PRÁCTICA 4: INTERPOLACIÓN (I)

Objetivos:

1. Obtener polinomios interpoladores de Lagrange.
2. Analizar el error gráficamente.
3. Obtener interpoladores a trozos cúbico de Hermite y spline natural a partir de una función o de datos tabulados.
4. Uso de CHI en la interpolación a trozos.

Cargar el fichero auxiliar *interpol*18*.mth* utilizando *Archivo>Leer>Utilidad*.

1. Polinomio interpolador de Lagrange

1.1 Teclear en la línea de edición `poly_interpolate([1,1;2,4;3,2],x)` e introducir en la ventana de álgebra. La expresión obtenida

$$POLY\_INTERPOLATE\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, x\right)$$

proporciona el polinomio interpolador de Lagrange que pasa por los puntos $(1,1)$, $(2,4)$, $(3,2)$ (las filas de la matriz introducida). Simplificar y representar el polinomio obtenido.

Para dibujar los puntos que se han tomado como datos podemos iluminar la matriz de datos (sólo la matriz) y representarla (para que se vean mejor, fijar en el menú de la ventana gráfica *Opciones>Pantalla>Puntos: Grandes*). Conservar esta gráfica.

1.2 Cuando los datos proceden de una función, utilizaremos la orden

$$LF(\,[x_0, x_1, \ldots, x_n],\ x)$$

que proporciona el polinomio interpolador de la función $f(x)$ en los nodos $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

Introducir las siguientes líneas:

`f(x):=cos(x)`

`lf([0,3,5,2],x)` (I)

Para generar la tabla con los puntos de interpolación, lo haremos simplificando la orden `table(f(x),x,[0,3,5,2])`.

Representar en una ventana vacía la función $f(x)$, el polinomio interpolador (I) y los datos utilizados para obtenerlo. Conservar esta gráfica.

Nota: El polinomio interpolador (I) también podría obtenerse con
`poly_interpolate([0,f(0);3,f(3);5,f(5);2,f(2)],x)` o equivalentemente con
`poly_interpolate(table(f(x),x,[0,3,5,2]),x)`

1.3 Definir los interpoladores $P_1(x)$ y $P_2(x)$ de la función $\cos x$ en los siguientes nodos:

$$P_1(x) : \text{nodos } 0, 2, 3, 6 \qquad P_2(x) : \text{nodos } -1, 0, 3, 5, 6$$

Completar las siguientes evaluaciones en $x = 1$:

$P_1(1) \simeq 0.3\ \ 4\ \ 6\ \ 4603$	$P_2(1) \simeq 0.2\ \ 76\ \ \ \ 9750$	$\lvert f(1) - P_1(1)\rvert \simeq 0.2\ \ 6\ \ 4\ \ 8454$

2. Error de interpolación (gráficamente)

2.1 Introducir la línea

```
f(x)-0.2 < y < f(x)+0.2  and  -1 < x < 6
```

y representarla en una ventana nueva junto a la función $f(x) = \cos x$. Añadir a esta ventana la representación del polinomio $P_2(x)$ del ejercicio 1. Conservar la ventana. ¿Aproxima $P_2(x)$ a $f(x)$ en el intervalo $[-1, 6]$ con un error menor que 0.2? Razonar la respuesta.

2.2 Completar la siguiente elección de 5 nodos para que genere un polinomio de Lagrange con error menor que 0.2 para la función $\cos(x)$ en el intervalo $[-1, 6]$:

$$\boxed{-1, 0, 2, \qquad , 6}$$

3. Interpolantes cúbico de Hermite y spline natural

3.1 Las siguientes funciones generan los interpoladores a trozos **cúbico de Hermite** y **spline natural** de una función $f(x)$ (previamente definida) basados en los nodos $x_0, x_1, \ldots, x_n$

$$HCF([x_0, x_1, \ldots, x_n], x) \quad \text{(cúbico de Hermite)}$$
$$SPF([x_0, x_1, \ldots, x_n], x) \quad \text{(spline natural)}$$

Sea $f(x) := \dfrac{e^x - x^3 + 2x}{\cosh(x)}$. Obtener y representar los siguientes interpolantes de $f(x)$ en los nodos indicados:

- $h1(x)$: cúbico de Hermite en los nodos -1, 1.5, 5
- $h2(x)$: cúbico de Hermite en los nodos -1, 1.5, 3.5, 5
- $s1(x)$: spline natural en los nodos -1, 1.5, 5
- $s2(x)$: spline natural en los nodos -1, 1.5, 3.5, 5

Completar la tabla de evaluaciones en $x = 1$ (4 dígitos significativos truncados) :

	nodos -1, 1.5, 5	nodos -1, 1.5, 3.5, 5
Cúbica de Hermite		
Spline natural		

Tabla de evaluaciones en $x = 1$

El interpolante cúbico de Hermite a trozos en general se parece $\boxed{\text{m} \qquad}$ a la función debido a la coincidencia de $\boxed{\qquad}$ y $\boxed{\qquad}$ en los nodos de la partición. Si añadimos un nodo vemos que $\boxed{\quad (x)}$ sólo se modifica en el intervalo al que pertenece el nuevo nodo, mientras que $\boxed{\quad (x)}$ se modifica en $\boxed{\qquad}$ los subintervalos.

3.2 La orden

$$HC([x_0, y_0, d_0;\ x_1, y_1, d_1;\ \ldots;\ x_n, y_n, d_n], x)$$

permite obtener el interpolador cúbico de Hermite basado en los nodos $x_0, x_1, \ldots, x_n$ cuando para cada nodo x_i se conocen la imagen y_i y la primera derivada d_i.
Reproducir la gráfica de la Fig.1 y conservar.

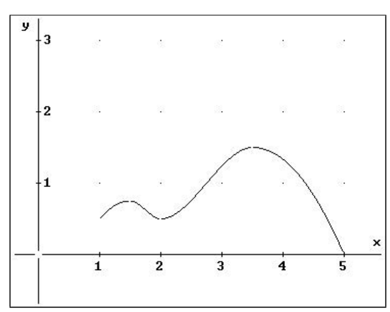


Fig. 1

4. Interpolación polinómica a trozos con CHI

4.1 La gráfica de la Fig.2 puede obtenerse por interpolación a trozos. Completar la siguiente línea para que su simplificación genere dicho interpolante a trozos. Dibujar y conservar la gráfica.

```
chi(1,x,3) poly_interpolate( [1,1;2,____;__________],x)

+chi(__________) ________________( [3,____;__________],x)
```

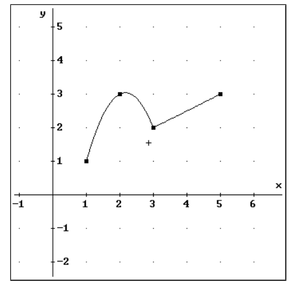


Fig. 2

4.2 Sea $f(x) := \dfrac{e^x - x^3 + 2x}{\cosh(x)}$.
En la Fig.3 se ha representado $f(x)$ junto con un interpolante a trozos de $f(x)$ en $[-6, 6]$ con polinomios de Lagrange. Reproducir esta gráfica y conservar. Dar la expresión del interpolante utilizada.

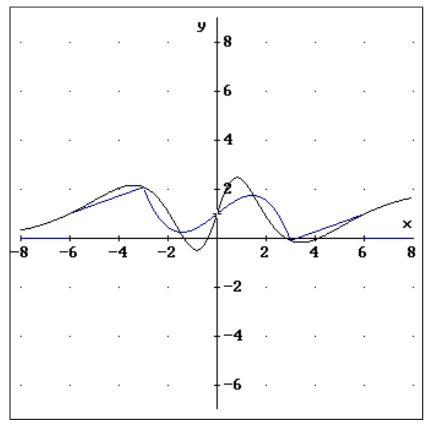
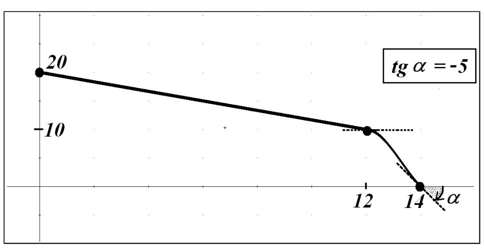


Fig. 3

4.3



Obtener una expresión para el interpolador a trozos que reproduce la gráfica de la izquierda (problema 33 de los apuntes). Dibujarla seleccionando en la ventana gráfica *Región: Horizontal (Long=16, Centro=7,Inter=8), Vertical (Long=40, Centro=12, Inter=4)* . Conservar la ventana.