Calcular el flujo eléctrico a través de un cilindro cerrado de longitud L y radio R que está centrado a lo largo del eje z.



El campo eléctrico visto a lo largo del eje z



Dividimos el cilindro cerrado en 3 superficies: la superior, la inferior y la pared cilíndrica. El campo eléctrico es tangente a la superficie en cada punto de las tapas superior e inferior.

En la pared cilíndrica, $\vec{E}$ es perpendicular a la superficie en cada punto y su magnitud es constante

$$E = E_0\frac{R^2}{r_0^2}$$

$$\Phi_{\text{pared}} = EA_{\text{pared}}$$

Si sumamos las tres piezas, el flujo neto a través de la superficie cerrada es:

$$\Phi_e = \oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \Phi_{\text{sup.}} + \Phi_{\text{inf.}} + \Phi_{\text{pared}}$$

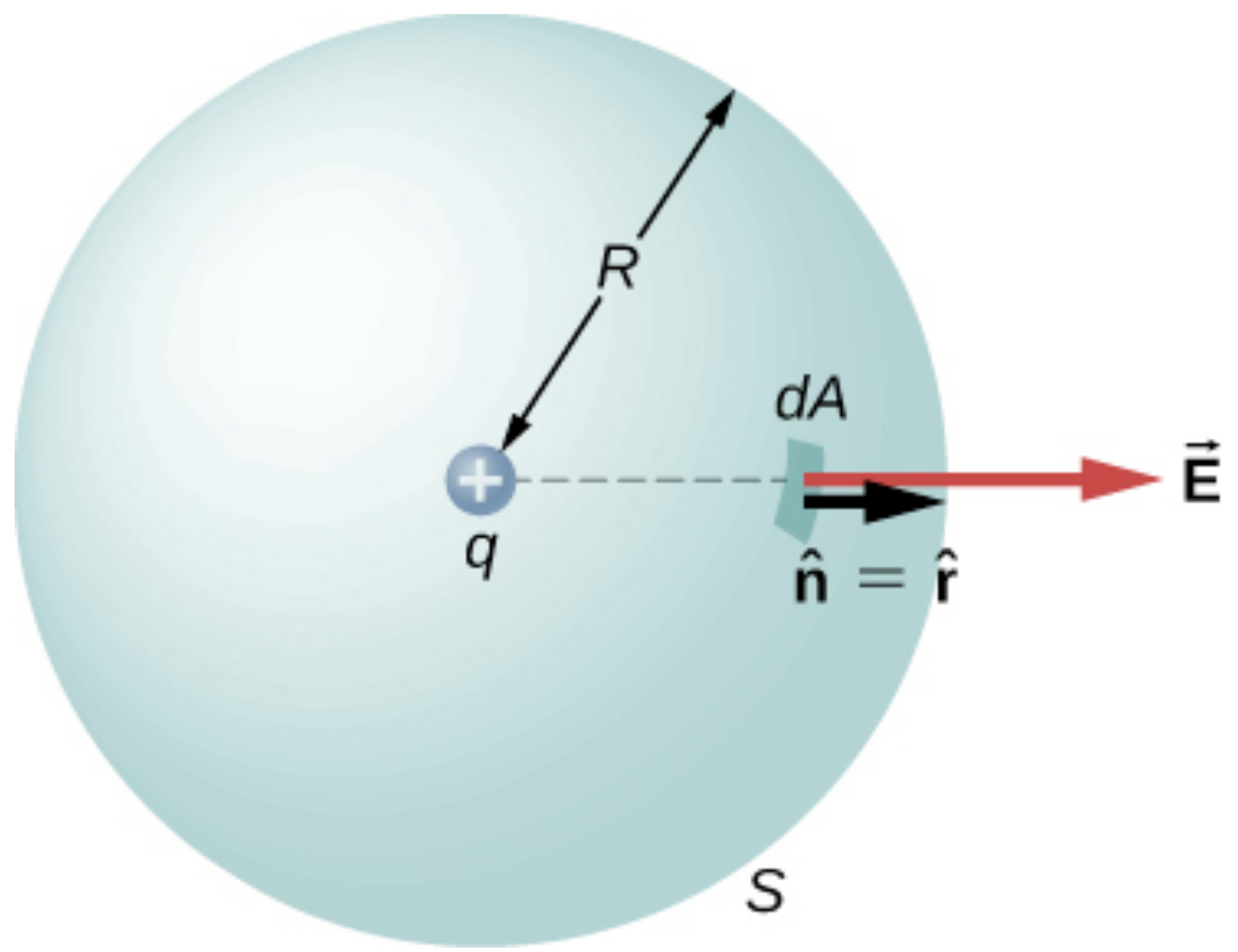
$$= 0 + 0 + EA_{\text{pared}} = EA_{\text{pared}}$$

$$\Phi_e = \left(E_0\frac{R^2}{r_0^2}\right)(2\pi RL) = \frac{2\pi LR^3}{r_0^2}E_0$$

2. Ley de Gauss

- Si una superficie cerrada no contiene ninguna carga en su interior donde pueda terminar una línea de campo eléctrico, entonces cualquier línea de campo eléctrico que entre en la superficie en un punto debe necesariamente salir en algún otro punto de la superficie.
- Po lo tanto, el flujo eléctrico a través de la superficie es cero.
- ¿Qué ocurre con el flujo eléctrico si hay cargas en el interior del volumen cerrado? La ley de Gauss da una respuesta cuantitativa a esta pregunta.

Una superficie esférica cerrada que rodea una carga puntual q



El campo eléctrico en un punto P que está a una distancia r de la carga en el origen viene dado por:

$$\vec{E}_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{r}$$

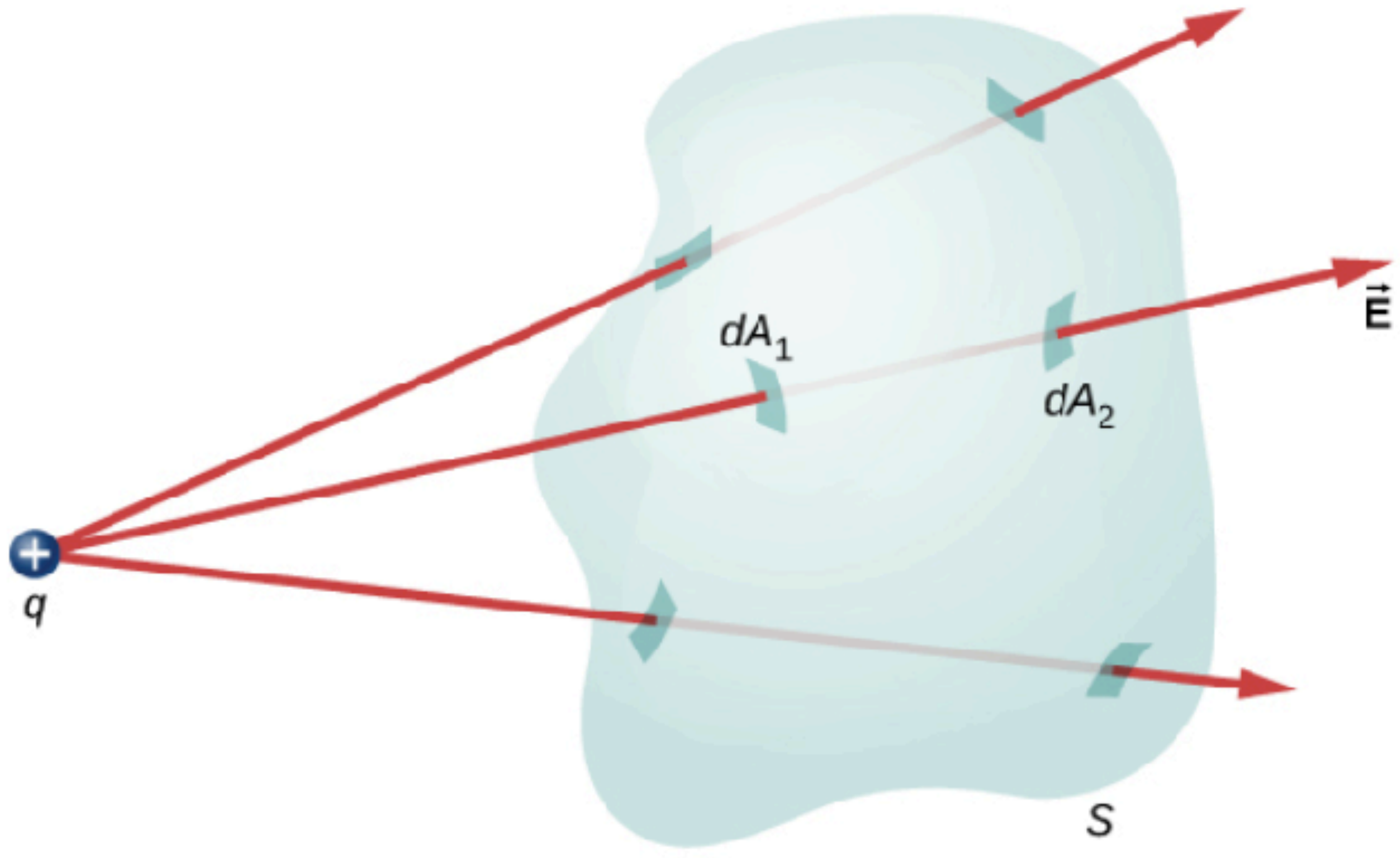
El flujo para un área infinitesimal dA es:

$$d\Phi = \vec{E}\cdot\hat{n}dA = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{R^2}\hat{r}\cdot\hat{r}dA = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{R^2}dA$$

El flujo neto sobre la superficie de la esfera:

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{R^2}\oint_S dA = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{R^2}(4\pi R^2) = \frac{q}{\epsilon_0}$$

El flujo es independiente del tamaño de la superficie esférica. Esto se atribuye al hecho de que el campo eléctrico de una carga puntual disminuye como $1/r^2$, lo que anula la tasa r^2 del aumento de la superficie.

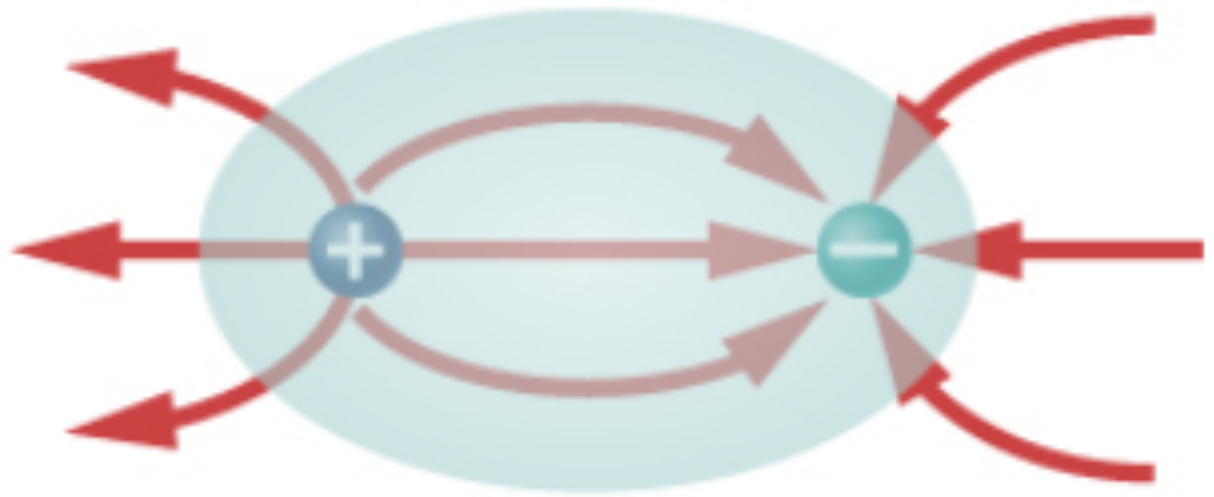


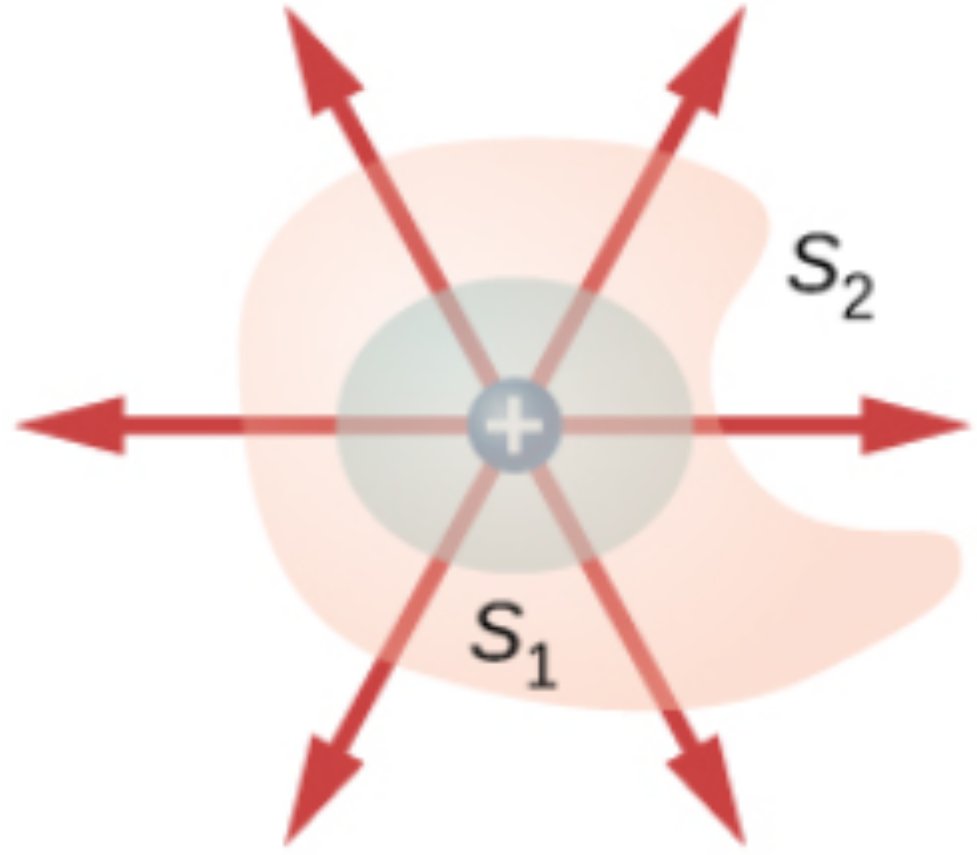
- Si no se incluyen cargas dentro de una superficie cerrada, entonces el flujo eléctrico que la atraviesa debe ser cero. Una línea de campo típica entra en la superficie en dA_1 y sale en dA_2 .

- Por lo tanto, el "flujo" neto de las líneas de campo que entran o salen de la superficie es cero.

- Una superficie que incluye la misma cantidad de carga tiene el mismo número de líneas de campo que la cruzan, independientemente de la forma o el tamaño de la superficie, siempre que la superficie encierre la misma cantidad de carga.

- Lo mismo ocurre si se incluyen cargas de signo igual y opuesto dentro de la superficie cerrada, de modo que la carga total incluida es cero.

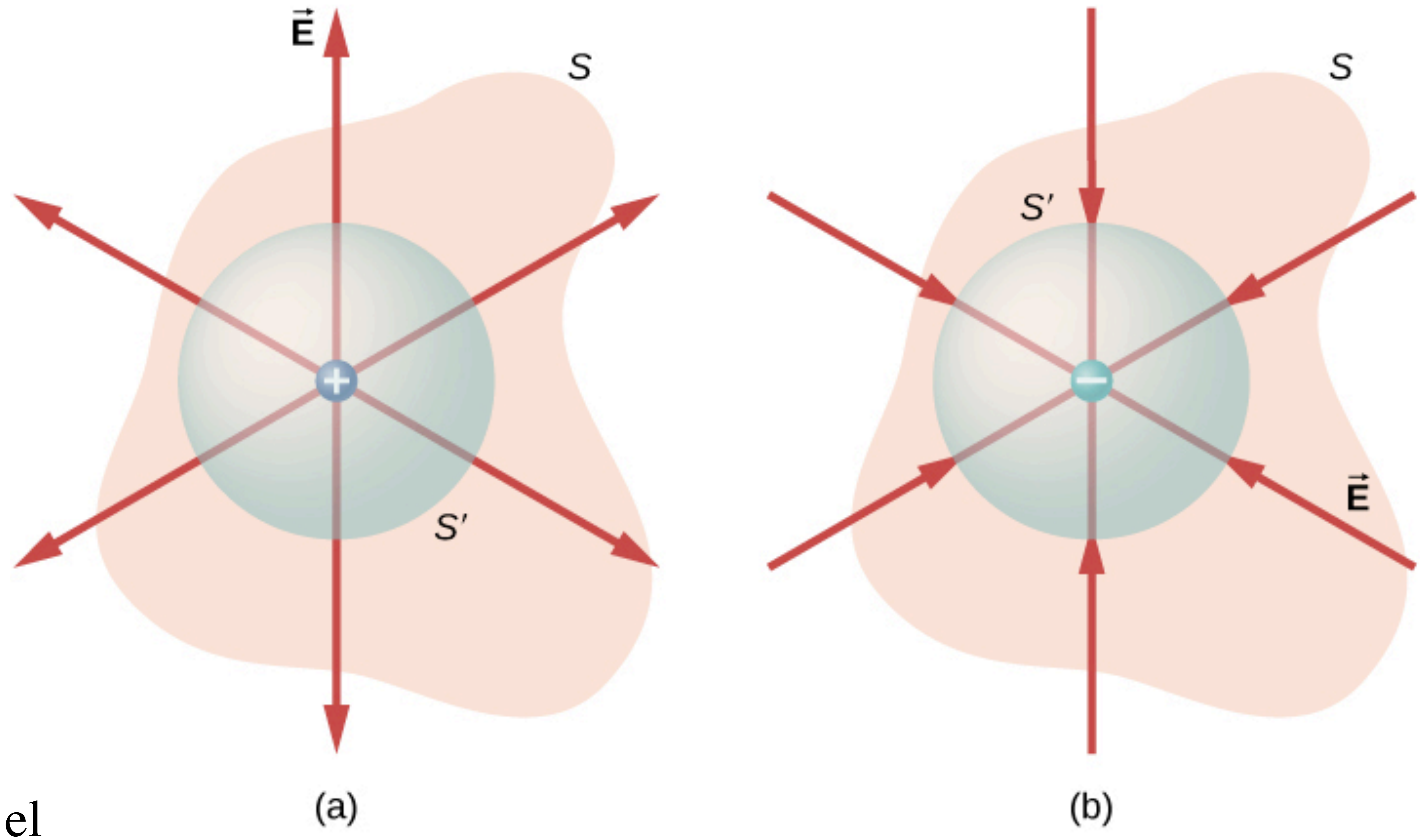




- La ley de Gauss generaliza al caso de cualquier número de cargas y cualquier ubicación de las cargas en el espacio dentro de la superficie cerrada.

- Según la ley de Gauss, el flujo del campo eléctrico a través de cualquier superficie cerrada (superficie gaussiana) es igual a la carga neta encerrada dividida por la permitividad del espacio libre:

$$\Phi_{\text{Superficie cerrada}} = \frac{q_{\text{enc}}}{\epsilon_0}$$



- Esta ecuación es válida para cargas de cualquier signo, ya que el vector área de una superficie cerrada apunta hacia afuera.

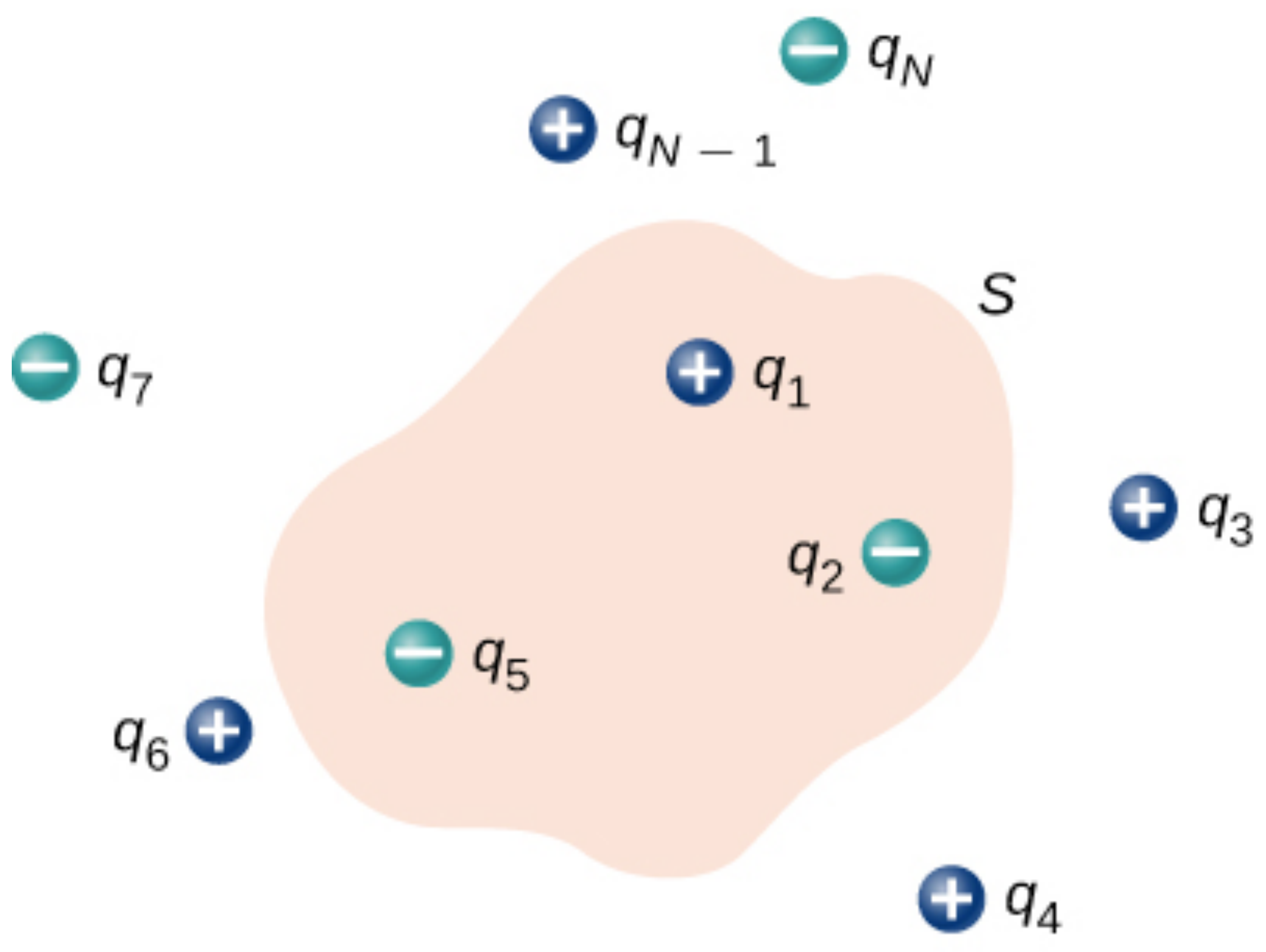
- Si la carga encerrada es negativa, entonces el flujo a través de S o S' es negativo.

- La superficie gaussiana es una construcción matemática que puede tener cualquier forma, siempre que sea cerrada.

- Como nuestro objetivo es integrar el flujo sobre ella, tendemos a elegir formas que sean muy simétricas.

- Si las cargas son cargas puntuales discretas, entonces simplemente las sumamos.

- Si la carga es descrita por una distribución continua, entonces necesitamos integrar apropiadamente para encontrar la carga total que reside dentro del volumen encerrado.



$$\Phi = \frac{1}{\epsilon_0}(q_1 + q_2 + q_5)$$

Ley de Gauss:

El flujo Φ del campo eléctrico $\vec{E}$ a través de cualquier superficie cerrada S es igual a la carga neta encerrada dividida por la permitividad del espacio libre

$$\Phi = \oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} dA = \frac{q_{enc}}{\epsilon_0}$$

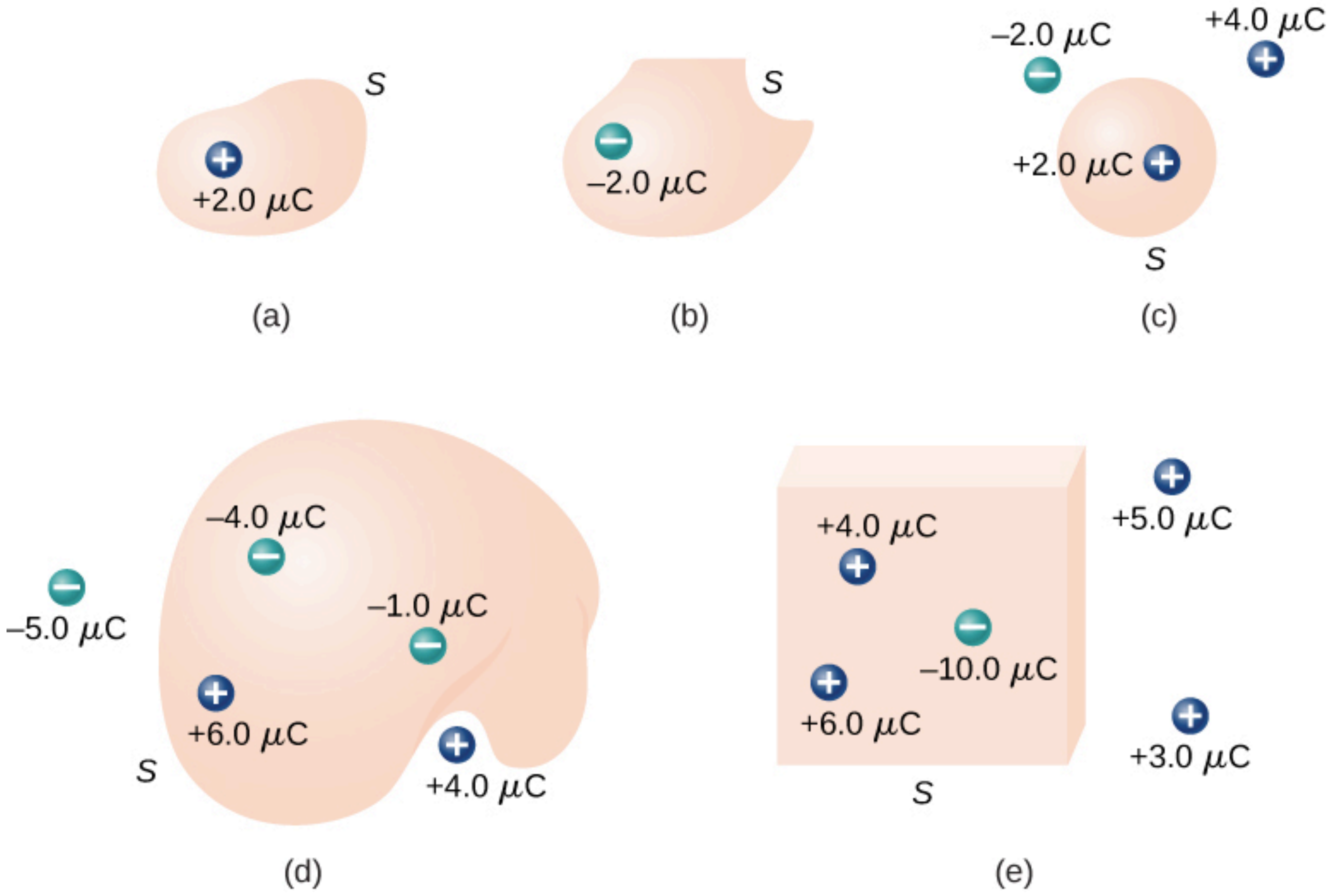
- El campo $\vec{E}$ es **el campo eléctrico total en cada punto de la superficie gaussiana**.

- Este campo total incluye las contribuciones de las cargas tanto dentro como fuera de la superficie.

- La carga q_{enc} es la carga dentro de la superficie gaussiana.

- La superficie gaussiana es cualquier superficie cerrada en el espacio. Esa superficie puede coincidir con la superficie real de un conductor, o puede ser una superficie geométrica imaginaria.

- Ejercicio: Calcule el flujo eléctrico a través de cada superficie gaussiana mostrada en la figura



3. Aplicación de la ley de Gauss

- La ley de Gauss es útil para determinar las expresiones del campo eléctrico, aunque la ley no se refiere directamente al campo eléctrico, sino al flujo eléctrico.

- En situaciones que tienen simetrías (esféricas, cilíndricas o planas) en la distribución de cargas, podemos deducir el campo eléctrico a partir del conocimiento del flujo eléctrico.

- En estos sistemas, podemos encontrar una superficie gaussiana S sobre la que el campo eléctrico tiene magnitud constante.

- Si $\vec{E}$ es paralelo a $\hat{n}$ en cualquier lugar de la superficie, entonces $\vec{E} \cdot \hat{n} = E$.
- Si $\vec{E}$ y $\hat{n}$ son antiparalelos en todas partes de la superficie, $\vec{E} \cdot \hat{n} = -E$.

- La ley de Gauss se simplifica entonces en

$$\Phi = \oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} dA = E \oint_S dA = EA = \frac{q_{enc}}{\epsilon_0}$$

Estrategia para la resolución de problemas: Ley de Gauss

1. Identificar la simetría espacial de la distribución de la carga. Como ejemplos, una carga puntual aislada tiene simetría esférica, y una línea de carga infinita tiene simetría cilíndrica.

2. Elegir una superficie gaussiana con la misma simetría que la distribución de la carga e identificar sus consecuencias. Con esta elección, $\vec{E} \cdot \hat{n}$ se determina fácilmente sobre la superficie gaussiana.

3. Evaluar la integral $\oint \vec{E} \cdot \hat{n}\, dA$ sobre la superficie de Gauss, es decir, calcular el flujo a través de la superficie. La simetría de la superficie gaussiana nos permite factorizar $\vec{E} \cdot \hat{n}$ fuera de la integral.

4. Determinar la cantidad de carga que encierra la superficie gaussiana. A menudo es necesario realizar una integración para obtener la carga neta encerrada.

5. Evaluar el campo eléctrico de la distribución de carga. El campo se puede encontrar ahora utilizando los resultados de los pasos 3 y 4.

$$\Phi = \oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} dA = E \oint_S dA = EA = \frac{q_{enc}}{\epsilon_0}$$

Distribución de la carga con simetría esférica

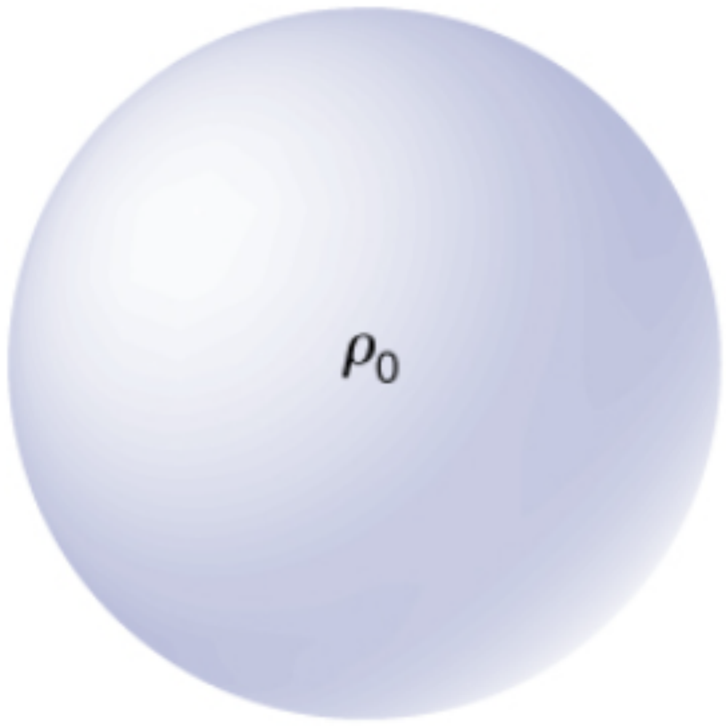
- Una distribución de carga tiene simetría esférica si la densidad de carga depende sólo de la distancia a un punto del espacio y no de la dirección. Es decir, si se gira el sistema, no se ve diferente. Por ejemplo: una esfera de radio R cargada uniformemente con una densidad de carga ρ_0 tiene simetría esférica.

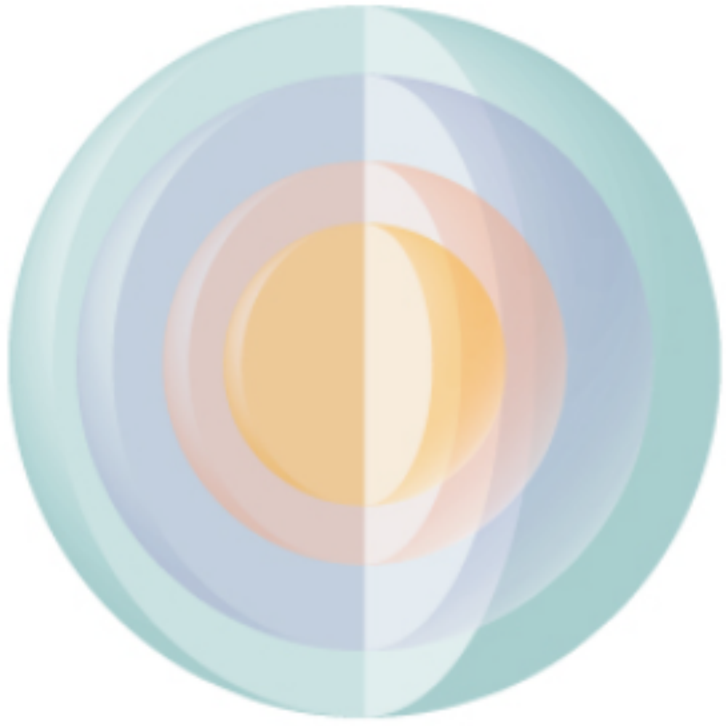
- Una esfera con cuatro capas diferentes, cada una con su propia densidad de carga uniforme es una situación en la que la densidad de carga en toda la esfera no es uniforme, la función de densidad de carga depende **sólo de la distancia al centro** y no de la dirección. Por tanto, esta distribución de carga sí tiene simetría esférica.

- Si una esfera de radio R está cargada de manera que la mitad superior de la esfera tiene una densidad de carga uniforme ρ_1 y la mitad inferior tiene una densidad de carga uniforme $\rho_2 \neq \rho_1$ entonces la esfera no tiene simetría esférica porque la densidad de carga depende de la dirección.

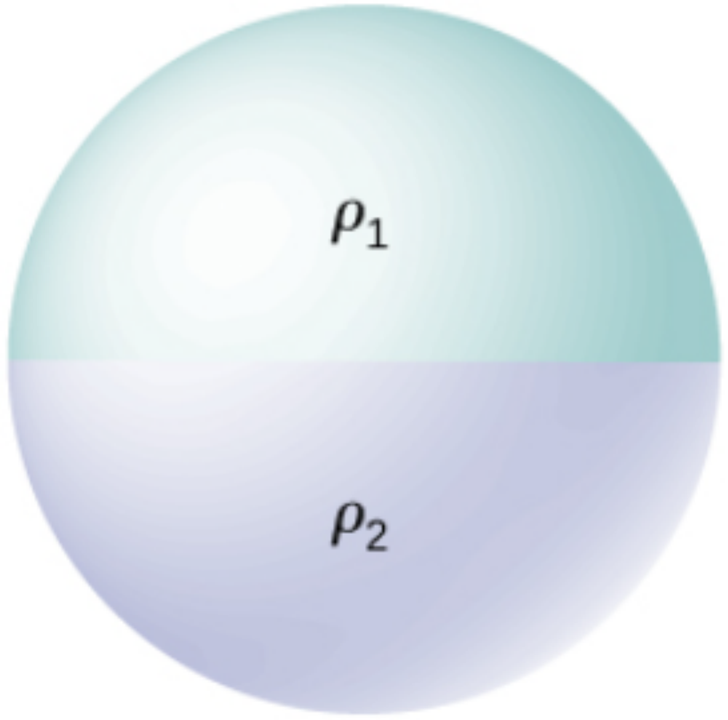
- No es la forma del objeto sino la forma de la distribución de la carga lo que determina si un sistema tiene o no simetría esférica.

- Para determinar si un problema tiene esférica se observa si la función de densidad de carga en coordenadas esféricas, $\rho(r,\theta,\phi)$ es sólo una función de r, es decir, $\rho=\rho(r)$, entonces se tiene simetría esférica.





Con simetría esférica



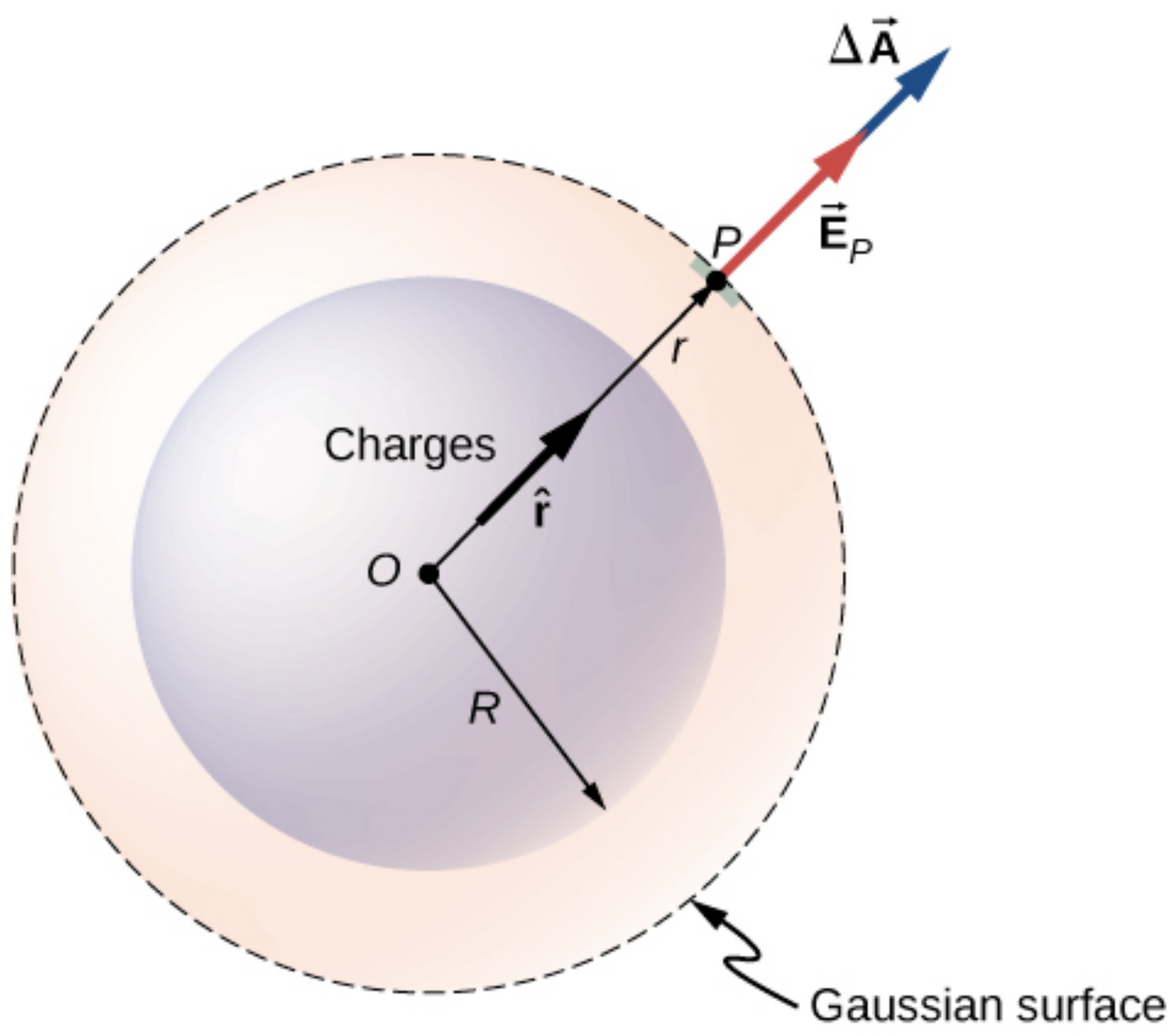
Sin simetría esférica

Consecuencias de la simetría esférica

- En todos los casos de simetría esférica, el campo eléctrico en cualquier punto debe estar dirigido radialmente, porque la carga y, por tanto, el campo deben ser invariantes bajo la rotación.

