Tarea moral:Matrices de bloques.

Elsa Fernanda Torres Feria

Semestre 2020-4

1. ¿Cómo se comportan las matrices de bloque respecto a la transposición?

   Para darnos una idea de que es lo que pasa, tomemos la matriz A $\in M_4 \times (F)$ dada por:

$$A = \left(\begin{array}{cc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{array}\right)$$

   Si nombramos los bloques de A, tenemos:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

   Llamemos B a la matriz que resulta de sólo transponer los bloques de la matriz A, que queda como:

$$B = \left(\begin{array}{cc|cc} a_{11} & a_{21} & a_{14} & a_{24} \\ a_{12} & a_{22} & & \\ a_{13} & a_{23} & & \\ \hline a_{31} & a_{41} & a_{34} & a_{44} \\ a_{32} & a_{42} & & \\ a_{33} & a_{42} & & \end{array}\right)$$

   Si nombramos a los bloques de B, tenemos:

$$B = \left(\begin{array}{c|c} B_{11} & B_{12} \\ \hline B_{21} & B_{22} \end{array}\right)$$

   Si ahora transponemos toda la matriz, sin pensar en los bloques y a esta matriz resultante le llamamos C:

$$C = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & a_{41} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & a_{42} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{43} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{pmatrix}$$

   ¿Qué es lo que tiene que pasar para que B=C?

Los bloques B_{12} y B_{21} deben conmutar

Así, al transponer la matriz A (la matriz por bloques) primero se deben transponer los bloques y reflejar sobre la diagonal (de bloques) los que se encuentren fuera de esta:

$$A^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} A_{11}^T & A_{21}^T \\ A_{12}^T & A_{22}^T \end{pmatrix}$$

Para matrices de bloque no *cuadradas* pasa lo mismo, definamos D una mariz por bloques de la forma:

$$D = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & D_{14} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} & D_{24} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} & D_{34} \end{pmatrix}$$

La matriz transpuesta de D sería:

$$D^T = \begin{pmatrix} D_{11}^T & D_{21}^T & D_{31}^T \\ D_{12}^T & D_{22}^T & D_{32}^T \\ D_{13}^T & D_{23}^T & D_{33}^T \\ D_{14}^T & D_{24}^T & D_{34}^T \end{pmatrix}$$

2. Escribe todas las formas en las que puedes dividir la matriz I_3 para que quede como una matriz de bloques.

   Las que nos dieron

$$\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right), \left(\begin{array}{c|c|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right), \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

   Algunas otras

$$\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right), \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right), \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{c|c|c} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right), \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right), \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{c|c|c} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right), \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right), \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{c|c|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right), \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right), \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right) y \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

3. Demuestra que toda matriz diagonal puede verse como una matriz diagonal por bloques.

   Demostración

   a) Sea A$\in M_n(F)$ una matriz diagonal ($a_{ij} \neq 0$ si $i = j$ y $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$), podemos dividirla de tal forma que sea una matriz por bloques:

$$A = \left(\begin{array}{cc|c|cc} a_{11} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 & 0 \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & 0 & a_{(n-1)n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{array}\right)$$

   □

   b) Muestra que no toda matriz diagonal por bloques es una matriz diagonal.

   Demostración

   Necesitamos al menos una matriz diagonal por bloques. Proponemos la siguiente:

$$A = \left(\begin{array}{cc|ccc|c} 9 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 11 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 8 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

   □.

4. Escribe todas las formas en las que puedes dividir a la matriz I_4 para que quede como una matriz diagonal por bloques.

   La matriz es:

$$I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   Podemos dividirla de las siguientes maneras:

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right), \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right), \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right), \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{c|cc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right), \left(\begin{array}{cc|c|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right), \left(\begin{array}{c|c|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right), \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

5. ¿Cómo es la inversa de una matriz diagonal por bloques?

   Sea la matriz A $\in M_n(F)$ una matriz diagonal por bloques de la forma:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

   Queremos encontrar A^{-1} que cumpla $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$

   Proponemos:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11}^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_{22}^{-1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_{nn}^{-1} \end{pmatrix}$$

   Que cumple $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$.