PRÁCTICA 3: SERIES DE FOURIER

Objetivos:

1. Obtener desarrollos de Fourier, desarrollos en senos y en cosenos con Derive. Dibujar la serie.
2. Utilizar series de Fourier para obtener la suma de algunas series numéricas.

1. Serie y desarrollos de Fourier. Convergencia.

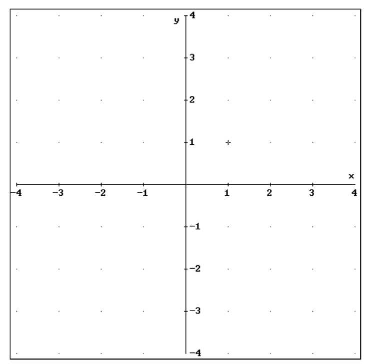
La orden `fourier(f(x),x,a,b,n)` genera el desarrollo de orden n (la suma parcial n-ésima) de la serie de Fourier de $f(x)$ en el intervalo $[a,b]$. Si se quiere representar o evaluar en un punto esta suma parcial, antes hay que simplificarla. Simplificando `fourier(f(x),x,a,b,inf)` tendremos una expresión para la serie de Fourier.

1.1 Introducir y representar las siguientes líneas correspondientes a los desarrollos de orden 3 y 15 de la función e^x. Conservar la gráfica.

```
f(x):=ê^x
fourier(f(x),x,-2,1,3)
fourier(f(x),x,-2,1,15)
```

1.2 Derive representa las sumas parciales pero no representa la serie. Se puede comprobar simplificando la orden `fourier(f(x),x,-2,1,inf)`.
El teorema de convergencia para series de Fourier nos asegura que la suma de una serie de Fourier en un punto x_0 de $[a,b]$ en el que $f(x)$ sea continua es $\boxed{}$ y en los puntos de discontinuidad la suma es el $\boxed{pu}$ $\boxed{m}$ de los $\boxed{l}$ $\boxed{l}$.

Representar en la ventana de la derecha la serie de Fourier límite de las sumas parciales del primer apartado.



1.3 Introducir la siguiente línea que utilizaremos para obtener evaluaciones de los desarrollos de Fourier, de orden 10, 30, 50 y 70, de $f(x)$ en $[-2,1]$.

```
vaf(x):=vector([n,fourier(f(x),x,-2,1,n)],n,10,70,20)
```

Iluminar el lado derecho de la expresión anterior y simplificar. Puede eliminarse la línea simplificada. Introducir y **aproximar** (no simplificar) la expresión `[vaf(-2),vaf(1),vaf(-1)]`. Completar ahora el siguiente cuadro de evaluaciones de las sumas parciales de la serie de Fourier de $f(x)$ y la suma de la misma. (Pasar sólo 4 decimales)

n	Valor en $x=-2$	Valor en $x=1$	Valor en $x=-1$
10	1.38 4	1. 894	0.32 0
30	1.4 9	1. 139	0.3 9
50	1. 90	1.41 0	0.3 24
70	1.4 2	1.42	0. 11
⋮	⋮	⋮	⋮
Suma de la serie	1.4	1.4	0.3 7

2. Desarrollos en cosenos y desarrollos en senos.

2.1 Obtener y representar el desarrollo de Fourier de $f(x) = e^x$ en [0,1] de orden 3. Consérvese la ventana. Obsérvese que no coincide con el obtenido en el intervalo $[-2, 1]$ del ejercicio anterior. Definir una función `df(x)` que sea la simplificación del desarrollo que se acaba de obtener.

2.2 En general, si $g(x)$ está definida en $[0, c]$, la prolongación par $g_p(x)$ y la prolongación impar $g_i(x)$ se pueden definir en Derive como sigue

```
gp(x):= chi(-c,x,0)g(-x) + chi(0,x,c)g(x)
gi(x):= chi(-c,x,0)(-g(-x)) + chi(0,x,c)g(x)
```

El desarrollo en cosenos (o senos) de orden n de $g(x)$ en el intervalo $[0, c]$ es el desarrollo de Fourier de orden n de su prolongación par $g_p(x)$ (o impar $g_i(x)$) en el intervalo $[-c, c]$

Definir las funciones $fp(x)$ y $fi(x)$ que sean respectivamente la prolongación par e impar de $f(x) = e^x, x \in [0, 1]$.

Obtener el desarrollo en cosenos de orden 3 de $f(x)$ en $[0, 1]$ y definir la función `dfc(x)` que sea la simplificación de este desarrollo.

De forma análoga, obtener el desarrollo en senos de orden 3 de $f(x)$ en $[0, 1]$ y definir la función `dfs(x)` que sea su simplificación.

Dibujar en una ventana vacía el desarrollo en cosenos de $f(x)$ junto a su prolongación par $fp(x)$ y en otra ventana el desarrollo en senos de junto a su prolongación impar $fi(x)$. Conservar las ventanas.

2.3 Completar la tabla siguiente con las evaluaciones de las funciones anteriores en los puntos indicados:

	En $x = 0.25$	En $x = 1.25$	En $x = 2.25$
f(x)	1.28 0	3.4903	9. 877
df(x)	1.34 0	1. 4 0	1. 50
dfc(x)	1.2 30	2.1 35	1. 9 0
dfs(x)	1.5381	-2.60 9	1.5 81

(pasar sólo 4 decimales)

En $x = 0.25$ los tres desarrollos proporcionan una aproximación aceptable a $f(\boxed{\quad})$. Esto no sucede en $x = \boxed{\quad}$ ni en $x = \boxed{\quad}$ porque los desarrollos son funciones periódicas y $f(x)$ no lo es.

Las evaluaciones de $\boxed{\quad}$ en los tres puntos coinciden porque es una función $\boxed{\quad}$ y su $\boxed{\quad}$ es $\boxed{\quad}$. También coinciden las evaluaciones de las columnas primera y $\boxed{\quad}$ de $dfc(x)$ y las de $\boxed{\quad}$ porque ambas funciones son $\boxed{\quad}$ y su $\boxed{\quad}$ es 2.

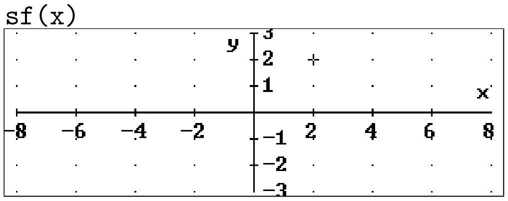
3. Suma de series numéricas a partir de series de Fourier

Sea $f(x) := x$

3.1 Definir una función `sf(x)` que sea la simplificación de `fourier(f(x),x,0,2,inf)` es decir, la serie de Fourier de $f(x) = x$ en $[0, 2]$). De la misma forma definir funciones `sc(x)` y `ss(x)` que sean respectivamente la simplificación de la serie de cosenos y de la serie de senos de $f(x)$ en el mismo intervalo. (Nótese que para ello en la orden Fourier deben modificarse la función y el intervalo adecuadamente.)

3.2 Utilizar el teorema de convergencia para representar las funciones $sf(x)$, $sc(x)$ y $ss(x)$ en las siguientes ventanas y completar las expresiones correspondientes a evaluaciones de las mismas. (Derive no dibuja las gráficas de estas funciones ni da las evaluaciones pedidas)

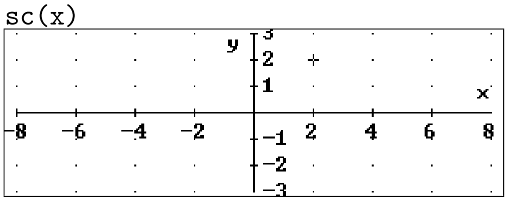
`sf(x)`



$$sf(0) = \frac{f(\quad) + f(\quad\quad)}{2} =$$

$$sf(-0.6) = f(\quad\quad)$$

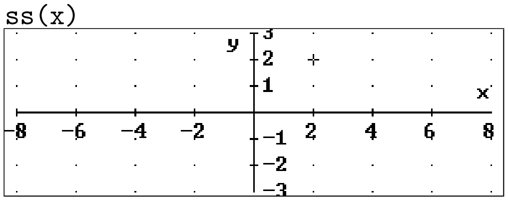
`sc(x)`



$$sc(1) = f(\quad\quad)$$

$$sc(-1) = f(\quad\quad)$$

`ss(x)`



$$ss(0.7) = f(\quad\quad)$$

$$ss(2) = \frac{f(\quad) - f(\quad\quad)}{2} =$$

3.3 Utilizando las funciones definidas en 3.1 podemos hallar la suma de algunas series numéricas que no suma Derive. Por ejemplo a partir de $sf(x)$ podemos obtener la suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(n)$. Simplificar $sf\left(\frac{1}{\pi}\right)$ y a la vista de lo obtenido completar la siguiente línea:

$$1 - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(n) = sf\,(\quad\quad) = \quad\quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(n) = (1 - \frac{\quad}{\quad})\frac{\quad}{2} =$$

3.4 Dar la suma de las siguientes series, indicando la función (sf, sc o ss) y el punto de evaluación utilizados para obtenerla.

Serie	Suma	Función y punto de evaluación
$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin(n)}{n}$		
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)}{(2n-1)^2}$		