- Utilizando coordenadas esféricas con su origen en el centro de la distribución de carga esférica, podemos escribir la forma esperada del campo eléctrico en un punto P situado a una distancia r del centro:

$$\vec{E}_p = E_p(r)\hat{r}$$

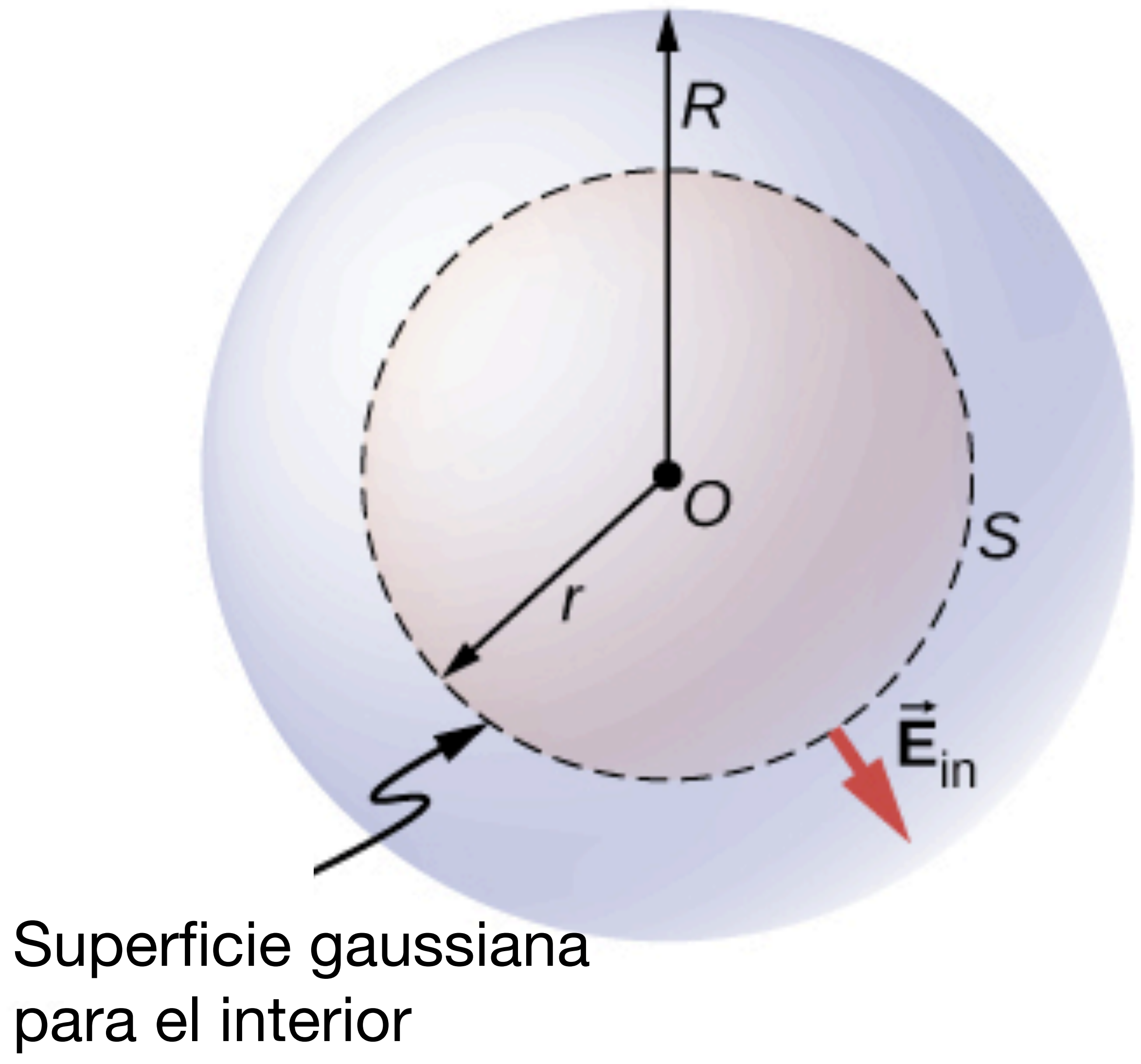


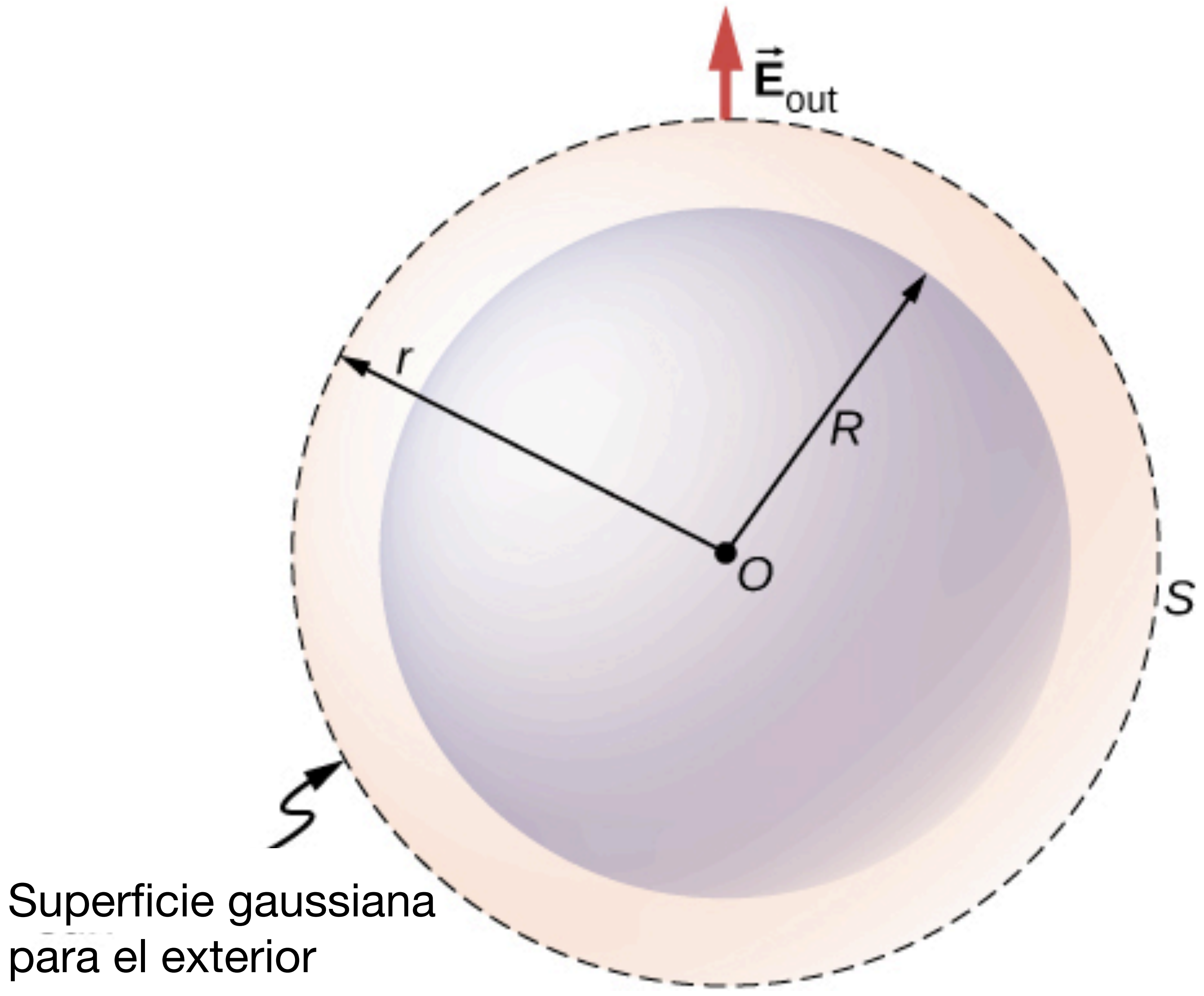
- La magnitud del campo eléctrico $\vec{E}$ debe ser la misma en todas partes de una superficie esférica gaussiana concéntrica con la distribución.
- Para una superficie esférica de radio r:

$$\Phi = \oint_S \vec{E}_p \cdot \hat{n} dA = E_p \oint_S dA = E_p 4\pi r^2 = \frac{q_{enc}}{\epsilon_0} \quad \Longrightarrow \quad E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_{enc}}{r^2}$$

- Cuando una distribución de carga esférica ocupa un volumen, nos podemos preguntar ¿cuál es el campo eléctrico dentro de la distribución de carga?

- En este caso, la carga encerrada depende de la distancia *r* del punto del campo en relación con el radio de la distribución de carga *R*





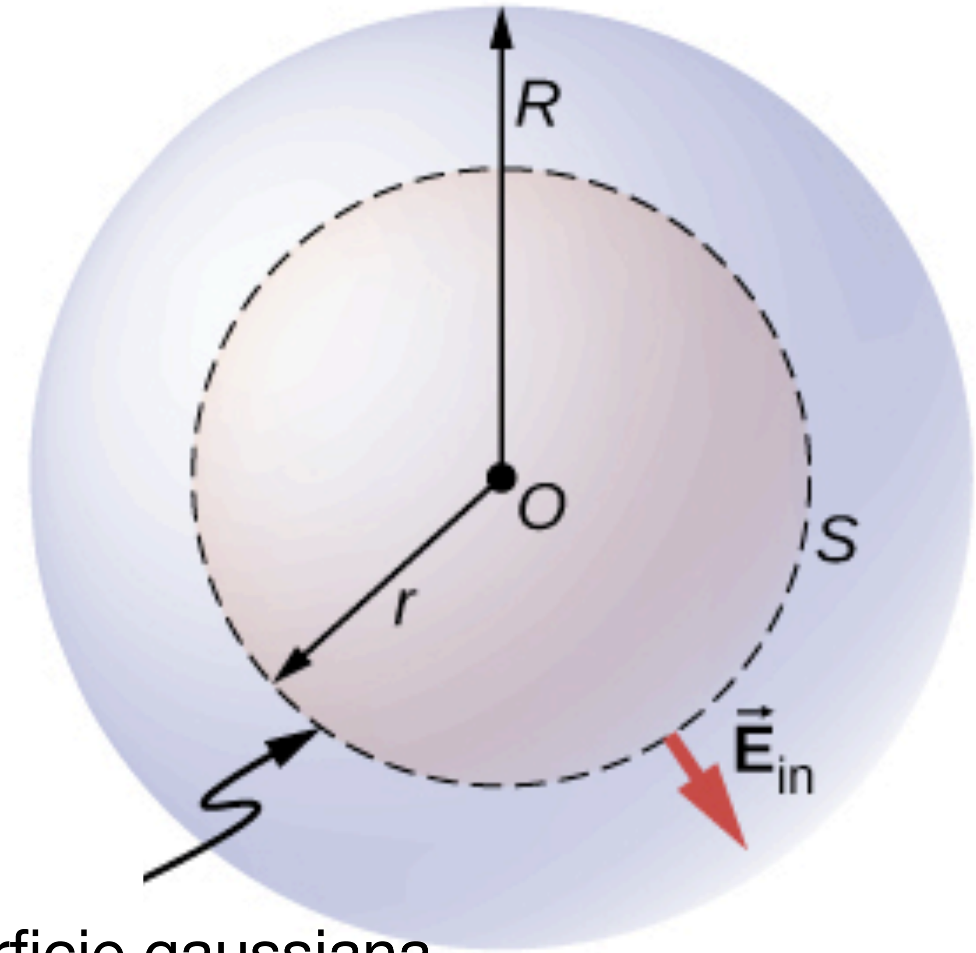
$$\text{Fuera de la esfera: } E_{ext} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_{tot}}{r^2}$$

$$\text{Dentro de la esfera: } E_{int} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_{int}}{r^2}.$$

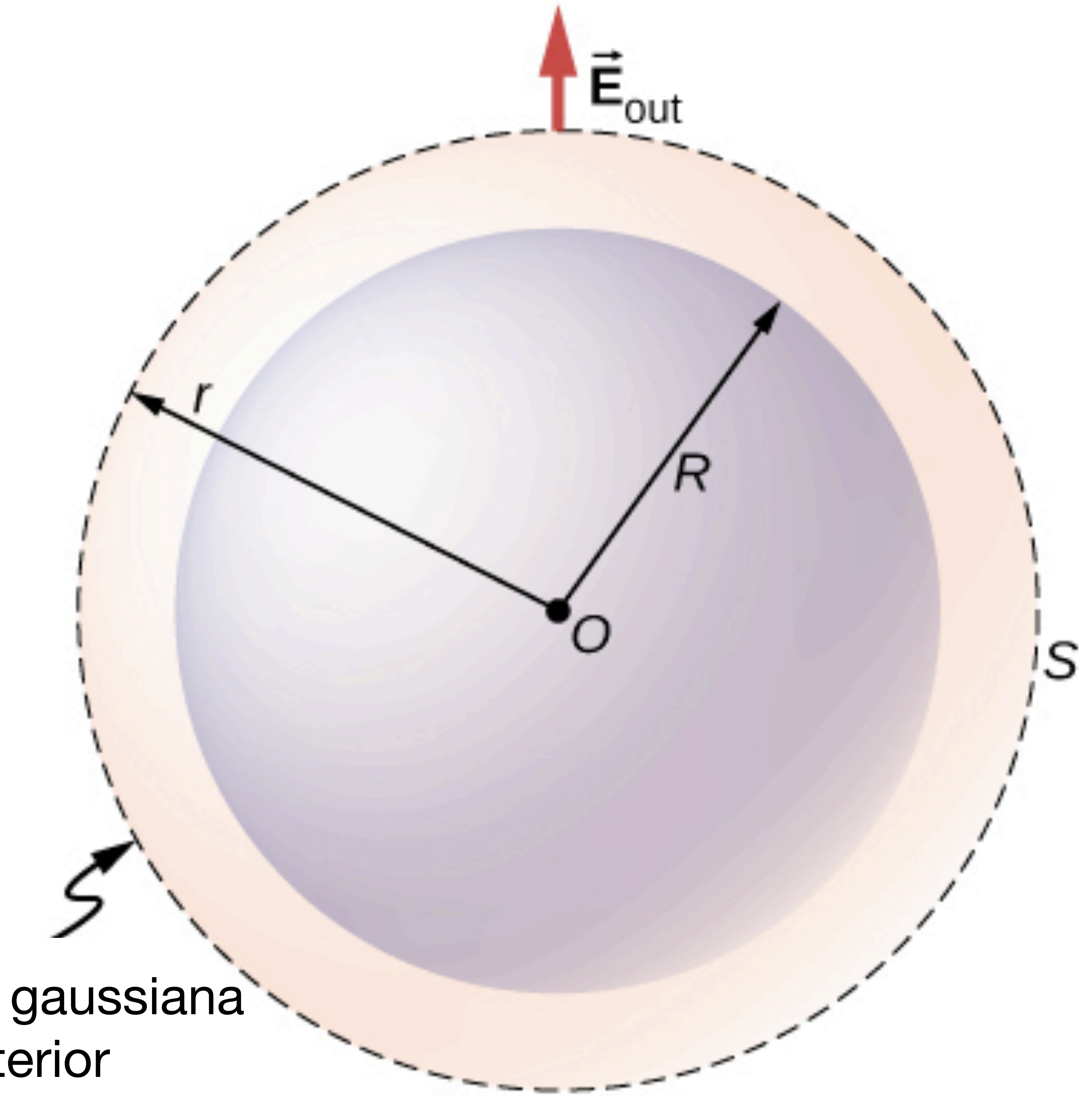
$$q_{enc} = q_{tot} \quad \text{si } r \geq R$$
$$q_{enc} = q_{int} \quad \text{si } r < R$$

