Física 2

Módulo 4: Campos magnéticos

Héctor Hernández - 2025

XI. Inducción magnética

1. Ley de Gauss para $\vec{B}$
2. Ley de Faraday
3. Inductancia
4. Generador AC-DC

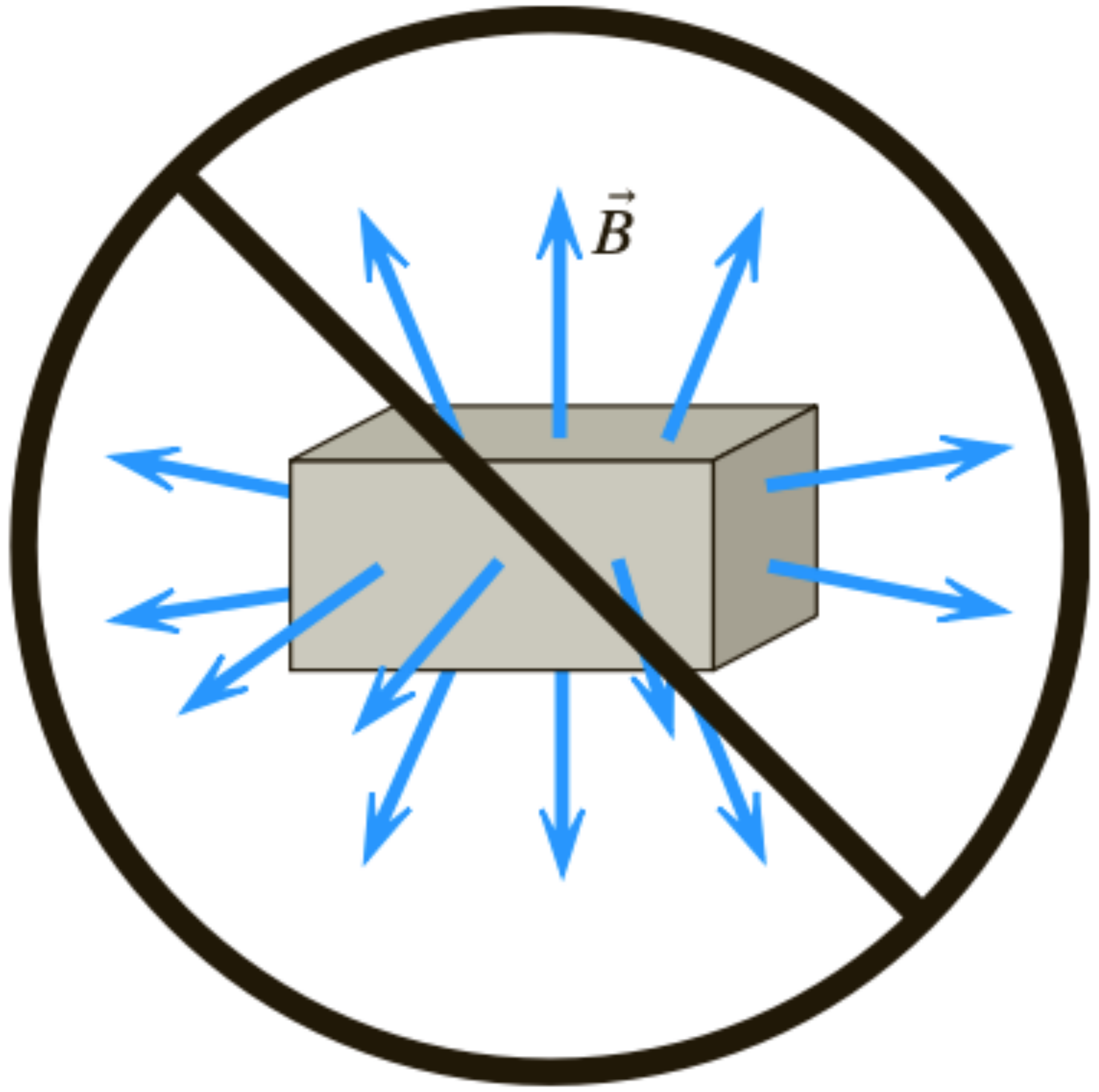
1. Ley de Gauss para el campo magnético

- Existe una gran diferencia entre los dipolos eléctricos y los magnéticos. Las cargas eléctricas positivas y negativas individuales ("monopolos") que componen un dipolo eléctrico pueden separarse entre sí, y estas cargas puntuales crean campos eléctrico.

- Cabría esperar que un dipolo magnético, como un imán de barra, estuviera formado por monopolos magnéticos positivos y negativos.

  - Un monopolo magnético crearía presumiblemente un campo magnético hacia fuera o hacia dentro, pero nunca se ha observado un patrón de campo magnético de este tipo.

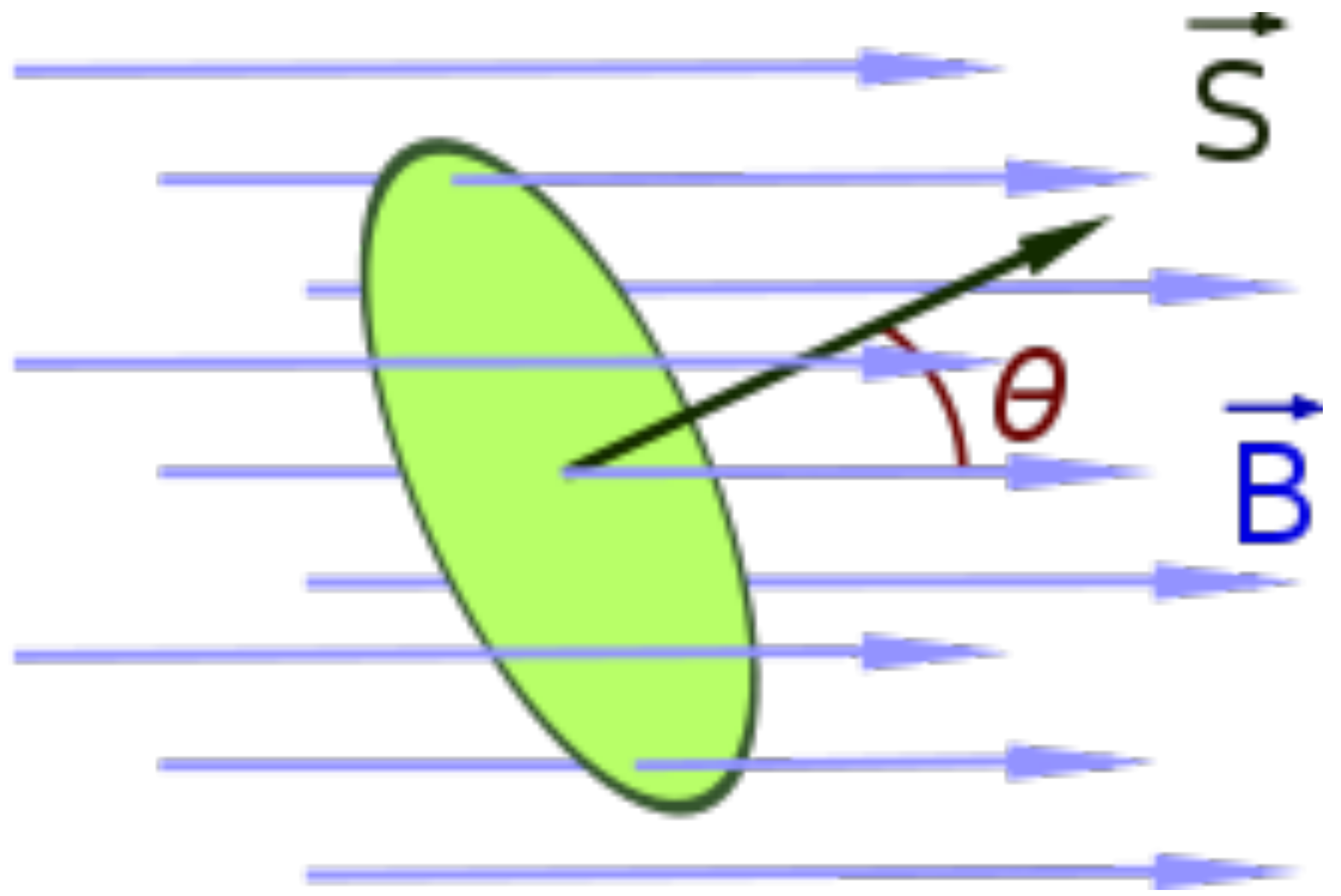
  - La no observación de un patrón de campo monopolar puede expresarse como una "ley de Gauss" para el magnetismo: el flujo neto del campo magnético $\vec{B}$ sobre una superficie cerrada es igual a la "carga magnética" (inexistente) en su interior.



