Entrega día 6 de abril

Héctor Toribio González

12437502E

1. Una compañía produce aditivos para motores utilizando cuatro productos refinados del petróleo: A, B, C, y D. La compañía combina los cuatro productos según las especificaciones de los porcentajes mínimos y máximos en cada mezcla de A, C y D, según se indica en la Tabla 1. La cantidad máxima disponible por día de cada producto A, B, C, y D, así como el coste se muestran también en la mencionada tabla.

Tabla **1**

	% Máximo Producto A	% Mínimo Producto C	% Máximo Producto D	Precio de venta (€/litro)
Lujo	60	20	10	7.9
Estándar	15	60	25	6.9
Económico	–	50	45	5.0
Disponibilidad (litros)	4000	5000	3500	5500
Coste (€/litro)	0.60	0.52	0.48	0.35

(a) Formular un modelo de PL para determinar el plan óptimo de producción que maximice las ganancias.

$x \begin{cases} A \\ C \\ D \end{cases}$

$y \begin{cases} L \\ Es \\ Ec \end{cases}$

a

U_{xy}: Unidades de componente x para el tipo y producido y utilizado

$$z: \text{Max}: \; 7'9\cdot(U_{AL}+U_{BL}+U_{CL}+U_{DL}) + 6'9(U_{AEs}+U_{BEs}+U_{CEs}+U_{DEs}) + 5\cdot(U_{AEc}+U_{BEc}+U_{CEc}+U_{DEc}) - 0'6\cdot(U_{AL}+U_{AEs}+U_{AEc}) - 0'52\cdot(U_{BL}+U_{BEs}+U_{BEc}) - 0'48(U_{CL}+U_{CEs}+U_{CEc}) - 0'35(U_{DL}+U_{DEs}+U_{DEc}) =$$

$$= 7'3U_{AL} + 7'38U_{BL} + 7'42U_{CL} + 7'55U_{DL} + 6'3U_{AEs} + 6'38U_{BEs} + 6'42U_{CEs} + 6'55U_{DEs} + 4'4U_{AEc} + 4'48U_{BEc} + 4'52U_{CEc} + 4'65U_{DEc}$$

S.a.

1. $U_{AL}+U_{AEs}+U_{AEc} \leq 4.000$
2. $U_{BL}+U_{BEs}+U_{BEc} \leq 5000$
3. $U_{CL}+U_{CEs}+U_{CEc} \leq 3.500$
4. $U_{DL}+U_{DEs}+U_{DEc} \leq 5.500$
5. $0'6U_{BL}+0'6U_{CL}+0'6U_{DL}-0'4U_{AL} \geq 0$
6. $0'15U_{BEs}+0'15U_{CEs}+0'15U_{DEs}-0'85U_{AEs} \geq 0$
7. $0'2U_{AL}+0'2U_{BL}+0'2U_{DL}-0'8U_{CL} \leq 0$
8. $0'6U_{AEs}+0'6U_{BEs}+0'6U_{DEs}-0'4U_{CEs} \leq 0$
9. $0'5U_{AEc}+0'5U_{BEc}+0'5U_{DEc}-0'5U_{CEc} \leq 0$
10. $0'1U_{AL}+0'1U_{BL}+0'1U_{CL}-0'9U_{DL} \geq 0$
11. $0'25U_{AEs}+0'25U_{BEs}+0'25U_{CEs}-0'75U_{DEs} \geq 0$
12. $0'45U_{AEc}+0'45U_{BEc}+0'45U_{CEc}-0'55U_{DEc} \geq 0$

$U_{ij} \geq 0$

(b) ¿Cuál es el plan óptimo de producción y la ganancia máxima?

	16:28:25		Monday	February	21	2022		
	Decision Variable	Solution Value	Unit Cost or Profit c(j)	Total Contribution	Reduced Cost	Basis Status	Allowable Min. c(j)	Allowable Max. c(j)
1	X1	3.750,0000	7,3000	27.375,0000	0	basic	5,6381	7,3000
2	X2	5.000,0000	7,3800	36.900,0000	0	basic	7,3800	M
3	X3	2.500,0000	7,4200	18.550,0000	0	basic	1,6033	7,8506
4	X4	1.250,0000	7,5500	9.437,5000	0	basic	0,3944	10,6500
5	X5	250,0000	6,3000	1.575,0000	0	basic	6,3000	7,9619
6	X6	0	6,3800	0	0	at bound	-M	6,3800
7	X7	1.000,0000	6,4200	6.420,0000	0	basic	6,1158	6,8355
8	X8	416,6667	6,5500	2.729,1670	0	basic	5,8200	7,5471
9	X9	0	5,0000	0	-3,1821	at bound	-M	8,1821
10	X10	0	4,4800	0	-3,7821	at bound	-M	8,2621
11	X11	0	4,5200	0	0	basic	4,0726	4,8382
12	X12	0	4,6500	0	0	basic	4,2026	5,0036
	Objective	Function	(Max.) =	102.986,7000	(Note:	Alternate	Solution	Exists!!)

Z = 102.986'7€ de ganancia

Cantidad de componente A para tipo Lujo: 3.750 l

Cantidad de componente B para tipo Lujo: 5.000 l

Cantidad de componente C para tipo Lujo: 2.500 l

Cantidad de componente D para tipo Lujo: 1.250 l

Cantidad de componente A para tipo Estándar: 250 l

Cantidad de componente B para tipo Estándar: 0 l

Cantidad de componente C para tipo Estándar: 1.000 l

Cantidad de componente D para tipo Estándar: 416 l

Cantidad de componente A para tipo Económica: 0 l

Cantidad de componente B para tipo Económica: 0 l

Cantidad de componente C para tipo Económica: 0 l

Cantidad de componente D para tipo Económica: 0 l

(c) Escribir el problema dual del formulado en el apartado (a).

Minimizar $y = 4000\,w_1 + 5000\,w_2 + 3500\,w_3 + 5500\,w_4$

s.a.

$$w_1 + 0'4\,w_5 + 0'2\,w_7 - 0'1\,w_{10} \geq 7'3$$
$$w_1 + 0'85\,w_6 + 0'6\,w_8 + 0'25\,w_{11} \geq 6'3$$
$$w_1 + 0'5\,w_9 - 0'45\,w_{12} \geq 4'4$$

$$w_2 - 0'6\,w_5 + 0'2\,w_7 - 0'1\,w_{10} \geq 7'38$$
$$w_2 - 0'15\,w_6 + 0'6\,w_8 - 0'25\,w_{11} \geq 6'38$$
$$w_2 + 0'5\,w_9 - 0'45\,w_{12} \geq 4'48$$
$$w_3 - 0'6\,w_5 - 0'8\,w_7 - 0'1\,w_{10} \geq 7'42$$
$$w_3 - 0'15\,w_6 - 0'4\,w_8 - 0'25\,w_{11} \geq 6'42$$
$$w_3 - 0'5\,w_9 - 0'45\,w_{12} \geq 4'52$$
$$w_4 - 0'6\,w_5 + 0'2\,w_7 + 0'9\,w_{10} \geq 7'55$$
$$w_4 - 0'15\,w_6 + 0'6\,w_8 + 0'75\,w_{11} \geq 6'55$$
$$w_4 + 0'5\,w_9 + 0'55\,w_{12} \geq 4'65$$

$w_i \geq 0$

(d) Resolver el problema del apartado (c) utilizando las condiciones de holgura complementaria. ¿Es única la solución? Razonar la respuesta.

$U_{AL} = 3750$ $U_{BL} = 5000$ $U_{CL} = 2500$ $U_{DL} = 1250$

$U_{AES} = 256$ $U_{CES} = 1000$ $U_{DES} = 416$

$\boxed{w_4 = 0\ ;\ w_5 = 0}$

Lo holgura

El resto: $U_{BES}, U_{AEC}, U_{BEC}, U_{CEC}, U_{DEC}$ son $= 0$

$$w_1 \qquad + 0'2\,w_7 - 0'1\,w_{10} = 7'3$$
$$w_1 + 0'85\,w_6 + 0'6\,w_8 - 0'25\,w_{11} = 6'3$$
$$w_3 \qquad - 0'8\,w_7 - 0'1\,w_{10} = 7'42$$
$$w_2 \qquad + 0'2\,w_7 - 0'1\,w_{10} = 7'38$$

$$-0'15\,w_6 + 0'6\,w_8 + 0'75\,w_{11} = 6'55$$
$$0'2\,w_7 + 0'9\,w_{10} = 7'55$$
$$w_3 - 0'15\,w_6 - 0'4\,w_8 - 0'25\,w_{11} = 6'42$$

La respuesta:

$$x_1 = \frac{1249}{156}$$
$$x_2 = \frac{31537}{3900}$$
$$x_3 = \frac{17009}{1950}$$
$$x_4 = x_4$$
$$x_5 = x_5$$
$$x_6 = \frac{-322}{39} + x_{11}$$
$$x_7 = \frac{31}{52}$$
$$x_8 = \frac{1381}{156} - x_{11}$$
$$x_9 = x_9$$
$$x_{10} = \frac{322}{39}$$
$$x_{11} = x_{11}$$

Solución obtenida con resolucionador de internet

(e) Sin resolver de nuevo el problema, responder a las siguientes cuestiones:

(i) En el plan óptimo de producción no se produce ningún litro del aditivo *Económico*. ¿Cuál debería ser el precio mínimo de venta de ese aditivo para que merezca la pena producirlo?

(ii) Hay restricciones sobre el porcentaje del producto D que se utiliza en la producción de los diferentes aditivos. Si se pudiera violar alguna de estas limitaciones en el producto D, ¿merecería la pena? ¿Qué restricción sería más ventajosa eliminar? Razonar la respuesta.

(iii) Supongamos que el precio de venta por litro del aditivo Lujo aumenta a \$7.95, \$8.00 y \$8.05. ¿Cuál sería el aumento en el beneficio que se obtendría? Razonar la respuesta.

(iv) Si el precio de venta del aditivo Lujo se incrementa en un 3 %, ¿cuál sería el beneficio máximo? ¿Cuál es la ganancia óptima si el precio de venta de este aditivo se incrementa en $\$\epsilon$, con $\epsilon < 0.31$?

(v) La cantidad disponible diariamente del producto A es de 4000 litros. ¿Merecería la pena comprar 1000 litros más? En caso afirmativo, ¿a qué precio por litro? Justificar la respuesta.

(vi) Suponer que los precios de venta por litro se cambian a \$7.7 para Lujo, \$6.8 para Estándar y \$4.9 para Económico. Además, el Departamento de marketing estima que la demanda de Lujo no puede exceder los 12600 litros. ¿Cuál es la producción óptima y el máximo beneficio?

V)

$$\begin{pmatrix} 3.750 \\ 5000 \\ 250 \\ 3833'333 \\ 3750 \\ 0 \\ 1.250 \\ 416 \\ 0 \\ 2.500 \\ 1.000 \\ 0 \end{pmatrix} + 1000 \begin{pmatrix} 1'0769 \\ 0 \\ -0'0759 \\ -0'0256 \\ -0'1338 \\ 0 \\ 0'1538 \\ -0'1282 \\ 0 \\ 0'3077 \\ -0'3077 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4826'9 \\ 5000 \\ 173'1 \\ 3807'73 \\ 3596'2 \\ 0 \\ 1.403'8 \\ 288'47 \\ 0 \\ 2192'3 \\ 692'3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

L.D. $\qquad$ h_1

R. H. S.	Slack_C1
	0
3.750,0000	1,0769
5.000,0000	0
250,0000	-0,0769
3.833,3330	-0,0256
3.750,0000	-0,1538
0	0
1.250,0000	0,1538
416,6667	-0,1282
0	0
2.500,0000	0,3077
1.000,0000	-0,3077
0	0

$LD \geq 0$ todos los valores así que es óptima

$$z = z^0 + \Delta(U_{AL} + U_{AES} + U_{AEC})\,\omega_1 = 102.986'7 + 1000(8'0064) = \boxed{110993'3}$$

Merece la pena

(f) Describir la forma general del problema inicialmente planteado y construir el correspondiente modelo de PL, utilizando la siguiente notación:

m	número de aditivos que se producen
n	número de productos
p_j	precio de venta del aditivo j, $j = 1, ..., m$
c_i	coste del producto i, $i = 1, ..., n$
a_i	disponibilidad máxima del producto i, $i = 1, ..., n$
r_{ij}	proporción mínima del producto i que se requiere en el aditivo j
R_{ij}	proporción máxima del producto i que se requiere en el aditivo j

