PRÁCTICA 10: GRÁFICAS, CURVAS DE NIVEL Y GRADIENTES

Objetivos:

1. Representar funciones de dos variables.
2. Obtener y representar curvas de nivel de funciones de dos variables.
3. Obtener y representar gradientes de funciones de dos variables
4. Obtener de las representaciones información sobre extremos y variabilidad de la función.

1. Representación de funciones y curvas de nivel.

1.1 Introducir la definición `f1(x,y):=x^2+y^2`. Abrir una ventana 3D con la secuencia de teclas $\boxed{Esc}$, $\boxed{Alt}$, $\boxed{v}$, $\boxed{n}$ y presentarla en mosaico vertical junto a la ventana de álgebra. Utilizar el icono *Representar* de la ventana 3D para representar la función. Conservar la ventana. Pulsar varias veces $\boxed{F9}$ y $\boxed{F10}$ para observar cómo se modifican los valores de x e y permaneciendo igual los de z. Utilizar las flechas del cursor para modificar el punto de vista. Dejar finalmente la gráfica aproximadamente como la conservada.

1.2 Obsérvese que en la ventana 3D aparecen señalados los valores de x, y y $z = f1(x, y)$ que aparecen representados. Utilizar el icono *Ajustar el rango de la gráfica* de la ventana de 3D para que la region representada corresponda a $(x, y, z) \in [-3, 3] \times [-3, 3] \times [1, 7]$. Guardar la representación obtenida. Guardar también esta representación vista desde arriba.

No todas las imágenes de $[-3, 3] \times [-3, 3]$ aparecen representadas. Por ejemplo, la imagen de $\boxed{(\quad,\quad)}$ no aparece por ser demasiado pequeña mientras que la de $\boxed{(\quad,\quad)}$ no aparece por ser demasiado grande.

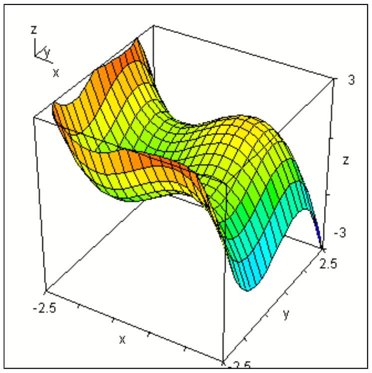
Para que aparezcan representadas todas las imágenes de $(x, y) \in [-3, 3]\times[-3, 3]$, el intervalo más pequeño que debe asignarse a z es $\boxed{[\qquad,\qquad]}$. Representar la gráfica con este rango de z, conservar la gráfica y cerrar la ventana.

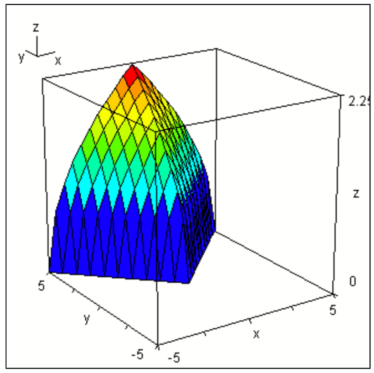
1.3 Abrir una ventana 2D y representar la simplificación de la expresión `f1(x,y)=2`. Hemos representado la curva de nivel L_2, es decir, el conjunto de todos los puntos del dominio cuya imagen es $\boxed{\quad}$. Simplificar y representar ahora la línea `vector( f1(x,y)=c,c,2,32,10)` que nos proporciona las curvas de nivel $\boxed{L_2,\qquad\qquad\qquad}$. Conservar la ventana. La función varía $\boxed{\qquad}$ rápidamente a medida que nos $\boxed{\qquad\qquad}$ $\boxed{\qquad}$ origen. Esto se aprecia en que para el mismo incremento de las imágenes, las curvas de nivel están $\boxed{\qquad}$ próximas.

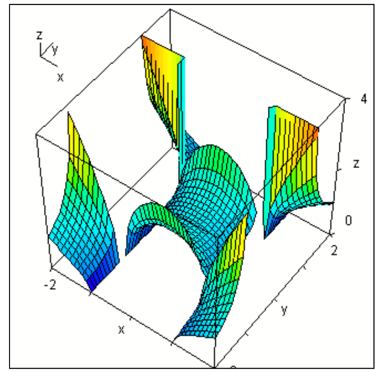
1.4 Cerrar la ventana $2D$ y recuperar la última ventana $3D$ conservada. Introducir `z = 4`. Representar esta expresión utilizando $\boxed{F4}$ con la ventana 3D activa. Pulsar $\boxed{Enter}$ en el primer cuadro de diálogo que se abre y cambiar *Rainbow* por *Gray Scale* en el segundo cuadro de diálogo. Conservar la ventana.

