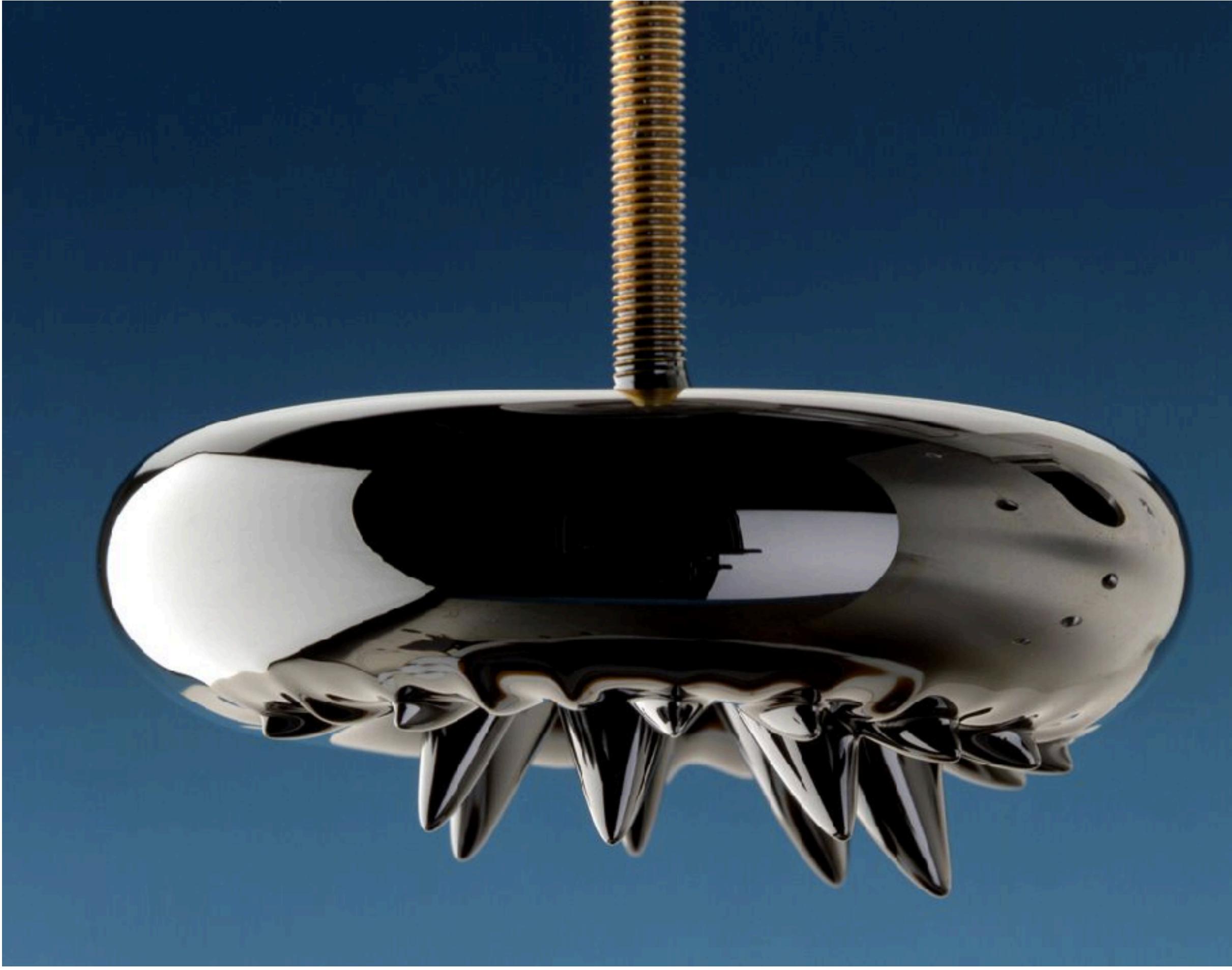


Módulo 4: Campos magnéticos



X. Fuentes de campos magnéticos

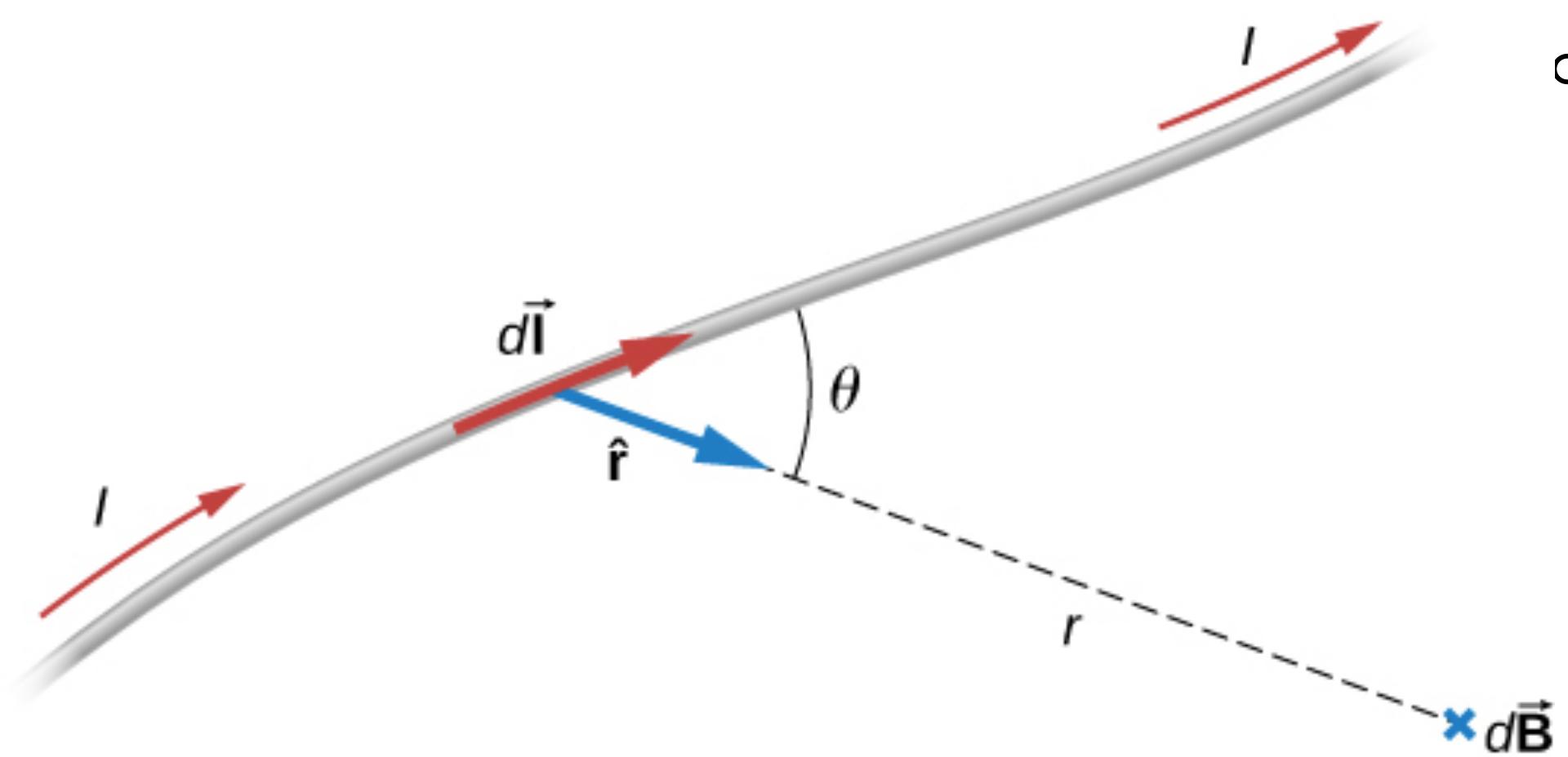
1. Ley de Biot-Savart
2. Espiras y Solenoídes
3. Fuerza entre alambres con corriente
4. Ley de Ampere
5. Magnetización



1. Ley de Biot-Savart

- Sabemos que la masa produce un campo gravitatorio y que también interactúa con ese campo.
- La carga produce un campo eléctrico y también interactúa con él.
- Dado que la carga en movimiento (la corriente) interactúa con un campo magnético, cabría esperar que también creara ese campo

- La ecuación utilizada para calcular el campo magnético producido por una corriente se conoce como ley de Biot-Savart.
- Es una ley empírica que debe su nombre a dos científicos que investigaron la interacción entre un hilo recto conductor de corriente y un imán permanente.
- Esta ley nos permite calcular la magnitud y dirección del campo magnético producido por una corriente en un alambre.
- La ley de Biot-Savart establece que en cualquier punto P , el campo magnético $d\vec{B}$ debido a un elemento $d\vec{l}$ de un hilo conductor de corriente viene dada por



$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\vec{l} \times \hat{r}}{r^2} \Rightarrow |d\vec{B}| = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl \sin \theta}{r^2}$$

Permeabilidad magnética del vacío: $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m/A}$

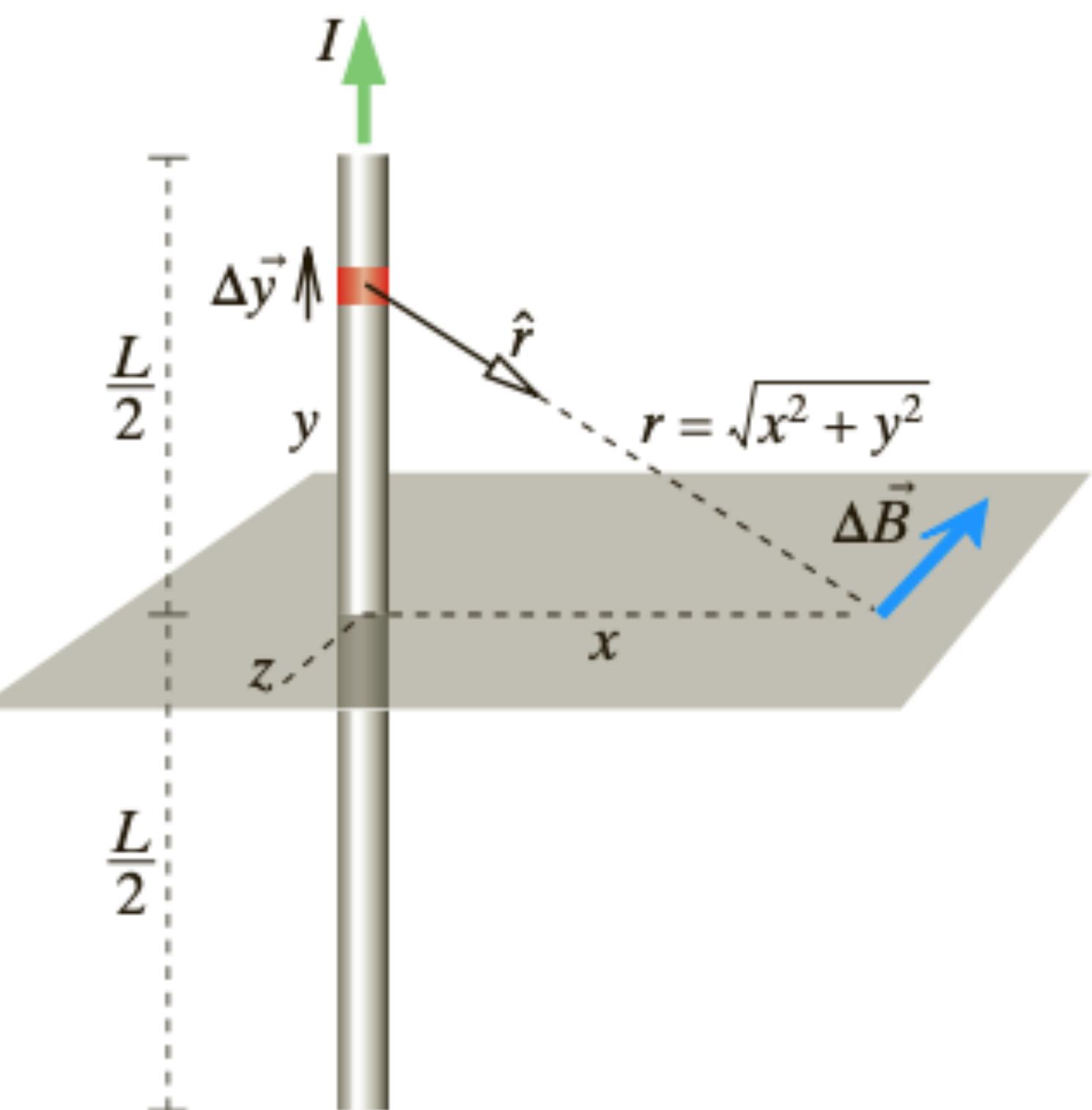
$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\text{alambre}} \frac{Id\vec{l} \times \hat{r}}{r^2}.$$

Ejemplo

- Se muestra una sección de un alambre recto de longitud finita L que transporta una corriente I ¿Cuál es el campo magnético en un punto P , situado a una distancia x del alambre?

Para aplicar la ley de Biot-Savart para hallar el campo magnético utilizaremos el mismo enfoque de cuatro pasos que usamos para hallar el campo eléctrico de cargas distribuidas

- Dividir la distribución de corriente en trozos y dibujar el $\Delta\mathbf{B}$ para un trozo representativo.
- Escribir una expresión para el campo magnético debido a un trozo.
- Sumar las contribuciones de todos los trozos.
- Comprobar el resultado.



Ejemplo

- Se muestra una sección de un alambre recto de longitud infinita que transporta una corriente I . ¿Cuál es el campo magnético en un punto P , situado a una distancia x del alambre?

$$\vec{r} = \langle x, 0, 0 \rangle - \langle 0, y, 0 \rangle = \langle x, -y, 0 \rangle$$

$$|\vec{r}| = [x^2 + (-y)^2]^{1/2} = [x^2 + y^2]^{1/2}$$

$$\hat{r} = \frac{\vec{r}}{r} = \frac{\langle x, -y, 0 \rangle}{[x^2 + y^2]^{1/2}}$$

$$\Delta \vec{l} = \Delta y \langle 0, 1, 0 \rangle$$

$$\Delta \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \Delta \vec{l} \times \hat{r}}{(x^2 + y^2)} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \Delta y \langle 0, 1, 0 \rangle}{(x^2 + y^2)} \times \frac{\langle x, -y, 0 \rangle}{[x^2 + y^2]^{1/2}}$$

$$\langle 0, 1, 0 \rangle \times \langle x, -y, 0 \rangle = \langle 0, 0, -x \rangle$$

$$\Delta \vec{B} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Ix \Delta y}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \langle 0, 0, 1 \rangle$$

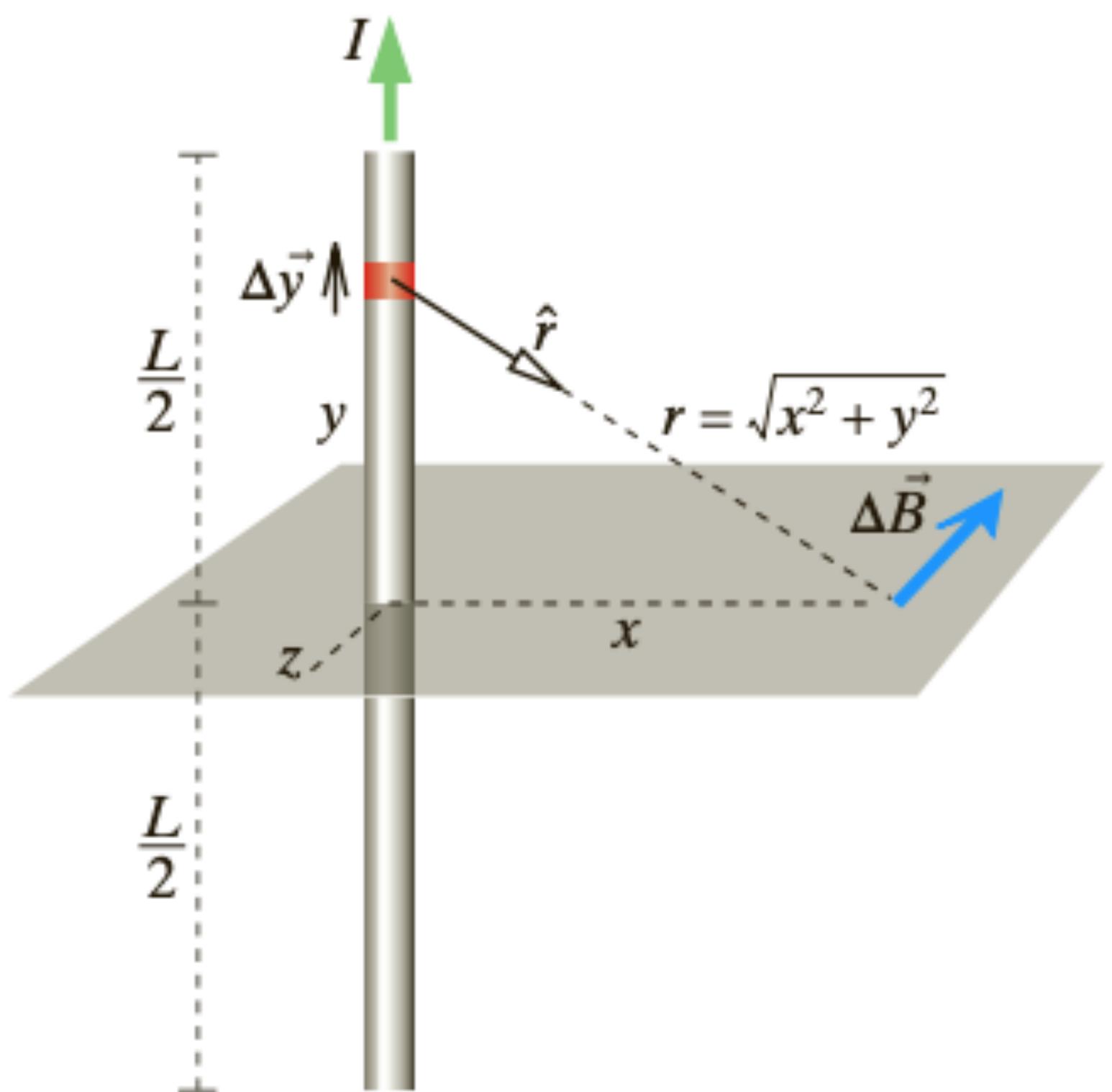
$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} I x \int_{y=-L/2}^{y=+L/2} \frac{dy}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

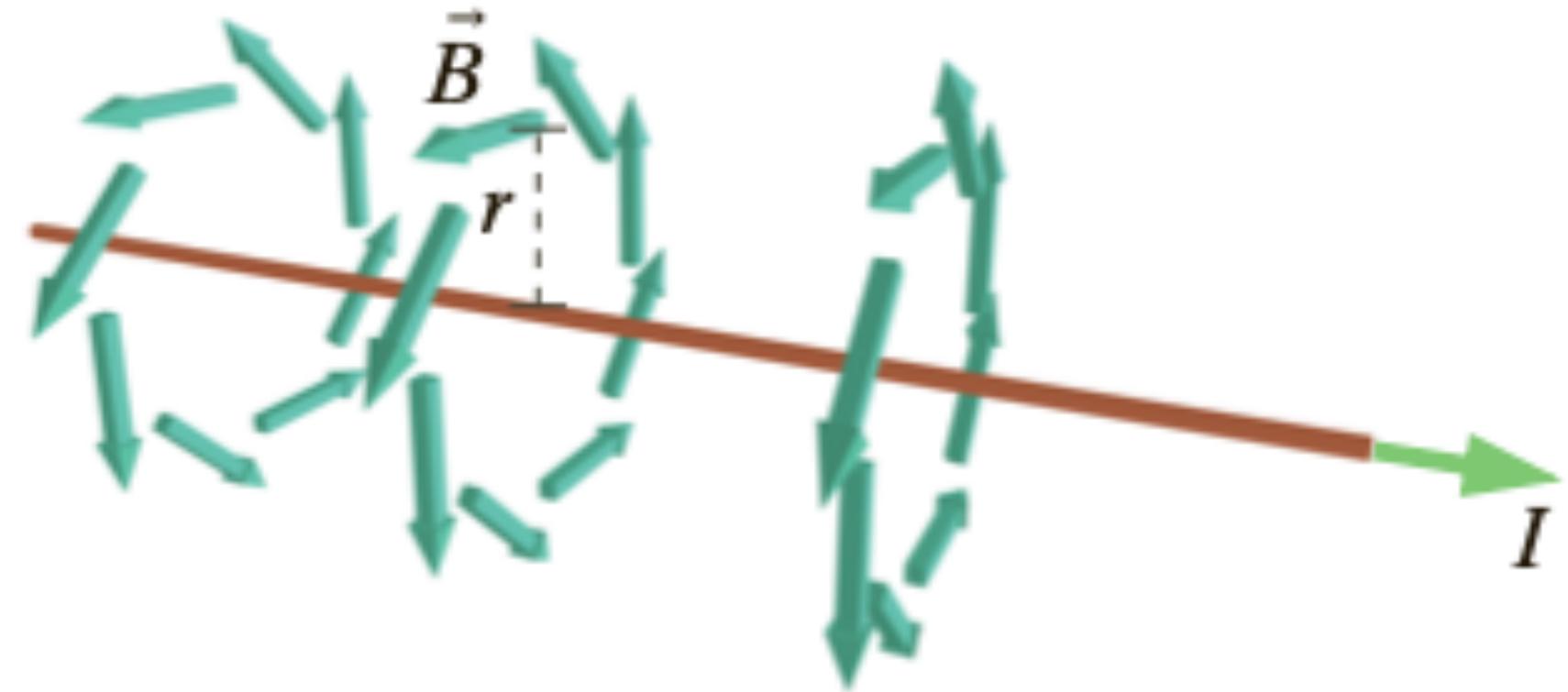
$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} I x \left[\frac{y}{x^2 \sqrt{x^2 + y^2}} \right]_{y=-L/2}^{y=+L/2}$$

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} I x \left[\frac{L/2}{x^2 \sqrt{x^2 + (L/2)^2}} - \frac{-L/2}{x^2 \sqrt{x^2 + (L/2)^2}} \right]$$

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{LI}{x \sqrt{x^2 + (L/2)^2}}$$

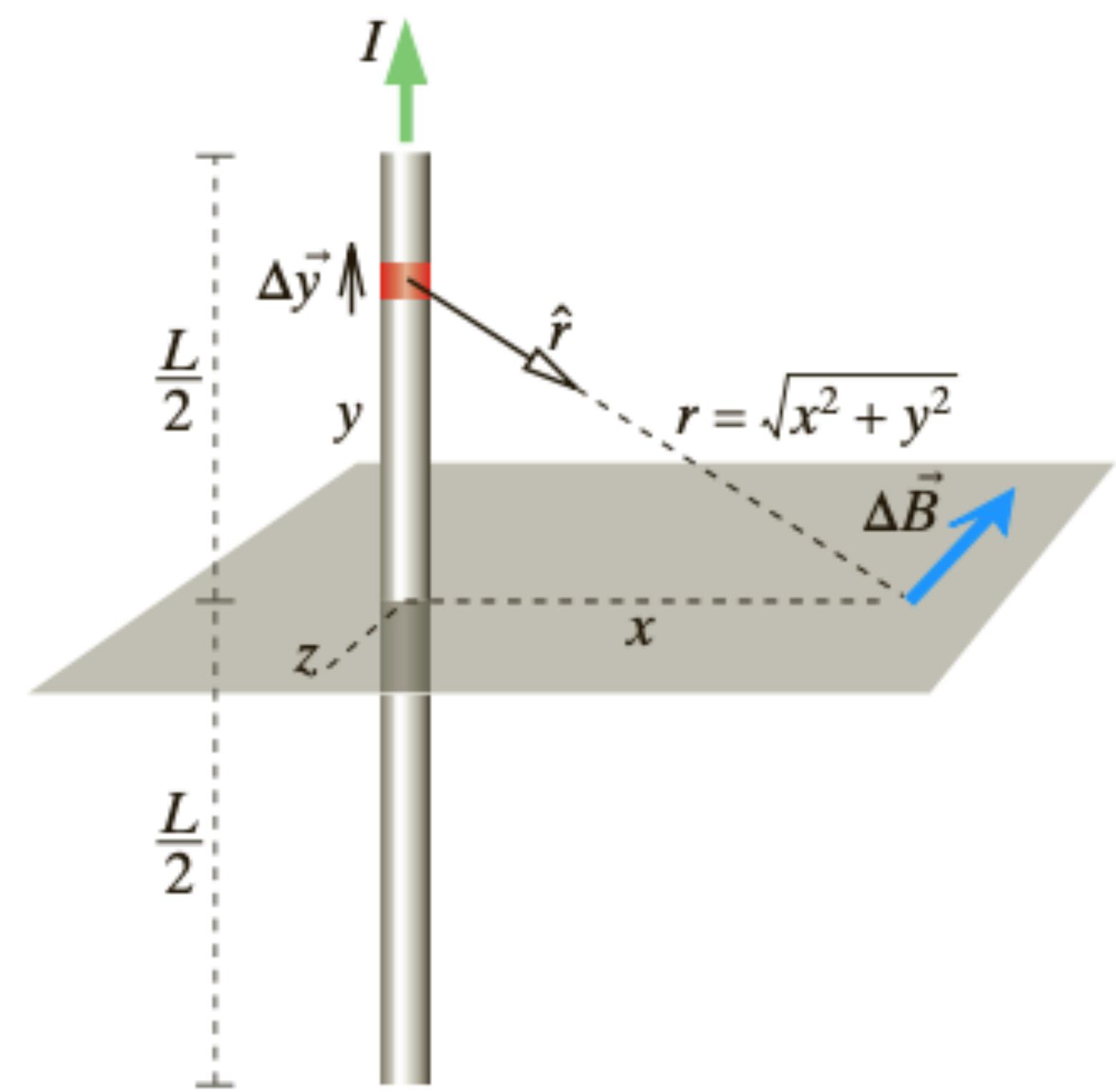
$$B \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I}{x} \quad \text{si } L \gg x$$





$$B_{\text{hilo}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{LI}{r\sqrt{r^2 + (L/2)^2}}$$

$$B_{\text{hilo}} \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I}{r} \quad \text{si } L \gg r$$



Históricamente, el resultado para un hilo recto muy largo lo obtuvieron por primera vez los físicos franceses Biot y Savart.

Sus nombres se han asociado al principio más fundamental (la ley Biot-Savart) que conduce a este resultado.

Ejemplo

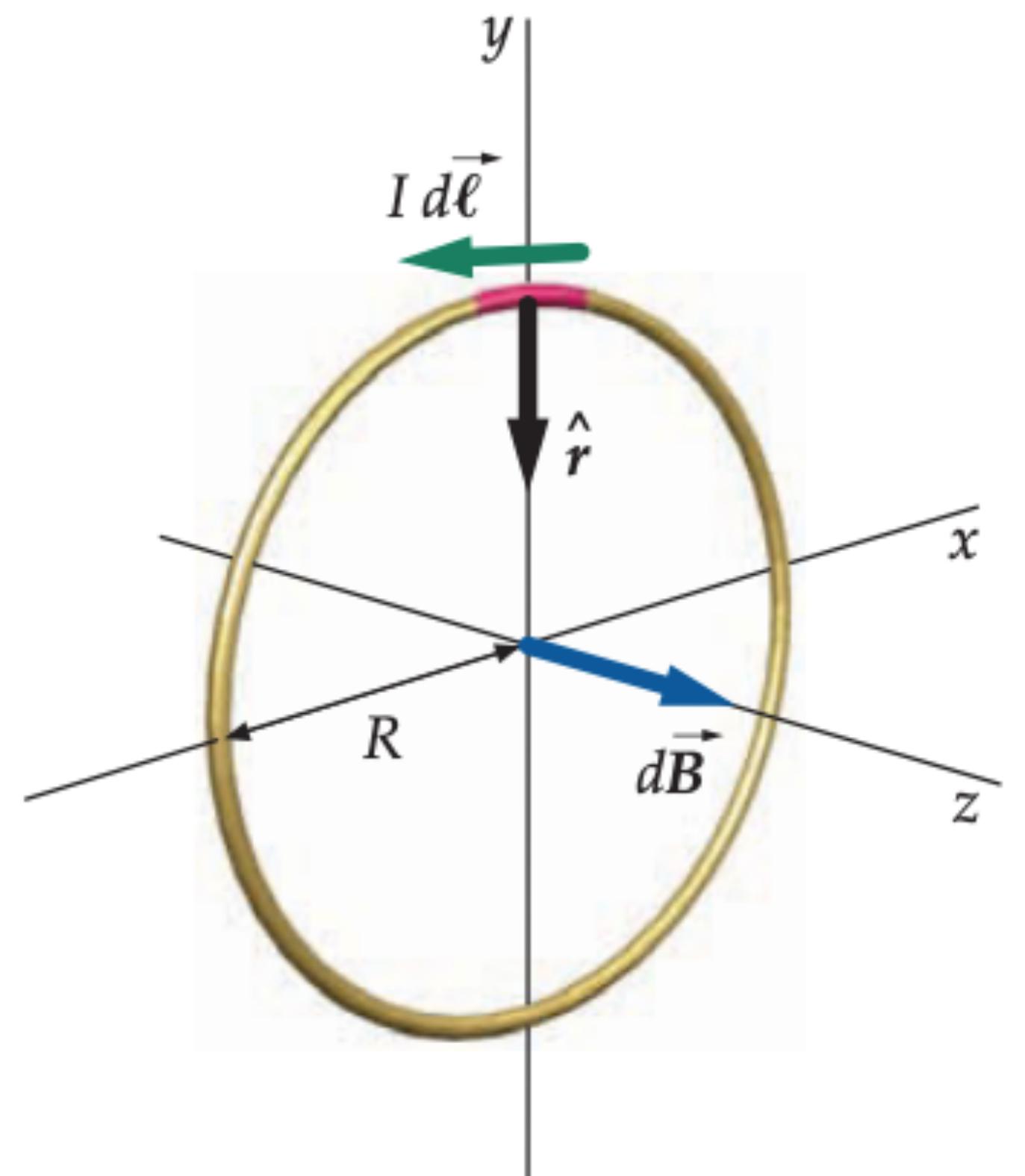
- En la figura tenemos un elemento de corriente Idl de una espira de corriente de radio R y el vector unitario \hat{r} que se dirige desde el elemento al centro de la espira.
- El campo magnético en el centro de la espira debido a este elemento está dirigido a lo largo del eje de la espira, y su magnitud es

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl \sin \theta}{R^2}$$

- Como I y R son iguales para todos los elementos, resulta

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{R^2} \oint dl$$

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{R^2} 2\pi R = \frac{\mu_0 I}{2R}$$



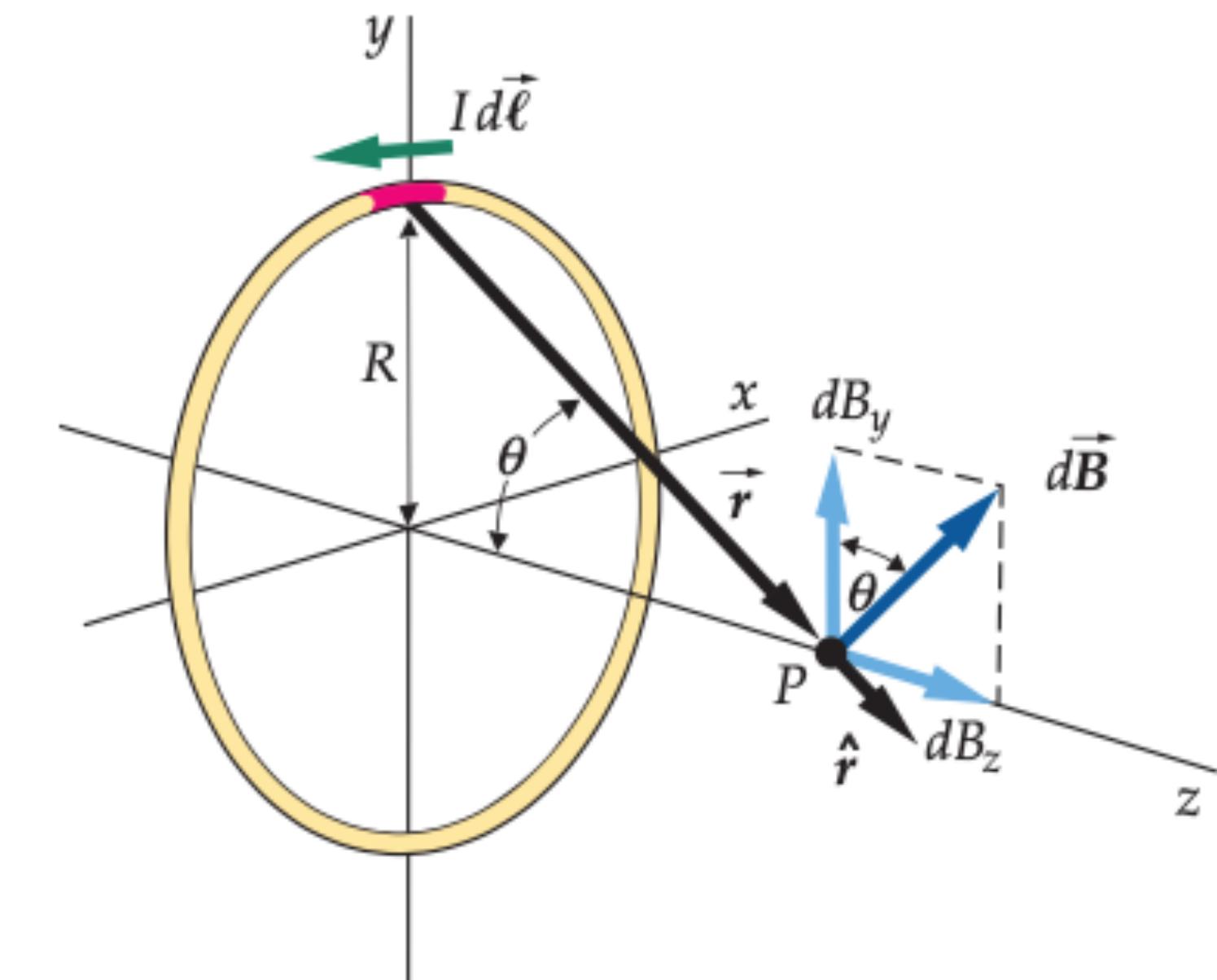
PROBLEMA NUMÉRICO

Encuentre la corriente en una espira circular de radio 8.0 cm que producirá un campo magnético de 0.20 mT en el centro de la espira.

Ejemplo

- Se muestra la geometría para calcular el campo magnético en un punto del eje de una espira circular a una distancia z del centro de la espira.
- En el elemento de corriente en la parte superior de la espira (como en cualquier parte de la espira), $I d\ell$ es tangente a la espira y perpendicular al vector \hat{r} desde el elemento de corriente al punto P .

$$|d\vec{B}| = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I |d\hat{\ell} \times \hat{r}|}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\ell}{(z^2 + R^2)}$$



$$r^2 = z^2 + R^2$$

$$|d\hat{\ell} \times \hat{r}| = d\ell$$

$$dB_z = dB \sin \theta = \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\ell}{(z^2 + R^2)} \right) \left(\frac{R}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{IRd\ell}{(z^2 + R^2)^{3/2}}$$

$$B_z = \oint dB_z = \oint \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{IR}{(z^2 + R^2)^{3/2}} d\ell = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{IR}{(z^2 + R^2)^{3/2}} \oint d\ell = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{IR}{(z^2 + R^2)^{3/2}} 2\pi R = \frac{\mu_0}{2} \frac{R^2 I}{(z^2 + R^2)^{3/2}}$$

PROBLEMA

Demuestre que el resultado obtenido aquí se reduce al del ejemplo anterior en el centro de la espira

- Hemos obtenido el campo en el punto P

$$B_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I2\pi R^2}{(z^2 + R^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0}{2} \frac{R^2 I}{(z^2 + R^2)^{3/2}}$$

- Lejos de la espira

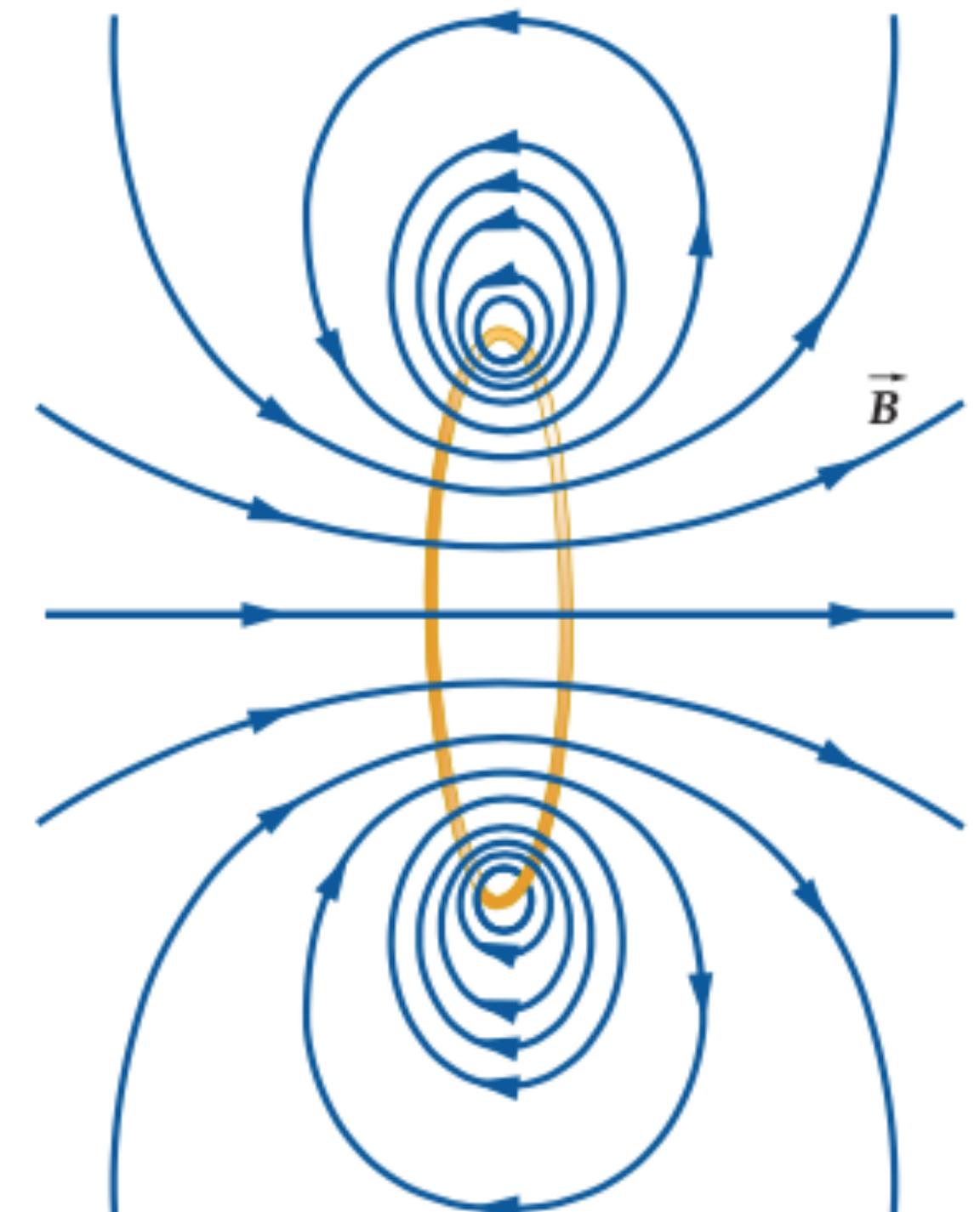
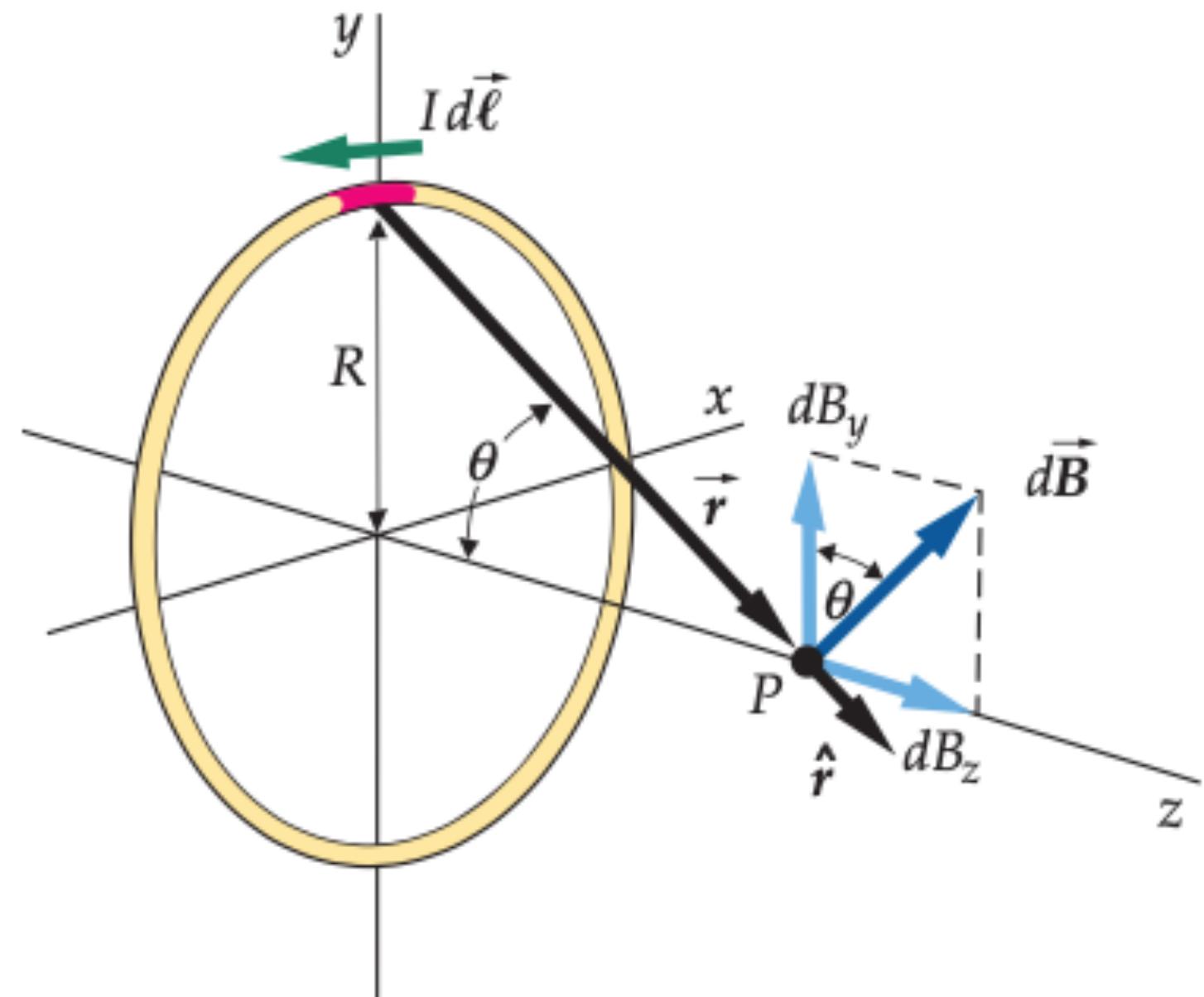
$$B_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I2\pi R^2}{|z|^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\mu}{|z|^3}$$

- Donde $\mu = I\pi R^2$

- Recordemos que para un dipolo eléctrico

$$E_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p}{|z|^3}$$

Una espira de corriente se comporta como un dipolo magnético porque experimenta un torque cuando se coloca en un campo magnético externo y también produce un campo magnético dipolar en puntos de campo alejados de la espira de corriente.



Ejemplo

- Se muestra la geometría para calcular el campo magnético en un punto del eje de una espira circular a una distancia z del centro de la espira.
- En el elemento de corriente en la parte superior de la espira (como en cualquier parte de la espira), $I dl$ es tangente a la espira y perpendicular al vector \vec{r} desde el elemento de corriente al punto P .
- Se puede simplificar el problema considerablemente si observamos la simetría de la situación. Debido a la simetría circular del anillo, los valores ΔB y ΔB_y aportados por una pieza se cancelarán con las contribuciones de pieza situada al otro lado de la espira.

$$\vec{r} = \langle 0, 0, z \rangle - \langle 0, R, 0 \rangle = \langle 0, -R, z \rangle$$

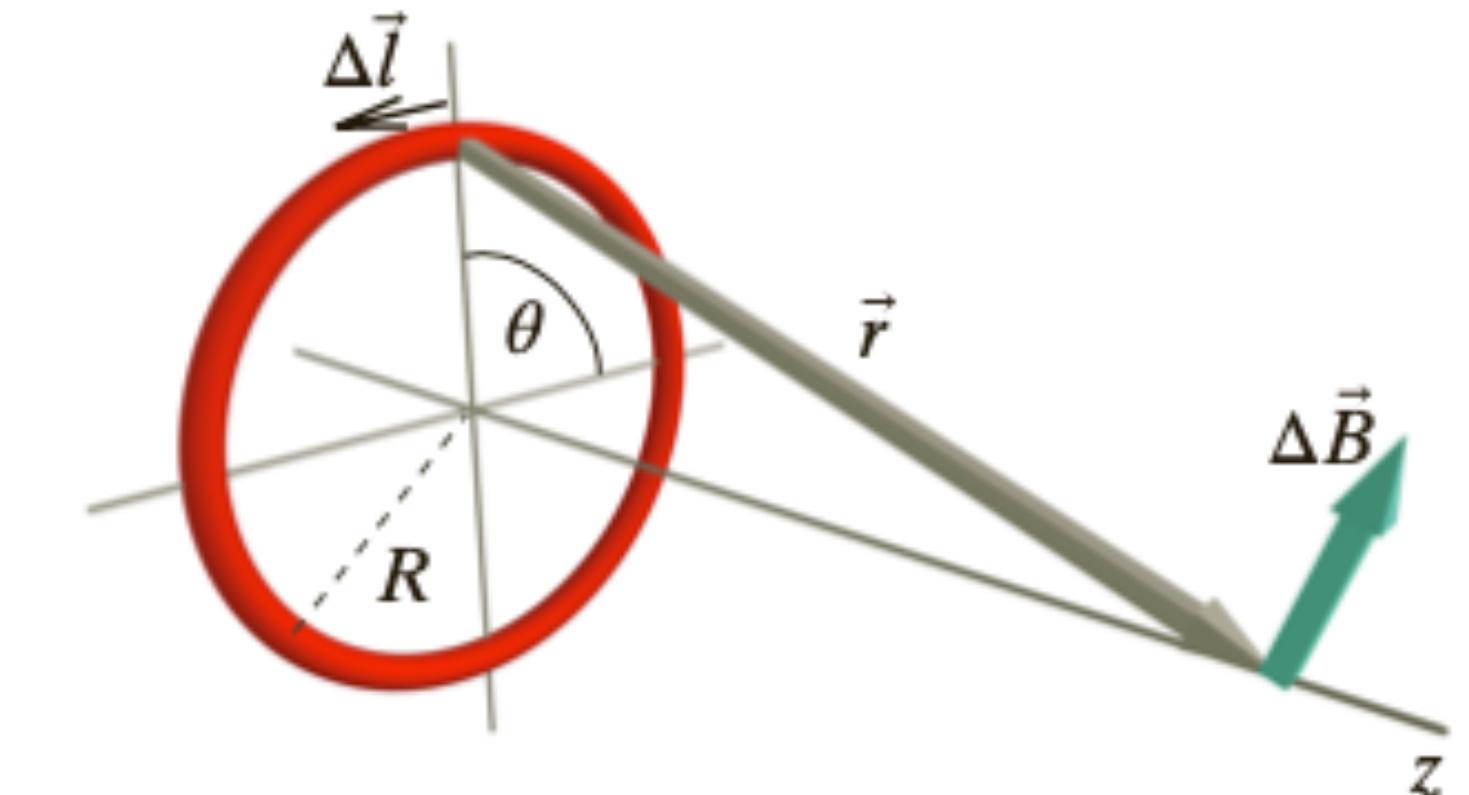
$$|\vec{r}| = [R^2 + z^2]^{1/2}$$

$$\hat{r} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = \frac{\langle 0, -R, z \rangle}{[R^2 + z^2]^{1/2}}$$

$$\Delta \vec{l} = \langle -R\Delta\theta, 0, 0 \rangle$$

$$\Delta \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \Delta \vec{l} \times \hat{r}}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{\langle -R\Delta\theta, 0, 0 \rangle \times \langle 0, -R, z \rangle}{[R^2 + z^2]^{3/2}}$$

$$\langle -R\Delta\theta, 0, 0 \rangle \times \langle 0, -R, z \rangle = \langle 0, zR\Delta\theta, R^2\Delta\theta \rangle$$



$$\Delta B_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{IR^2\Delta\theta}{[R^2 + z^2]^{3/2}}$$

$$B_z = \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{IR^2 d\theta}{(z^2 + R^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{IR^2}{(z^2 + R^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} d\theta$$

$$B_{\text{espira}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\pi R^2 I}{(z^2 + R^2)^{3/2}}$$

Ejemplo

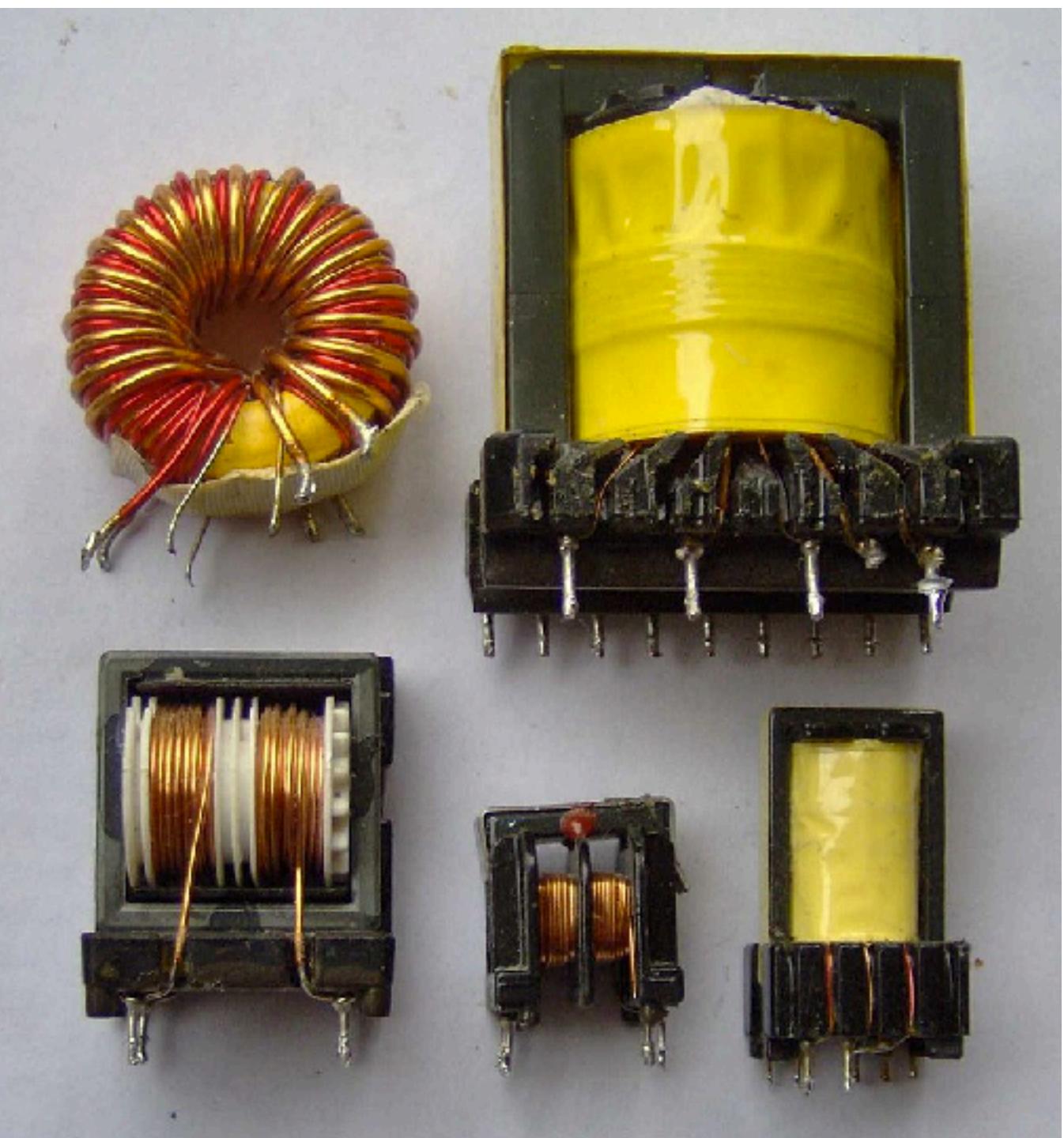
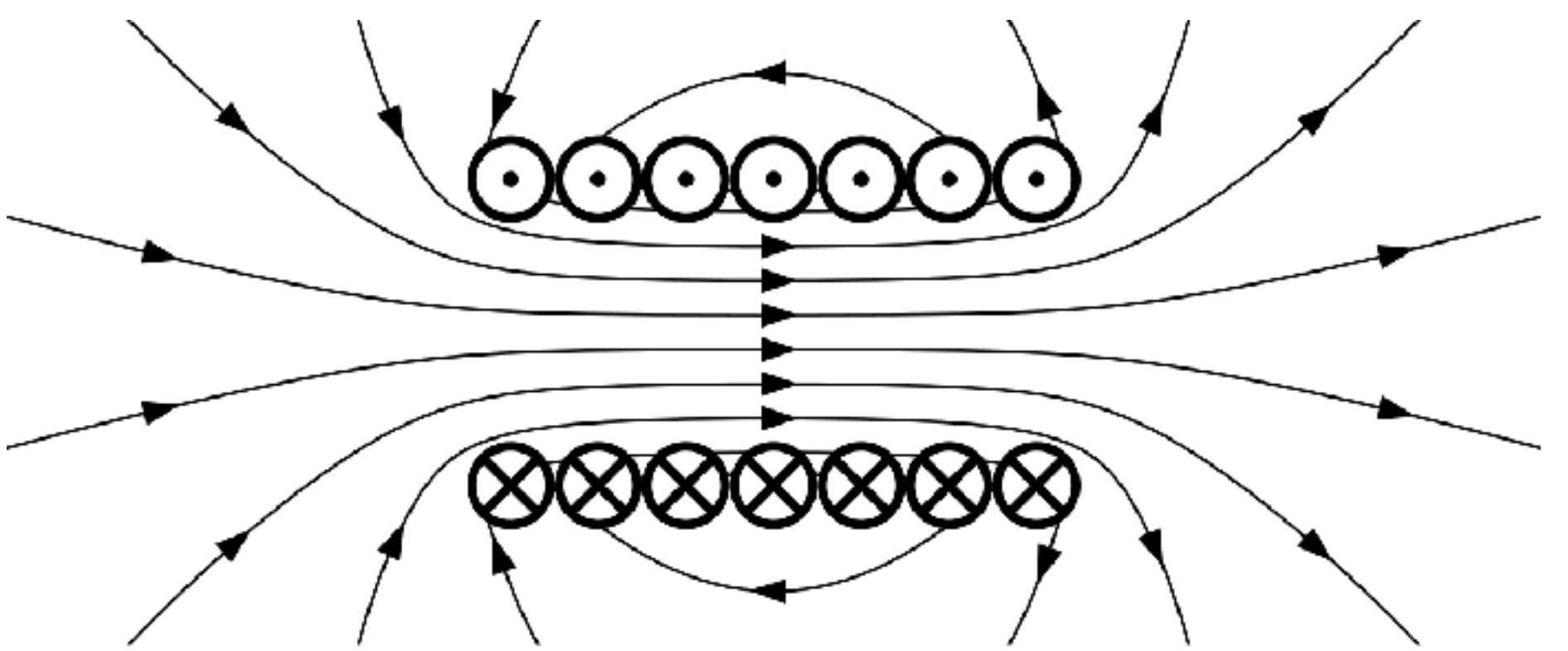
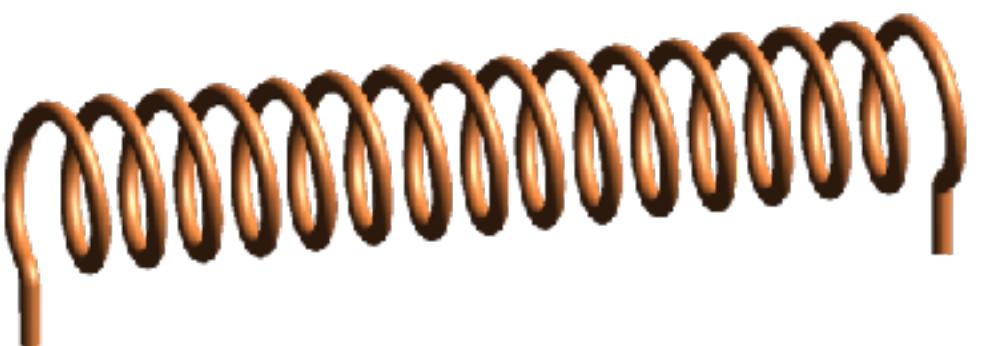
- ¿Cómo es el campo magnético B en el eje de una bobina?
 - Una bobina circular tiene un radio igual a 5,00 cm, tiene 12 espiras, se encuentra en el plano $z=0$ y está centrada en el origen. Lleva una corriente de 4.00 A, y el momento magnético de la bobina está en la dirección z .
 - Encontraremos el campo magnético en el eje z en: (a) $z=0$, (b) $z=15.0$ cm, y (c) $z=3.00$ m.
-
- (a) $B = \frac{\mu_0 I}{2R} \Rightarrow B_z = \frac{\mu_0 NI}{2R} = (4\pi \times 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m/A}) \frac{(12)(4,00 \text{ A})}{2(0,0500 \text{ m})} = 6,03 \times 10^{-4} \text{ T}$
 - (b) $B_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\pi R^2 NI}{(z^2 + R^2)^{3/2}} = (10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m/A}) \frac{2\pi(0,0500 \text{ m})^2(12)(4,00 \text{ A})}{[(0.1500 \text{ m})^2 + (0,0500 \text{ m})^2]^{3/2}} = 1,91 \times 10^{-5} \text{ T}$
 - (c) $B_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\pi R^2 NI}{(z^2 + R^2)^{3/2}} = (10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m/A}) \frac{2\pi(0,0500 \text{ m})^2(12)(4,00 \text{ A})}{[(3,00 \text{ m})^2 + (0,0500 \text{ m})^2]^{3/2}} = 2,79 \times 10^{-9} \text{ T}$