$$\oint \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

Flujo Magnético



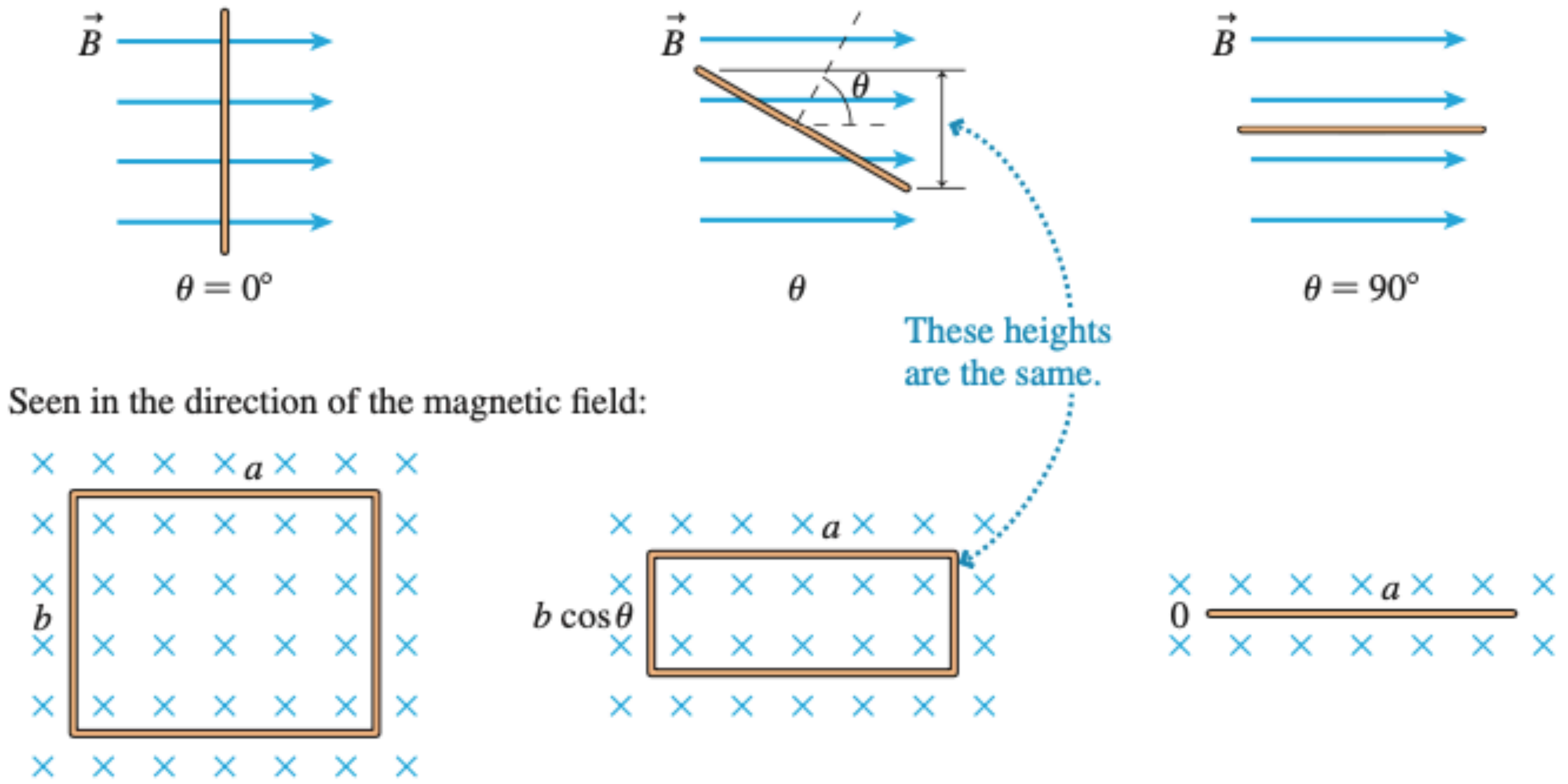
- El flujo magnético es una medida de la cantidad de magnetismo, y se calcula a partir del campo magnético, la superficie sobre la cual actúa y el ángulo de incidencia formado entre las líneas de campo magnético y los diferentes elementos de dicha superficie.

- La unidad de flujo magnético en el Sistema Internacional de Unidades es el weber y se designa por Wb

$$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S}$$

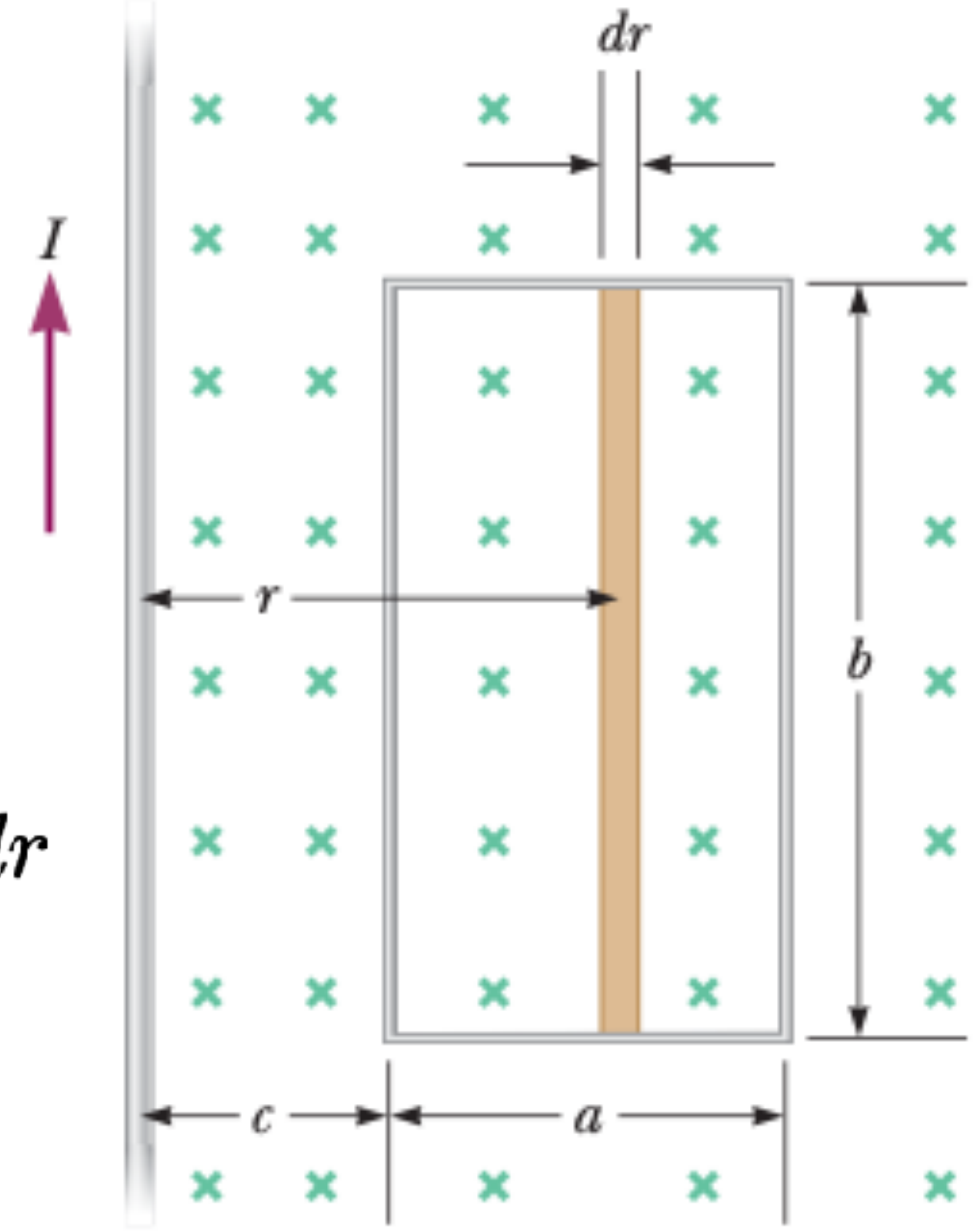
$$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = |\vec{B}||\vec{S}| \cos(\theta)$$

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$



Ejemplo

- Una espira rectangular de ancho a y longitud b se ubica cerca de un alambre largo que conduce una corriente I.
- La distancia entre el alambre y el lado más cercano de la espira es c. El alambre es paralelo al lado largo de la espira.
- Encontrar el flujo magnético total a través de la espira debido a la corriente en el alambre.



$$\Phi_B = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int BdS = \int \frac{\mu_0 I}{2\pi r} dS$$

$$dS = bdr$$

$$\Phi_B = \int \frac{\mu_0 I}{2\pi r} bdr = \frac{\mu_0 Ib}{2\pi} \int \frac{dr}{r}$$

$$= \frac{\mu_0 Ib}{2\pi} \int_c^{a+c} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 Ib}{2\pi} \ln r \Big|_c^{a+c} = \frac{\mu_0 Ib}{2\pi} (\ln[a+c] - \ln[c])$$

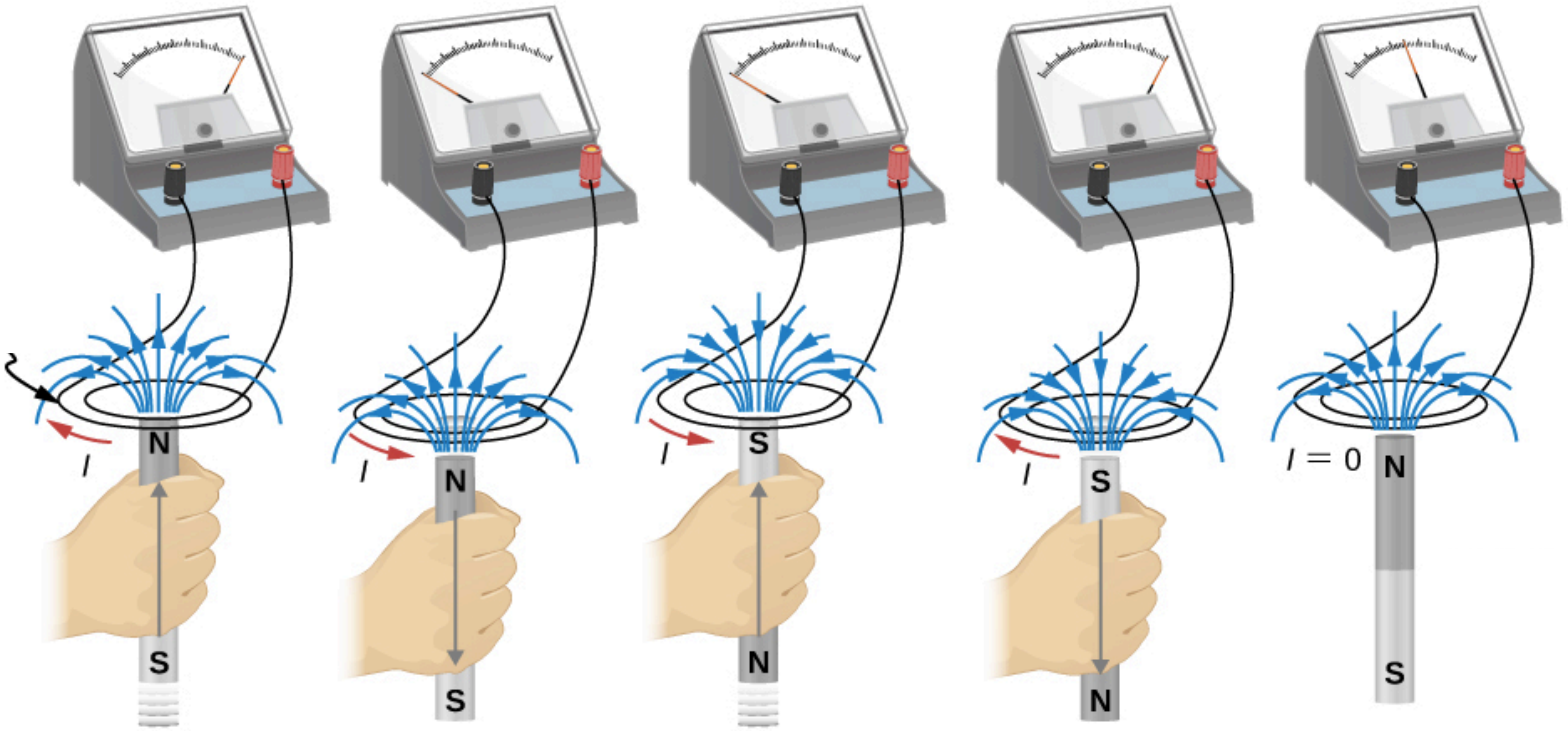
$$= \frac{\mu_0 Ib}{2\pi} \ln\left[\frac{a+c}{c}\right] = \frac{\mu_0 Ib}{2\pi} \ln\left[1 + \frac{a}{c}\right]$$

2. Ley de Faraday

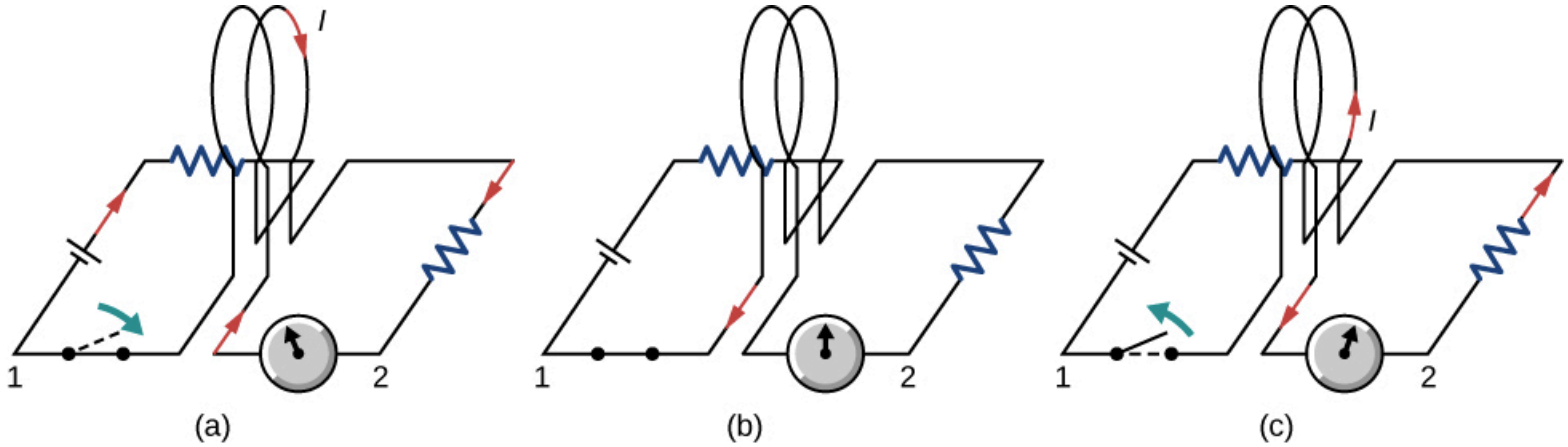
- Hemos considerado los campos eléctricos y magnéticos como entidades separadas: las cargas estacionarias crean campos eléctricos y los campos eléctricos afectan a otras cargas.
- Las cargas en movimiento crean campos magnéticos además de campos eléctricos, y los campos magnéticos afectan a otras cargas en movimiento.

- Sin embargo, veremos que existe una conexión entre los campos eléctricos y magnéticos que no habíamos sospechado anteriormente.

- En el laboratorio se puede comprobar que si hay un campo magnético variable en el tiempo en una región del espacio, también hay un campo eléctrico en toda esa región y en las regiones circundantes.



- Se induce una *fem* cuando el campo magnético de la bobina cambia al empujar una barra magnética hacia dentro o hacia fuera de la bobina.Las cargas en movimiento crean campos magnéticos además de campos eléctricos, y los campos magnéticos afectan a otras cargas en movimiento.



- Se puede producir un efecto similar utilizando dos circuitos: una corriente cambiante en un circuito induce una corriente en un segundo circuito cercano. Por ejemplo, cuando se cierra el interruptor en el circuito 1 de la figura (a) la aguja del amperímetro del circuito 2 se desvía momentáneamente, lo que indica que se ha inducido un pico de corriente de corta duración en ese circuito.

- La aguja del amperímetro vuelve rápidamente a su posición original, donde permanece. Sin embargo, si ahora se abre repentinamente el interruptor del circuito 1, se observa en el circuito 2 otro pico de corriente de corta duración en dirección opuesta a la anterior.

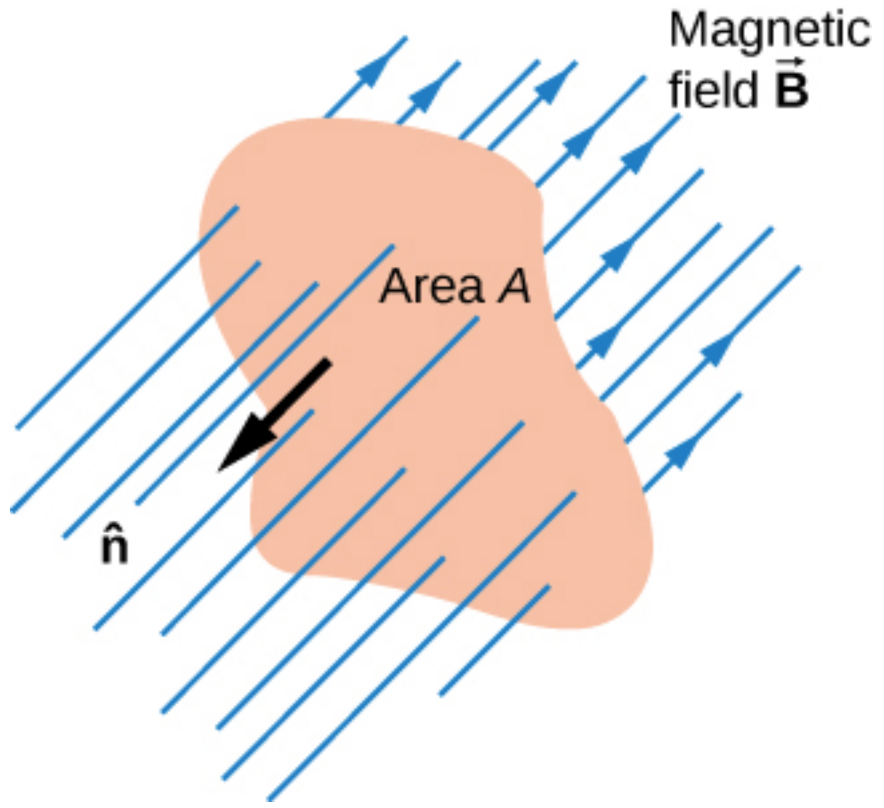
- El hecho experimental de que en presencia de un campo magnético que varía con el tiempo se produce una *fem* cuya magnitud es igual a la velocidad de cambio del flujo magnético se denomina "ley de Faraday" (descubierta por el científico británico Michael Faraday en 1831)

- **Ley de Faraday**: La *fem* ϵ inducida es el cambio negativo en el flujo magnético Φm por unidad de tiempo. Cualquier cambio en el campo magnético o cambio en la orientación del área de la bobina con respecto al campo magnético induce una tensión (*fem*).

