Ejercicios 11/08, álgebra lineal I

Elsa Fernanda Torres Feria

Semestre 2020-4

1. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Sean u, v y w vectores de V. Justifica la siguiente igualdad enunciando de manera explícita todos los axiomas de espacio vectorial que uses

$$u + 5v - 3w + 2u - 8v = -3(w + v - u)$$

Solución

Obtengamos el lado derecho del igual a partir del lado izquierdo enunciando todos los axiomas:

a) Conmutatividad de la suma: La usamos para mover el elemento $-3w$ hasta que se encuentre al inicio

$$u + 5v - 3w + 2u - 8v = u - 3w + 5v + 2u - 8v = -3w + u + 5v + 2u - 8v$$

b) Conmutatividad de la suma: Para dejar los elementos u juntos así como los v

$$-3w + u + 5v + 2u - 8v = -3w + u + 2u + 5v - 8v$$

c) Asociatividad de la suma:

$$-3w + u + 2u + 5v - 8v = -3w + (u + 2u) + (5v - 8v) = -3w + 3u - 3v$$

d) Distributividad para la suma vectorial: Sabemos que para cualquier escalar $a \in \mathbb{R}$ y $h, x, y, z \in V$, por V ser un campo se cumple que $a(h + x) = ah + ax$, en especial si $h = y + z$, antonces tenemos: $a((y + z) + x) = a(y + z) + ax = ay + az + ax$. Podríamos decir que nosotros nos encontramos en la última igualdad y nuestra $a = -3$, entonces

$$-3w + 3u - 3v = -3(w - u + v)$$

e) Por último tenemos de nuevo la conmutatividad de la suma dentro del paréntesis

$$-3(w - u + v) = -3(w + v - u)$$

$\square$

2. Demuestra que los sisguientes conjuntos W son subespacios del espacio vectorial indicado.

a) El subcojunto W de vectores (w, x, y, z) de $\mathbb{C}^4$ tales que $w + x + y + z = 0$
Solución
Para mostrar que es subespacio debemos ver que el conjunto no es vacío y probar alguna de las definiciones alternativas enunciadas en la entrada de *subespacios vectoriales*.
Usemos la 3: Para cualesquiera vectores u y v en W y cualquier escalar $c \in F$, se tiene que $cu + v$ está en W.
Definamos $u = (w, x, y, z)$ y $v = (w', x', y', z')$ en W y $c \in \mathbb{C}$.
P.D. $cu + v \in W$

$$cu + v = c(w, x, y, z) + (w', x', y', z') = (cw + w', cx + x', cy + y', cz + z')$$

Ahora, la suma de las entradas de $cu + v$:

$$\begin{aligned}
&(cw + w') + (cx + x') + (cy + y') + (cz + z') \\
&= (cw + cx + cy + cz) + (w' + x' + y' + z') \\
&= c(w + x + y + z) + (w' + x' + y' + z') \\
&= c(0) + 0 = 0
\end{aligned}$$

Pues $u, v \in W$.
$\therefore$ $cu + v = 0$ y W es un subespacio.

b) La colección W de funciones continuas $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ tales que $\int_0^1 f(x)dx = 0$ es un subespacio del espacio de funciones de $[0, 1]$ a $\mathbb{R}$.
Solución
Usemos nuevamente la definición 3. Para ello, establezcamos $f, g \in W$ y $c \in \mathbb{R}$.
P.D. $cf + g \in W$

$$\begin{aligned}
(cf + g)(x) &= cf(x) + g(x) \\
\int_0^1 (cf + g)(x)dx &= \int_0^1 (cf(x) + g(x))dx \\
&= \int_0^1 cf(x)dx + \int_0^1 g(x)dx \\
&= c\int_0^1 f(x)dx + \int_0^1 g(x)dx \\
&= c(0) + 0 = 0
\end{aligned}$$

Pues $f, g \in W$.
$\therefore$ W es un subespacio del espacio de funciones de $[0, 1]$ a $\mathbb{R}$.

3. Demuestra que los siguientes conjuntos W no son subespacios del espacio vectorial indicado.

a) Cuando W es un subconjunto finito y con al menos dos polinomios con coeficientes complejos y de grado a lo más 3, es imposible que sea un subespacio de $\mathbb{C}_3[x]$.
Solución
Sea P(x) un polinomio en el subcojunto W; no puede ser subespacio pues si lo fuera, pudieramos tomar cualquier $a \in \mathbb{C}$ y multiplicarlo por P(x) y este debería estar en W, pero W dejaría de ser un subconjunto finito.