PROBLEMA

Encuentre el campo magnético en el eje z en $z=3.00$ m pero usando la expresión: $B_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I2\pi R^2}{|z|^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\mu}{|z|^3}$

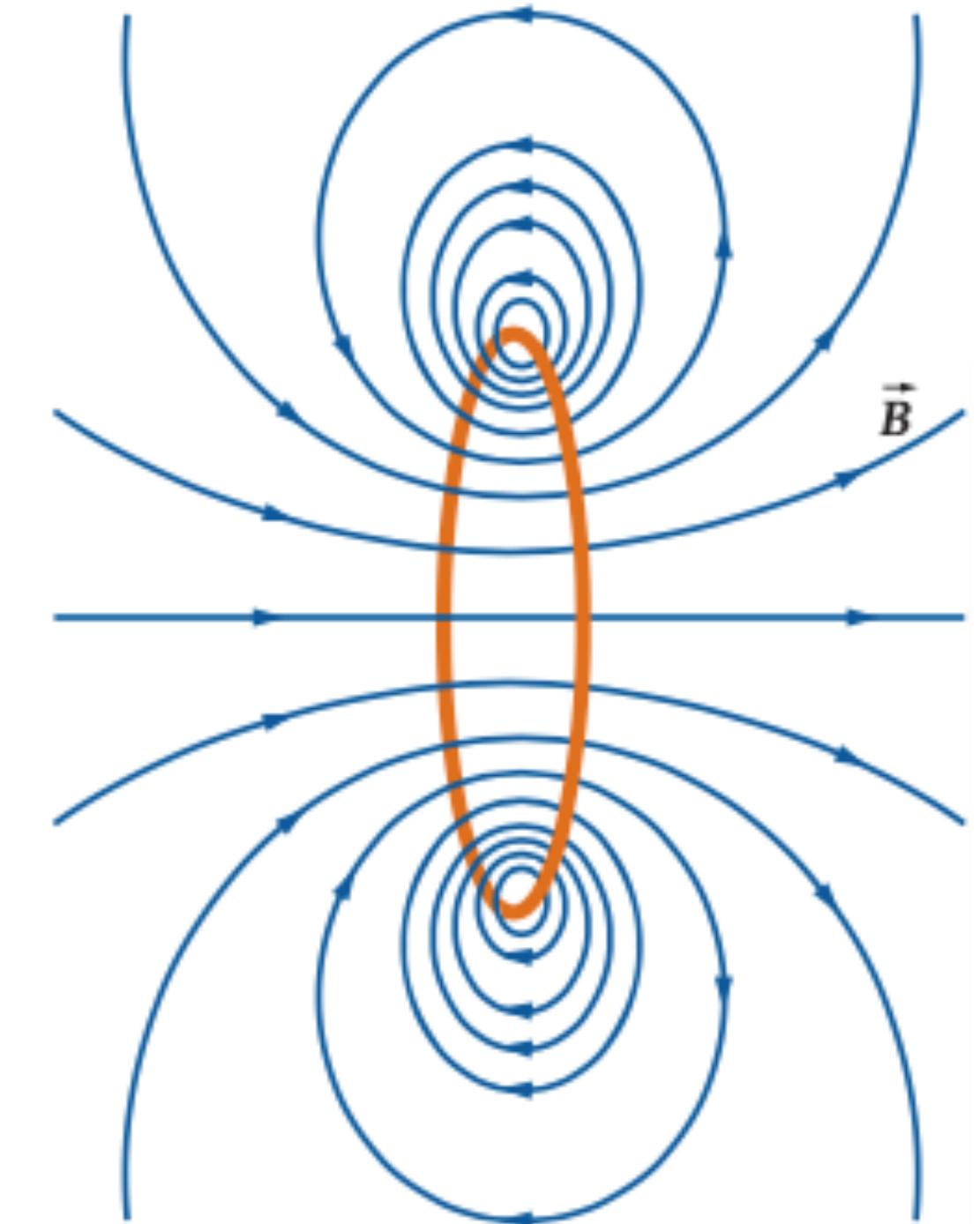
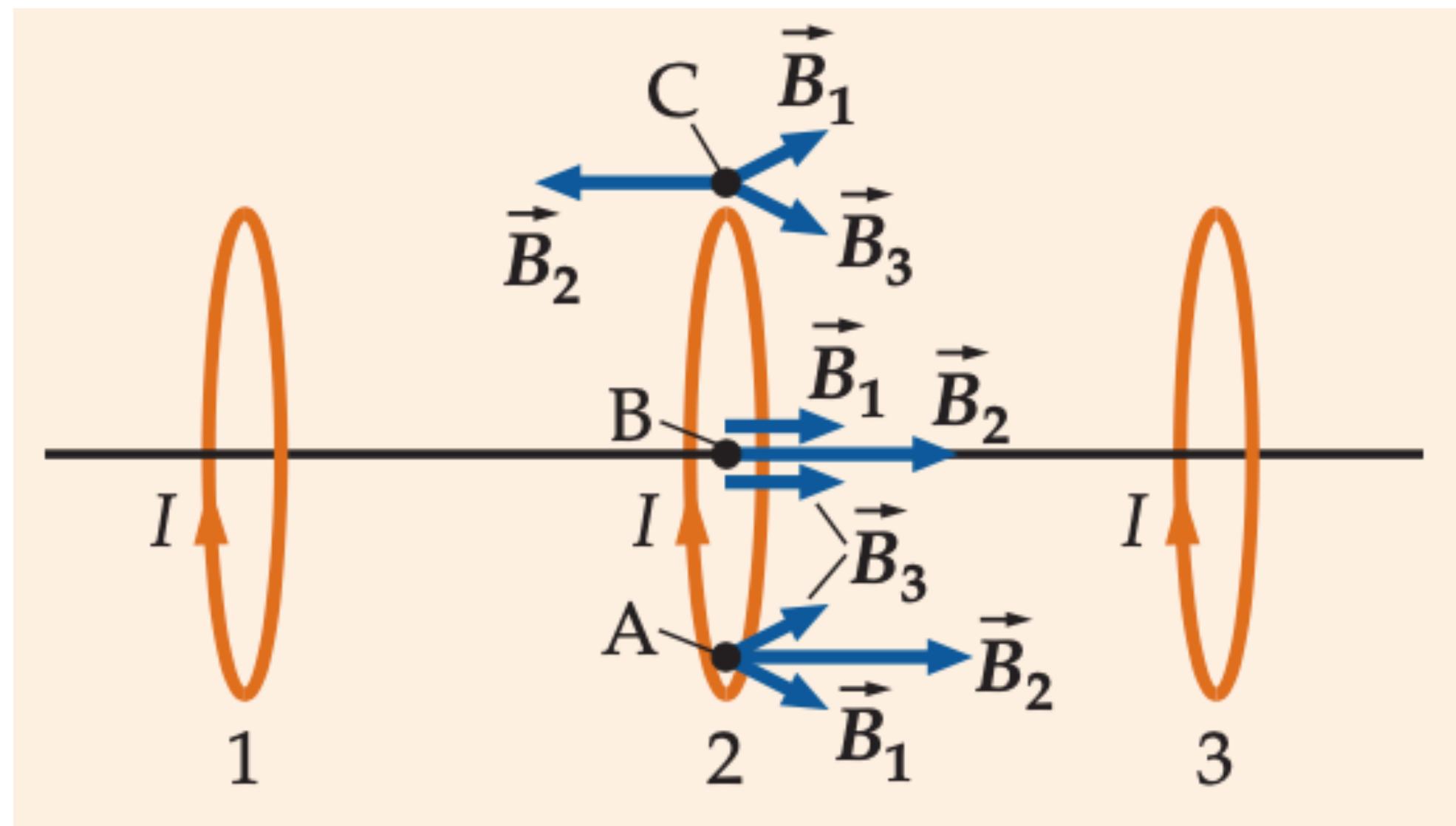
2. Campo magnético debido a un solenoide

- Un solenoide es un alambre conductor enrollado en una hélice de espiras estrechamente espaciadas.
- Un solenoide se utiliza para producir un campo magnético fuerte y uniforme en la región rodeada por sus espiras.
- El papel del solenoide en el magnetismo es análogo al del capacitor de placas paralelas, que produce un campo eléctrico fuerte y uniforme entre sus placas.



- El campo magnético de un solenoide es esencialmente el de un conjunto de N espiras de corriente idénticas colocadas una al lado de la otra.

- El campo magnético dentro y lejos de los extremos de un solenoide largo, fuertemente enrollado y conductor de corriente es uniforme y paralelo al eje del solenoide, y que el campo magnético es cero fuera del solenoide.



La magnitud del campo magnético es mayor donde las líneas de campo están más juntas.

La magnitud del campo \vec{B}_2 (debido a la espira 2) en el punto *A* es mayor que en el punto *B*

La magnitud del campo \vec{B}_2 (debido a la espira 2) es mayor en el punto *A* que la magnitud de \vec{B}_2 es en el punto *B*.

Sin embargo, como \vec{B}_1 , \vec{B}_2 y \vec{B}_3 están en la misma dirección, es factible que el campo resultante $(\vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3)$ en el punto *B* tenga la misma magnitud que el campo magnético resultante en *A*.

En el punto *C*, la dirección de \vec{B}_2 es hacia la izquierda y la dirección de $\vec{B}_1 + \vec{B}_3$ es hacia la derecha.

Las espiras adicionales en el solenoide que están cerca de las espiras 1 y 3 producirán campos magnéticos adicionales en *C* cuya suma vectorial está a la derecha.

Es factible, por lo tanto, que el campo magnético resultante en *C* es cero.

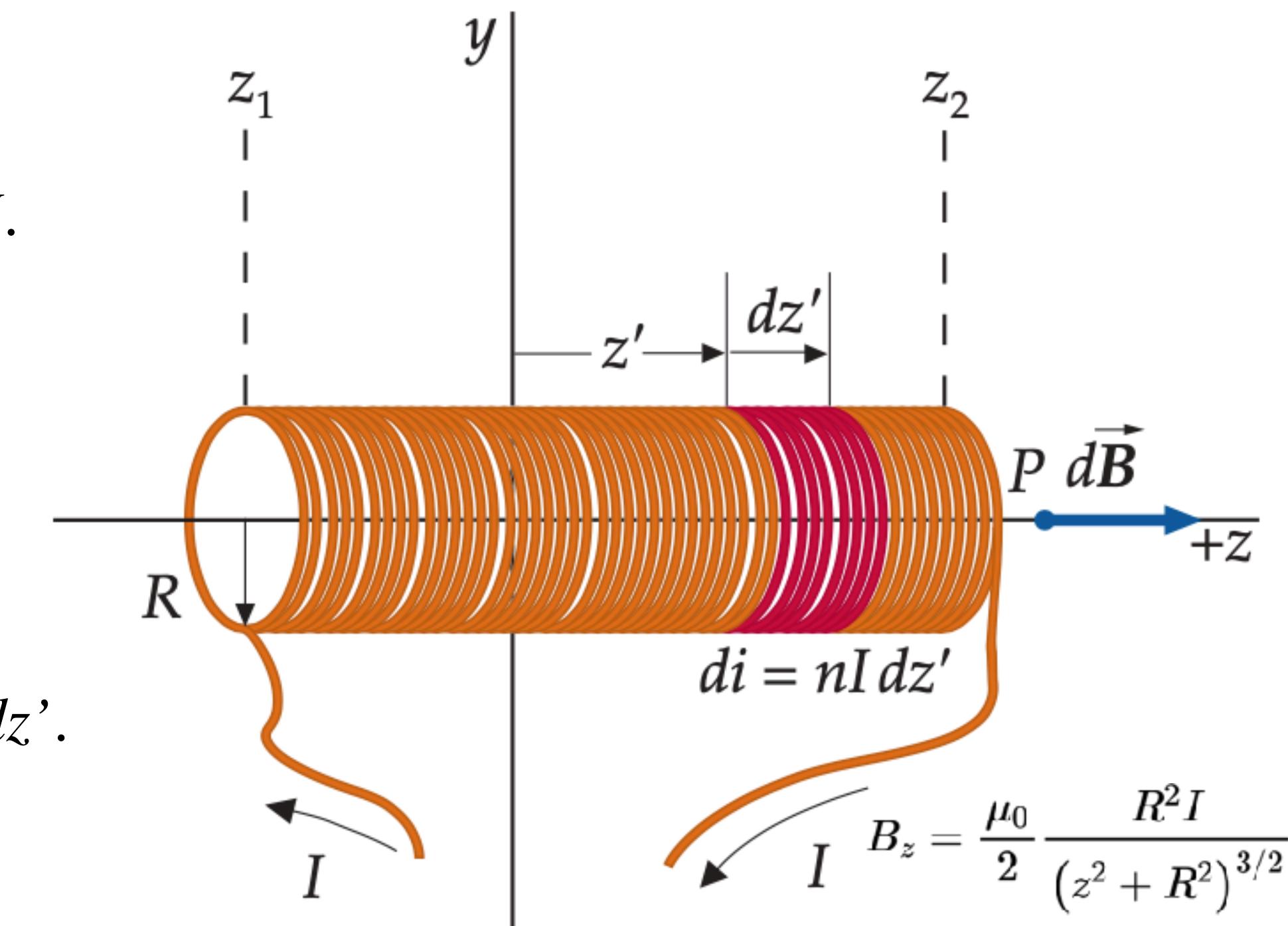
El campo magnético para un solenoide

- Un solenoide con una longitud L , consta de N espiras y transporta una corriente I . El extremo izquierdo está en $z=z_1$ y el extremo derecho en $z=z_2$.
- Calcularemos el campo magnético en el punto de campo P en el eje z a una distancia z del origen.
- Si $n = N/L$ es el número de vueltas por unidad de longitud, hay ndz' vueltas de alambre en este elemento, y cada vuelta transporta una corriente I
- El elemento es equivalente a una sola espira que transporta una corriente $di=nIdz'$.
- El campo magnético en un punto del eje z debido a una espira en el origen que lleva la corriente di viene dado por

$$dB_z = \frac{1}{2} \mu_0 \frac{R^2 di}{(z^2 + R^2)^{3/2}} = \frac{1}{2} \mu_0 \frac{R^2 n Idz'}{\left[(z - z')^2 + R^2\right]^{3/2}}$$

$$B_z = \frac{1}{2} \mu_0 n I R^2 \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz'}{\left[(z - z')^2 + R^2\right]^{3/2}}$$

$$B_z(z) = \frac{1}{2} \mu_0 n I \left(\frac{z - z_1}{\sqrt{(z - z_1)^2 + R^2}} - \frac{z - z_2}{\sqrt{(z - z_2)^2 + R^2}} \right)$$



- Aquí z es la distancia entre la espira y el punto P .
- Para una espira en $z=z'$ que transporta corriente $di=nIdz$, la distancia entre la espira y el punto de observación P es $z-z'$.

$$\int_{z_1}^{z_2} \frac{dz'}{\left[(z - z')^2 + R^2\right]^{3/2}} = \frac{1}{R^2} \left(\frac{z - z_1}{\sqrt{(z - z_1)^2 + R^2}} - \frac{z - z_2}{\sqrt{(z - z_2)^2 + R^2}} \right)$$

$$B_z(z) = \frac{1}{2} \mu_0 n I \left(\frac{z - z_1}{\sqrt{(z - z_1)^2 + R^2}} - \frac{z - z_2}{\sqrt{(z - z_2)^2 + R^2}} \right)$$

- Un solenoide se llama largo si su longitud L es mucho mayor que su radio R .
- En el interior y lejos de los extremos de un solenoide largo, la fracción de la izquierda en el paréntesis se aproxima a 1 y la fracción de la derecha se aproxima a -1. Esto significa que la expresión entre paréntesis tiende a 2.
- Así, en la región interior y alejada de cualquiera de los extremos del solenoide el campo magnético viene dado por:

$$B_z = \mu_0 n I$$

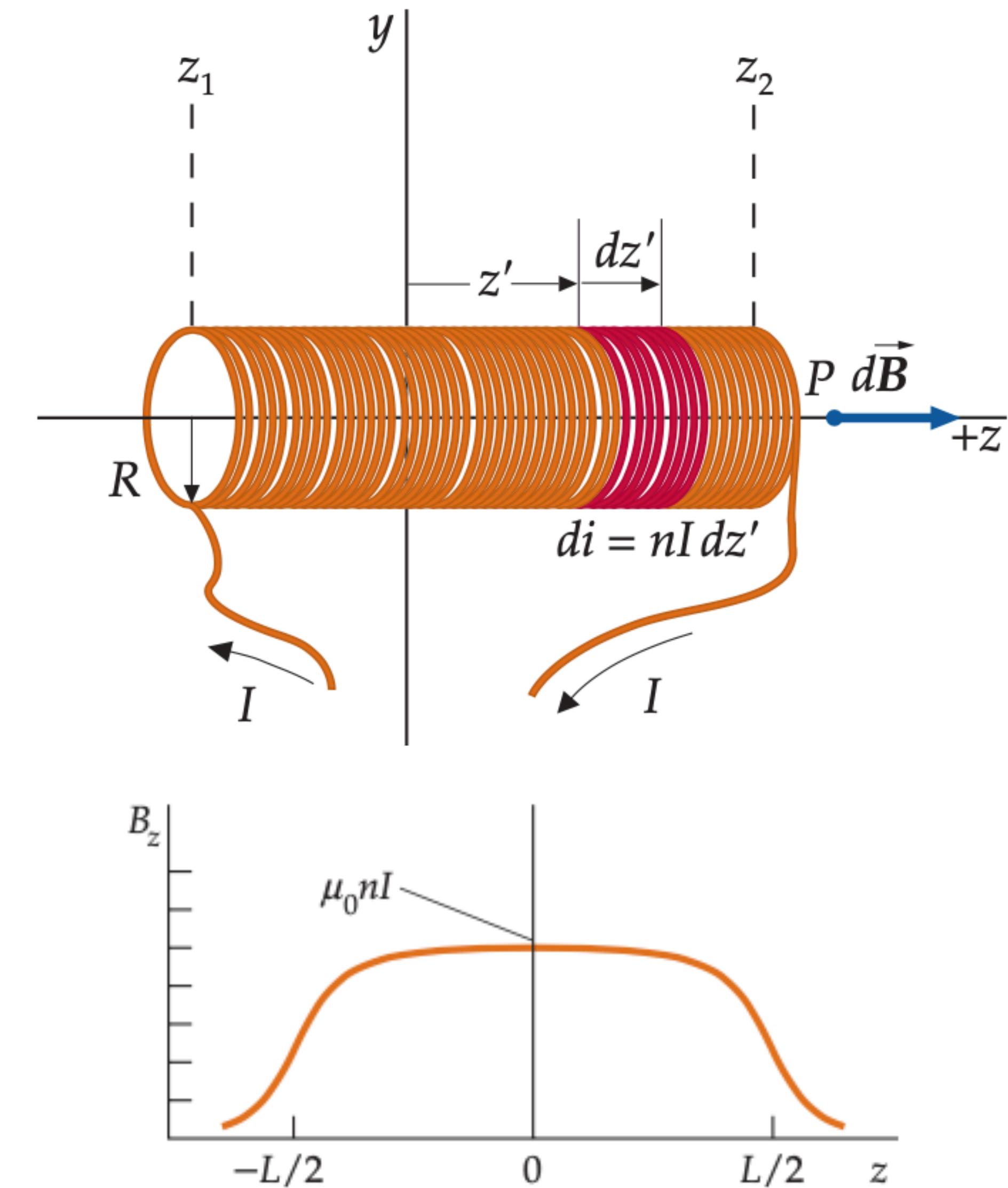
B_z en el extremo derecho del solenoide (cuando $z = z_2$) resulta en:

$$B_z(z_2) = \frac{1}{2} \mu_0 n I L / \sqrt{L^2 + R^2}$$

donde $L = z_2 - z_1$.

Entonces, si $L \gg R$, la relación $L / \sqrt{L^2 + R^2}$ se hace muy cercana a uno, por lo que $B_z(z_2) \approx \frac{1}{2} \mu_0 n I$.

B_z en cualquiera de los extremos de un solenoide largo es la mitad del valor de B en puntos profundos dentro del solenoide (distantes de cualquiera de los extremos).



Ejemplo: campo magnético en el centro del solenoide

- Encontrar el campo magnético en el centro de un solenoide que tiene una longitud igual a 20,0 cm, un radio igual a 1,40 cm, 600 espiras y una corriente igual a 4,00 A.

$$B_z(0) = \frac{1}{2} \mu_0 n I \left(\frac{0 - (-\frac{1}{2}L)}{\sqrt{[0 - (-\frac{1}{2}L)]^2 + R^2}} - \frac{0 - (\frac{1}{2}L)}{\sqrt{[(0 - (\frac{1}{2}L))^2] + R^2}} \right)$$
$$= \frac{1}{2} \mu_0 n I \frac{L}{\sqrt{\frac{1}{4}L^2 + R^2}} = \mu_0 n I \frac{L}{\sqrt{L^2 + 4R^2}}$$

$$B_z(z) = \frac{1}{2} \mu_0 n I \left(\frac{z - z_1}{\sqrt{(z - z_1)^2 + R^2}} - \frac{z - z_2}{\sqrt{(z - z_2)^2 + R^2}} \right)$$

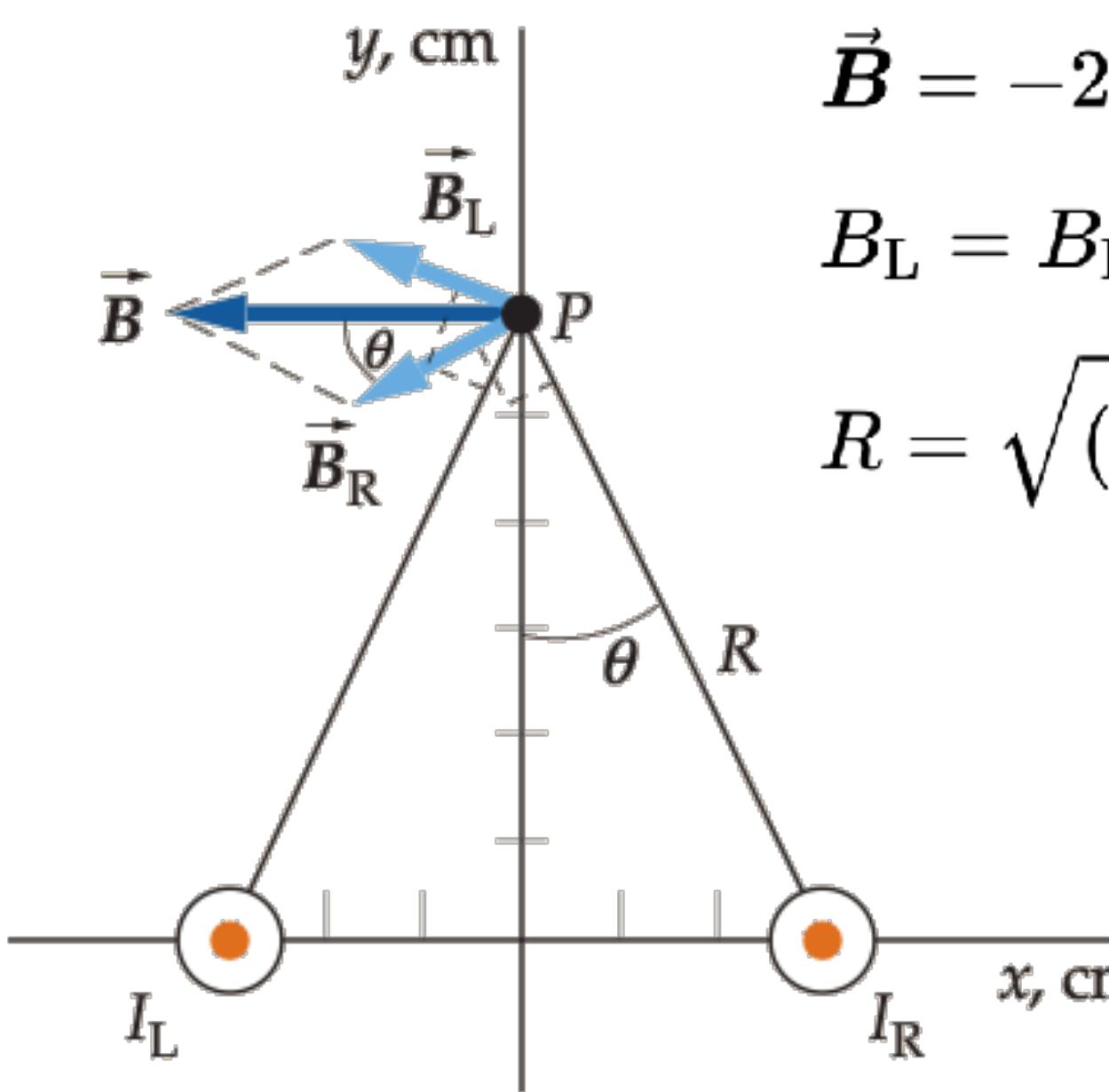
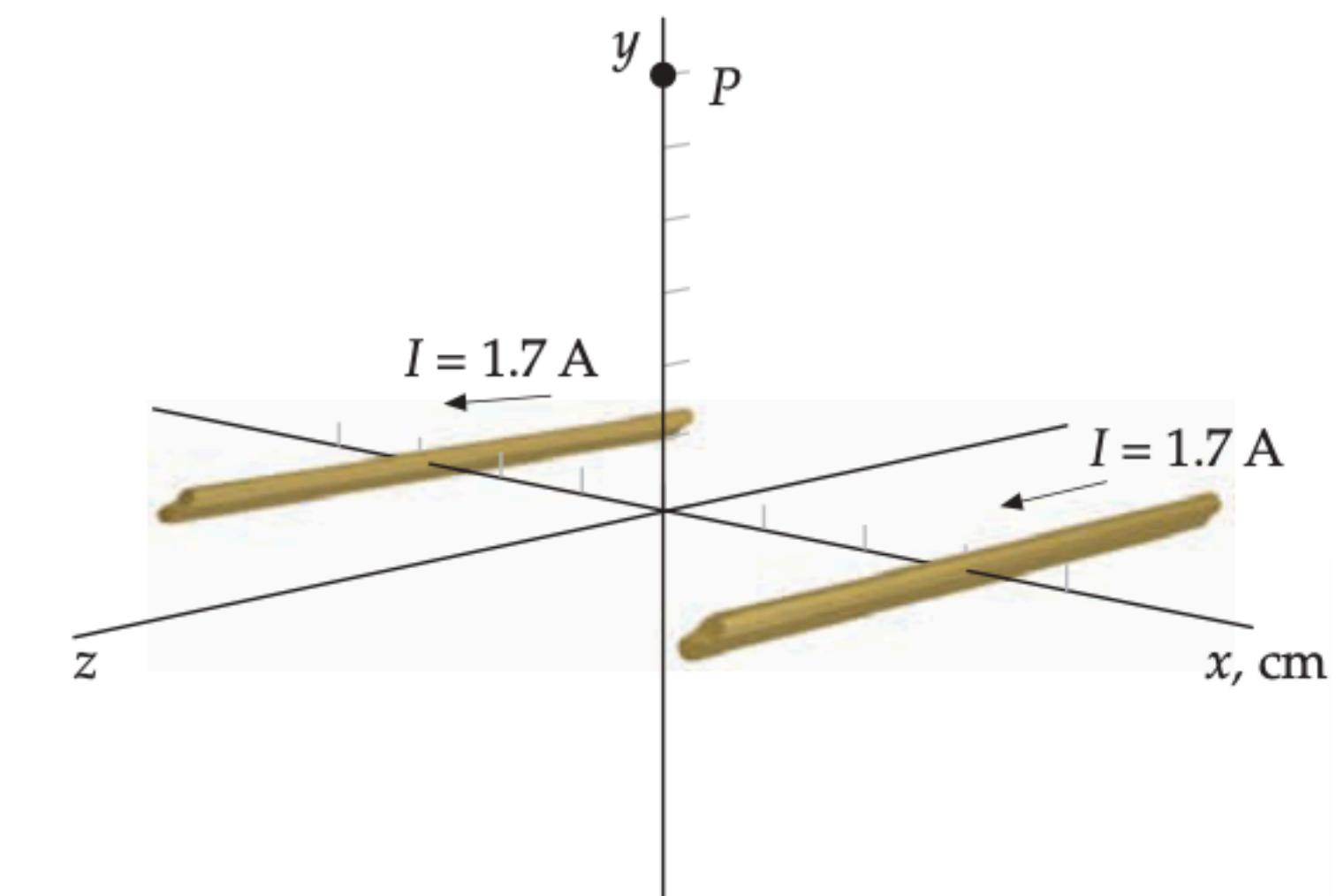
$$\frac{L}{\sqrt{L^2 + 4R^2}} = \frac{20.0 \text{ cm}}{\sqrt{(20.0 \text{ cm})^2 + 4(1.40 \text{ cm})^2}} = 0.990$$

$$B_z(0) = 0,990 \mu_0 n I$$
$$= 0,990 (4\pi \times 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m/A}) \frac{600}{0,200 \text{ m}} (4,00 \text{ A})$$
$$= 1,50 \times 10^{-2} \text{ T}$$

PROBLEMA NUMÉRICO
Calcule B en el eje a una distancia intermedia entre el centro y un extremo del solenoide

Ejemplo: campo magnético debido a alambres paralelos

- Un alambre largo y recto lleva una corriente de 1,7 A en la dirección z y se encuentra a lo largo de la línea $x=-3,0$ cm, $y=0$. Un segundo alambre de este tipo lleva una corriente de 1,7 A en la dirección z y se encuentra a lo largo de la línea $x=+3,0$ cm, $y=0$.
- Encuentre el campo magnético en un punto P en $y=6,0$ cm.



$$\vec{B} = \vec{B}_L + \vec{B}_R$$

$$\vec{B} = -2B_L \cos \theta \hat{i}$$

$$B_L = B_R = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I}{R}$$

$$R = \sqrt{(3,0 \text{ cm})^2 + (6,0 \text{ cm})^2} = 6,7 \text{ cm}$$

$$B_L = B_R = (10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m/A}) \frac{2(1,7 \text{ A})}{0,067 \text{ m}} = 5,07 \times 10^{-6} \text{ T}$$

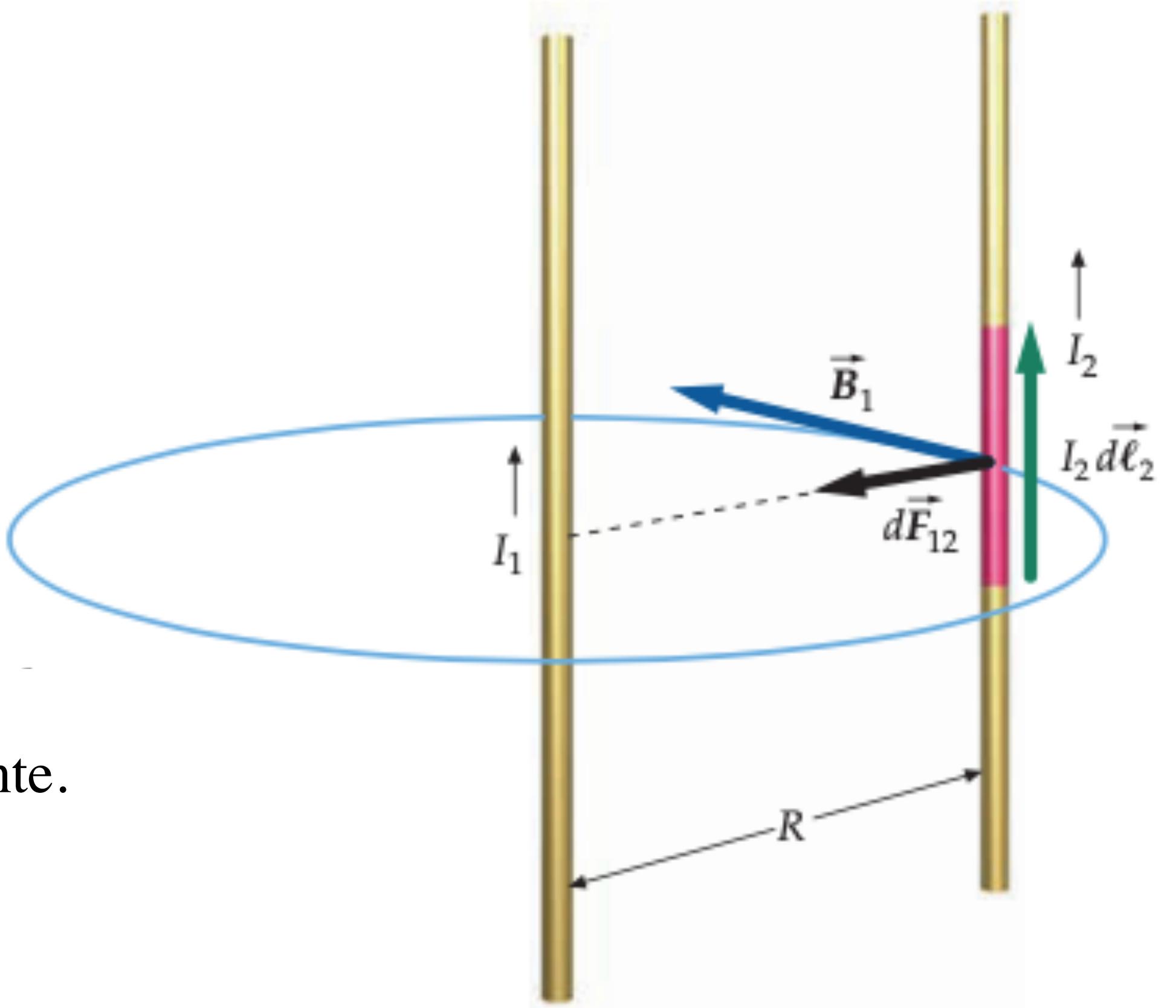
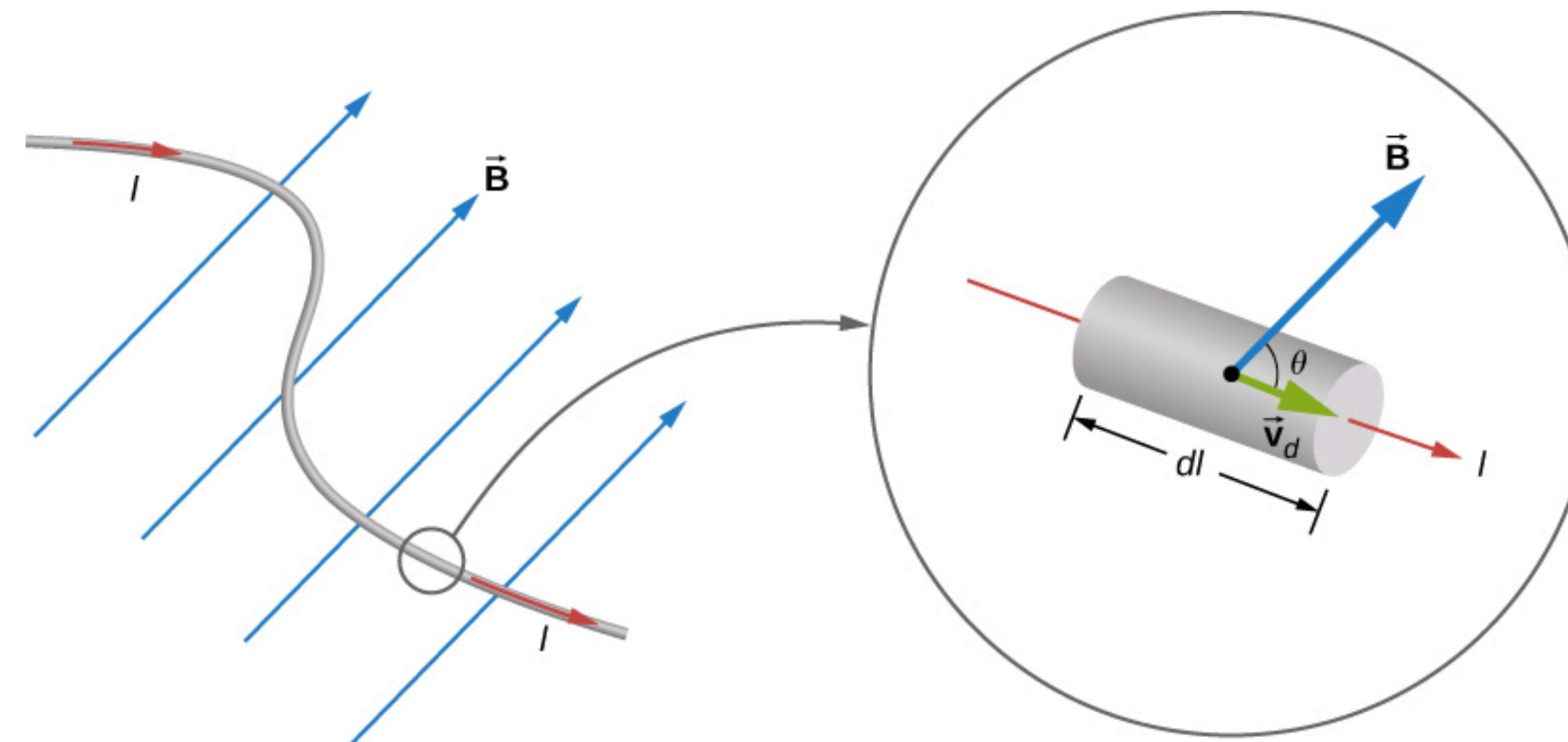
$$\cos \theta = \frac{6,0 \text{ cm}}{R} = \frac{6,0 \text{ cm}}{6,7 \text{ cm}} = 0,894$$

$$\vec{B} = -2(5,07 \times 10^{-6} \text{ T})(0,894) \hat{i} = -9,1 \times 10^{-6} \text{ T} \hat{i}$$

PROBLEMA

- Encuentra B en el origen.
- Encuentre B en el origen suponiendo que la dirección de la corriente se invierte en el cable a lo largo de la línea $x=3.0$ cm, $y=0$.

3. Fuerza entre alambres de corriente



- Un campo magnético ejerce una fuerza sobre un hilo conductor de corriente.

$$d\vec{F} = Id\vec{l} \times \vec{B}$$

Integrando sobre el alambre entero

$$\vec{F} = I\vec{l} \times \vec{B}$$

Dos alambres paralelos largos que transportan corrientes en la misma dirección.

Consideramos la fuerza sobre un segmento $d\vec{\ell}_2$ que lleva corriente I_2 .

El campo magnético \vec{B}_1 en este segmento debido a la corriente I_1 es perpendicular al segmento $d\vec{\ell}_2$. Esto es cierto para todos los elementos de corriente a lo largo del alambre 2.