- El flujo magnético es una medida de la cantidad de líneas de campo magnético que atraviesan una superficie determinada. Esta definición es similar a la del flujo eléctrico estudiada anteriormente.

$$\Phi_m = \int_S \vec{B} \cdot \hat{n} dA$$

$$1Wb = 1T \cdot m^2$$



- Entonces la *fem* inducida o el voltaje generado por un conductor o bobina que se mueve en un campo magnético es

$$\epsilon = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B} \cdot \hat{n} dA = -\frac{d\Phi_m}{dt}$$

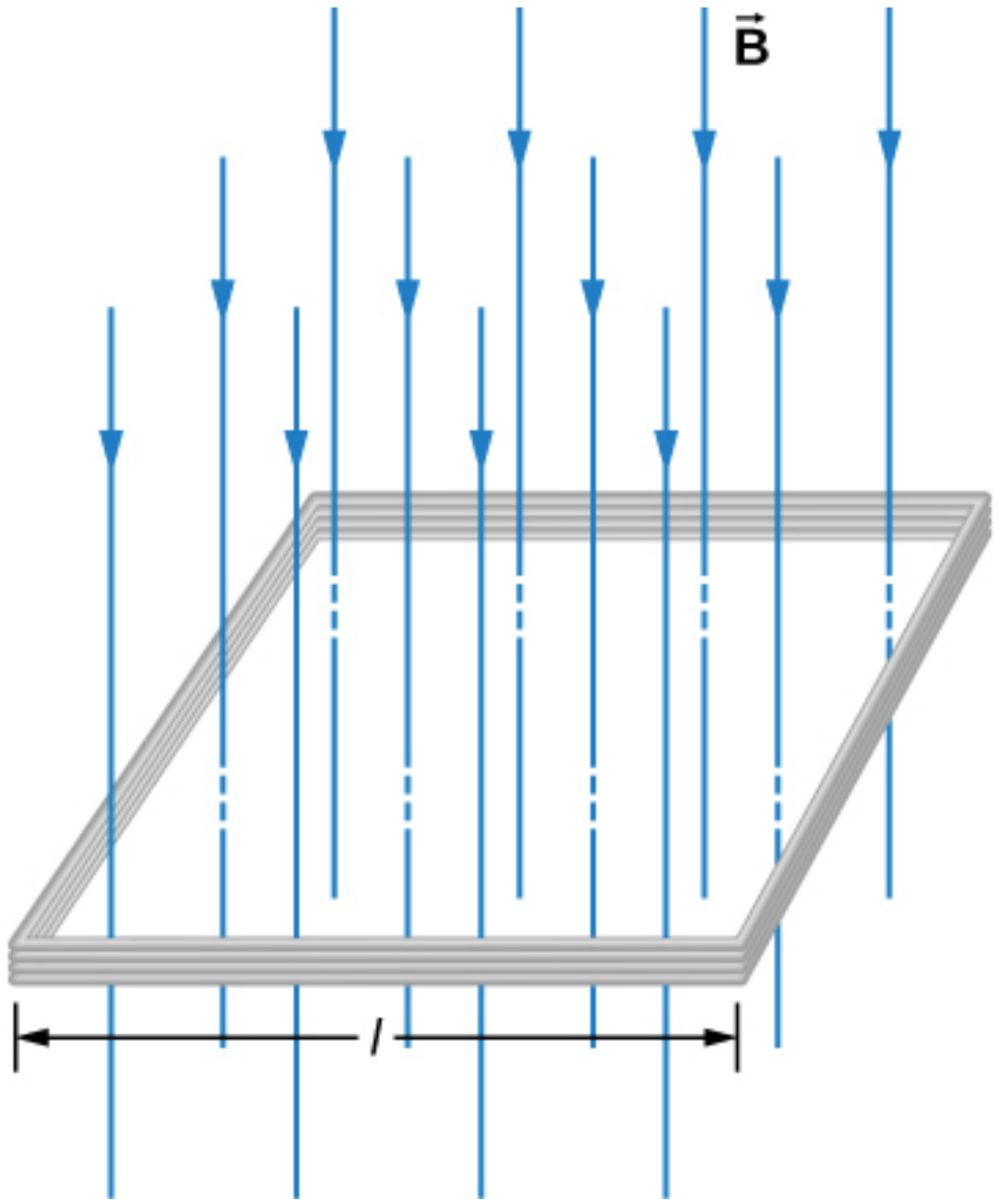
- El signo negativo describe la dirección en la que la *fem* inducida conduce la corriente alrededor de un circuito.
- Esta dirección se determina más fácilmente con una regla conocida como ley de Lenz.

Faraday Demo

Ejemplo

- Una bobina cuadrada tiene lados de l=0,25 m de largo y está fuertemente enrollada con N=200 vueltas de alambre. La resistencia de la bobina es R=5,0 Ω.

- La bobina está situada en un campo magnético espacialmente uniforme que se dirige perpendicularmente a la cara de la bobina y cuya magnitud decrece a una velocidad $d\,B/dt$=-0,040 T/s.
- (a) ¿Cuál es la magnitud de la *fem* inducida en la bobina?
- (b) ¿Cuál es la magnitud de la corriente que circula por la bobina?



$$\Phi_m = BA = Bl^2$$

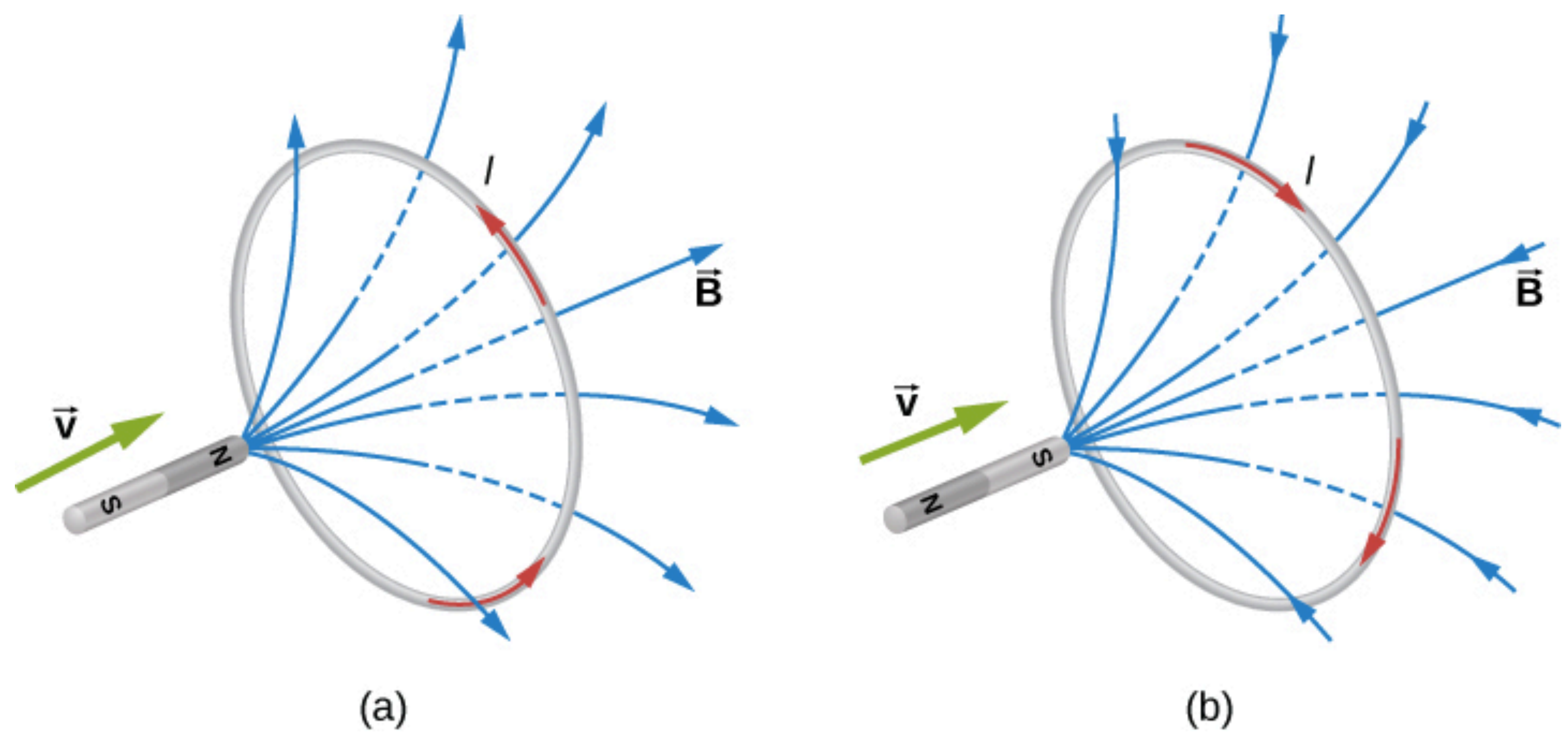
$$\epsilon = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B}\cdot\hat{n}dA = -\frac{d\Phi_m}{dt} \Rightarrow |\epsilon| = \left|-N\frac{d\Phi_m}{dt}\right| = Nl^2\frac{dB}{dt}$$

$$= (200)(0.25\text{ m})^2(0.040\text{ T/s}) = 0.50\text{ V}$$

$$I = \frac{\epsilon}{R} = \frac{0.50\text{ V}}{5.0\Omega} = 0.10\text{ A}$$

- **Ley de Lenz**: Existe una corriente inducida en una espira cerrada y conductora si y sólo si el flujo magnético que atraviesa la espira cambia. La dirección de la corriente inducida es tal que el campo magnético inducido se opone al cambio de flujo.

- En términos de conservación de la energía, al empujar un imán en una bobina se induce corriente, y la energía de esa corriente debe haber salido de alguna parte.
- Si la corriente inducida provoca un campo magnético opuesto al aumento de campo del imán que empujamos, entonces la situación está clara: empujamos un imán contra un campo e hicimos trabajo en el sistema, y por eso apareció como corriente.



- Si no fuera el caso que el campo inducido se opone al cambio en el flujo, el imán sería empujado produciendo una corriente sin que nada hubiera hecho trabajo. Se habría creado energía potencial eléctrica, violando la conservación de la energía.

- El flujo puede cambiar cuando:
- 1. El campo magnético que atraviesa la espira cambia (aumenta o disminuye),
- 2. La espira cambia de área o de ángulo,
- 3. La espira entra o sale de un campo magnético.

