PRÁCTICA 5: INTERPOLACIÓN (II)

Objetivos:

1. Obtener gráficamente cotas para el error de interpolación
2. Obtener analíticamente el error máximo de interpolación

Cargar el fichero auxiliar *interpol*18*.mth* utilizando *Archivo>Leer>Utilidad.*

1. Acotar el error gráficamente

Si el polinomio $P_n(x)$, es una aproximación a $f(x)$ con error menor que ϵ en un intervalo $[a,b]$ entonces $|f(x) - P_n(x)| < \epsilon$, es decir

$$f(x) - \epsilon < P_n(x) < f(x) + \epsilon$$

para cada $x \in [a,b]$. En la práctica anterior vimos que esto puede detectarse dibujando las gráficas de $f(x) - \epsilon$ y $f(x) + \epsilon$ entre $x = a$ y $x = b$ y comprobando que la gráfica de $P_n(x)$ queda entre ellas (en la *banda* que determinan).

Sea $f(x) = \dfrac{e^x - x^3 + 2x}{\cosh(x)}$

1.1 Recordar que:

- Para dibujar el interpolador lineal a trozos no es necesario tener su expresión. Basta dibujar la tabla de puntos en modo *Opciones>Pantalla> Puntos > Unir: Si.*
- Para generar la tabla de puntos de $f(x)$ en los nodos $x_0, x_1, \ldots, x_n$ podemos usar la orden `TABLE(f(x),x,[`$x_0, x_1, \ldots, x_n$`])` y si los nodos son **equiespaciados** en el intervalo $[a,b]$ con tamaño de paso h usaremos `TABLE(f(x),x,a,b,h)`
- En la interpolación lineal a trozos en el intervalo $[a,b]$ con $n+1$ nodos equiespaciados $x_0 = a,\ x_1,\ \ldots,\ x_n = b$, el tamaño de paso es $h = \dfrac{b-a}{n}$.

Representar en la misma ventana $f(x)$ y los siguientes interpoladores lineales a trozos de $f(x)$:

$T_1(x)$: nodos 0,1,3,6

$T_2(x)$: nodos equiespaciados en $[0,6]$ con tamaño de paso 2

$T_3(x)$: 8 nodos equiespaciados en $[0,6]$

¿Qué interpolante de entre los anteriores $T_1(x), T_2(x)$ y $T_3(x)$ parece mejor elección para aproximar a la función en el intervalo $[0,6]$? $\boxed{}$

¿Es alguno de ellos una aproximación a $f(x)$ con error menor que 0.3 en el intervalo $[0,6]$? $\boxed{}$. (Conservar la gráfica que justifica la respuesta)

1.2 Determinar (gráficamente) el mayor tamaño de paso h en la interpolación lineal a trozos de la función $f(x)$ con nodos equiespaciados en el intervalo $[-6,6]$ que garantiza un error menor que 0.2 . $\boxed{n = }$ Conservar las gráficas que justifican la respuesta.

2. Error máximo de interpolación

El error máximo puede obtenerse determinando el máximo de la función $|f(x) - P_n(x)|$ en el intervalo deseado.

Sea $f(x) = \cos x$

2.1 Definir $f(x)$ y $P(x)$ su polinomio interpolador en los nodos -1, 0, 3, 5, 6.

Obtener y representar la expresión correspondiente al error $|f(x) - P(x)|$.

En la gráfica de $|f(x) - P(x)|$ podemos observar, siguiendo su trazado (F3) en el intervalo $[-1, 6]$, que el error máximo es aproximadamente [0.] (dos cifras decimales).

Pero de forma precisa, el máximo se halla con las técnicas habituales de [der r], [igu r] a 0, [res er] y [eva r] en el punto adecuado.

Nota: para resolver una ecuación del tipo $g(x) = 0$, emplear modo aproximado en el intervalo que se considere adecuado.

Este proceso conduce a que el error máximo (real) en el intervalo $[-1, 6]$ se alcanza en el punto [$x =$1. 34] y su valor es [$E = 0.3\ \ 0\ \ 5\ \ 9\ \ 6$].

2.2 ¿Cuál es la cota del error $|f(x) - P(x)|$ en el intervalo $[-1, 6]$ que se obtendría al aplicar el teorema 2.2 de los apuntes?

$$|f(x) - P(x)| = \frac{1}{\quad !}\left|f^{\quad)}(\xi_x)\right| |(x+1)x(x-3)(x- \quad)(x- \quad)| \leq$$

$$\leq \frac{1}{\quad !} \boxed{\qquad\qquad} \boxed{\qquad\qquad} = \boxed{\qquad\qquad}$$

2.3 La orden $TAYLOR(\, f(x),\, x,\, c,\, n\,)$ da el polinomio de Taylor de orden n, centrado en c, de la función $f(x)$.

Sea $T_n(x)$ el polinomio de Taylor de $f(x)$ centrado en $c = 2.5$ de orden n.

a) Hallar el error máximo (real) de $T_6(x)$ en el intervalo $[-1, 6]$

b) Sea n_0, el menor valor de n que asegura $|\cos x - T_n(x)| < 0.2$, $\forall x \in [-1, 6]$. Hallar n_0. (Gráficamente)

c) Hallar el error máximo (real) para $T_{n_0}(x)$ en el intervalo $[-1, 6]$ para el n_0 anterior.

Completar consecuentemente la siguiente tabla

n	x del máximo	$\lvert\cos x - T_n(x)\rvert$
6		1.0392 7
$n_0 =$		