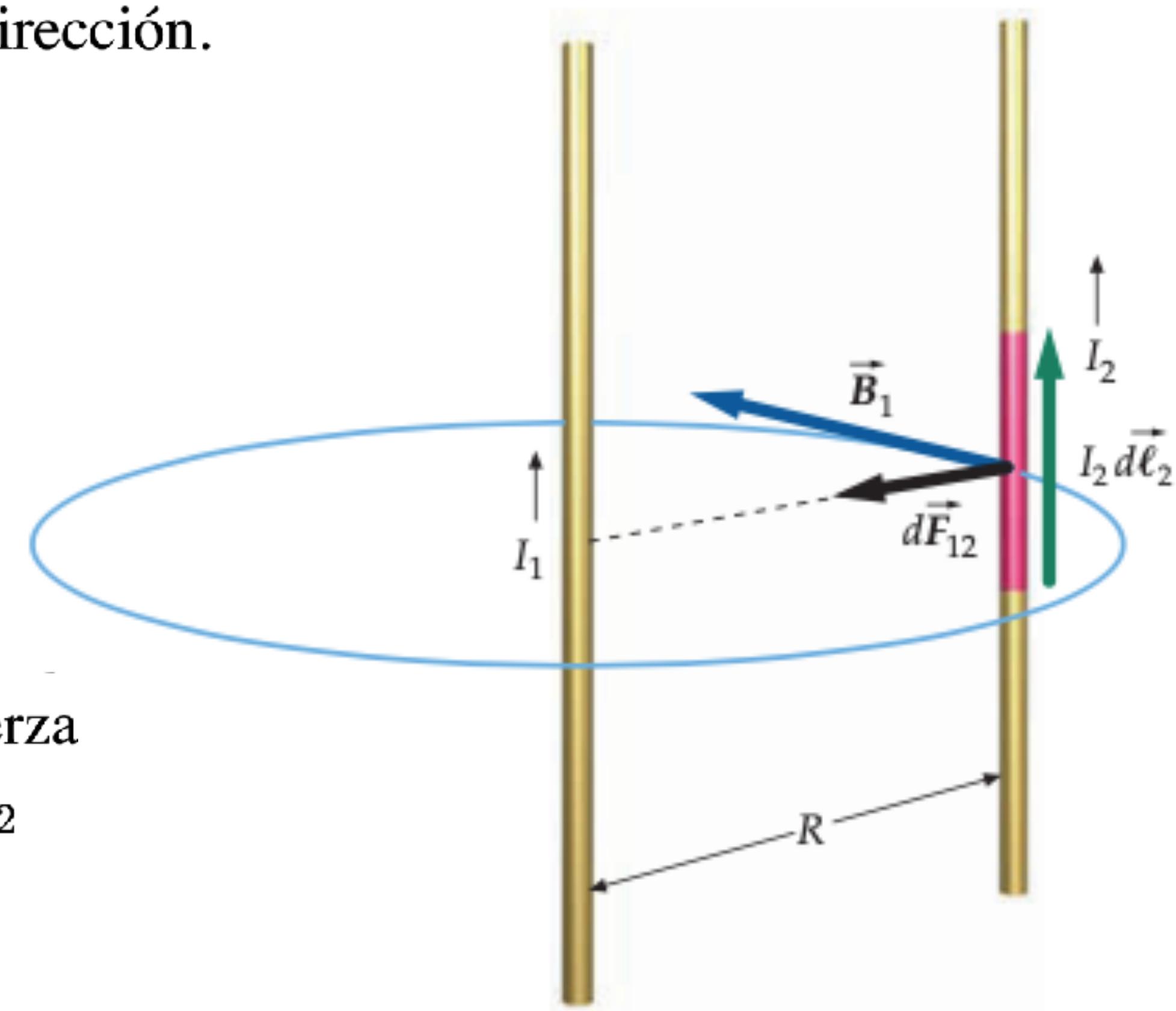
La fuerza $\vec{F}_{12} = I_2 d\vec{\ell}_2 \times \vec{B}_1$, en el elemento de corriente $I_2 d\vec{\ell}_2$ se dirige hacia el alambre 1 (regla de la mano derecha).

Del mismo modo, un segmento de corriente $I_1 d\vec{\ell}_1$ experimentará una fuerza magnética dirigida hacia la corriente I_2 , debido a un campo magnético \vec{B}_2 que surge de la corriente I_2 , dada por $d\vec{F}_{21} = I_1 d\vec{\ell}_1 \times \vec{B}_2$.

Las dos corrientes paralelas se atraen.

$$dF_{12} = |I_2 d\vec{\ell}_2 \times \vec{B}_1| = I_2 d\ell_2 B_1$$

Si la distancia R entre los hilos es mucho menor que sus longitudes, el campo magnético a $I_2 d\vec{\ell}_2$ debido a la corriente I_1 se aproximará al campo debido a un hilo conductor de corriente infinitamente largo



$$dF_{12} = I_2 d\ell_2 \frac{\mu_0 I_1}{2\pi R}$$

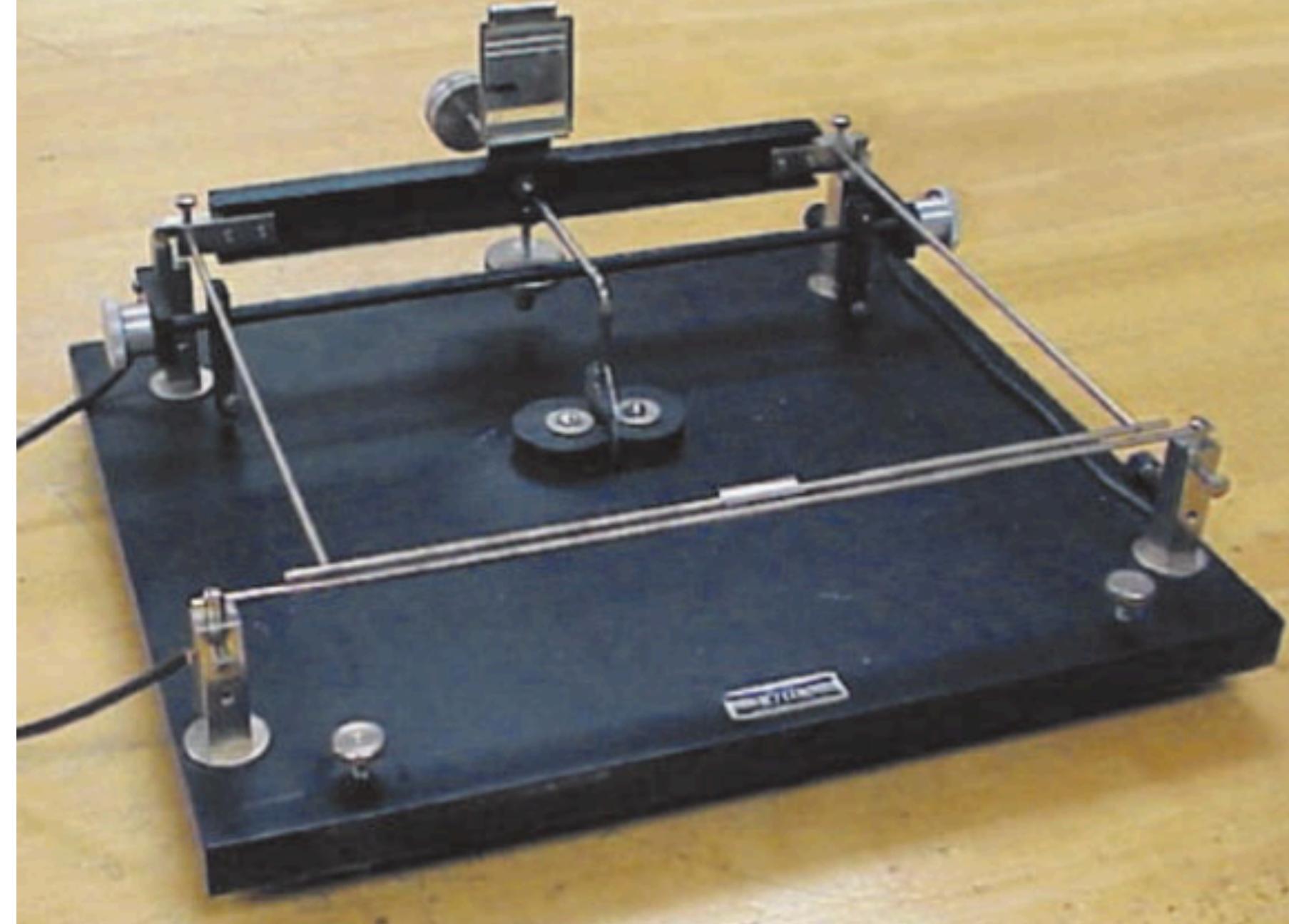
$$\frac{dF_{12}}{d\ell_2} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1 I_2}{R}$$

La balanza de corriente

$$d\vec{F} = Id\vec{\ell} \times \vec{B}$$

- La fuerza F por unidad de longitud entre dos alambres paralelos delgados infinitamente largos separados por la distancia R viene dada por

$$\frac{F}{L} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1 I_2}{R}$$

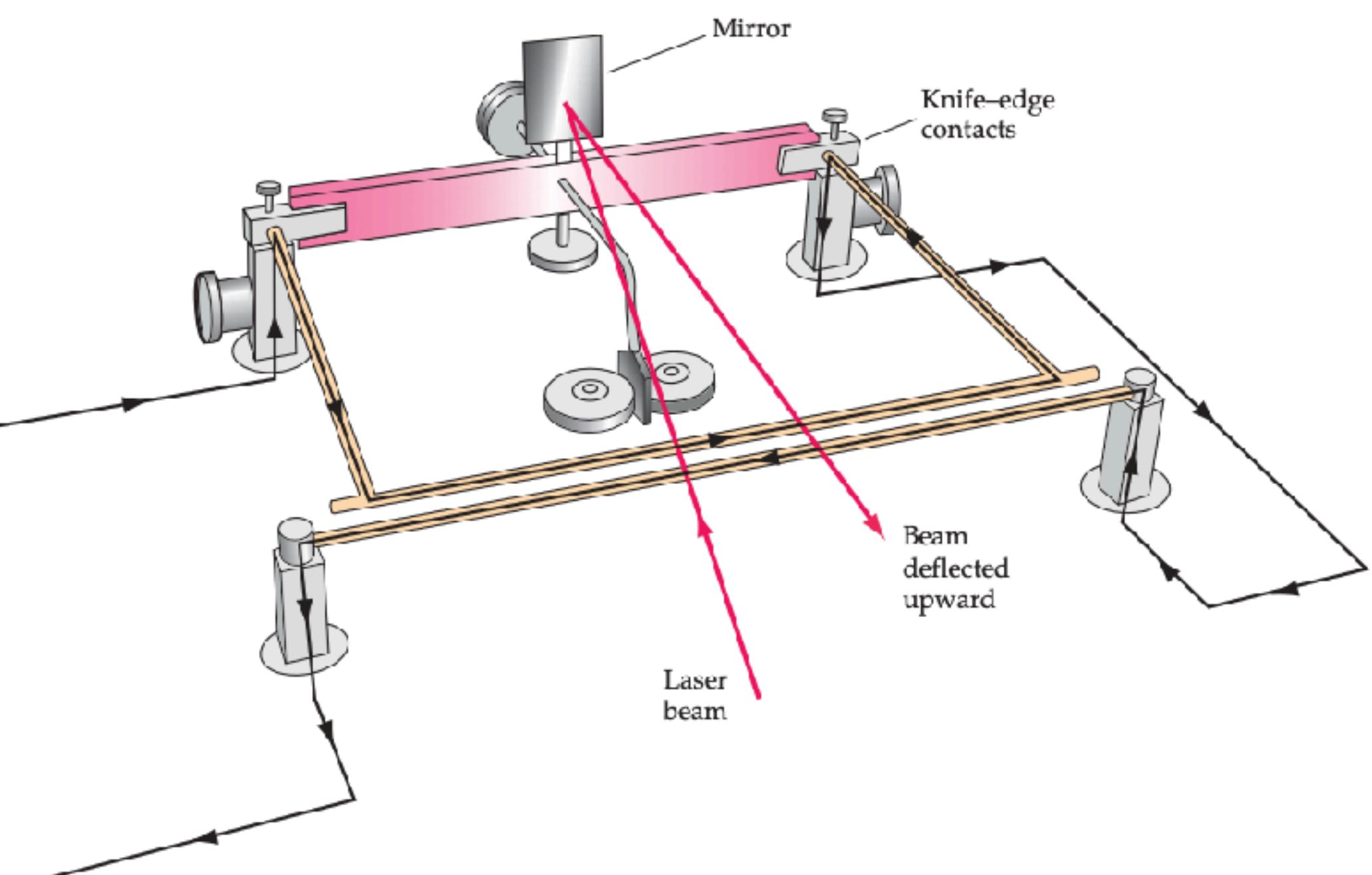


- Esta ecuación da la magnitud de la fuerza magnética por unidad de longitud que ejerce la varilla inferior sobre la superior.
- Si queremos hallar esta fuerza para una varilla de longitud L y hacerla igual al peso mg escribimos:

$$mg = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1 I_2}{R} L \Rightarrow m = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1 I_2}{gR} L$$

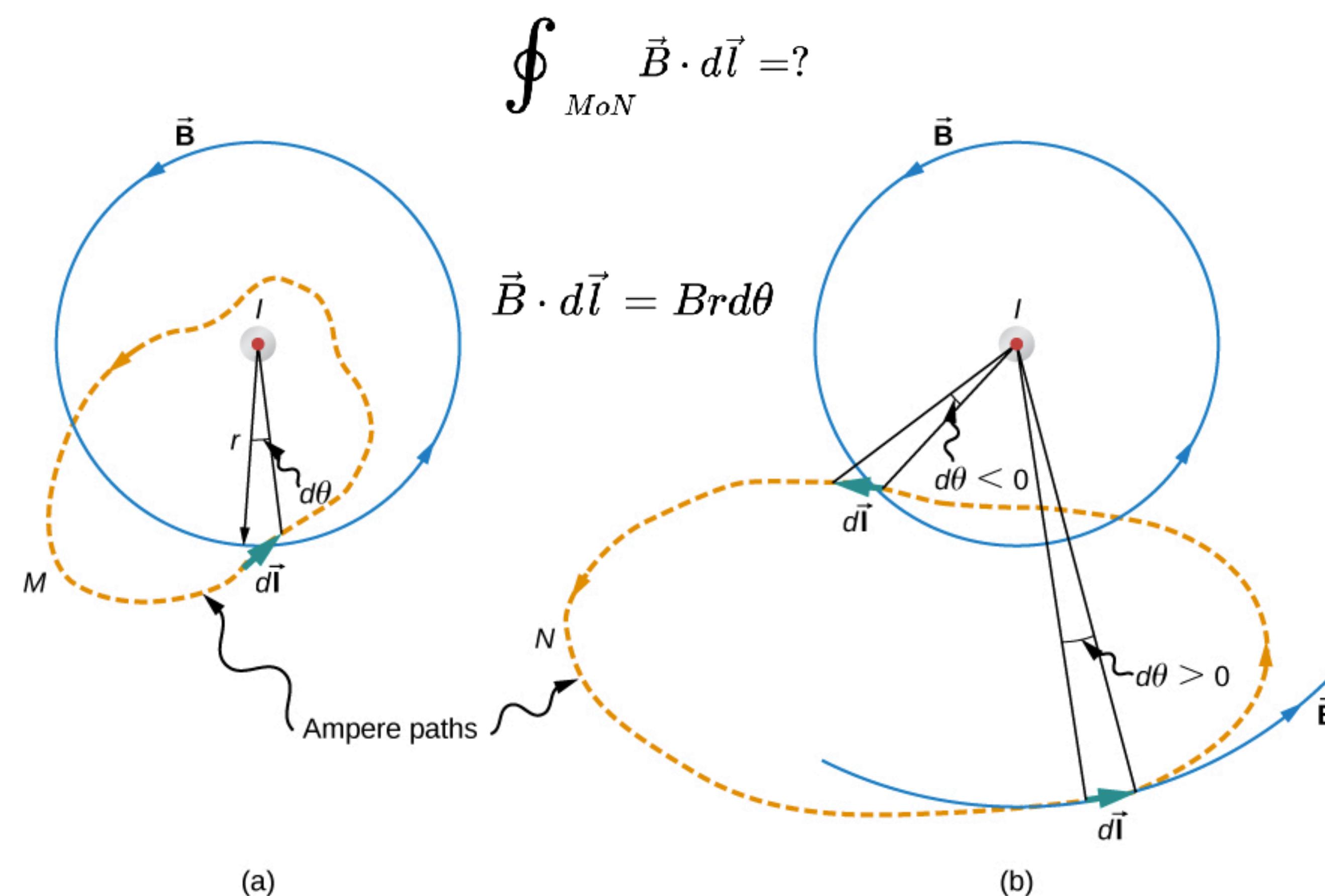
- Dos varillas rectas de 50,0 cm de longitud tienen ejes centrales separados 1,50 mm en una balanza de corriente, y transportan corrientes de 15,0 A cada una en sentidos opuestos. ¿Qué masa debe colocarse en la varilla superior para equilibrar la fuerza magnética de repulsión?

$$\begin{aligned} m &= \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1 I_2}{gR} L = \frac{4\pi \times 10^{-7}}{2\pi} \frac{(15)^2}{10 \cdot 0,0015} 0,5 \\ &= 1,53 \times 10^{-3} \text{ Kg} = 1,53 \text{ gr} \end{aligned}$$



4. Ley de Ampère

- Una propiedad fundamental de un campo magnético estático es que no es conservativo, a diferencia del campo eléctrico.
- Pero existe una relación entre el campo magnético y su fuente, la corriente eléctrica.
- Esta relación se expresa en términos de la integral de línea de \vec{B} y se conoce como ley de Ampère.
- Esta ley también puede derivarse directamente de la ley de Biot-Savart.



$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi r} \right) r d\theta = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \oint d\theta$$

$\oint_M d\theta = 2\pi$

$\oint_N d\theta = 0$

$\oint_M \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$

$\oint_N \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0$

- Sobre un camino cerrado arbitrario

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

donde I es la corriente total que pasa a través de cualquier superficie cuyo perímetro es la trayectoria de integración.

Ejemplo

- Utilicemos la ley de Ampère para calcular el campo magnético debido a una corriente constante I en un alambre recto, infinitamente largo y delgado.