- Para determinar una *fem* inducida ϵ primero se calcula el flujo magnético Φm y luego se obtiene $\frac{d\Phi_m}{dt}$

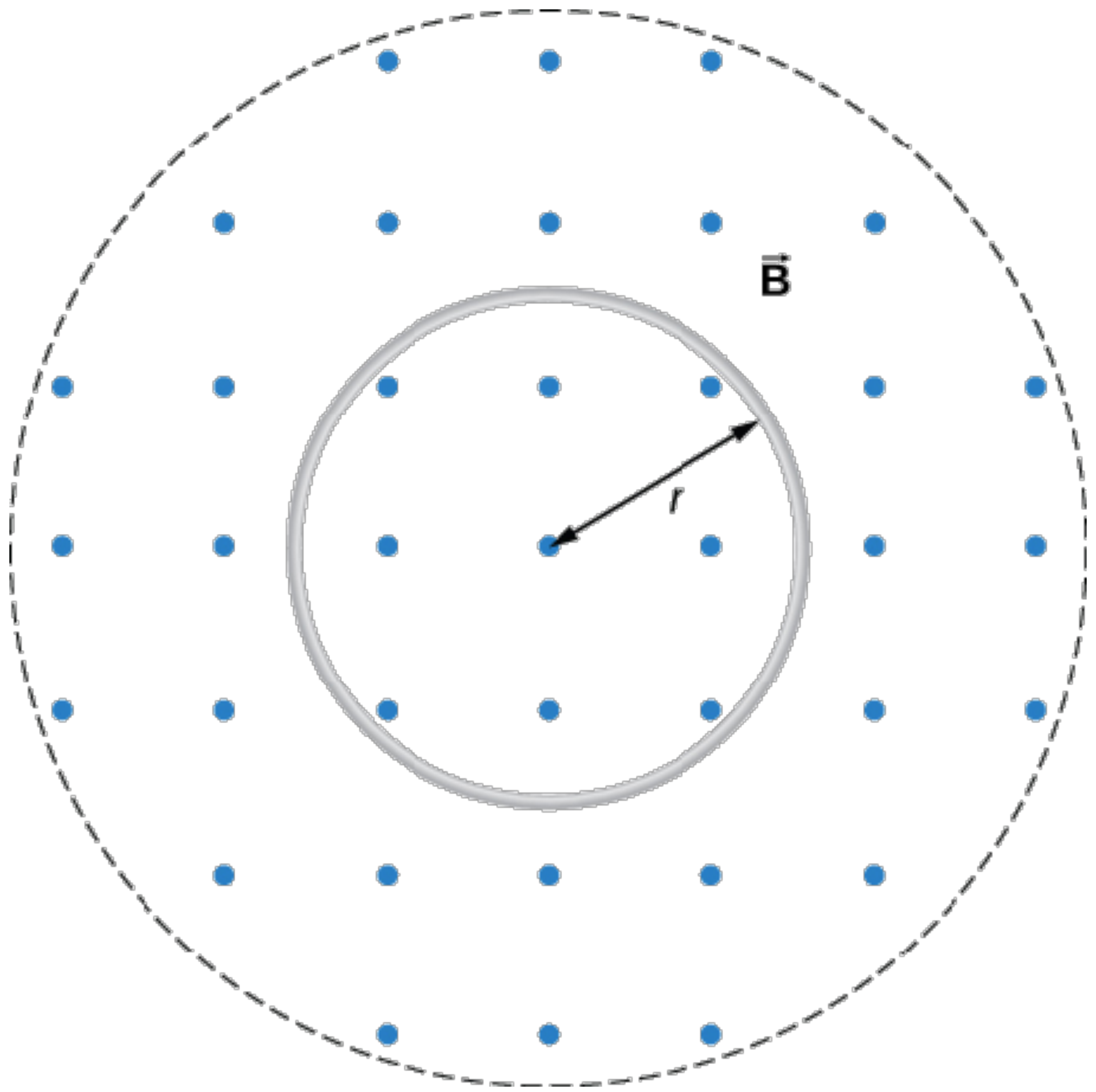
- Por lo tanto: $\epsilon = \left|\frac{d\Phi_m}{dt}\right|$

- El signo vendrá dado por la dirección de la fuerza magnética
- Al aplicar la ley de Lenz se puede determinar el sentido de ϵ

Ejemplo

Un campo magnético $\vec{B}$ se dirige hacia el exterior perpendicularmente al plano de una bobina circular de radio $r = 0,50$ m El campo es cilíndricamente simétrico con respecto al centro de la bobina, y su magnitud decae exponencialmente según $B = (1,5)e^{-5,0t}$ donde B está en teslas y t en segundos.

(a) Calcular la fem inducida en la bobina en los tiempos $t_1 = 0, t_2 = 5,0 \times 10^{-2}$ s y $t_3 = 1,0$ s.
(b) Determine la corriente en la bobina en estos tres tiempos si su resistencia es 10Ω



- Dado que $\vec{B}$ es perpendicular al plano de la bobina, el flujo magnético es:

$$\Phi_m = B\pi r^2 = \left(1,5e^{-5,0t}\right)\pi(0.50)^2 = 1,2e^{-(5,0)t}\ Wb$$

- A partir de la ley de Faraday, la magnitud de la *fem* inducida es

$$\epsilon = \left|\frac{d\Phi_m}{dt}\right| = \left|\frac{d}{dt}\left(1,2e^{-(5,0)t}\right)\right| = 6,0e^{-(5,0)t}\ V$$

- Como $\vec{B}$ se dirige hacia fuera de la página y es decreciente, la corriente inducida debe fluir en sentido anti-horario visto desde arriba, de modo que el campo magnético que produce a través de la bobina también apunta hacia fuera de la página.
- Para los tres tiempos, el sentido de ε es anti-horario; sus magnitudes son

$$\epsilon(t_1) = 6,0\text{ V};\ \epsilon(t_2) = 4,7\text{ V};\ \epsilon(t_3) = 0,040\text{ V}$$

- A partir de la ley de Ohm, las corrientes respectivas son:

$$I(t_1) = \frac{\epsilon(t_1)}{R} = \frac{6,0\text{ V}}{10\Omega} = 0,60\text{ A}$$
$$I(t_2) = \frac{\epsilon(t_2)}{R} = \frac{4,7\text{ V}}{10\Omega} = 0,47\text{ A}$$
$$I(t_3) = \frac{\epsilon(t_3)}{R} = \frac{0,040\text{ V}}{10\Omega} = 4,0 \times 10^{-3}\text{ A}$$

Ejemplo

- La corriente que atraviesa las bobinas de un solenoide con *n*=2000 vueltas por metro cambia a una velocidad *dI*/*dt*=3,0 *A*/*s*.
- El solenoide tiene una longitud de 50 cm y un diámetro transversal de 3,0 cm. En el centro del solenoide se coloca una pequeña bobina formada por *N*=20 espiras estrechamente enrolladas en un círculo de diámetro 1,0 cm, de forma que el plano de la bobina es perpendicular al eje central del solenoide.
- Suponiendo que la aproximación infinito-solenoide es válida en el lugar de la pequeña bobina, determine la magnitud de la *fem* inducida en la bobina.

- Dado que el campo del solenoide viene dado por $B=\mu_0 nI$ el flujo a través de cada vuelta de la pequeña bobina es

$$\Phi_m = \mu_0 n I \left(\frac{\pi d^2}{4} \right)$$

- donde *d* es el diámetro de la bobina pequeña . A partir de la ley de Faraday, la magnitud de la *fem* inducida en la bobina es

$$\epsilon = \left| N \frac{d\Phi_m}{dt} \right| = \left| N \mu_0 n \frac{\pi d^2}{4} \frac{dI}{dt} \right|$$

$$= 20 \left(4\pi \times 10^{-7} T \cdot \mathrm{m/s}\right) \left(2000\ \mathrm{m}^{-1}\right) \frac{\pi (0,010\ \mathrm{m})^2}{4} (3,0\ \mathrm{A/s}) = 1,2 \times 10^{-5}\ \mathrm{V}.$$