Esfera cargada uniformemente

- Una esfera de radio R tiene una densidad de carga volumétrica uniforme ρ_0 . Encontrar el campo eléctrico en un punto fuera de la esfera y en un punto dentro de la esfera.



Superficie gaussiana
para el interior



Superficie gaussiana
para el exterior

- La carga encerrada por la superficie gaussiana viene dada por:

$$q_{\text{enc}} = \int \rho_0 dV = \rho_0 \int dV = \rho_0 \left(\frac{4}{3} \pi r^3 \right)$$

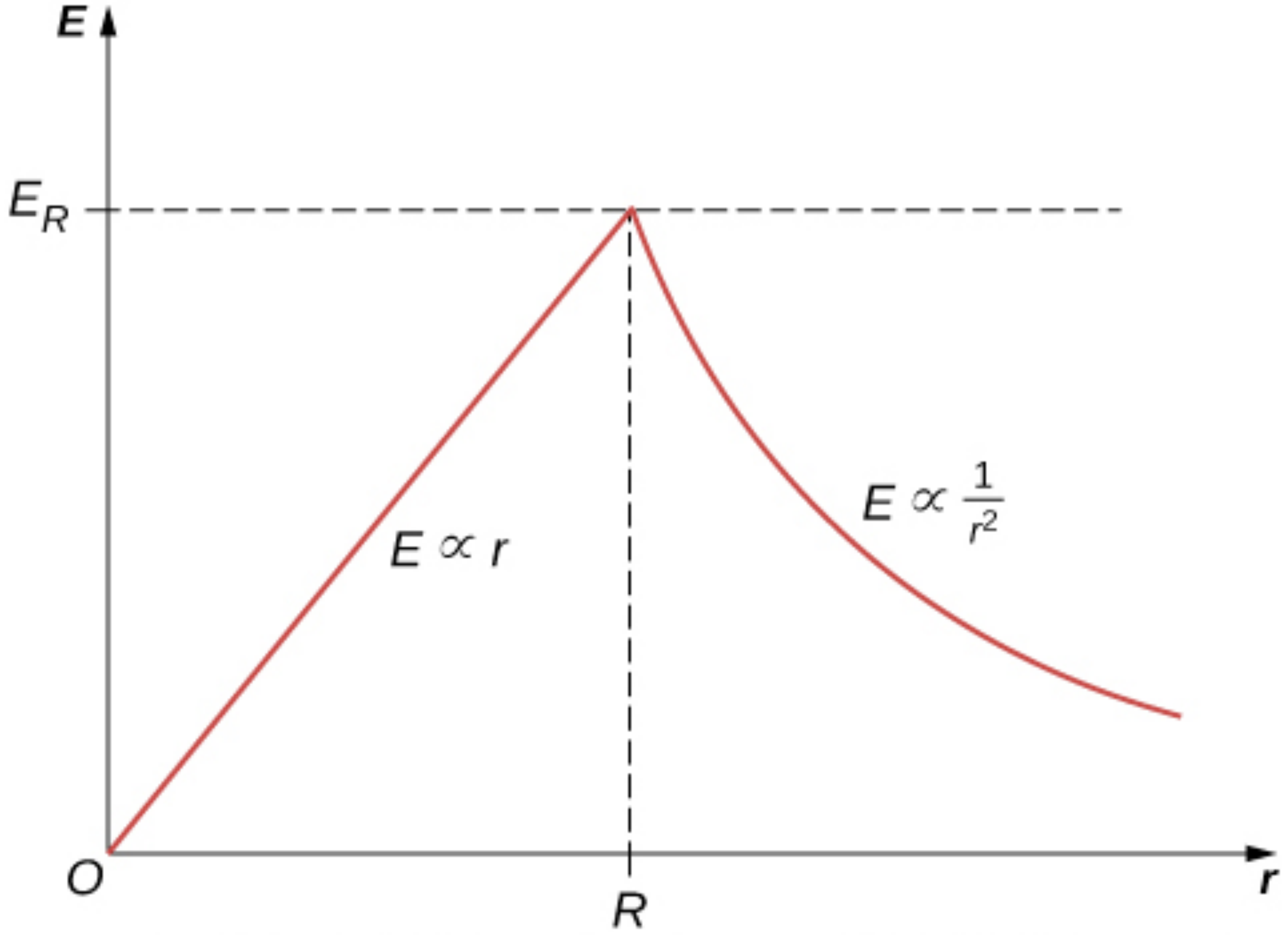
$$q_{\text{enc}} = q_{\text{tot}} \quad \text{si } r \geq R$$
$$q_{\text{enc}} = q_{\text{int}} \quad \text{si } r < R$$

- El campo eléctrico afuera es:

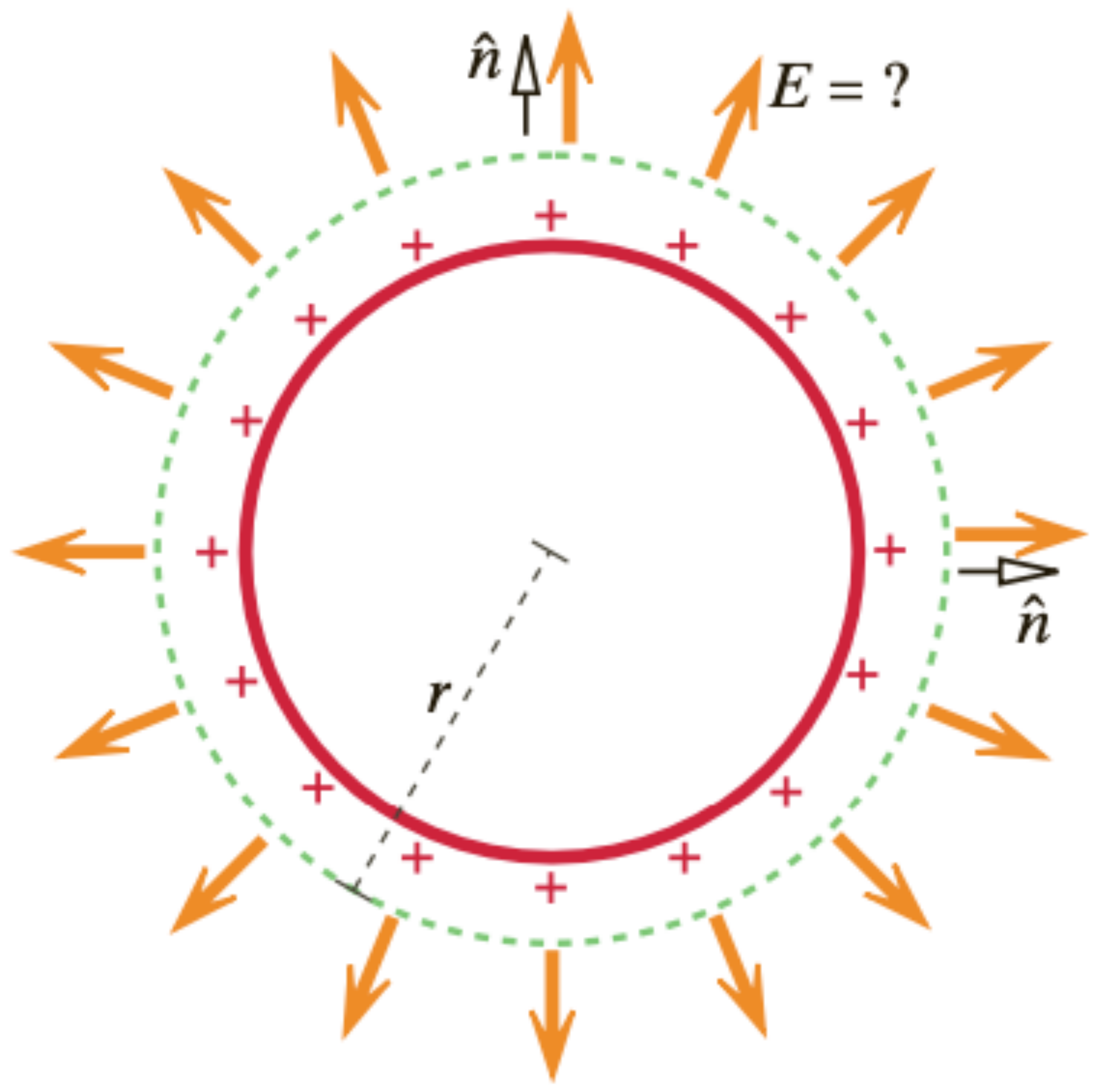
$$E_{\text{ext}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_{\text{tot}}}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\frac{4}{3}\pi R^3 \rho_0}{r^2} = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} \frac{R^3}{r^2}$$

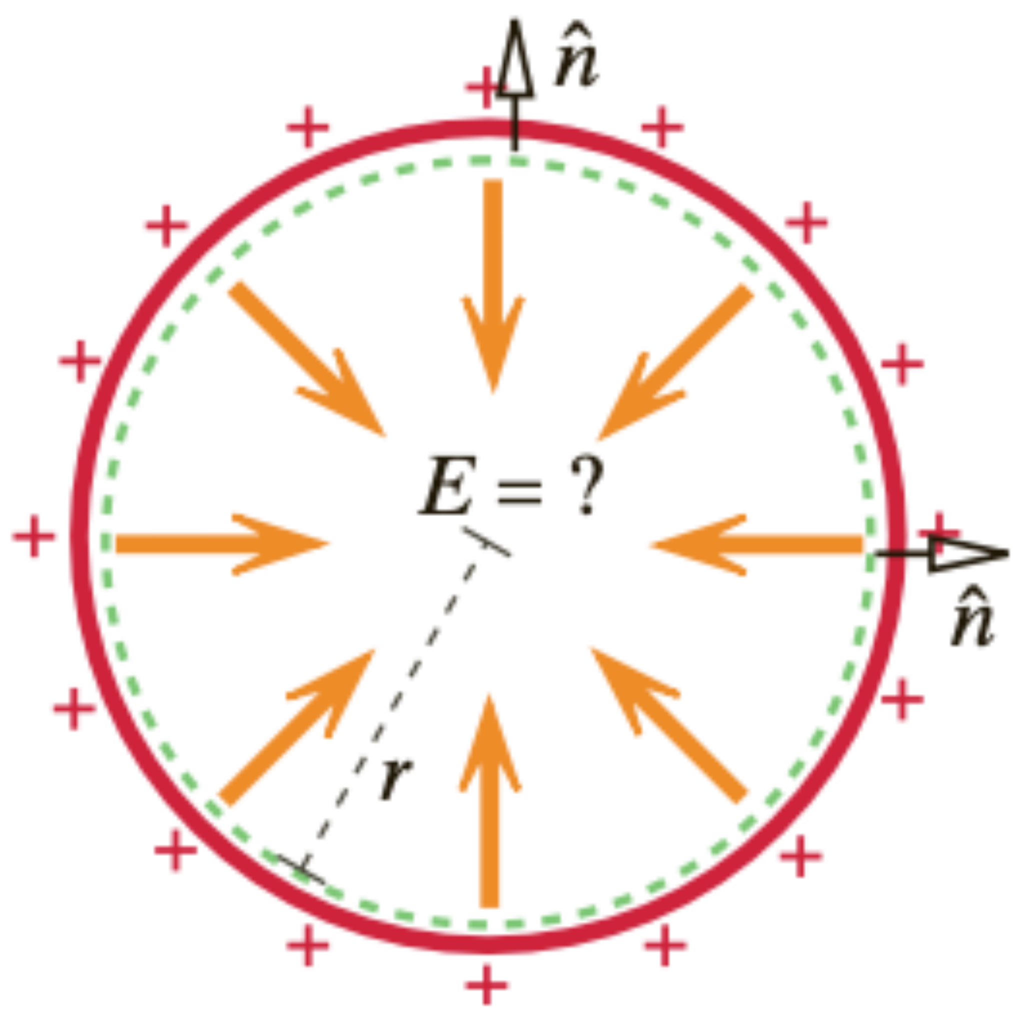
- El campo eléctrico adentro es:

$$E_{\text{int}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_{\text{tot}}}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\frac{4}{3}\pi r^3 \rho_0}{r^2} = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} r$$