- A lo largo de la trayectoria \vec{B} es constante y paralelo a $d\vec{l}$

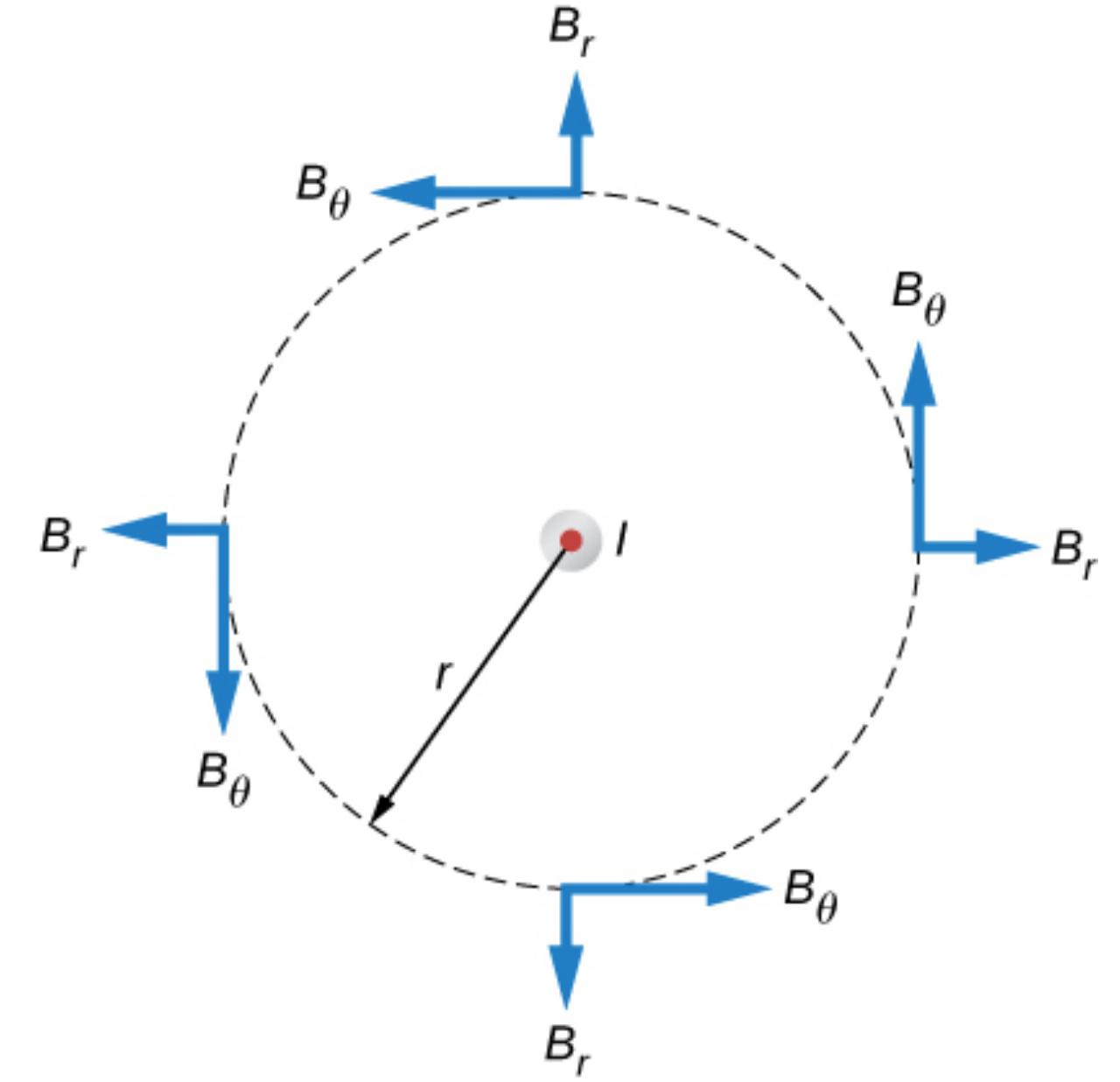
$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = B_\theta \oint dl = B_\theta (2\pi r)$$

- Por la ley de Ampère

$$B_\theta (2\pi r) = \mu_0 I$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

- Resultado que concuerda con el cálculo anterior utilizando la ley de Biot-Savart.



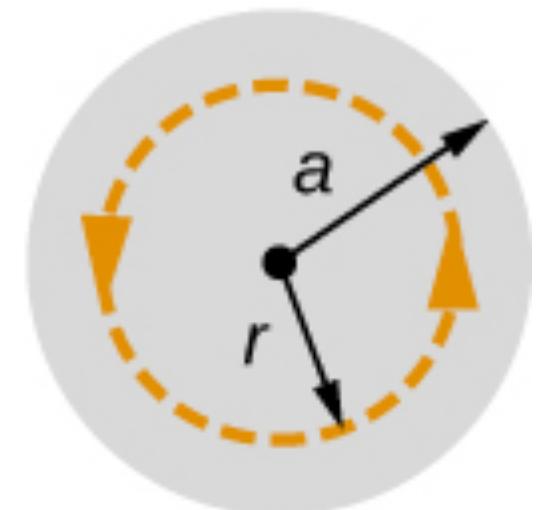
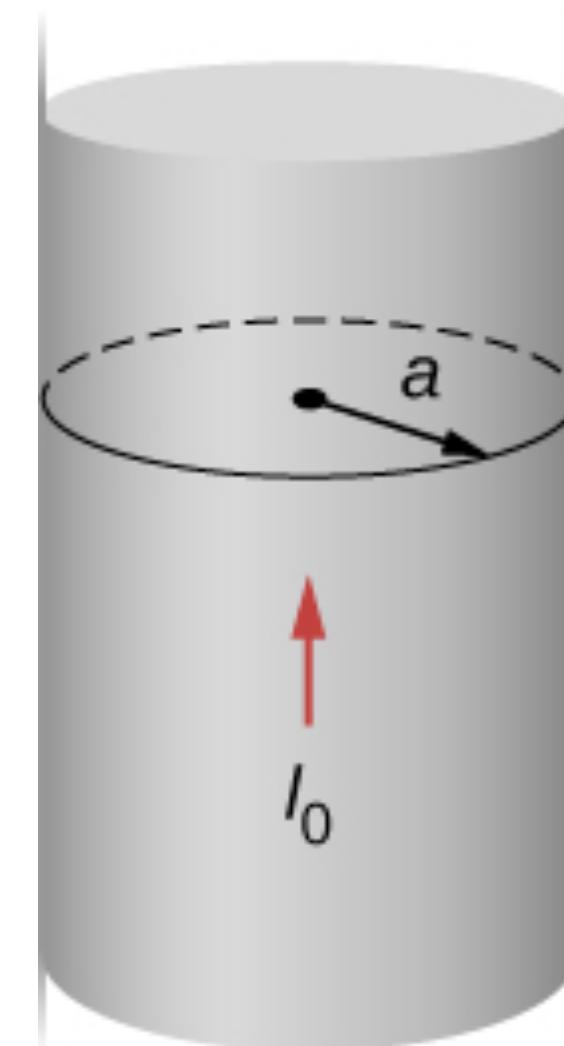
- Las posibles componentes del campo magnético \vec{B} debido a una corriente I . La componente radial es cero porque el ángulo entre el campo magnético y la trayectoria es un ángulo recto.

$$\vec{B}_r \cdot d\vec{l} = 0$$

Ejemplo

- Cálculo del campo magnético de un alambre grueso de radio a con la ley de Ampère
- Este problema tiene la misma geometría que el ejemplo anterior pero la corriente encerrada cambia a medida que movemos la trayectoria de integración desde fuera del alambre hacia dentro del alambre, donde no captura toda la corriente encerrada

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint B dl = B \oint dl = B(2\pi r)$$



- Consideremos primero una trayectoria circular que está dentro del alambre ($r \leq a$)

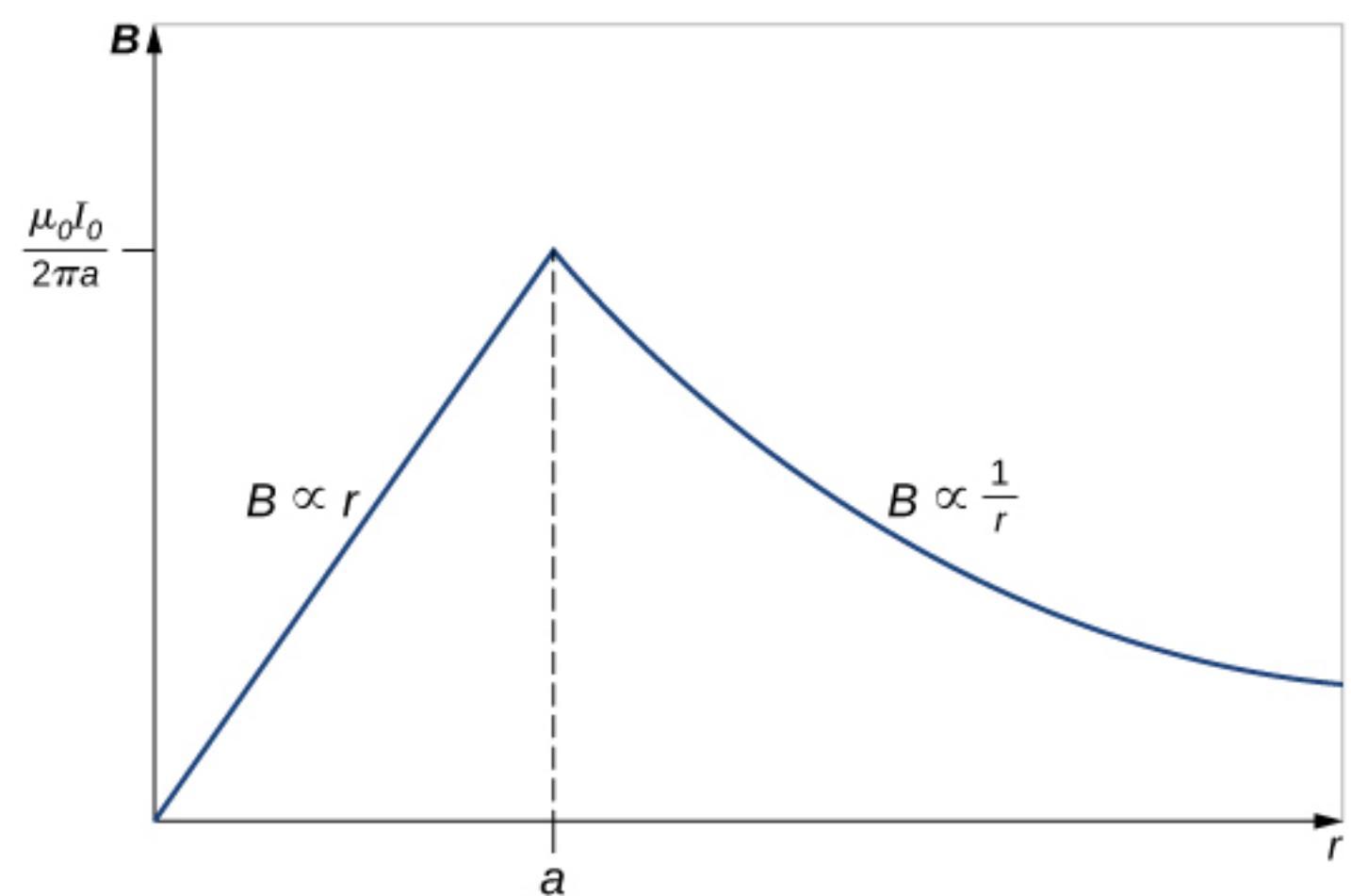
La corriente I que pasa por el área encerrada por la trayectoria es igual a la densidad de corriente J por el área encerrada. Como la corriente es uniforme, la densidad de corriente dentro del camino es igual a la densidad de corriente en todo el cable, que es: $I_0/\pi a^2$

$$I = \pi r^2 \frac{I_0}{\pi a^2} = \frac{r^2}{a^2} I_0$$

$$B(2\pi r) = \mu_0 \left(\frac{r^2}{a^2} \right) I_0 \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi} \frac{r}{a^2} \quad (r \leq a)$$

- Fuera del alambre ($r > a$) la situación es idéntica a la del alambre del ejemplo anterior

$$B = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r} \quad (r \geq a)$$



Ejemplo

- La figura muestra un solenoide formado por N vueltas de alambre firmemente enrolladas sobre una longitud L .
- Una corriente I fluye a lo largo del alambre del solenoide. El número de vueltas por unidad de longitud es N/L ; por lo tanto, el número de vueltas en una longitud infinitesimal dy es $(N/L)dy$ vueltas. Esto produce una corriente:

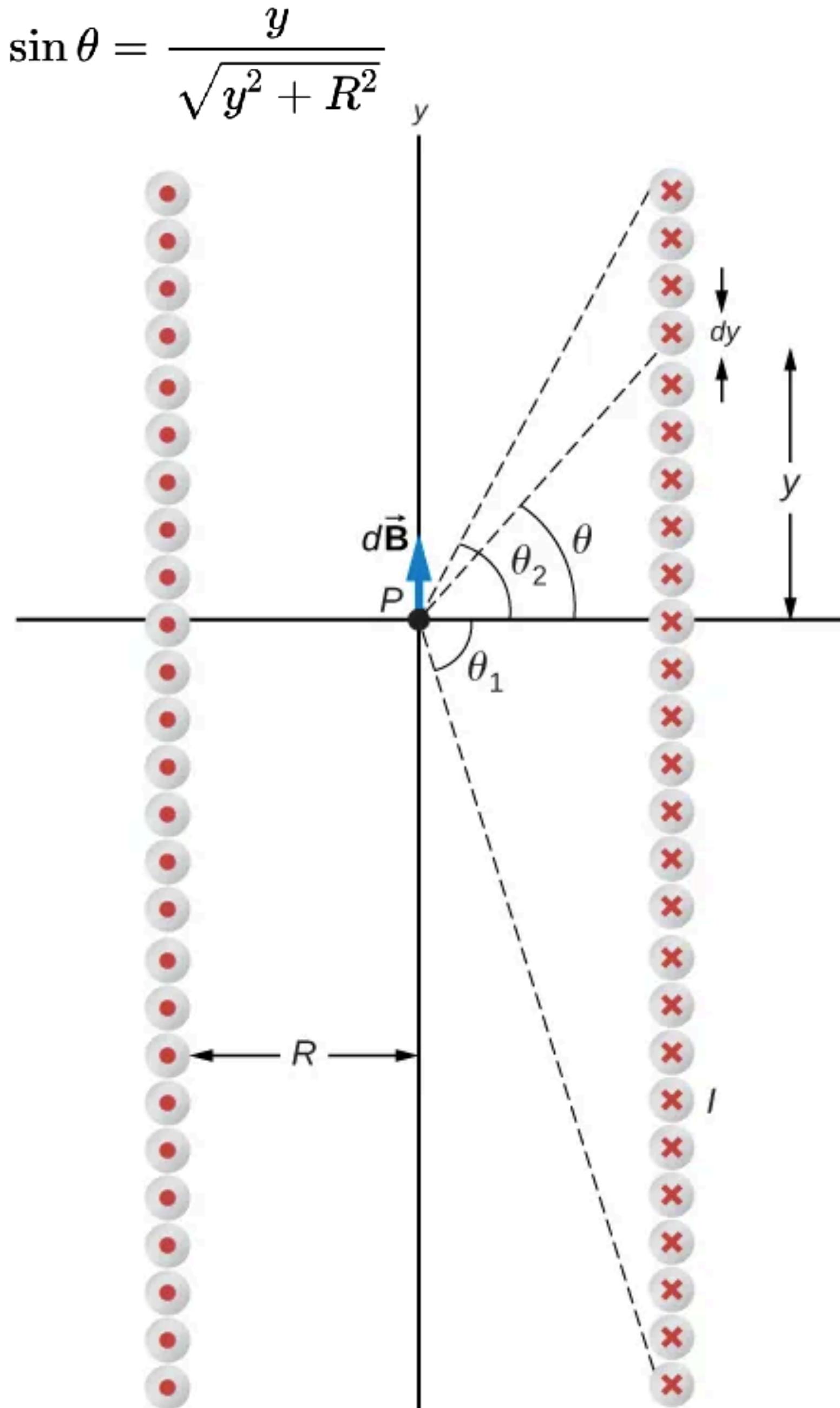
$$dI = \frac{NI}{L} dy$$

- El punto P está en el eje central del solenoide. Básicamente estamos cortando el solenoide en rebanadas delgadas que son dy gruesas y tratando cada una como un bucle de corriente. Así, dI es la corriente a través de cada rebanada.
- El campo magnético $d\vec{B}$ debido a la corriente dI en dy es:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 R^2 dI}{2(y^2 + R^2)^{3/2}} \hat{j} = \left(\frac{\mu_0 I R^2 N}{2L} \hat{j} \right) \frac{dy}{(y^2 + R^2)^{3/2}}$$



(a)



(b)

$$d\vec{\mathbf{B}} = \frac{\mu_0 R^2 dI}{2(y^2 + R^2)^{3/2}} \hat{j} = \left(\frac{\mu_0 I R^2 N}{2L} \hat{j} \right) \frac{dy}{(y^2 + R^2)^{3/2}}$$

- Como: $\sin \theta = \frac{y}{\sqrt{y^2 + R^2}}$

- Diferenciando

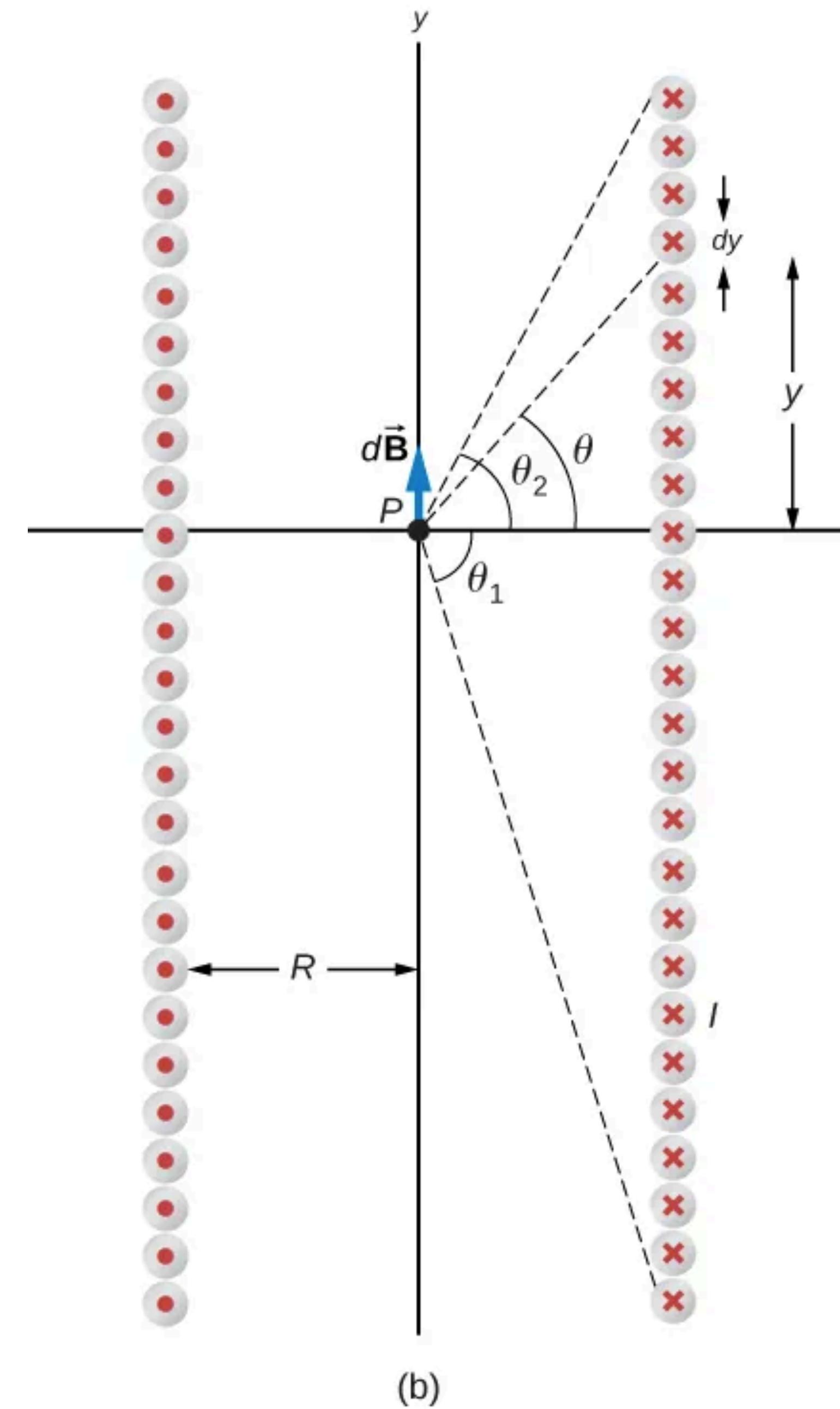
$$\cos \theta d\theta = \left[-\frac{y^2}{(y^2 + R^2)^{3/2}} + \frac{1}{\sqrt{y^2 + R^2}} \right] dy = \frac{R^2 dy}{(y^2 + R^2)^{3/2}}$$

- Por lo tanto, en el punto P

$$\vec{\mathbf{B}} = \frac{\mu_0 I N}{2L} \hat{j} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \cos \theta d\theta = \frac{\mu_0 I N}{2L} (\sin \theta_2 - \sin \theta_1) \hat{j}$$

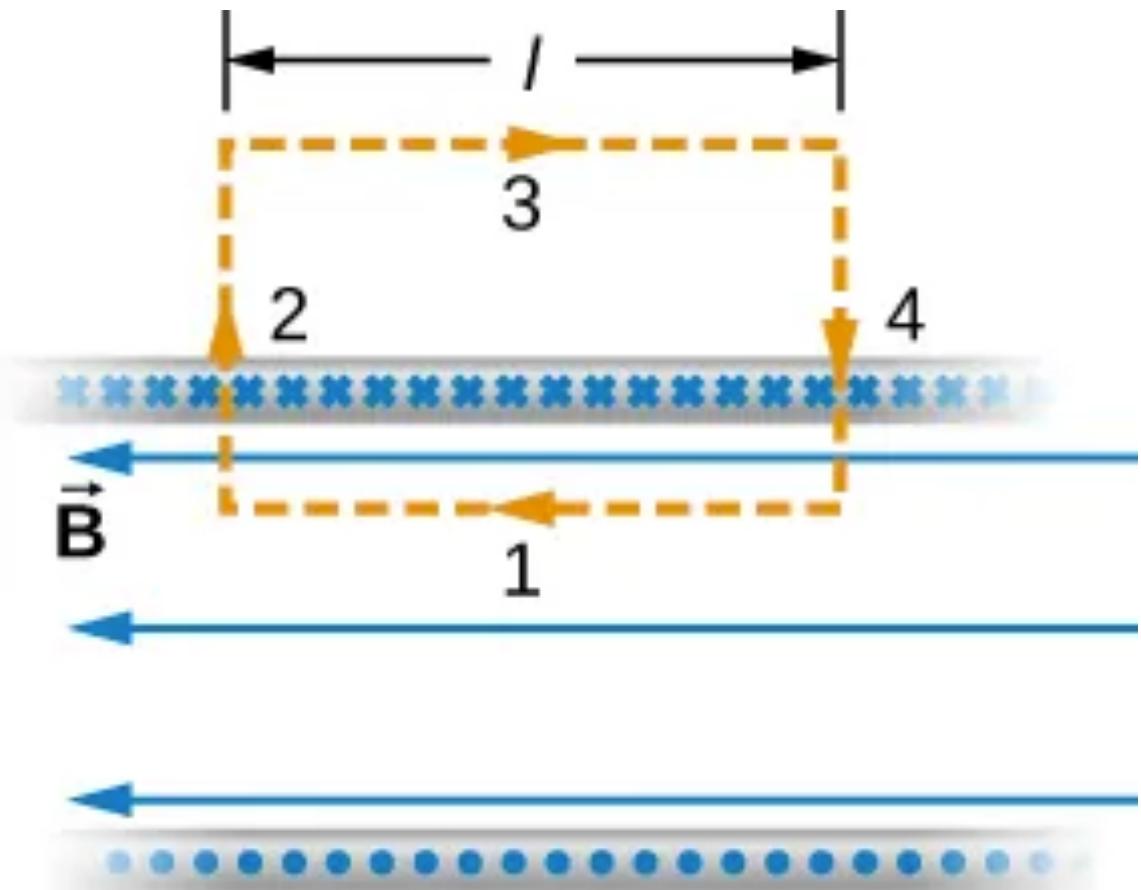
- De especial interés es el solenoide infinitamente largo, para el que $L \rightarrow \infty$

$$\vec{\mathbf{B}} = \frac{\mu_0 I N}{2L} \hat{j} [\sin(\pi/2) - \sin(-\pi/2)] = \frac{\mu_0 I N}{L} \hat{j} = \mu_0 n I \hat{j}$$



- Podemos utilizar la ley de Ampère, para calcular la magnitud del campo magnético en cualquier posición dentro del solenoide infinito. Consideremos la trayectoria cerrada de la figura.

- A lo largo del segmento 1, \vec{B} es uniforme y paralelo a la trayectoria.
- A lo largo de los segmentos 2 y 4, \vec{B} es perpendicular a parte de la trayectoria y desaparece en el resto de ella. Por lo tanto, los segmentos 2 y 4 no contribuyen a la integral de línea en la ley de Ampère.
- A lo largo del segmento 3, $\vec{B} = 0$ porque el campo magnético es cero fuera del solenoide.



- Si consideras una espira de la ley de Ampère fuera del solenoide, la corriente fluye en direcciones opuestas en diferentes segmentos de la espira. Por lo tanto, no hay corriente encerrada ni hay campo magnético según la ley de Ampère.
- No hay contribución a la integral de línea desde el segmento 3. Como resultado, encontramos

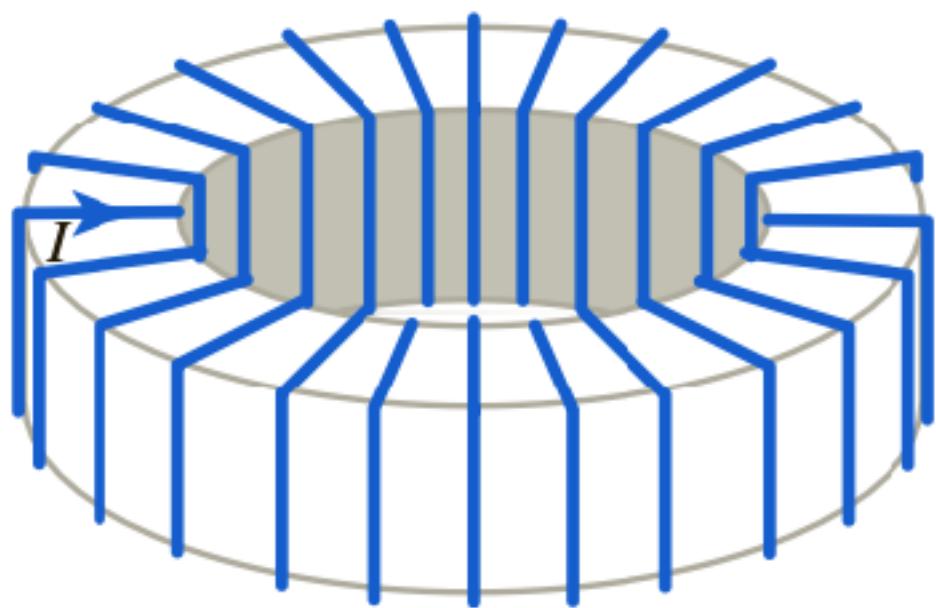
$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_1 \vec{B} \cdot d\vec{l} = Bl.$$

- El solenoide tiene n espiras por unidad de longitud, por lo que la corriente que atraviesa la superficie encerrada por la trayectoria es nLI . Por tanto, a partir de la ley de Ampère

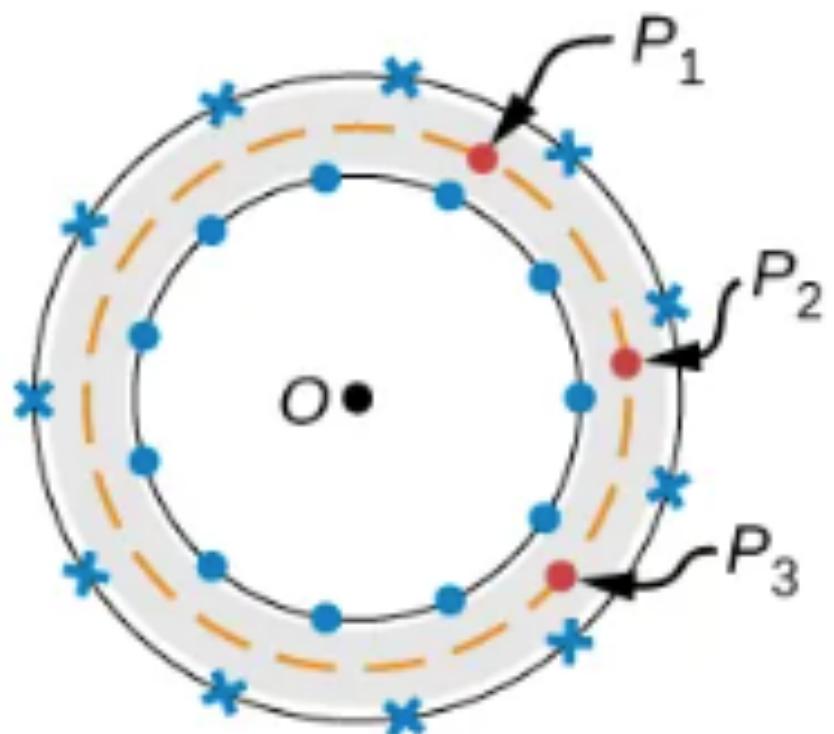
$$Bl = \mu_0 nLI \Rightarrow B = \mu_0 nI$$

Ejemplo

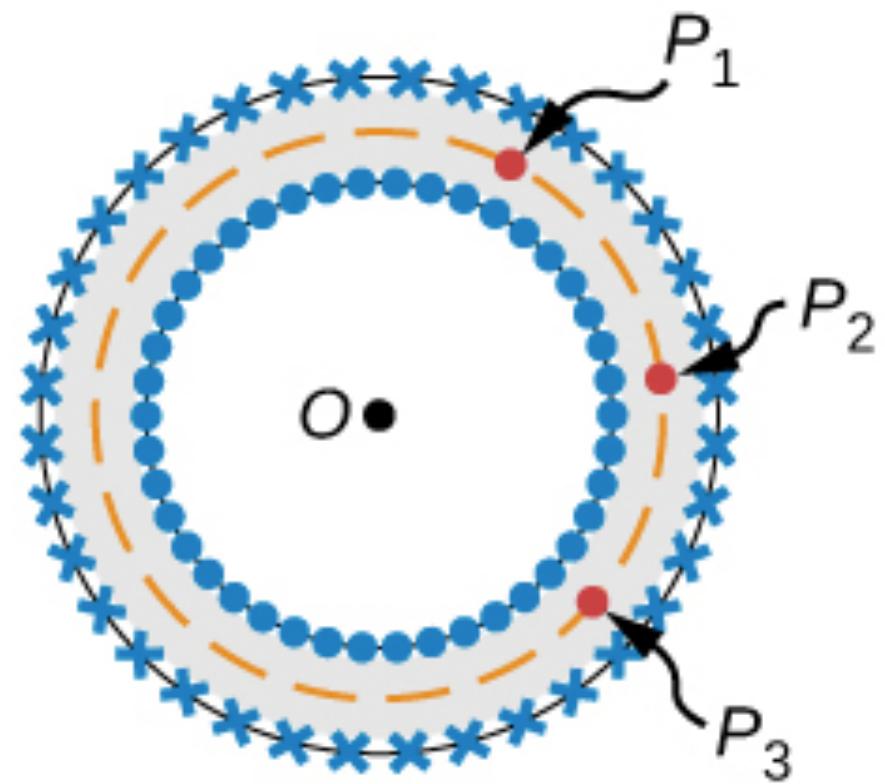
- Un toroide es una bobina en forma de donut estrechamente enrollada con un hilo continuo.
- Si el toroide tiene N espiras y la corriente en las espiras es I ¿cuál es el campo magnético dentro y fuera del toroide?



- Comenzamos suponiendo una simetría cilíndrica alrededor del eje que pasa por O. En realidad, esta suposición no es precisamente correcta, pues como muestra en la figura, la vista de la bobina toroidal varía de un punto a otro (por ejemplo, P_1, P_2 , y P_3) en una trayectoria circular centrada en O.

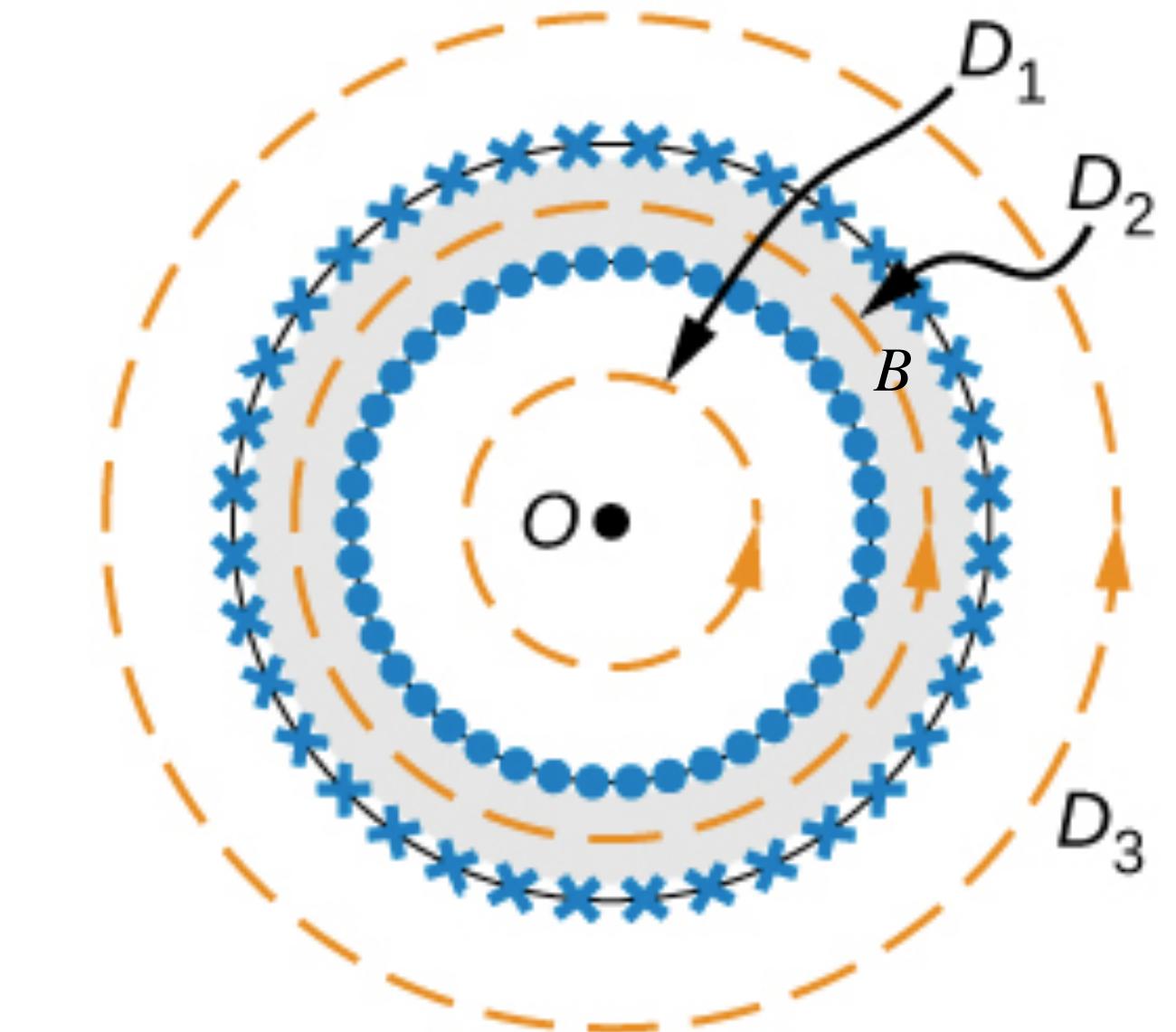


- Sin embargo, si el toroide está fuertemente enrollado, todos los puntos del círculo se vuelven esencialmente equivalentes, y la simetría cilíndrica es una aproximación exacta.



- El campo magnético es tangente y constante en magnitud a lo largo de cualquier trayectoria circular centrada en O . Esto permite escribir para cada una de las trayectorias D_1 , D_2 y D_3 :

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = B(2\pi r)$$



- Para una trayectoria externa, o bien no pasa corriente a través de la superficie circundante (D_1), o la corriente que pasa a través de la superficie en una dirección está exactamente equilibrada por la corriente que pasa a través de ella en la dirección opuesta (D_3).

$$\oint B(2\pi r) = 0 \Rightarrow B = 0$$

- Para la trayectoria circular D_2 , la corriente en el alambre corta la superficie N veces, resultando en una corriente neta NI a través de la superficie.

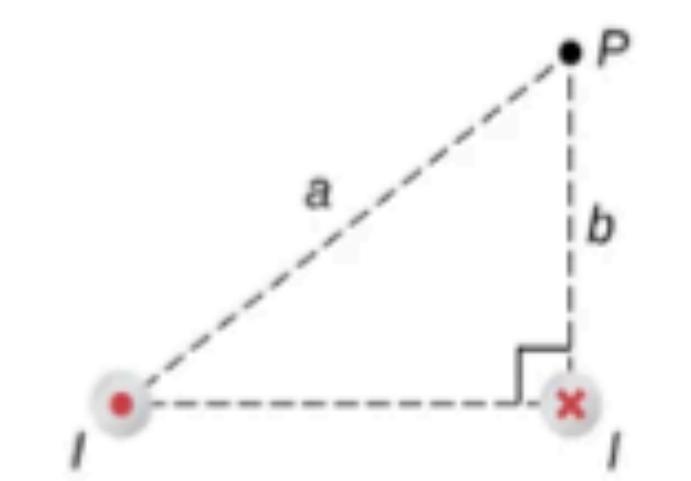
$$B(2\pi r) = \mu_0 NI \quad \Rightarrow \quad B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r}$$

- El campo magnético se dirige en el sentido contrario a las agujas del reloj para el toroide mostrado. Cuando se invierte la corriente, también se invierte la dirección del campo magnético.

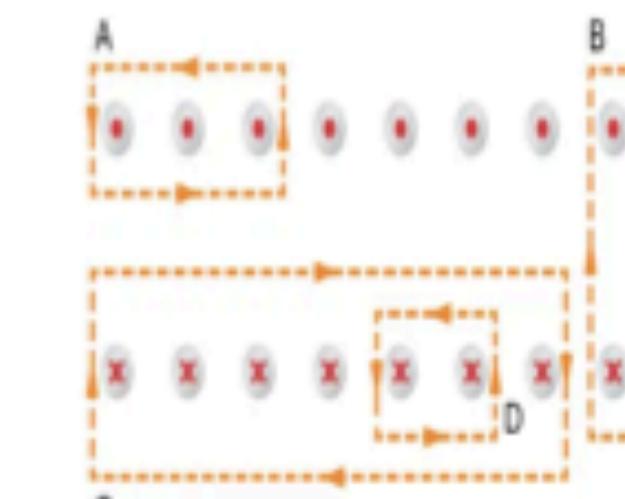
Problemas propuestos - Fuentes de campos magnéticos



(1)



(2)



(3)

1. Por una espira cuadrada de 20 cm de lado circulan 10 amperios. En cada esquina de la espira hay un segmento de 0,01 cm que conecta los hilos más largos como se muestra en la figura 1. Calcular la magnitud del campo magnético en el centro de la espira.

Sol: $5,66 \times 10^{-5}$ T

2. Un circuito con corriente I tiene dos largos tramos de cables paralelos que transportan corriente en sentidos opuestos. Encontrar el campo magnético en un punto P cerca de estos cables que está a una distancia a de un cable y b desde el otro cable como se muestra en la figura 2.

Sol: $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a^2 b} \left((a_2 + b_2) \hat{i} + b\sqrt{(a^2 - b^2)} \hat{j} \right)$

3. La bobina cuya sección transversal longitudinal se muestra en la figura 3 lleva una corriente I y tiene N espiras uniformemente espaciadas distribuidas a lo largo de la longitud ℓ . Evalúe $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l}$ para las trayectorias indicadas.

Sol: A: $3\mu_0 I$; B: 0; C: $7\mu_0 I$; D: $-2\mu_0 I$

4. Dos bobinas circulares planas, cada una de radio R y enrolladas con N espiras, están montadas a lo largo del mismo eje de forma que son paralelas a una distancia d entre sí. Cuál es el campo magnético en el punto medio del eje común si una corriente I fluye en la misma dirección a través de cada bobina?

Sol: $B = \frac{\mu_0 I R^2 N}{\left(\left(\frac{d}{2}\right)^2 + R^2\right)^{3/2}}$