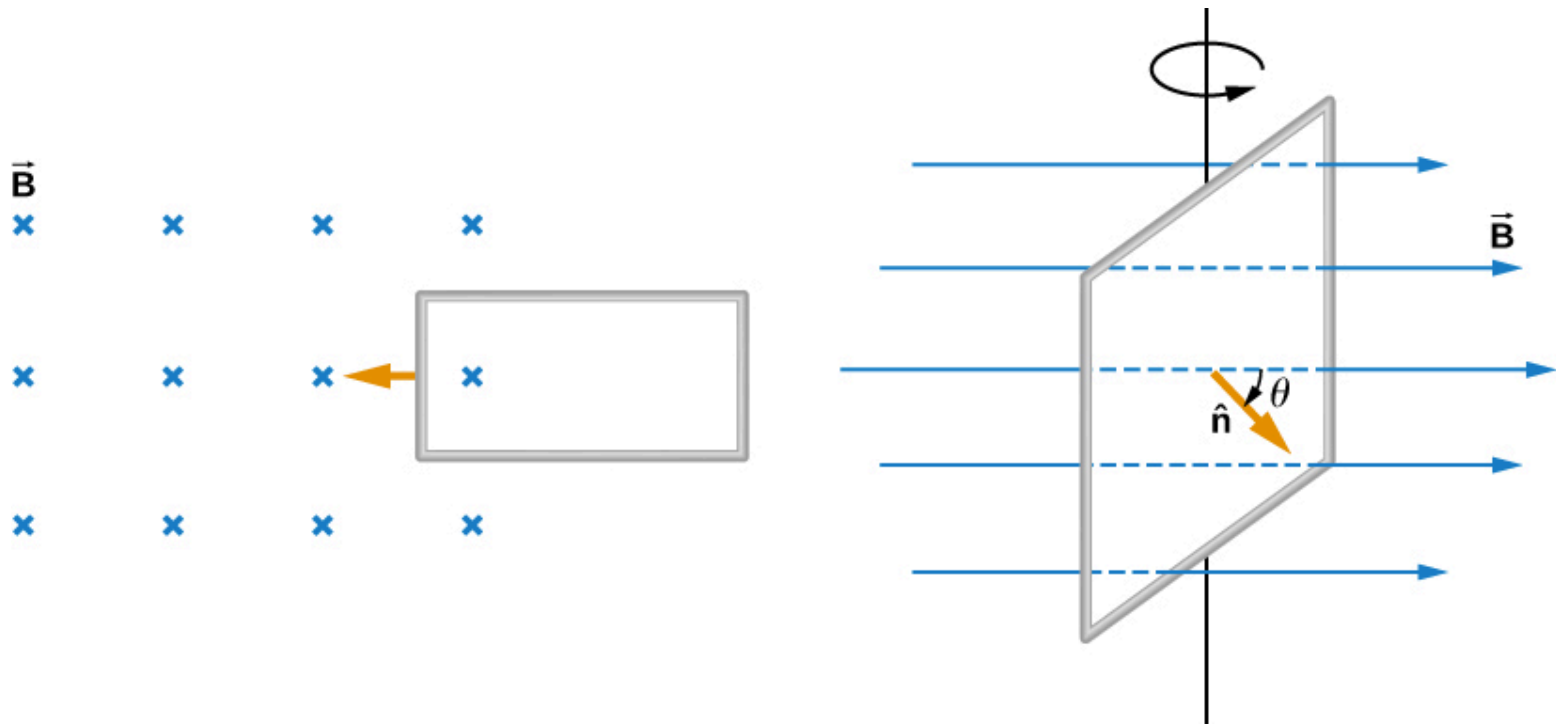
- Cuando se activa la corriente en un solenoide vertical el anillo tiene una *fem* inducida del flujo magnético cambiante del solenoide que se opone al cambio. El resultado es que el anillo se dispara verticalmente en el aire.

Una *fem* inducida por movimiento

- El flujo magnético depende de tres factores: la intensidad del campo magnético, la superficie por la que pasan las líneas de campo y la orientación del campo con la superficie. Si varía cualquiera de estas magnitudes, se produce la correspondiente variación del flujo magnético

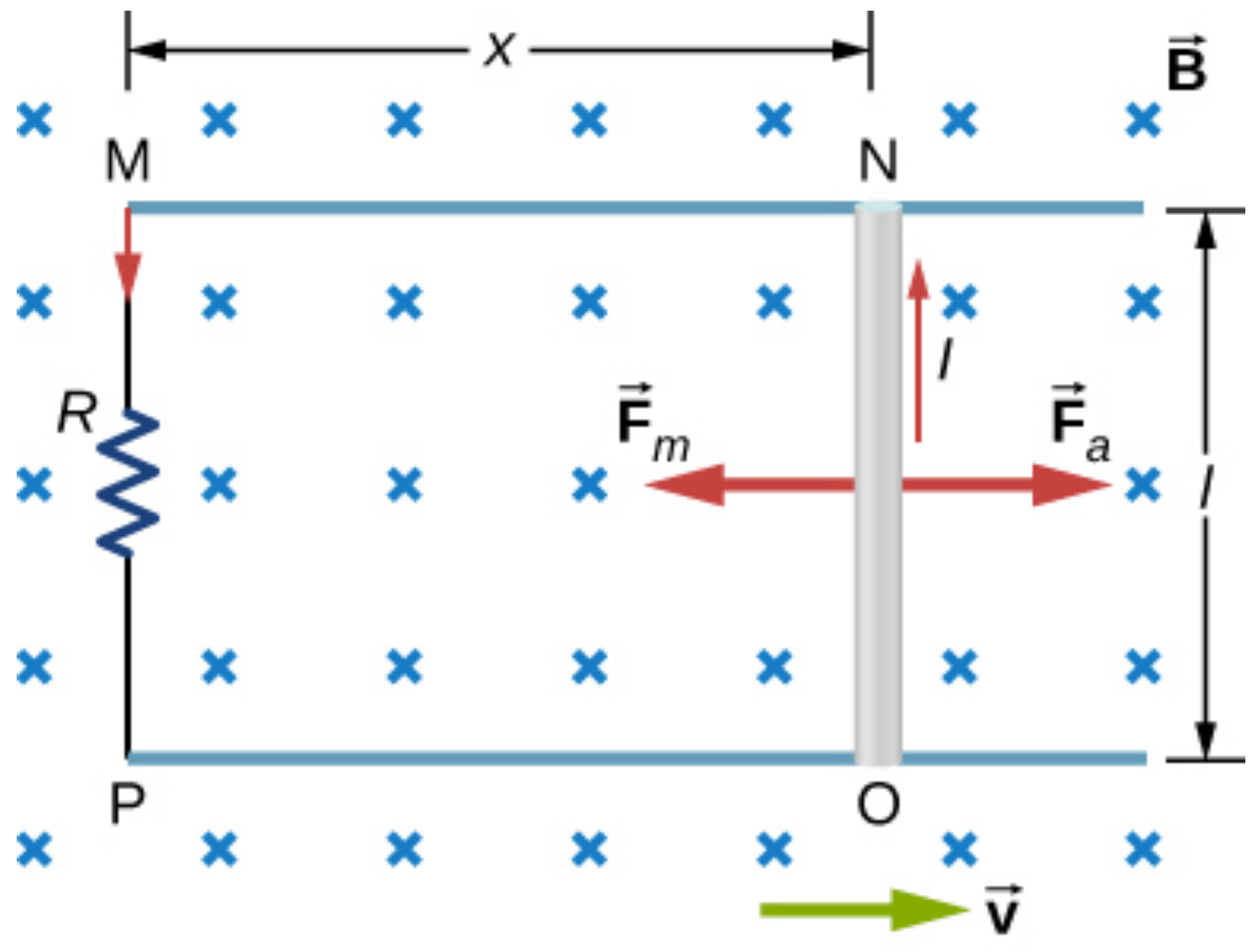
- Un cambio de flujo concreto depende en realidad del marco de referencia que elijamos. Por ejemplo, si usted está en reposo con respecto a las bobinas en movimiento verá variar el flujo debido a un campo magnético cambiante.

- Port razones de simplicidad usaremos siempre un marco en reposo relativo al laboratorio y explicaremos las variaciones de flujo como debidas a un cambio de campo o a un cambio de área.



- Consideremos una varilla conductora móvil en un circuito que va cambiando el flujo magnético a medida que se mueve.
- El área encerrada por el circuito "MNOP" es lx y como vector es paralelo al campo magnético, por lo que podemos simplificar la integración de

$$\Phi_{\mathrm{m}} = \int_S \vec{\mathbf{B}} \cdot \hat{\mathbf{n}} dA = Blx$$



- Por la ley de Faraday

$$\epsilon = \frac{d\Phi_m}{dt} = Bl\frac{dx}{dt} = Blv$$

$$I = \frac{Blv}{R}$$

- Desde una perspectiva energética, $\vec{F}a$ produce energía Fav , y la resistencia disipa esa energía. Dado que la varilla se mueve a velocidad constante, la fuerza aplicada Fa debe equilibrar la fuerza magnética $Fm=IlB$ sobre la varilla cuando ésta lleva la corriente inducida I. Por lo tanto la potencia producida es

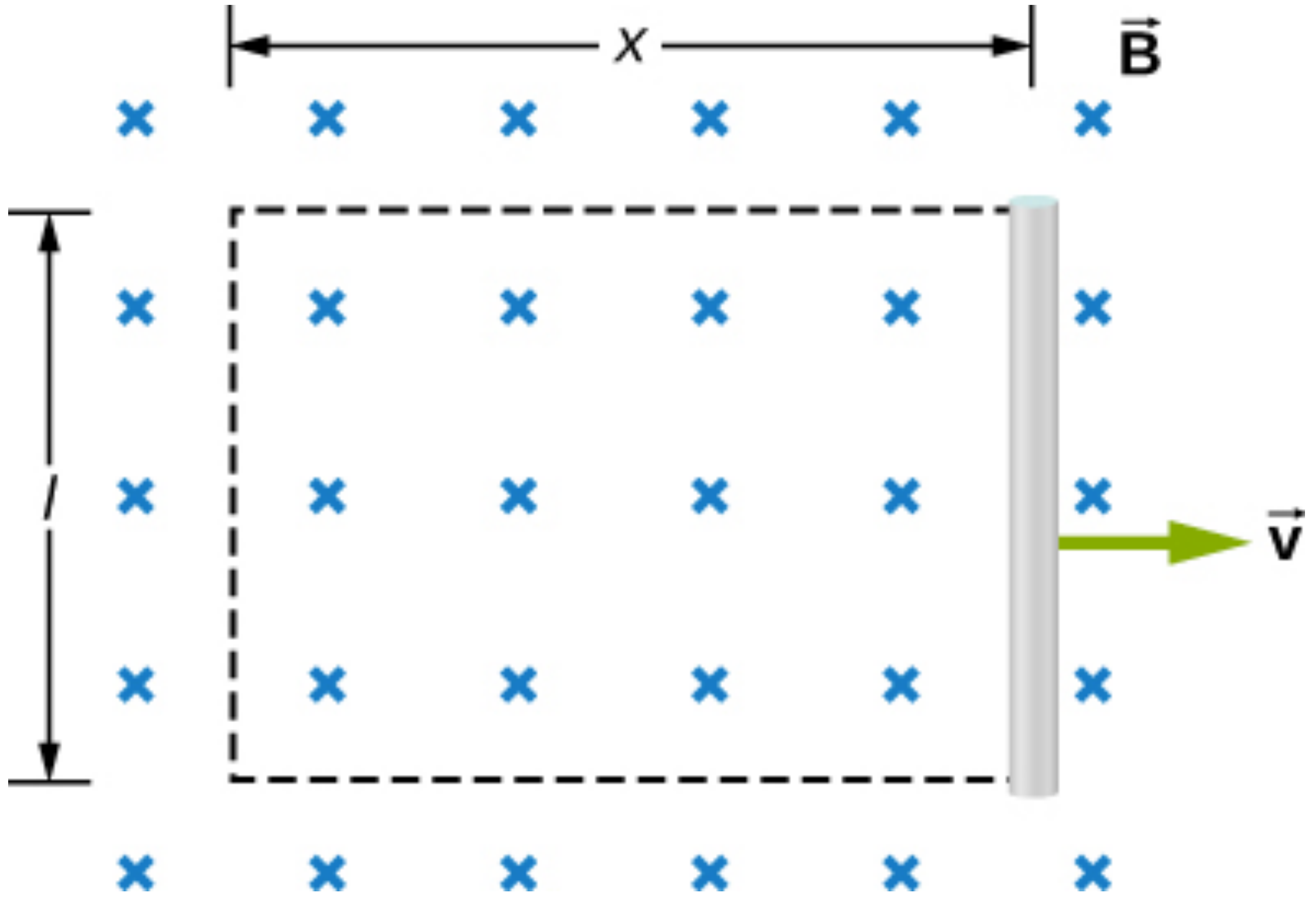
$$F_a v = IlBv = \frac{Blv}{R} \cdot lBv = \frac{l^2 B^2 v^2}{R}$$

