PRÁCTICA 2: SERIES DE POTENCIAS

Objetivos:

1. Hallar el campo y el radio de convergencia de una serie de potencias.
2. Averiguar cuál es la suma de una serie de potencias representando sumas parciales.

1. Radio y campo de convergencia.

Hallar el radio (R) y el campo de convergencia (I) de las siguientes series de potencias:

Serie	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}(x-3)^n$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}(x+1)^n$	$\sum_{n=1}^{\infty} 3^{n^2}(x-1)^n$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x)^n}{(n+1)^{1/3}}$
R				
I				

2. Desarrollo en serie de potencias de una función $f(x)$.

2.1 Sea $f(x) := \hat{e}^x$. En clase se ha demostrado que es el desarrollo en serie de potencias para esta función es

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

y que su campo de convergencia es $\mathbb{R}$.

Las sumas parciales de esta serie $s_k(x)$ se pueden dibujar y ver, como el parecido con $f(x)$ en su campo de convergencia, es cada vez mayor a medida que k crece. Introducir

$$sf(x,k) := sum(x^n/n!, n, 0, k)$$

y representar en la misma ventana la función $f(x)$ y las sumas parciales para $k = 5, 10, 50$. Se puede dibujar directamente `sf(x,5),sf(x,10),...` sin necesidad de simplificarlo. Conservar la ventana.

De hecho Derive nos da la suma de la serie y nos confirma que coincide con la función $f(x)$. Introducir `sf(x,inf)=` para comprobarlo.

Nota: Las sumas parciales de la serie son polinomios de Taylor de la función, por lo que podría utilizarse la orden Taylor(f(x), x, c, n) de Derive para hallarlas. Por ejemplo `Taylor(ê`^{x}`,x,0,3)` daría el mismo resultado que `sf(x,3)`.

2.2 Para $f(x) := \cos x$, el desarrollo en serie de potencias es

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

en $(-\infty, \infty)$, pero en esta ocasión Derive no da la suma de la serie. Verificarlo, redefiniendo la función de sumas parciales $sf(x, k)$ para esta nueva serie y simplificando `sf(x,inf)`.

Como en el ejercicio anterior podemos dibujar sumas parciales con k tan grande como queramos para observar el parecido con $f(x)$ en el campo de convergencia y ver que su límite es $f(x)$.

Abrir una nueva ventana y *Seleccionar>Región: Horizontal (Long=20, Centro=0,Inter=8), Vertical (Long=4, Centro=0, Inter=4)* . Representar $\cos x$ junto a las sumas parciales $s_3(x), s_5(x), s_{10}(x)$ de la correspondiente serie. Conservar la ventana.

2.3 Las series de potencias de la tabla

Serie de potencias	Suma	Campo de convergencia
$\sum_{n=0}^{\infty}(-4)^n(x-\frac{1}{2})^{2n}$		
$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$		(,]
$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)\,(x-1)^n$		(0,)
$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$		
$\sum_{n=0}^{\infty}(-2)^n(n+1)x^n$		
$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$		$[-1, 1]$

son el desarrollo en serie de una de las siguientes funciones:

$\ln(1+x)$	$\sin x$	$\arctan x$	$\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{(2x-1)^2+1}$	$\frac{1}{(2x+1)^2}$

Completar la tabla hallando en primer lugar el campo de convergencia de cada serie y a continuación deduciendo la función suma de cada una a partir de la representación de sumas parciales adecuadas. Conservar las ventanas que justifiquen la respuesta.