Cáscara hueca cargada





- En cualquier punto sobre la superficie gaussiana $\vec{E} \| \hat{n}$

- El flujo:

$$\oint \vec{E} \cdot \hat{n} dA = EA = E(4\pi r^2)$$

- Ley de Gauss

$$\oint \vec{E} \cdot \hat{n} dA = \frac{q_{\text{enc.}}}{\varepsilon_0}$$

$$E(4\pi r^2) = \frac{Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2}$$

- Dentro de la cáscara

$$\oint \vec{E} \cdot \hat{n} dA = \frac{q_{\text{enc.}}}{\varepsilon_0}$$

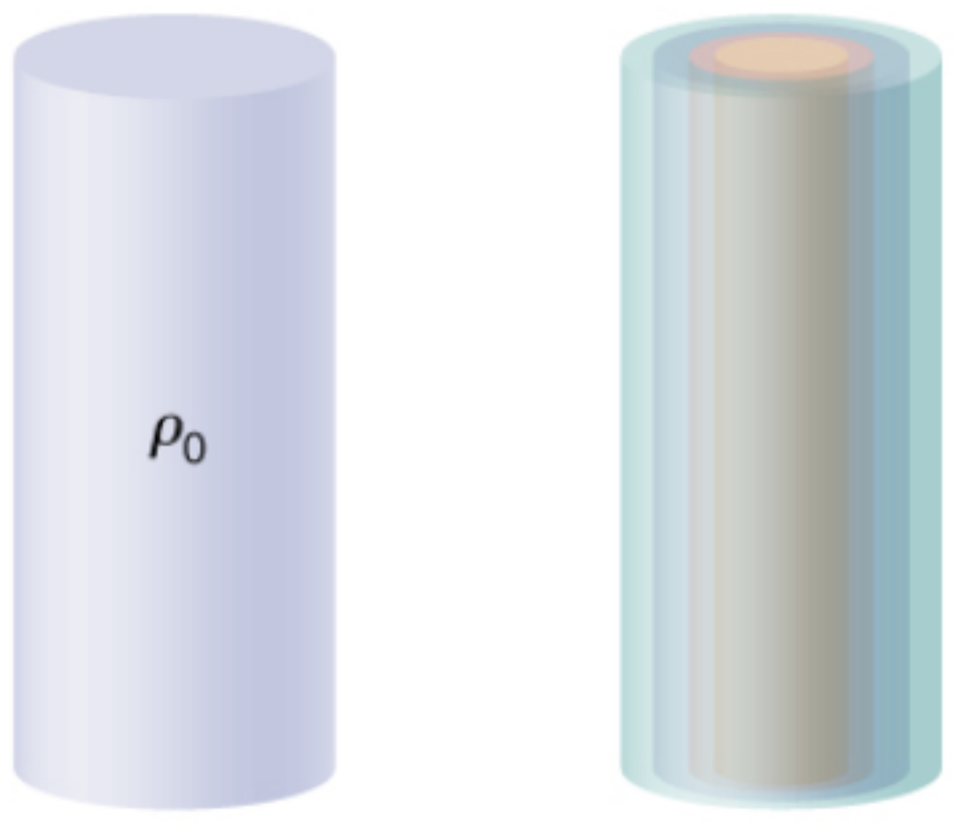
$$E(4\pi r^2) = \frac{0}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = 0$$

Distribución de la carga con simetría cilíndrica

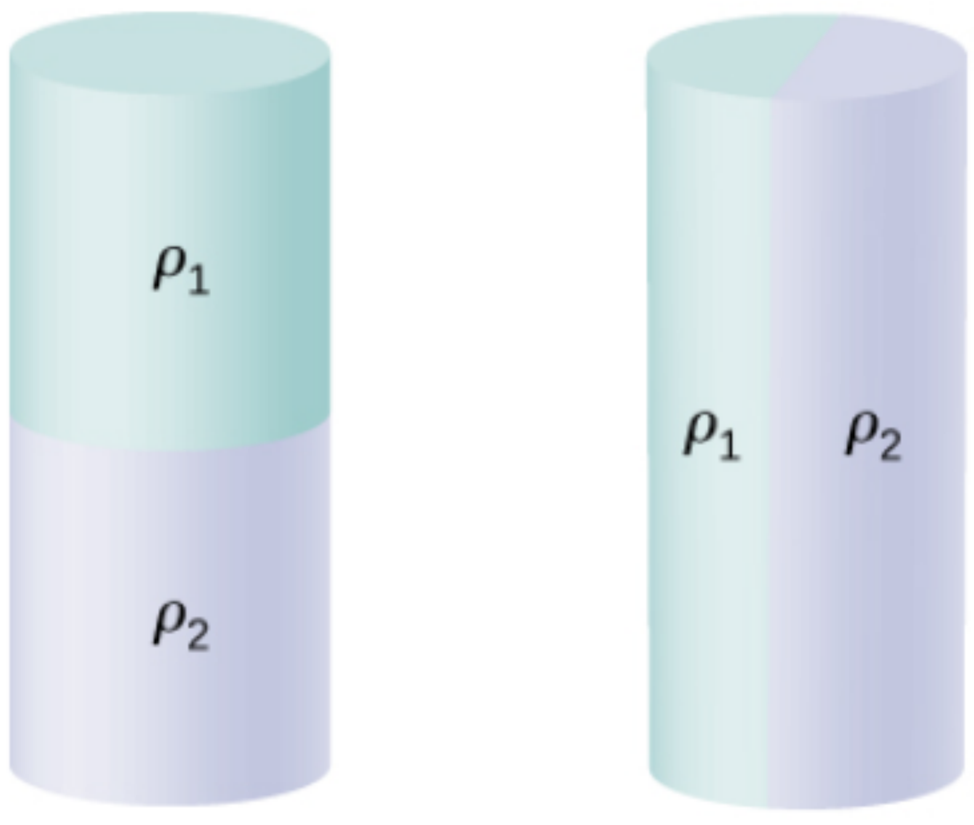
- Una distribución de carga tiene simetría cilíndrica si la densidad de carga depende sólo de la distancia *r* del eje de un cilindro y no varía a lo largo del eje.

- Una densidad de carga uniforme ρ_0 en un hilo recto infinito tiene una simetría cilíndrica, y lo mismo ocurre con un cilindro infinitamente largo con densidad de carga constante ρ_0 .

- Un sistema con cáscaras cilíndricas concéntricas, cada una con densidades de carga uniformes, aunque diferentes en las distintas cáscaras **sí** tiene simetría cilíndrica si son infinitamente largas. El requisito de longitud infinita se debe a que la densidad de carga cambia a lo largo del eje de un cilindro finito.



Con simetría cilíndrica



Sin simetría cilíndrica

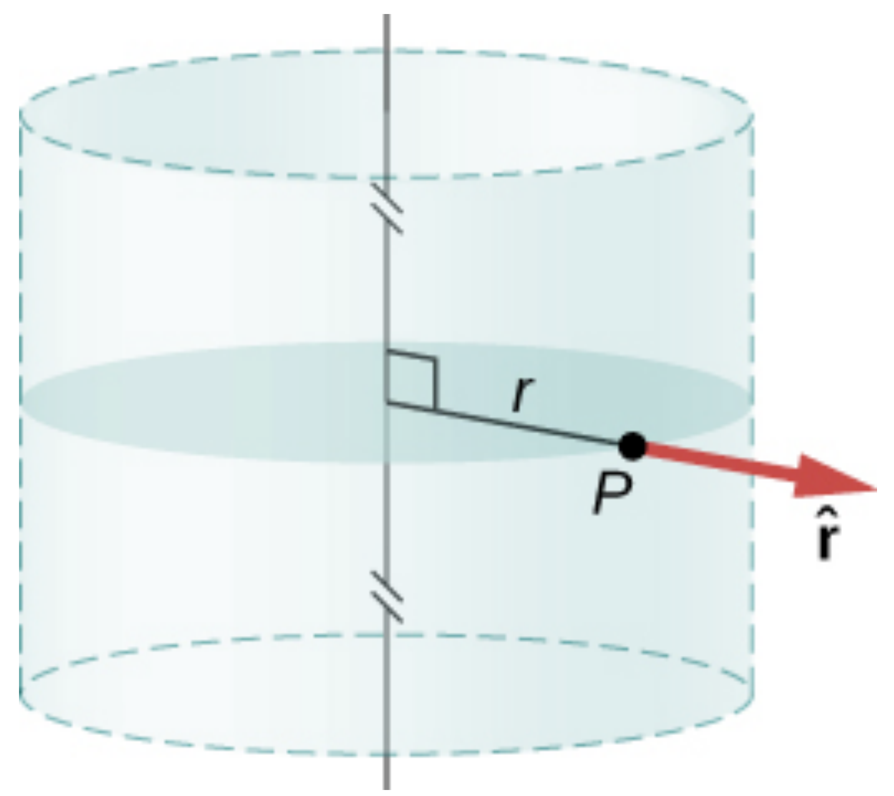
- Un cilindro infinitamente largo que tiene diferentes densidades de carga a lo largo de su longitud, como una densidad de carga ρ_1 para $z>0$ y $\rho_2 \neq \rho_1$ para $z<0$, **no** tiene una simetría cilíndrica.
  Tampoco un cilindro en el que la densidad de carga varía con la dirección, como una densidad de carga ρ_1 para $0 \leq \theta < \pi$ y $\rho_2 \neq \rho_1$ para $\pi \leq \theta < 2\pi$.

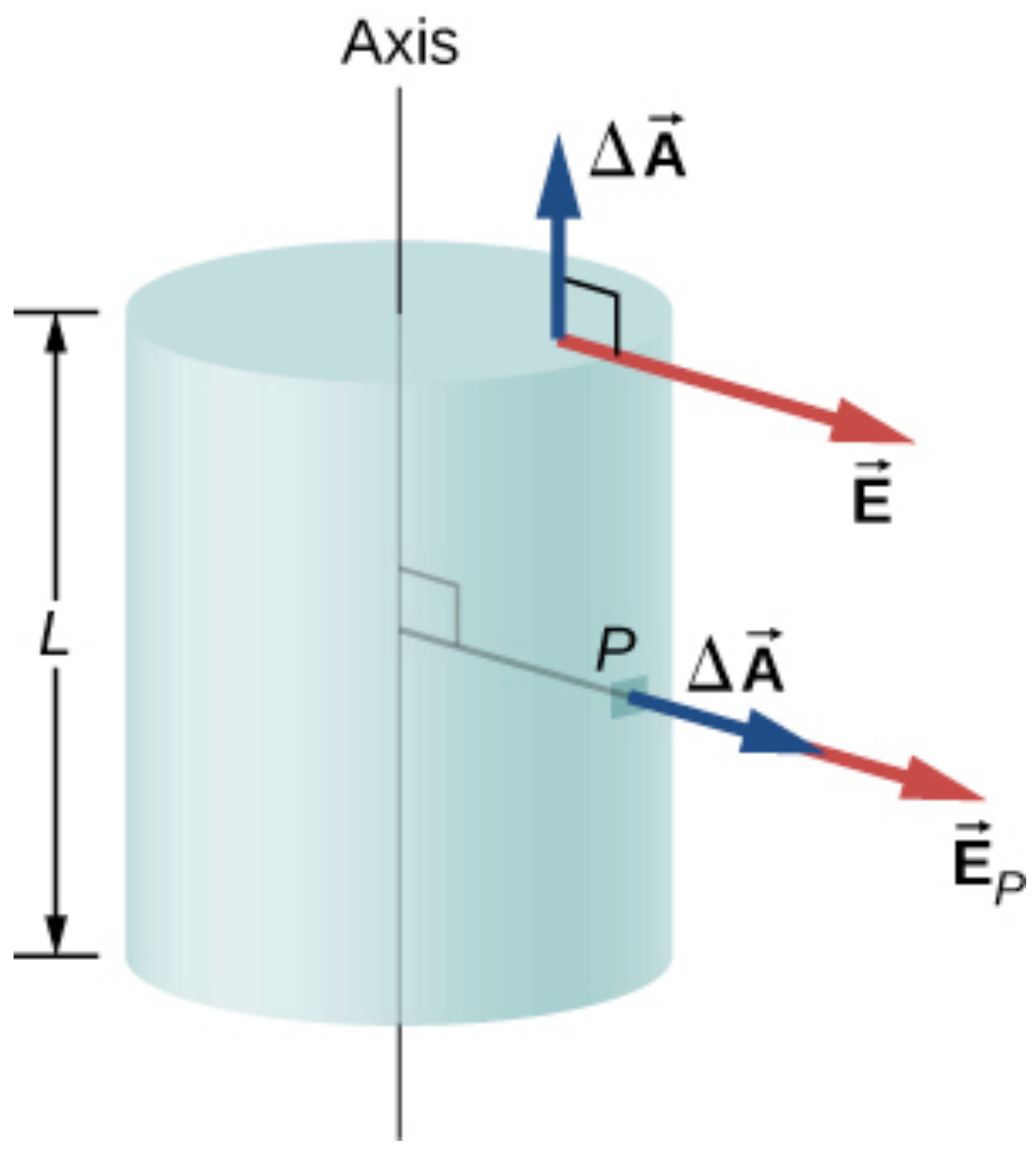
- En los sistemas reales, no tenemos cilindros infinitos; sin embargo, si el objeto cilíndrico es considerablemente más largo que el radio, entonces la aproximación de un cilindro infinito se vuelve útil.