- Notemos que la potencia disipada por la resistencia es

$$P = I^2 R = \left(\frac{Blv}{R}\right)^2 R = \frac{l^2 B^2 v^2}{R}$$

- Podemos calcular una *fem* inducida por movimiento con la ley de Faraday incluso cuando no existe un circuito cerrado real. Simplemente imaginemos un área cerrada cuyo límite incluya el conductor en movimiento, calculemos Φm y, a continuación, hallamos la *fem* a partir de la ley de Faraday.
- Podemos imaginar que la varilla móvil de la figura sea uno de los lados del área rectangular imaginaria representada por las líneas discontinuas. El área del rectángulo es lx, por lo que el flujo magnético que lo atraviesa es

$$\Phi_{\mathrm{m}} = \int_S \vec{\mathbf{B}} \cdot \hat{\mathbf{n}} dA = Blx$$



- Derivando

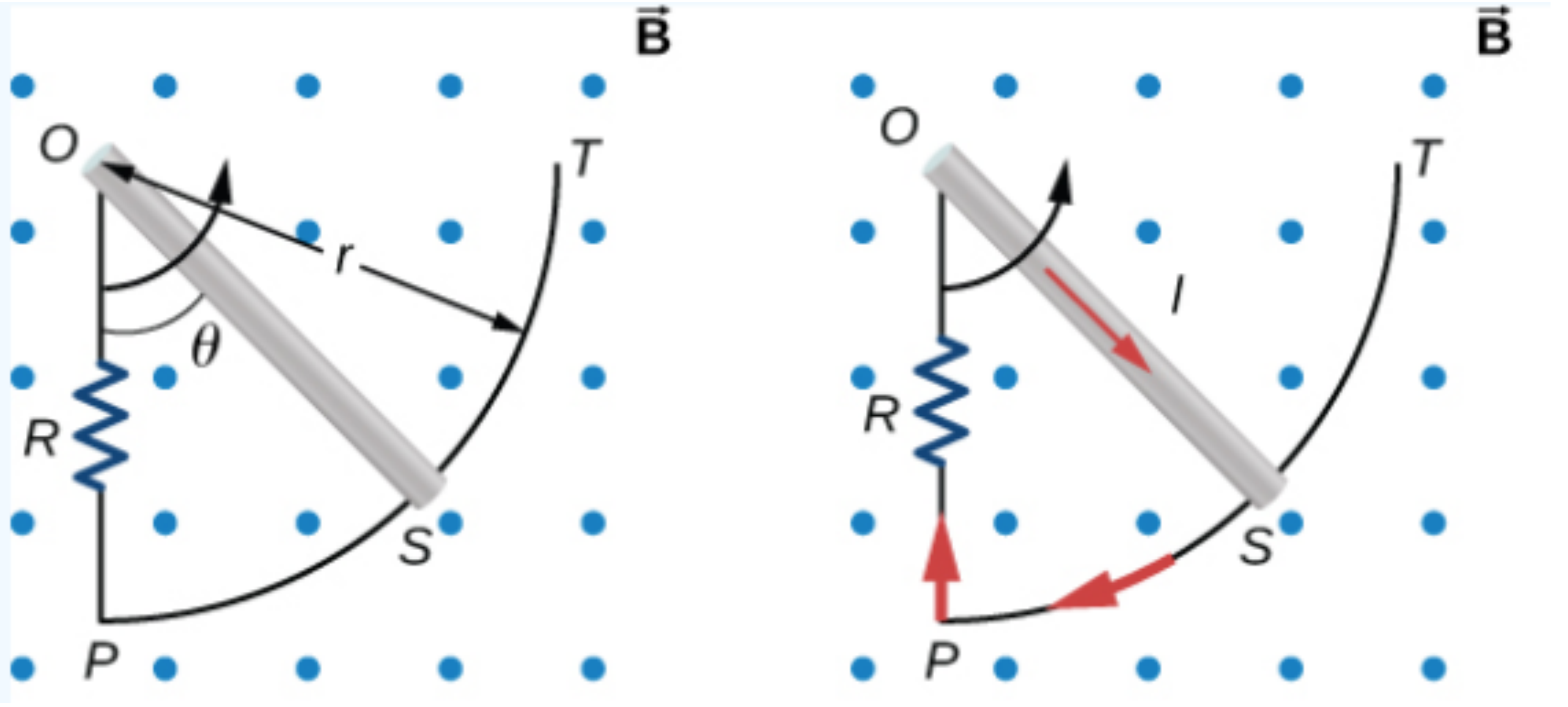
$$\frac{d\Phi_m}{dt} = Bl\frac{dx}{dt} = Blv$$

- Las *fem* inducida por movimiento en el débil campo magnético de la Tierra no suelen ser muy grandes, pues de lo contrario notaríamos tensión a lo largo de varillas metálicas, como un destornillador, durante movimientos ordinarios.
- Por ejemplo, un simple cálculo para una varilla de 1,0 m que se desplaza a 3,0 m/s perpendicularmente al campo terrestre da como resultado

$$\epsilon = Blv = \left(5,0 \times 10^{-5}\ \mathrm{T}\right)(1,0\ \mathrm{m})(3,0\ \mathrm{m/s}) = 150\mu\mathrm{V}$$

Ejemplo

- La figura muestra una varilla metálica OS que está rotando en un plano horizontal alrededor del punto O. La varilla se desliza a lo largo de un alambre que forma un arco circular PST de radio r. El sistema está en un campo magnético constante $\vec{B}$.
- (a) Si se hace girar la varilla con una velocidad angular constante ω, ¿cuál es la corriente I en el lazo cerrado OPSO?
- Suponga que la resistencia R proporciona toda la resistencia en el bucle cerrado.
- (b) Calcule el trabajo por unidad de tiempo que realiza al girar la varilla y demuestre que es igual a la potencia disipada en la resistencia.



$$A = \frac{r^2\theta}{2} \qquad \omega = \frac{d\theta}{dt}$$

$$\Phi_m = BA = B\frac{r^2\theta}{2}$$

$$\epsilon = \left|\frac{d\Phi_m}{dt}\right| = \frac{Br^2\omega}{2}$$

$$I = \frac{\epsilon}{R} = \frac{Br^2\omega}{2R}$$

$$P = IR = \left(\frac{Br^2\omega}{2R}\right)^2 R = \frac{B^2r^4\omega^2}{4R}$$

Campos eléctricos inducidos

- El hecho de que se induzca una *fem* en los circuitos implica que se está realizando trabajo sobre los electrones conductores de los cables ¿Cuál puede ser la fuente de este trabajo?

- Sabemos que no es ni una pila ni un campo magnético, ya que una pila no tiene por qué estar presente en un circuito en el que se induce corriente, y los campos magnéticos nunca realizan trabajo sobre cargas en movimiento. La respuesta es que la fuente del trabajo es un campo eléctrico $\vec{E}$ que se induce en los cables. El trabajo realizado por $\vec{E}$ al mover una carga unitaria completamente alrededor de un circuito es la *fem* inducida ε es decir,

$$\epsilon = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

- donde $\oint$ representa la integral de línea alrededor del circuito.