2. Un intermediario que comercializa tinta para impresoras tiene un depósito con capacidad de K unidades de volumen. En las próximas n semanas, el intermediario comprará tinta al principio de la semana y la venderá al final de la misma, es decir, para venderla, debe almacenarla al menos una semana. Se considera que en la semana j, con $1 \leq j \leq n$, el intermediario paga un precio unitario c_j, tiene un coste unitario de almacenamiento h_j y el precio unitario de venta es s_j. El depósito está inicialmente vacío y debe estar también vacío al final de la última semana. Se supone que el intermediario dispone de fondos ilimitados para la compra de tinta y puede vender cualquier cantidad de tinta.

(a) Formular un modelo de PL para maximizar el beneficio (ingresos menos costes) después de las n semanas.

(b) Demostrar que el problema formulado en (a) tiene solución óptima finita.

(c) Probar que el valor óptimo del PL formulado en (a) es cero o proporcional al tamaño K del depósito.

Indicación: Utilizar la teoría de dualidad.

(d) ¿Es posible que el depósito no se llene completamente nunguna de las n semanas si el beneficio óptimo es positivo? Razonar la respuesta.

a

Co_j: Unidades de tinta compradas al principio de la semana j
V_j = " " " vendidas " final " " " "
A_j = " " " almacenada " " " " " "

$\Bigg\} 1 \leq j \leq n$

f.o. $\rightarrow$ Max $z = \sum_{j=1}^{n} V_j \cdot s_j - \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot Co_j - \sum_{j=1}^{n} A_j \cdot h_j$

s.a.

$$\left.\begin{array}{l}
A_0 = 0 \\
A_n - V_n = 0 \\
A_j - V_j + Co_{j+1} - A_{j+1} = 0 \\
V_0 = 0 \\
A_j \leq K \\
V_j - A_j \leq 0 \\
Co_j, V_j, A_j \geq 0
\end{array}\right\} 1 \leq j \leq n$$

(b) Para que sea óptima finita tenemos que demostrar que el conjunto de soluciones es acotado y no vacío.

No es vacío porque al asociar a todas las variables el valor "0", las restricciones se siguen cumpliendo, es decir, es válida.

Comprobemos si es acotado:

- $A_j \leq K$ → nos indica que A_j estará acotada por K.

- $V_j - A_j \leq 0$ → nos indica que V_j estará acotada por A_j

- $A_j - V_j + Co_{j+1} A_{j+1} = 0$ → Como no podemos almacenar más de K unidades, tenemos que en la semana j no podemos comprar (C_j) más de K unidades menos las que almacenamos la semana anterior (A_{j-1}) mas las que vendimos en la anterior (V_{j-1}) → $C_j \leq K - A_{j-1} + V_{j+1}$

Por tanto C_j está acotada por K, A_j y V_j.

Con todo lo anterior demostramos que el conjunto de soluciones es acotado y no vacío, por tanto $\boxed{\text{la solución es óptima finita}}$

(c) Gracias al Teorema de Dualidad Fuerte sabemos que si la solución del primal es óptima finita, la del dual también. y la f.o. valdrá lo mismo para ambos:

→ Cuando los gastos son superiores a los beneficios (por ejemplo $Co_j, V_j, A_j = 0$), las restricciones se cumplen y la f.o. valdrá "0".

→ La f.o. del dual será de la siguiente forma:

$$\min: \quad Y = K \cdot \sum_{j=1}^{K} (w_{5j}) \qquad 1 \leq j \leq n$$

↳ Esto nos indica que la f.o va a ser proporcional al tamaño de K

d

↳ Teniendo en cuenta esta f.o. en el dual podemos deducir que, para que el resultado no sea "0", al menos unas de las "w_5" tiene que ser "≠0".

Para que esto ocurra, una de las w_5 no tiene que tener holgura, es decir, $\boxed{A_j = K}$ exactamente

Por esto deducimos que es imposible que ninguna de las semanas se llene el almacen por completo