PRÁCTICA 9: MÉTODOS ITERATIVOS

Objetivos:

1. Aplicar métodos iterativos para resolver sistemas de ecuaciones lineales.
2. Estudiar la convergencia.

En esta práctica consideraremos métodos iterativos de la forma

$$\underline{x}^{(k+1)} = M\underline{x}^{(k)} + \underline{c}. \tag{1}$$

para generar una sucesión de aproximaciones $\{\underline{x}^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ a la solución de un sistema $A\underline{x} = \underline{b}$. Los métodos (1) generan una sucesión convergente cualquiera que sea el iterante inicial $\underline{x}^{(0)}$ si y sólo si $\rho(M) < 1$, donde $\rho(M)$ es el **radio espectral** de M, es decir el máximo de los módulos de los autovalores de M.

NOTA: Todas las aproximaciones que se piden en esta práctica se darán truncando a cinco dígitos significativos.

1. Métodos de Jacobi y Gauss-Seidel.

Dado el sistema $A\underline{x} = \underline{b}$, los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel se adaptan al esquema

$$\underline{x}^{(k+1)} = N^{-1}P\underline{x}^{(k)} + N^{-1}\underline{b}. \tag{2}$$

donde $N - P = A$ con N inversible.

Sean $A = a0$ y $\underline{b} = b0$ las matrices que determinan el sistema que queremos resolver

$$\texttt{a0:=} \begin{pmatrix} 10 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 11 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 10 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & 8 \end{pmatrix} \quad \texttt{b0:=} \begin{pmatrix} 6 \\ 25 \\ -11 \\ 15 \end{pmatrix}$$

1.1 Para el **método de Jacobi** la matriz N se obtiene con

```
nj(a):= vector(vector(if(i=j , a↓i↓j , 0 ), j, 1, dim(a)), i, 1, dim(a))
```

Introducir la línea anterior y simplificar `nj(a0)`. La matriz obtenida tiene la misma $\boxed{}$ que $a0$. Introducir las siguientes líneas que implementan el método de Jacobi

```
pj(a):=nj(a)-a
mj(a):=nj(a)^(-1) pj(a)
itja(a,b,x0,n):=iterates(mj(a)x+nj(a)^(-1) b,x,x0,n)
```

1.2 Aproximar la siguiente línea para obtener las 4 primeras aproximaciones a la solución del sistema, partiendo de $\underline{x}^{(0)} = \underline{0}$.

```
itja(a0,b0,[0;0;0;0],4)
```

Aumentando el número de aproximaciones llega un momento en que $\underline{x}^{(k)} = \underline{x}^{(k+1)}$. El menor k para el que pasa esto es k=$\boxed{}$. Observamos que el método parece converger al vector $\boxed{()^t}$.

Si hallamos la solución exacta del sistema simplificando la orden RO, comprobamos que coincide con el vector límite.

Los iterantes $\underline{x}^{(20)}, \underline{x}^{(21)}, \ldots$ son sólo aparentemente el valor exacto de la solución. Para comprobarlo, volver a obtener estos valores con *Simplificar>Aproximar>20 Dígitos*.

1.3 Dar la última entrada de la aproximación $\underline{x}^{(7)}$ del método de Jacobi partiendo de $\underline{x}^{(0)} = (10, -2, 0, 1)^t$. $x_4^{(7)} =$

El radio espectral de la matriz de iteración de Jacobi es $\rho(\quad) =$ ______ que es ______ que 1 y por tanto el método ______ para cualquier iterante inicial.

1.4 La matriz N del **método de Gauss-Seidel** se obtiene con

```
ng(a):= vector(vector(if(i>=j, a↓i↓j, 0) , j, 1, dim(a)), i, 1, dim(a))
```

Completar las expresiones siguientes para tener el esquema iterativo correspondiente.

`pg(a):=` ______

`mg(a):=` ______

`itgs(a,b,x0,n):=iterates(` ______ `,x,x0,n)`

La aproximación $\underline{x}^{(7)}$ de Gauss-Seidel con $\underline{x}^{(0)} = (10, -2, 0, 1)^t$ es $\underline{x}^{(7)} =$

1.5 Obtener las 5 primeras aproximaciones que proporcionan los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel con iterante inicial nulo. ¿Qué método de los dos parece converger más rápido a la solución del sistema? ______

2. Convergencia.

2.1 Consideremos el sistema $\begin{cases} x - 3y + 5z &= 5 \\ 8x - y - z &= 8 \\ -2x + 4y + z &= 4 \end{cases}$ y definamos las matrices $a1$ y $b1$ con Derive que sean respectivamente la matriz de coeficientes y el lado derecho de este sistema.

2.2 Encontrar para este sistema las 5 primeras aproximaciones que proporcionan los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel implementados en el ejericicio anterior, con iterante inicial nulo. A la vista de los datos obtenidos ¿converge alguno de los dos métodos? ______

2.3 El radio espectral de la matriz de iteración del método de Jacobi es ______ y el de la matriz de iteración de Gauss-Seidel es ______. La conclusión es entonces que ______.

2.4 Encontrar las 5 primeras aproximaciones que proporcionan los dos métodos, con iterante inicial $(77/57, 74/57, 86/57)^t$. ¿Qué se observa ahora? ______
¿Cómo explicas este hecho? ______

2.5 Si cambiamos el orden de las ecuaciones del sistema poniendo la primera ecuación al final obtenemos un sistema ______, es decir, con la misma solución. Ahora el método de Gauss-Seidel ______ pues el radio espectral de la nueva matriz de iteración es ______ que es menor que 1. ¿Qué sucede en este caso con el método de Jacobi?
______