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_m}{dt}$$

$$\underbrace{\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} \neq 0}_{\text{Campo Eléctrico Inducido}}$$

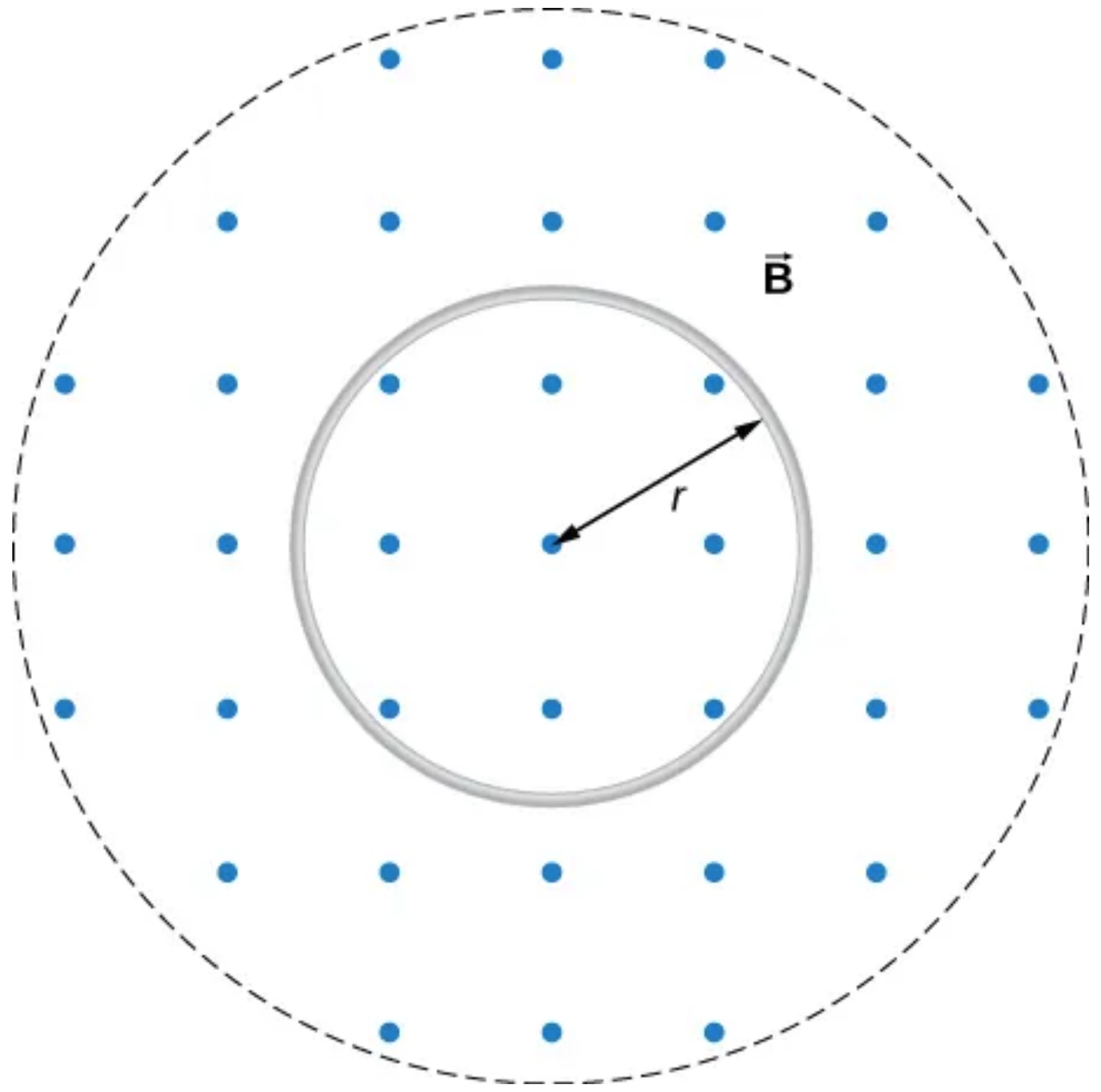
- El campo eléctrico inducido no es conservativo porque realiza trabajo neto al mover una carga sobre una trayectoria cerrada, mientras que el campo electrostático es conservativo y no realiza trabajo neto sobre una trayectoria cerrada.

$$\underbrace{\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0}_{\text{Campo Eléctrico Electrostático}}$$

- Por lo tanto, el potencial eléctrico puede asociarse con el campo electrostático, pero no con el campo inducido.

Ejemplo

- ¿Cuál es el campo eléctrico inducido en la bobina circular de la figura en los tres instantes $t_1 = 0, t_2 = 5.0 \times 10^{-2}, t_3 = 1.0$ segundos



- El campo eléctrico inducido en la bobina es de magnitud constante sobre la superficie cilíndrica, de forma similar a como se resuelven los problemas de la ley de Ampere con cilindros. Como $\vec{\mathbf{E}}$ es tangente a la bobina,

$$\epsilon = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = \oint E dl = 2\pi r E$$

$$E = \frac{\varepsilon}{2\pi r}$$

- En el ejemplo pasado vimos que:

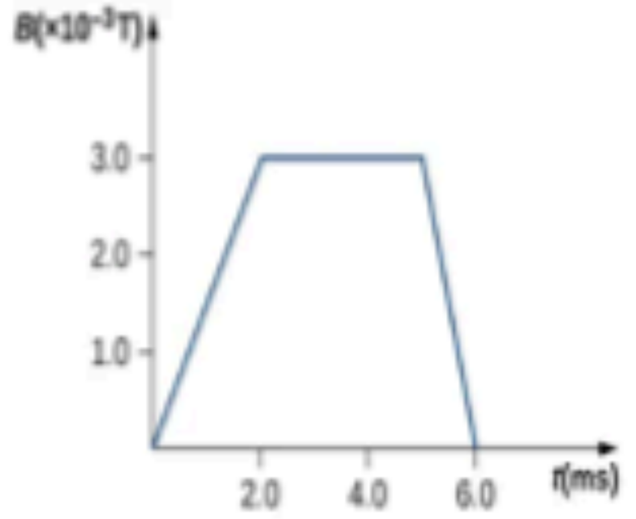
$$\epsilon(t_1) = 6,0 \text{ V};\ \ \epsilon(t_2) = 4,7 \text{ V};\ \ \epsilon(t_3) = 0,040 \text{ V}$$

$$E(t_1) = \frac{6.0 \text{ V}}{2\pi(0.50 \text{ m})} = 1.9 \text{ V/m}$$

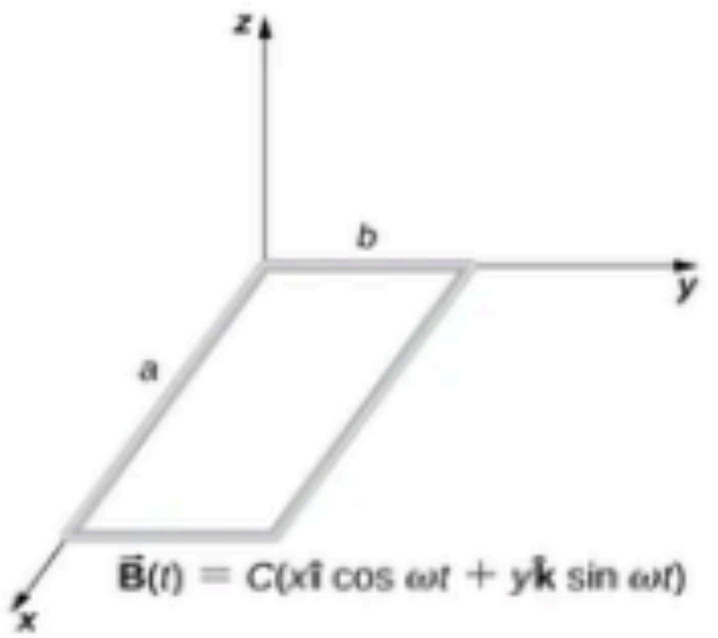
$$E(t_2) = \frac{4.7 \text{ V}}{2\pi(0.50 \text{ m})} = 1.5 \text{ V/m};$$

$$E(t_3) = \frac{0.040 \text{ V}}{2\pi(0.50 \text{ m})} = 0.013 \text{ V/m}$$

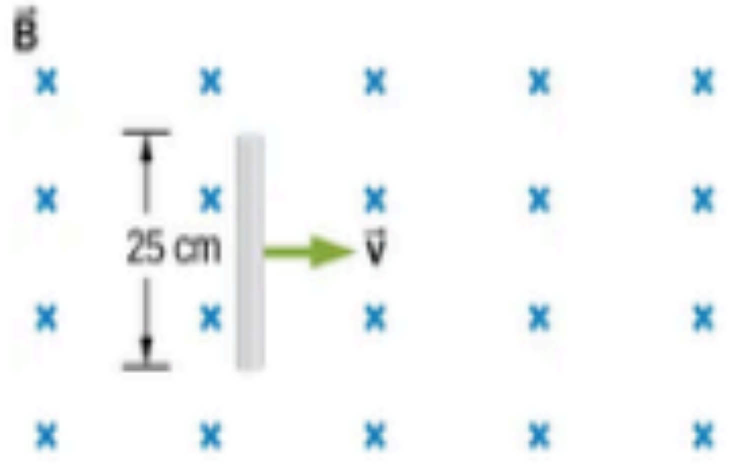
Problemas propuestos - Inducción electromagnética



(1)



(2)



(3)

1. El campo magnético a través de una espira circular de radio 10,0 cm varía con el tiempo como se muestra en la figura 1. El campo es perpendicular a la espira. Represente gráficamente la magnitud de la fem inducida en la espira en función del tiempo.

2. Un bucle de alambre rectangular con longitud a y anchura b se encuentra en el plano xy, como se muestra en la figura 2. Dentro de la espira existe un campo magnético dependiente del tiempo dado por $\vec{B}(t) = C((x\cos\omega t)\hat{\mathbf{i}} + (y\sin\omega t)\hat{\mathbf{k}})$, con $\vec{B}(t)$ en teslas. Determinar la fem inducida en la espira en función del tiempo.

   Sol: $\varepsilon = -\frac{Cab^2\omega\cos(\omega t)}{2}$

3. Una varilla de 25 cm se mueve a 5,0 m/s en un plano perpendicular a un campo magnético de intensidad 0,25 T. La varilla, el vector velocidad y el vector campo magnético son mutuamente perpendiculares, como se indica en la figura 3. Calcule (a) la fuerza magnética sobre un electrón en la varilla, (b) el campo eléctrico en la varilla, y (c) la diferencia de potencial entre los extremos de la varilla. (d) ¿Cuál es la velocidad de la varilla si la diferencia de potencial es de 1,0 V?

   Sol:(a) 2×10^{-19} N; (b) 1,25 V/m; (c) 0,3125 V; (d) 16 m/s