Soluciones a la tarea en equipo de la unidad 1

Nombres:

Fecha:

1

Enunciado: Sean u, v y w vectores distintos de un espacio vectorial V. Muestra que si $\{u, v, w\}$ es una base para V, entonces $\{u+v+w, v+w, w\}$ también es una base para V.

Solución:

2

Enunciado: Sea V el conjunto de vectores $(v, w, x, y, z) \in \mathbb{R}^5$ tales que

$$v + w = x + y + z$$

(a) Demuestra que V es un subespacio de $\mathbb{R}^5$.

(b) Da una base de V y a partir de ello enuncia la dimensión de V.

(c) Completa la base encontrada en b) a una base de $\mathbb{R}^5$.

Solución:

3

Enunciado: Sea $\mathbb{R}_1[x]$ el espacio de los polinomios con coeficientes reales de grado a lo más 1. Considera la transformación lineal $T : \mathbb{R}_1[x] \to \mathbb{R}_1[x]$ definida por $T(p(x)) = p'(x)$ la derivada de $p(x)$. Sea $\mathcal{B}$ la base $\{1, x\}$ de $\mathbb{R}_1[x]$ y $\mathcal{B}'$ la base $\{1 + 2x, 1 - 2x\}$ de $\mathbb{R}_1[x]$.

(a) Encuentra $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B})$.

(b) Encuentra $\mathrm{Mat}(T)_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$.

Solución:

4

Enunciado: Sea T una transformación lineal en $\mathbb{R}^3$ cuya matriz asociada con respecto a la base canónica es:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -6 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Verifica que $A^2 = 2A$.

(b) Deduce que $T(v) = 2v$ para todo $v \in \mathrm{Im}(T)$.

(c) Prueba que ker (T) y $\mathrm{Im}(T)$ están en posición de suma directa en $\mathbb{R}^3$.

(d) Encuentra bases para ker (T) e $\mathrm{Im}(T)$, y escribe la matriz asociada a T con respecto a la base de $\mathbb{R}^3$ deducida de completar las bases de $\ker(T)$ e $\mathrm{Im}(T)$, respectivamente.

Solución:

5

Enunciado del problema:

(a) Prueba que para cualquier matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$ se tiene que

$$\text{rank}(A) = \text{rank}\left({}^tAA\right)$$

Sugerencia: Si $x \in \mathbb{R}^n$ es un vector columna tal que ${}^tAAx = 0$, escribe ${}^tx{}^tAAx = 0$ y expresa el lado izquierdo como una suma de cuadrados.

(b) Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$ de $M_2(\mathbb{C})$. Encuentra el rango de Ay${}^tAA$y concluye que el inciso a) de este problema no es necesariamente cierto si $\mathbb{R}$ es reemplazado por $\mathbb{C}$.

Solución: