PRÁCTICA 8: ACONDICIONAMIENTO DE SISTEMAS

Objetivos:

1. Calcular el número de condición de una matriz.
2. Estudiar el acondicionamiento de un sistema de ecuaciones lineales.

Nota: Todos los resultados numéricos que se piden se darán aproximados truncando a cinco dígitos significativos, excepto que puedan expresarse en modo exacto con menos dígitos.

Abrir el fichero *AuxP8acond.mth* y grabarlo con nombre personalizado y extensión *dfw* para realizar la práctica en ese fichero.

1. Número de condición.

1.1 Utilizando las funciones definidas en *AuxP8acond.mth*, completar las siguientes definiciones de funciones para obtener la norma 2 y el número de condición respecto de esta norma de una matriz cualquiera

`norma2(a) :=` $\boxed{}$

`cond2(a) :=` $\boxed{}$

1.2 Sean $a0 := \begin{pmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{pmatrix}$ y $a1 := \begin{pmatrix} 10 & 70 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{pmatrix}$.

Hallar la norma 2 y el número de condición en norma 2 de las matrices anteriores.

	$A = a0$	$A = a1$
$\|\|A\|\|_2$		
$\mu_2(A)$		

1.3 Completar las siguientes definiciones del número de condición para la norma infinito y para la norma uno de una matriz. Utilizar estas expresiones para completar los números de condición pedidos.

`condinf(a) :=` `normainf(`

`cond1(a) :=` $\boxed{}$

$\mu_\infty(a1) =$ $\boxed{}$ $\qquad$ $\mu_1(a1) =$ $\boxed{}$

2. Acondicionamiento.

2.1 Considerar el sistema

$$\begin{pmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 \\ 23 \\ 33 \\ 31 \end{pmatrix} \qquad (1)$$

cuya matriz es la matriz $a0$ del ejercicio anterior. Llamemos $b0$ al vector del lado derecho. Hallar la solución de este sistema.

Considerar ahora la matriz $a0p$ y el vector $b0p$ siguientes que se han obtenido modificando ligeramente alguna de las entradas de $a0$ y $b0$ respectivamente

$$a0p := \begin{pmatrix} 10 & 7 & 8.1 & 7.2 \\ 7.08 & 5.04 & 6 & 5 \\ 8 & 5.98 & 9.89 & 9 \\ 6.98 & 4.99 & 9 & 9.98 \end{pmatrix} \qquad b0p = \begin{pmatrix} 31.9 \\ 23.1 \\ 32.9 \\ 31.1 \end{pmatrix}$$

y resolver los sistemas

$$(2)\ \ a0 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = b0p \qquad (3)\ \ a0p \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = b0 \qquad (4)\ \ a0p \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = b0p$$

Completar el siguiente cuadro con la solución de los sistemas anteriores:

	Sistema (1) xe	Sistema (2) $xe2$	Sistema (3) $xe3$	Sistema (4) $xe4$
x				
y				
z				
t				

Observamos como una ______ variación en los datos del sistema (1) produce ______ cambios en la solución. Así podemos decir que el sistema de partida está ______ acondicionado.

2.2 Si consideramos el sistema (2) que sólo tiene perturbado el lado derecho y llamamos xe a la solución del sistema de partida, la desigualdad de Turing es

$$\frac{||\delta xe||_2}{||xe||_2} \leq \boxed{} \frac{||\delta b0||_2}{||b0||_2}$$

donde $b0 + \delta b0 = b0p$ y por tanto $\delta b0 = \boxed{()^t}$.

La cota para el error relativo de la solución que proporciona esta desigualdad es

$$\frac{||\delta xe||_2}{||xe||_2} \leq \boxed{}$$

¿Es una cota ajustada? ______ pues $\frac{||\delta xe||_2}{||xe||_2} = \boxed{}$.

2.3 Para los sistemas (3) y (4), podríamos utilizar la acotación

$$\frac{||\delta xe||_2}{||xe||_2} \leq \frac{\mu_2(a0)}{1-\mu_2(a0)\dfrac{||\delta a0||_2}{||a0||_2}}\left(\frac{||\delta b0||_2}{||b0||_2}+\frac{||\delta a0||_2}{||a0||_2}\right) \tag{5}$$

Se tendría entonces que

$$\frac{\mu_2(a0)}{1-\mu_2(a0)\dfrac{||\delta a0||_2}{||a0||_2}} = \frac{\mu_2(a0)}{1-\mu_2(a0)\dfrac{\boxed{}}{||a0||_2}} = \boxed{}$$

lo cual es absurdo pues el resto de los términos de la desigualdad (5) son positivos. Esta cota no es válida ya que $||a0^{-1}||_2||\delta a0||_2 = \boxed{}$ no es menor que $\boxed{}$.

2.4 Completar las siguente tabla en la que se piden los errores relativos correspondientes a resolver los sistemas (3) y (4) en lugar del sistema (1)

	$\dfrac{\lvert\lvert\delta xe\rvert\rvert_1}{\lvert\lvert xe\rvert\rvert_1}$	$\dfrac{\lvert\lvert\delta xe\rvert\rvert_2}{\lvert\lvert xe\rvert\rvert_2}$	$\dfrac{\lvert\lvert\delta xe\rvert\rvert_\infty}{\lvert\lvert xe\rvert\rvert_\infty}$
Sistema (3)			
Sistema (4)			

3. Sistemas de Hilbert.

Un ejemplo clásico de matriz mal acondicionada es la matriz de Hilbert definida en el fichero auxiliar con la función `hilbert(n)`.

3.1 Sea $h4$ la matriz de Hilbert de orden 4. Considerar el sistema

$$h4\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = b4$$

que tiene la misma solución que el sistema (1) del ejercicio anterior. Hallar $b4$.

Dar el elemento 4,2 de la matriz $h4$ y la componente 3 del vector del lado derecho $b4$.

$h4_{4,1} = \boxed{}$ $\quad b4_2 = \boxed{}$

3.2 Hallar la solución del sistema perturbado según el vector $\delta b0$ del ejercicio anterior.

$xp4 = \boxed{()^t}$

De nuevo aunque $\delta b0$ es pequeño la solución presenta grandes variaciones lo cual era de esperar pues $\mu_2(\boxed{})$ es $\boxed{}$.

El error relativo de la solución en este caso es $\dfrac{||xp4-xe||_2}{||xe||_2} = \boxed{}$ y la cota que para dicho error proporciona la desigualdad de Turing es $\boxed{}$.