PRÁCTICA 6: PROYECCIONES

Objetivos:

1. Obtener productos interiores con Derive
2. Obtener aproximación óptima.
3. Determinar distancia de un vector a un subespacio.

En los dos primeros ejercicios de esta práctica V será el espacio vectorial de las funciones continuas en $[-4,4]$, $w(x) = e^{-x}$ y consideraremos definido sobre V el siguiente producto interior:

$$< f(x)\,,\, g(x)\ >= \int_{-4}^{4} f(x)\,g(x)\,w(x)\,dx$$

Consideraremos también $f0(x) = 5 - x + x^2$. Será conveniente entonces introducir:

```
w(x):=ê^(-x)
pin(f,g):=int(f g w(x),x,-4,4)
f0(x):= 5-x+x^2
```

1. Obtención de proyecciones mediante ecuaciones normales.

1.1 Dar en modo exacto.

$< x^2, x-1 >=$ $\boxed{}$ $< 2x, e^x >=$ $\boxed{}$

$||3e^x|| =$ $\boxed{}$ $||2x-1|| =$ $\boxed{}$

1.2 Sea $W = lin\,\{\,x\,,\,e^x\,\}$ y $B = \{\,x + e^x\,,\,x - e^x\}$ una base de W. En adelante nos referiremos a sus vectores como $g1(x)$ y $g2(x)$.

La proyección de $f0(x)$ sobre W referida a la base B es

$$\mathrm{proy}_W f0(x) = \alpha\, g1(x) + \beta\, g2(x)$$

donde α y β son la solución de las **ecuaciones normales**

$$\begin{pmatrix} < g1(x), g1(x) > & < g1(x), g2(x) > \\ < g2(x), g1(x) > & < g2(x), g2(x) > \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} < f0(x), g1(x) > \\ < f0(x), g2(x) > \end{pmatrix}$$

Obtener la proyección y dar (5 dígitos significativos truncados) su evaluación en $x = 2$. $\boxed{}$

1.3 Sea $D = \{\,x\,,\,e^x\,\}$ otra base de W. Obtener la proyección de $f0(x)$ utilizando ahora esta base D. Dar la evaluación de la proyección en $x = 2$. $\boxed{}$.

1.4 ¿Son iguales las dos proyecciones obtenidas? $\boxed{}$. Esto no es una casualidad porque la proyección de un vector sobre un subespacio es $\boxed{}$. No depende pues de la base utilizada para conseguirla.

2. Distancia a un subespacio. Aproximación óptima.

NOTA: dar los resultados numéricos de este ejercicio con 5 dígitos significativos truncados.

2.1 La distancia entre dos vectores en un espacio con p ______ viene dada por la norma de su d ______. Teniendo en cuenta esto definir una función con Derive que de la distancia entre dos vectores de V.

`dis(u,v):=` ______

2.2 Dar la distancia de $f0(x)$ al vector $v0(x) = 3\cosh(x)$. ______

2.3 Dar la distancia de $f0(x)$ a la $\text{proy}_W f0(x)$. ______

2.4 Completar el párrafo que sigue, teniendo en cuenta la ecuación (1)

$$d(\underline{u}, W) = \min_{\underline{v}\in W} ||\underline{u} - \underline{v}|| = ||\underline{u} - \text{proy}_W \underline{u}|| \tag{1}$$

La distancia de un vector $\underline{u}$ a un subespacio W es la ______ de las distancias del vector a los del subespacio y se alcanza en la ______ del vector sobre el subespacio. La ______ de $\underline{u}$ sobre W es pues la aproximación óptima a $\underline{u}$ por vectores de W. El error de la aproximacion es la distancia de $\underline{u}$ a W.

2.5 Dar la distancia de $f0(x)$ a W. ______

2.6 Completar el siguiente cuadro referido a aproximaciones óptimas a $v0(x)$ por vectores de W.

$v0(x)$	Valor de la aprox. optima en $x = 1$	Distancia de $v0(x)$ a W
$x - 2$		
$2\sinh(x) + 2\cosh(x)$		

3. Aproximaciones optimas en $\mathbb{R}^n$.

Sea $V = \mathbb{R}^5$ y $W = lin\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\5\\7\\8\\2\end{pmatrix}\right\}$ con el producto euclídeo habitual de $\mathbb{R}^n$.

Hallar en modo exacto la distancia de $\begin{pmatrix}-7\\0\\-2\\13\\-8\end{pmatrix}$ a W. ______

NOTA: las ecuaciones normales para obtener la proyección sobre un subespacio W de dimensión r pueden verse en la expresión (3.13), página 39 de los apuntes.