Ejercicios 06/08, álgebra lineal I

Elsa Fernanda Torres Feria

Semestre 2020-4

1. ¿cuál de las siguientes matrices se encuentra en su forma escalonada reducida?

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Sea el sistema homogéneo:

$$x_1 + x_2 - x_5 + 2x_7 = 0$$
$$x_3 + 3x_5 + x_7 = 0$$
$$x_4 - x_7 = 0$$
$$x_6 = 0$$

Comprueba que las soluciones fundamentales dadas por:

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

son en efecto soluciones del sistema; que la suma de las tres también es una solución al sistema y por último elige valores para x_2, x_5, x_7 y verifica que esa también es una solución.

Para verificar, sustituimos una a una las soluciones fundamentales y vemos si cumplen. Para la primera solución fundamental:

$$-1 + 1 - 0 + 2(0) = -1 + 1 = 0$$
$$0 + 3(0) + 0 = 0$$

$$0 - 0 = 0$$

$$0 = 0$$

La segunda solución fundamental:

$$1 + 0 - 1 + 2(0) = 0$$

$$-3 + 3(1) + 0 = 0$$

$$0 - 0 = 0$$

$$0 = 0$$

La tercera solución fundamental:

$$-2 + 0 - 0 + 2(1) = 0$$

$$-1 + 3(0) + 1 = 0$$

$$1 - 1 = 0$$

$$0 = 0$$

La suma de las tres es:

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -4 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Y al sustituir tenemos:

$$-2 + 1 - 1 + 2(1) = 0$$

$$-4 + 3(1) + 1 = 0$$

$$1 - 1 = 0$$

$$0 = 0$$

Sí es solución.

Por último, escojamos valores para las tres variables libres: $x_2 = 1, x_5 = 3, x_7 = 2$ y tenemos que:

$$x_1 = -x_2 + x_5 - 2x_7$$

$$\Rightarrow x_1 = -2 + 3 - 2(2) = -3$$

$$x_3 = -3x_5 - x_7$$

$$\Rightarrow x_3 = -3(3) - 2 = -11$$

y

$$x_4 = x_7 = 2, x_6 = 0$$

Por lo que $X = (-3, 1, -11, 2, 3, 0, 2)$

Que cumple el sistema de ecuaciones:

$$-3 + 1 - 2 + 2(2) = 0$$
$$-11 + 3(3) + 2 = 0$$
$$2 - 2 = 0$$
$$x_6 = 0$$

3. Determina cuántas soluciones tiene el sistema $AX = b$ con:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} yb = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Consideremos la matriz aumentada y hagamos operaciones elementales:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -4 & 7 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 7/2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 11/2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 21/2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 21/2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 21/2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Comprobamos que es solución (i.e. AX=b):

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 21/2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}$$

4. ¿y el siguiente sistema de ecuaciones?

$$x + 2y + 2z = 2$$
$$2x + y + 3z = 3$$
$$3x + 3y + 5z = 6$$

Podemos reescribir el sistema como:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Para resolverlo, consideremos la matriz aumentada $(A|b)$ y hagamos opereaciones elementales sobre esta:

$$(A|b) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & -1 & -1 \\ 3 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4/3 & 4/3 \\ 0 & 1 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4/3 & 4/3 \\ 0 & 1 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$