PRÁCTICA 1: SERIES NUMÉRICAS

Objetivos:

1. Sumar series utilizando Derive.
2. Intuir si una serie puede ser convergente analizando valores del término general y de las sumas parciales.
3. Averiguar carácter aplicando criterios de convergencia.

1. Sumas parciales, suma y carácter de una serie.

1.1 En el fichero auxiliar *Aux1920SeriesN.dfw* se han definido funciones que nos ayudarán a estudiar el carácter de una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Entre otras vemos

`a(n):=`

`s(m,n):=sum(a(k),k,m,n)`

Con la primera (añadiendo expresión a la derecha) se define el *término general* de la serie y con la segunda podremos obtener la sucesión de *sumas parciales* y la *suma* de la serie. Por ejemplo para la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$, introducimos las líneas

`a(n):=(2/3)^n`

`s(1,n)=`

`lim(s(1,n),n,inf)=`

obtenemos la suma parcial n-ésima y la suma de la serie (límite de las sumas parciales). La suma de la serie también se puede obtener con la expresión `s(1,inf)` que obviamente proporciona el mismo resultado que el límite anterior.

A la vista de este resultado concluimos que el carácter de la serie es $\boxed{}$

1.2 Considerar ahora la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+(-1)^n(1-2n)}{2}$

Derive no proporciona la suma de esta serie, aunque sí nos da una expresión para las sumas parciales. Comprobarlo.

$$s_n =$$

A continuación, introducir las siguientes líneas para obtener los 10 primeros términos de las sucesiones $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ y escribir el resultado

`vector(a(n),n,1,10)=`

`vector(s(1,n),n,1,10)=`

Con los datos anteriores, se concluye que la serie es $\boxed{}$ porque el límite de la sucesión $\boxed{}_{n=1}^{\infty}$ no existe ya que el límite de la subsucesión de términos pares es 0, el de la subsucesión de términos impares es $\boxed{}$ y son distintos.

2. Intuir el carácter.

Para la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 1 - cos(\frac{1}{n})$, Derive no proporciona ni la suma, ni expresión para la suma parcial n-ésima. Comprobarlo.

2.1 Abrir una ventana gráfica. Utilizar el Menú para *Seleccionar>Región: Horizontal (Long=22, Centro=10, Inter=22), Vertical (Long=3, Centro=0.8, Inter=3)* y presentarla en mosaico horizontal junto a la de álgebra. Representar en ella los 20 primeros términos de la sucesión $a_n = 1 - cos(\frac{1}{n})$, utilizando la línea `[n,a(n)]` (seleccionar: *Valor mínimo 1; Valor máximo 20; Modo* puntos*; Tamaño* grandes). Representar en la misma ventana las 20 primeras sumas parciales de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 1 - cos(\frac{1}{n})$ y conservar esta ventana. ¿Cuál parece ser el carácter de la serie? ¿Por qué?

2.2 Introducir ahora la línea `vector([n,s(1,n)],n,1,1000,100)` y aproximarla.

Se observa que las sumas parciales van siendo más $\boxed{pa\qquad}$ a medida que n $\boxed{\qquad}$. Modificando el rango de n en la línea anterior podemos decir que las sumas parciales tienden a $\boxed{0.77\quad 58\qquad 581}$. Parece que la serie es convergente y el valor anterior, una aproximación a la suma.

2.3 Representar, en la misma ventana gráfica que venimos utilizando, los 20 primeros términos de la sucesión $a_n = \frac{1}{n^2}$ y las 20 primeras sumas parciales de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Esta serie puede sumarse con Derive y su suma es $\boxed{\qquad}$.

En la gráfica podemos observar que $\qquad\qquad \le \frac{1}{n^2}$ (tendrás que hacer zoom sobre los últimos puntos). La misma relación de desigualdad se aprecia para las $\boxed{s\qquad}$ $\boxed{\qquad\qquad}$ de ambas series. Dado que la serie de mayores sumas parciales es $\boxed{\qquad\qquad}$, la otra también lo es (1^{er} *criterio de comparación*). También el 2^o *criterio de comparación* asegura que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 1 - cos(\frac{1}{n})$ es $\boxed{\qquad\qquad}$ ya que $\lim_{n\to\infty} \boxed{\qquad\qquad} = \frac{1}{2}$.

NOTA: En clase se ha demostrado que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ es convergente.

3. Averiguar carácter.

Si no se obtiene la suma de la serie ni la expresión de las sumas parciales, se puede intuir el carácter analizando la sucesión de sumas parciales como en el ejercicio anterior, pero para asegurar el carácter hay que utilizar los criterios y resultados vistos en clase. Fíjate en los ejemplos del fichero *Aux1920SeriesN.dfw* para responder al siguiente ejercicio.

3.1 Las tres series siguientes son de términos positivos:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{\tanh(n)}$ (2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+n}{1+e^n}$ (3) $\sum_{n=1}^{\infty} 1 - cos\frac{1}{\sqrt{n}}$

Con Derive, sólo una se clasifica por el *criterio del cociente* y el *de la raíz* pero no por el *criterio de la integral* (Derive no proporciona el valor de la impropia). Esta serie es la $\boxed{\qquad}$ y su carácter $\boxed{\qquad\qquad}$

Para las otras dos, los criterios cociente, raíz e integral no permiten decidir el carácter, pero en una de ellas lo deducimos estudiando la *condición necesaria de convergencia.* ¿Cuál es esta serie? $\boxed{}$ ¿y su carácter? $\boxed{}$

La que queda, la $\boxed{}$, verifica la c.n.c y ninguno de los criterios cociente, raíz e integral la clasifica, por lo que sólo podemos aplicar un *criterio de comparación* para clasificarla. ¿Cual es su carácter y por qué?

3.2 Completar la siguiente tabla especificando el carácter de las series y el razonamiento utilizado para determinarlo. Identificar las que son de términos positivos, negativos o alternadas con $+$, $-$ o A a la izda de cada serie según corresponda.

Serie	Carácter	Razonamiento
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n+n}$		
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\pi n)}{n}$		
$\sum_{n=1}^{\infty} (\sinh n)^{-n}$		
$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$		
$\sum_{n=1}^{\infty} (3^{\frac{1}{n}}-1)$		
$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{1+(n+2)^{-1}}{1+n^{-1}}\right)$		
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\tanh\left(\frac{1}{n}\right)}$		
$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^2$		
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{3^n}\left(\frac{n+1}{5n}\right)^{2n}$		
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2+\cos^2 n)^n}{n\sqrt{n}}$		