Consecuencias de la simetría cilíndrica

- En todos los casos de simetría cilíndrica, el campo eléctrico Ep en cualquier punto P también debe mostrar simetría cilíndrica.

- $\vec{E}p = Ep(r)\hat{r}$, donde r es la distancia al eje y $\hat{r}$ es un vector unitario dirigido perpendicularmente fuera del eje





- Para aprovechar la dependencia direccional y funcional del campo eléctrico, elegimos una superficie gaussiana cerrada en forma de cilindro con el mismo eje que el de la distribución de carga.

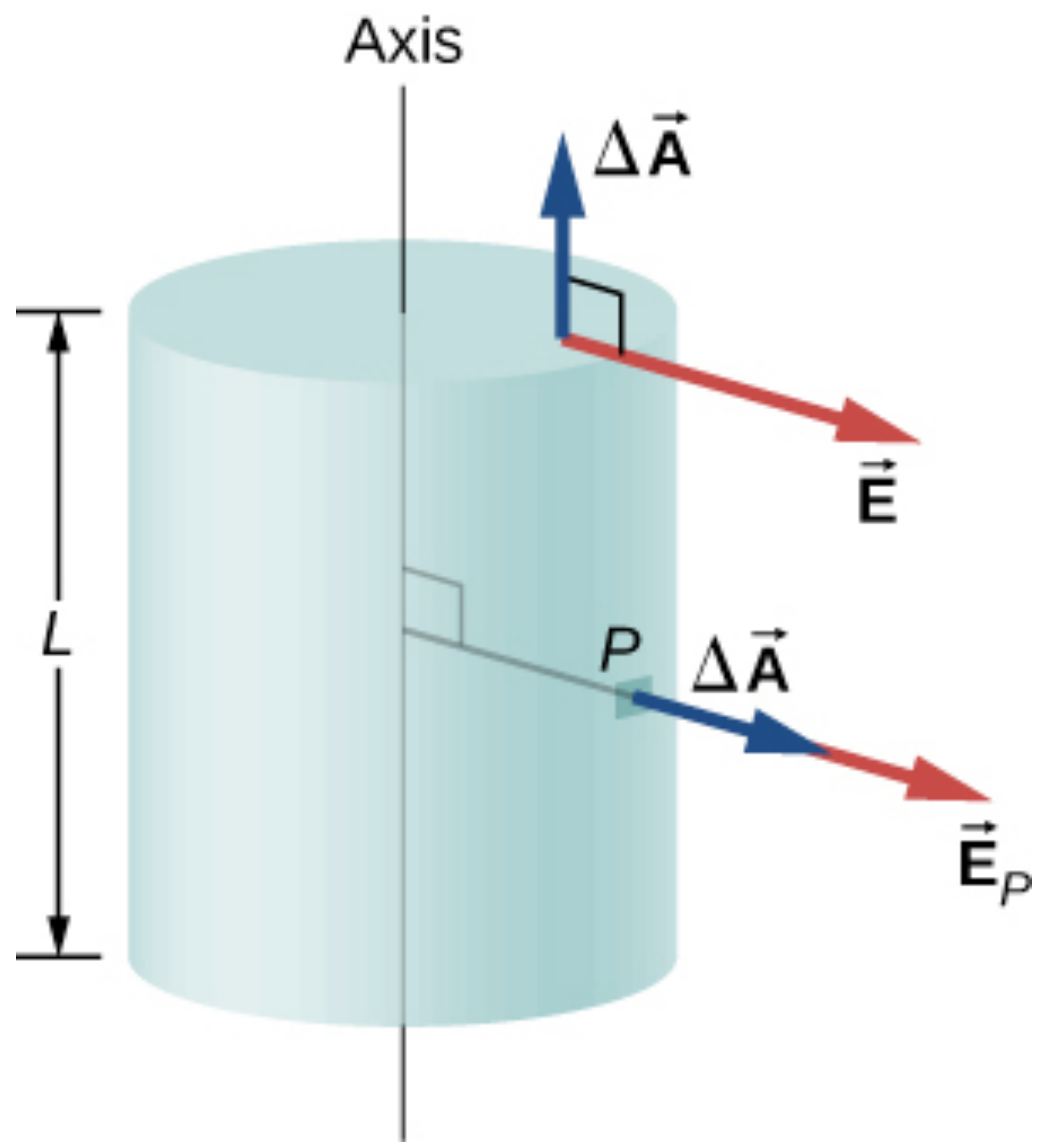
- El flujo a través de esta superficie de radio s y altura L es fácil de calcular si dividimos nuestra área en dos partes:
- (a) un flujo a través de los extremos planos y
- (b) un flujo a través de la superficie curva.

- El campo eléctrico es perpendicular a la parte cilíndrica y paralelo a los extremos planos de la superficie.
- El flujo que atraviesa la parte cilíndrica es

$$\int_S \vec{E} \cdot \hat{n} dA = E \int_S dA = E(2\pi r L)$$

- El flujo a través de las tapas de los extremos es cero porque $\vec{E} \cdot \hat{n} = 0$ allí.
- Por lo tanto, el flujo total es:

$$\Phi = \int_S \vec{E} \cdot \hat{n} dA = E(2\pi r L) + 0 + 0 = 2\pi r L E$$



- Según la ley de Gauss, el flujo debe ser igual a la cantidad de carga dentro del volumen encerrado por esta superficie, dividido por la permitividad del espacio libre. Cuando se hace el cálculo para un cilindro de longitud L, se encuentra que q_{enc} de la ley de Gauss es directamente proporcional a L.

$$\Phi = 2\pi r L E = \frac{q_{\text{enc}}}{\varepsilon_0} = \frac{\lambda_{\text{enc}} L}{\varepsilon_0}$$

- Por lo tanto, la ley de Gauss para cualquier distribución de carga con simetría cilíndrica arroja la siguiente magnitud del campo eléctrico a una distancia r del eje:

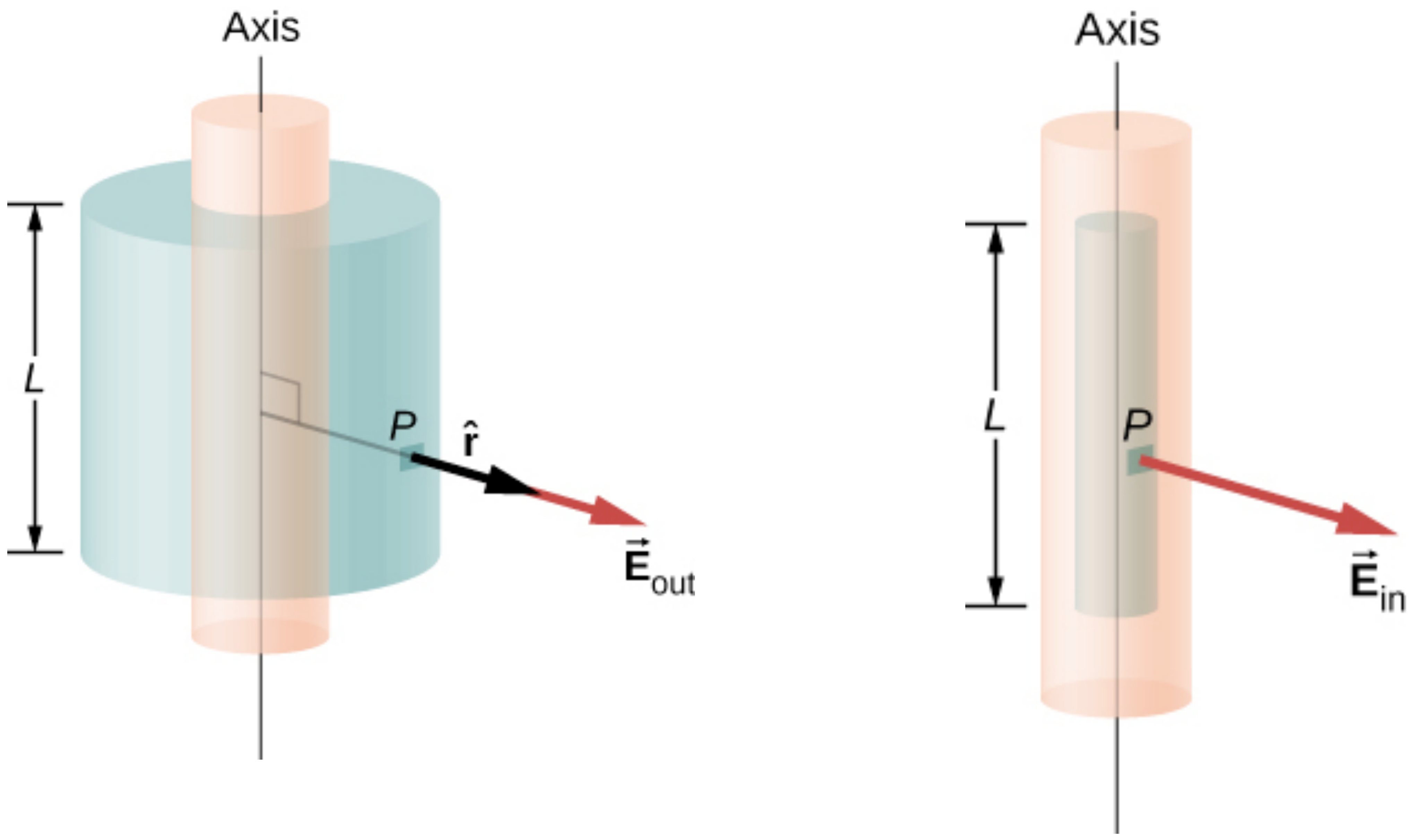
$$E(r) = \frac{\lambda_{\text{enc}}}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}$$

- Es fácil ver que el campo eléctrico para un alambre recto y delgado de carga lineal uniforme a una distancia d del alambre, donde d es mucho menor que la longitud del alambre es:

$$\vec{E} = \frac{\lambda_0}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{d} \hat{r}$$

Casco cilíndrico cargado uniformemente

- Una cáscara cilíndrica no conductora muy larga de radio R tiene una densidad de carga superficial uniforme σ_0.
- Encontrar el campo eléctrico
- (a) en un punto fuera de la cáscara
- (b) en un punto dentro de la cáscara.



$$\Phi = 2\pi r L E = \frac{q_{\text{enc}}}{\varepsilon_0} = \frac{\lambda_{\text{enc}} L}{\varepsilon_0}$$

(a) Para un punto fuera de la cáscara cilíndrica, la superficie gaussiana es la superficie de un cilindro de radio $r>R$ y longitud L.

La carga encerrada por el cilindro de Gauss es igual a la carga de la cáscara cilíndrica de longitud L

$$\lambda_{enc} = \frac{\sigma_0 2\pi R L}{L} = 2\pi R \sigma_0$$

$$\vec{E}_{\text{ext}} = \frac{2\pi R\sigma_0}{2\pi\epsilon_0}\frac{1}{r}\hat{r} = \frac{R\sigma_0}{\epsilon_0}\frac{1}{r}\hat{r}\ (r > R)$$

(b) Para un punto dentro de la cáscara cilíndrica, la superficie gaussiana es un cilindro cuyo radio r es menor que R. No existen cargas dentro de la superficie cerrada

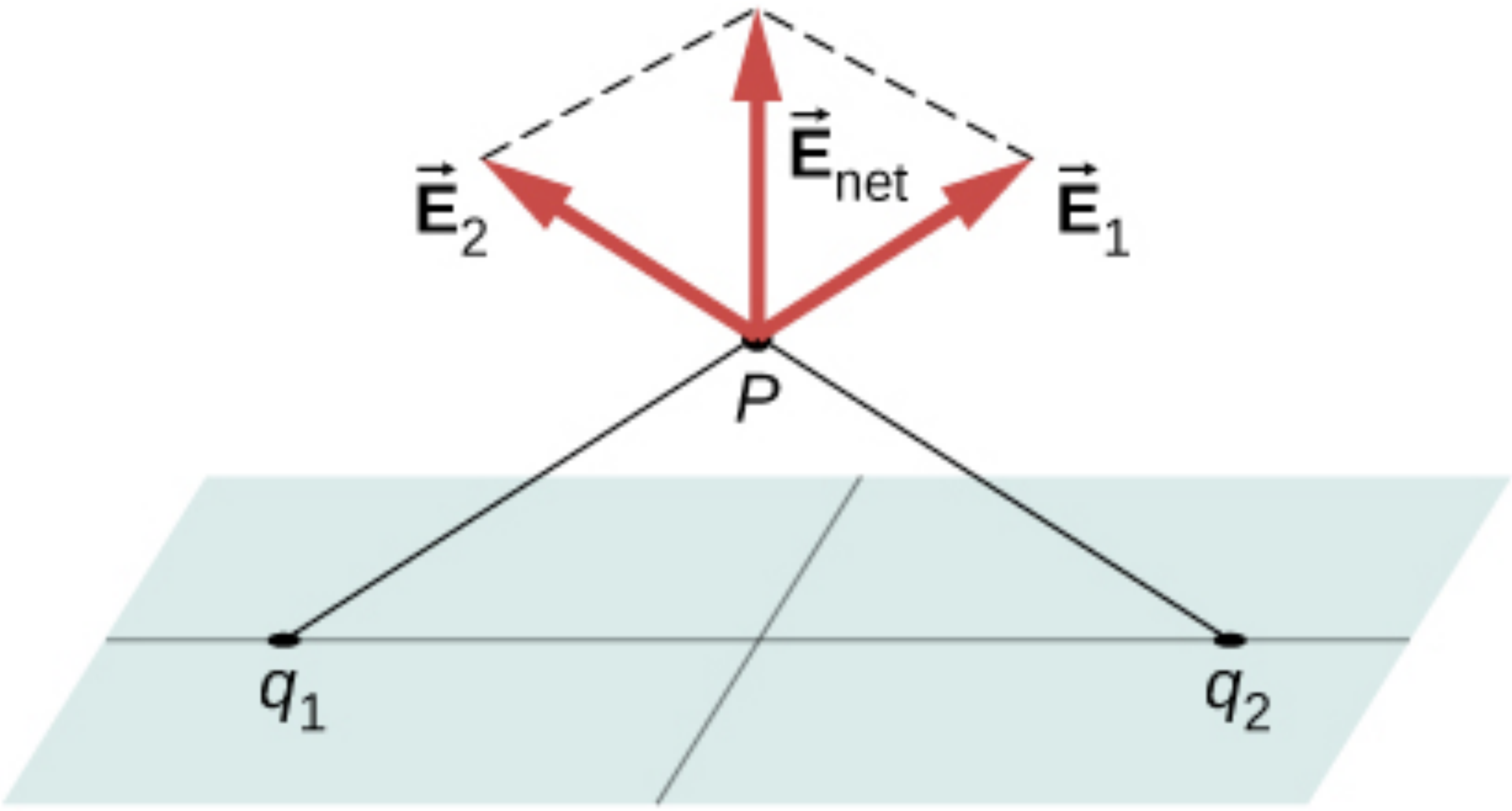
$$\lambda_{\text{enc}} = 0$$

$$E_{\text{int}} 2\pi r L = 0$$

$$E_{\text{int}} = 0\ (r < R).$$

Distribución de la carga con simetría plana

- La simetría plana de la densidad de carga se obtiene cuando las cargas se reparten uniformemente por una superficie plana.
- En la simetría plana, todos los puntos de un plano paralelo al plano de carga son idénticos con respecto a las cargas.