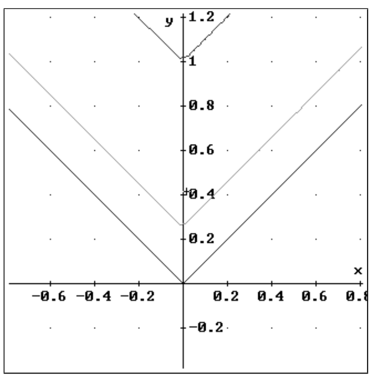
La proyección sobre el plano XY de la curva intersección del plano $z = 4$ y la superficie $z = f(x, y)$ es la curva de nivel $\boxed{\qquad}$.

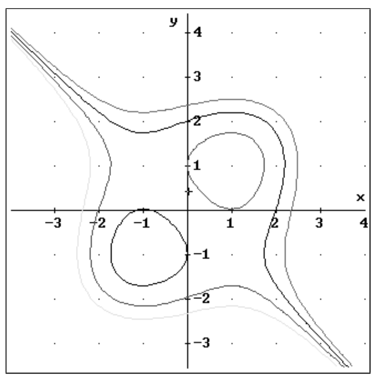
1.5 Las tres ventanas siguientes corresponden a representaciones de tres funciones distintas. Las tres de la segunda fila contienen curvas de nivel de las funciones anteriores. Sin hacer ninguna representación, unir con una flecha cada ventana $3D$ con la ventada $2D$ que tenga las curvas de nivel de la misma función.

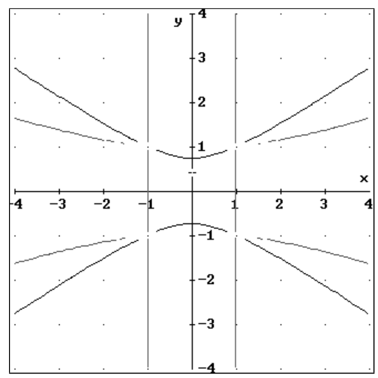












1.6 Las funciones representadas en las ventanas anteriores son

$$f2(x,y) = \sqrt{y - |x|} \qquad f3(x,y) = 1 + \frac{3}{4}(x+y) - \frac{x^3+y^3}{4} \qquad f4(x,y) = \sqrt{\frac{1-x^2}{1-y^2}}$$

Obtener una representación 3D de cada una de ellas similar a la que aparece en el guión.

1.7 Completar las siguientes líneas para que su simplificación tenga una representación similar a la dada en las ventanas $2D$ del apartado anterior. Conservar las ventanas obtenidas.

```
vector(f2(x,y)=c,c,□,□,□)

vector(f3(x,y)=c,c,-0.5,□)

vector(f4(x,y)=c,c,□,□,1.5 )
```

1.8 Utiliza $\boxed{F3}$ con la ventana gráfica $3D$ activa para determinar aproximadamente las coordenadas del punto en el que $f3(x,y)$ alcanza un máximo relativo.

$x =$ $\boxed{}$ $y =$ $\boxed{}$

2. Gradiente, variación local y extremos.

Seleccionar en el menú de la ventana de álgebra *Archivo>Leer>Utilidad* para cargar el archivo *Aux_vv.mth*. La función $gp(a, b)$ definida en este archivo proporciona los extremos del vector gradiente de $f(x, y)$ en (a, b). Puede representarse este gradiente seleccionando en la ventana gráfica la opción de unir puntos. La función $din(a, b)$ proporciona la curva de nivel sobre la que está (a, b) y el gradiente normalizado en ese punto.

2.1 Introducir la expresión `f(x,y):=f2(x,y)`. En la ventana de las curvas de nivel de $f2(x, y)$ seleccionar la Opción de Pantalla puntos grandes y unir. Representar ahora en esa ventana la simplificación de `din(0.4,0.5)` y `din(-0.1,1.7)`. Conservar la ventana. Representar en la misma ventana la simplificación de `gp(0.4,0.5)` y `gp(-0.1,1.7)`. Conservar la ventana.

2.2 ¿En cuál de los dos puntos anteriores presenta mayor variación $f2(x, y)$? Razonar la respuesta.

2.3 ¿Puede alguna derivada direccional en $(-0.1, 1.7)$ ser mayor que 1? Razonar la respuesta.

2.4 Introducir la definición $f(x, y) := \dfrac{27x^3 - 324x}{16} + 4y^3 - 6y^2 - 24y$. Representar en una ventana vacía las curvas de nivel y los gradientes normalizados de $f(x, y)$ en $(1, 1)$ y en $(-3, 0)$. Conservar la ventana. A la vista de esas representaciones, ¿parece tener extremos $f(x, y)$? Razonar la respuesta.

2.5 ¿De qué tipo parecen ser los extremos? Razonar la respuesta.

2.6 Obtener y conservar una representación $3D$ de $f(x, y)$ en la que se observen los extremos intuídos en la representación de curvas de nivel realizada.

2.7 Utilizar $\boxed{F3}$ en una o varias ventanas $3D$ para dar las coordendas de los extremos señalando si son máximos o mínimos. Conservar las ventanas utilizadas para obtener las coordenadas.