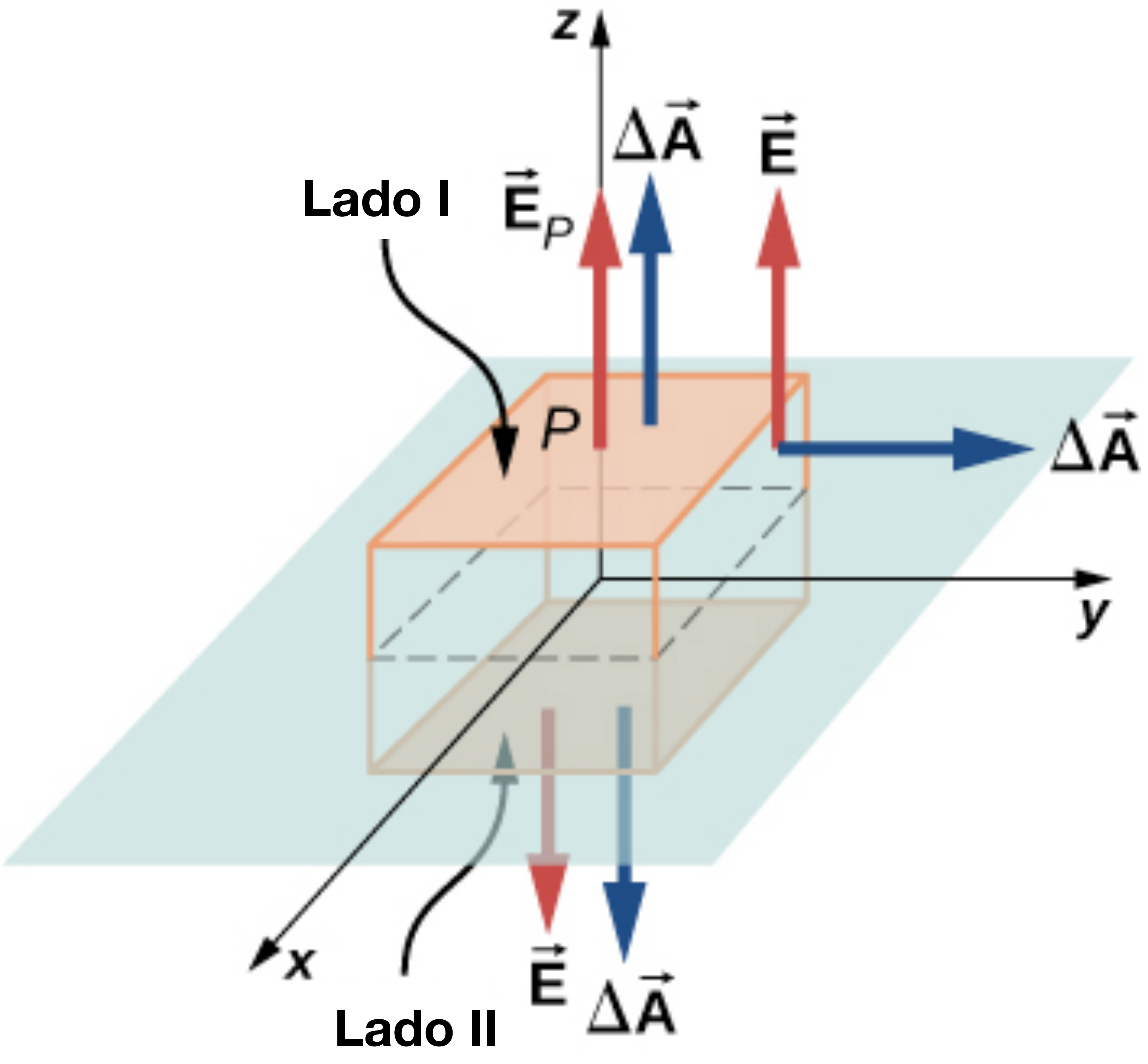


- Si el plano de la distribución de la carga es el plano *xy*, la densidad de carga es la misma en todas las coordenadas (x, y) del plano z=0, por simetría, el campo eléctrico en P no puede depender de las coordenadas x o y del punto P.
- El campo eléctrico en P sólo depende de la distancia al plano y tiene una dirección ya sea hacia el plano o lejos del plano. Es decir, el campo eléctrico en P sólo tiene una componente z distinta de cero.
- Cargas uniformes en el plano *xy* producen un campo $\vec{E} = E(z)\,\hat{z}$ donde z es la distancia al plano y $\hat{z}$ es el vector unitario normal al plano.
- En este sistema, $E(z) = E(-z)$, apuntan en direcciones opuestas.

- Una superficie gaussiana conveniente es una caja.

- Para mantener la simetría de la caja gaussiana con respecto al plano de las cargas, la tomamos sobre el plano de las cargas, de forma que una cara que contiene el punto de campo P se toma paralela al plano de las cargas.

- Los lados I y II de la superficie gaussiana son las únicas superficies que dan lugar a un flujo no nulo porque el campo eléctrico y los vectores de área de las otras caras son perpendiculares entre sí.



- El flujo del campo eléctrico a través de la caja:

$$\Phi = \int_S \vec{E}_p \cdot \hat{n} dA = E_p A + E_p A + 0 + 0 + 0 + 0 = 2E_p A$$

- La cargas dentro del volumen encerrado residen en un área A del plano xy:

$$q_{\text{enc}} = \sigma_0 A$$

- Por la ley de Gauss:

$$2E_p A = \sigma_0 A$$

$$\vec{E}_p = \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0}\hat{n}$$

- La dirección del campo dependerá del signo de la carga en el plano y del lado del plano donde se encuentra el punto de observación P.
- Por encima del plano, $\hat{n}$ =+$\hat{z}$, mientras que por debajo del plano, $\hat{n}$ =-$\hat{z}$.

Forma diferencial de la ley de Gauss

- Introduciremos una propiedad del campo eléctrico, llamada "*divergencia*", que tiene como característica el hecho de que podemos relacionar la divergencia con las cargas en el mismo lugar donde se encuentran.

- Consideremos una superficie gaussiana muy pequeña alrededor de un lugar en el espacio, que encierra un volumen muy pequeño ΔV.

- En esta región hay una densidad de carga ϱ medida en culombios por metro cúbico. La carga dentro del pequeño volumen es $\varrho\Delta V$.

- Por la ley de Gauss, sabemos que el flujo neto en la superficie del pequeño volumen es:

$$\oint \vec{E} \cdot \hat{n} dA = \frac{q_{\text{enc}}}{\varepsilon_0} = \frac{\rho \Delta V}{\varepsilon_0}$$

$$\frac{\oint \vec{E} \cdot \hat{n} dA}{\Delta V} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\operatorname{div}(\vec{E}) \equiv \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\oint \vec{E} \cdot \hat{n} dA}{\Delta V}$$

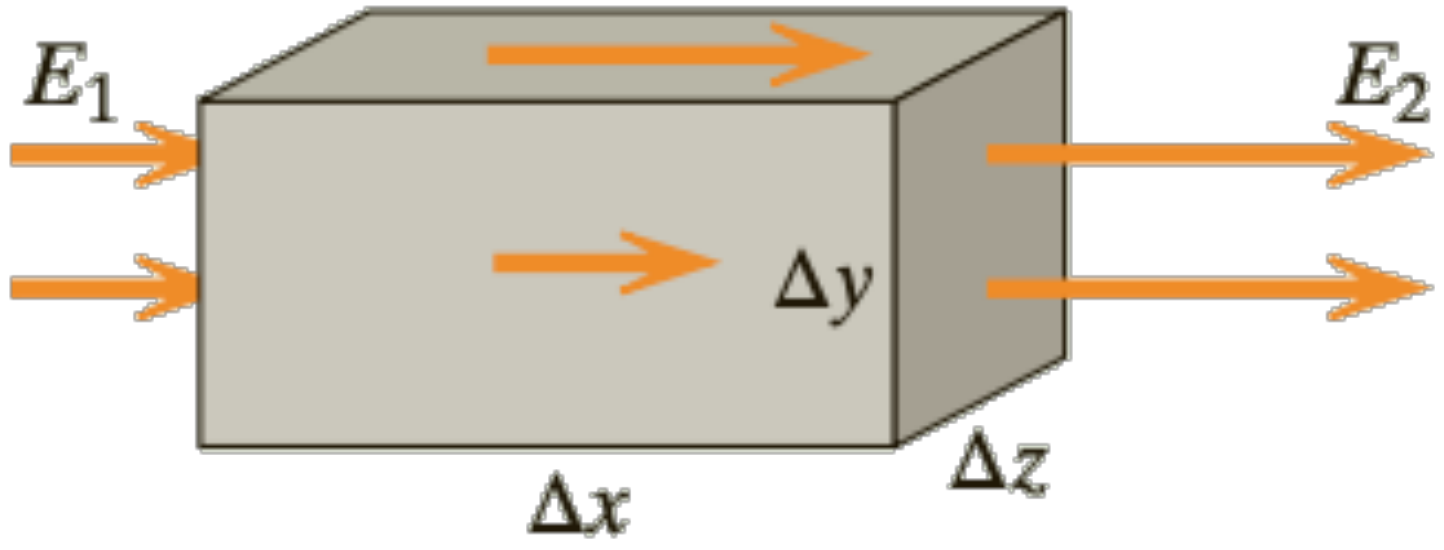
$$\operatorname{div}(\vec{E}) = \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

- Si hay carga positiva en el interior de un ΔV, las direcciones del campo eléctrico "divergen", el flujo eléctrico neto es positivo y div(E) es positiva.

- Si hay carga negativa en el interior de un ΔV, las direcciones del campo eléctrico convergen, el flujo eléctrico neto es negativo y div(E) es negativa.

- Si no hay carga dentro del volumen, el campo eléctrico fluye a través del volumen en este lugar sin divergencia ni convergencia neta, el flujo eléctrico neto es cero, y div(E) es cero.

- Consideremos la pequeña superficie en forma de caja.
- En esta diminuta región el campo eléctrico está en la dirección x, pero varía en magnitud.
- Usemos la definición de divergencia para calcular la divergencia en un lugar dentro de la superficie, en el límite en que el volumen tiende a cero:



$$\mathrm{div}(\vec{E}) \equiv \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\oint \vec{E} \cdot \hat{n} dA}{\Delta V} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{(E_2 - E_1)\Delta y \Delta z}{\Delta x \Delta y \Delta z}$$

$$\mathrm{div}(\vec{E}) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(E_2 - E_1)}{\Delta x} = \frac{dE}{dx}$$

- De manera más precisa, la divergencia en este caso es igual a la "derivada parcial" de Ex con respecto a x, donde la notación especial de derivada parcial indica que mantenemos y y z constantes mientras tomamos la derivada:

$$\mathrm{div}(\vec{E}) = \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x}$$

Forma diferencial de la ley de Gauss:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Problemas propuestos

1. Sobre un disco de plástico de radio $R = 10$ cm se ha distribuido una carga eléctrica por unidad de superficie proporcional a la distancia al centro, siendo la constante de proporcionalidad $c = 2\mu$ C/m^3. Determine la carga total del disco.

   Sol: $q = 4{,}2$ nC.

2. Determine el flujo del campo eléctrico creado por un cubo de lado L, cuya densidad de carga es proporcional a la distancia a una cualquiera de sus caras, a través de una esfera también de radio L, siendo el centro de la esfera coincidente con el centro del cubo.

   Sol: $\Phi_E = \dfrac{aL^4}{2\varepsilon_0}$

3. Un cilindro muy largo, de radio R, en cuyo volumen se ha distribuido carga eléctrica con densidad volumétrica $\rho = \alpha r$, siendo r la distancia de cualquier punto del cilindro a su eje y α una constante. Determine el campo eléctrico en el punto P situado a una distancia $2R$ del cilindro y en un punto P' dentro del cilindro.

   Sol: $\mathbf{E} = \begin{cases} \dfrac{\alpha r^2}{3\varepsilon_0}\hat{\mathbf{r}} & \text{si} \quad r < R \\[2ex] \dfrac{\alpha R^2}{6\varepsilon_0}\hat{\mathbf{r}} & \text{si} \quad r = 2R \end{cases}$