Universidad Nacional Autónoma de México, Álgebra Lineal I
2020-4

Examen 2

1

Enunciado: (2pts) Sea $V = M_{6,3}(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de matrices de 6×3 con entradas reales.

- Encuentra todos los enteros positivos n para los cuales existe una transformación lineal inyectiva de V a $M_n(\mathbb{R})$.
- Encuentra todos los enteros positivos n para los cuales existe una transformación lineal suprayectiva de V a $M_n(\mathbb{R})$.

Solución:
En el blog vimos que si V y W son espacios de dimensión finita y existe una transformación lineal inyectiva $T : V \to W$ entonces $\dim(V) \leq \dim(W)$. Ahora observemos los espacios con los que estamos trabajando:

$$\dim(V) = \dim\left(M_{6,3}(\mathbb{R})\right) = 6 \times 3 = 18$$
$$\dim\left(M_n(\mathbb{R})\right) = \dim\left(M_{n,n}(\mathbb{R})\right) = n^2$$

Observamos que son espacios de dimensión finita. Supongamos que existe

$$T : M_{6,3}(\mathbb{R}) \to M_{n,n}(\mathbb{R})$$

entonces

$$\dim\left(M_{6,3}(\mathbb{R})\right) \leq \dim\left(M_n(\mathbb{R})\right)$$

luego

$$18 \leq n^2$$

finalmente
$$\sqrt{18} \leq n$$

Por lo tanto existen transformaciones lineales inyectivas para los enteros positivos n tal que $5 \leq n$.

En el blog vimos que si V y W son espacios de dimensión finita y existe una transformación lineal suprayectiva $T : V \to W$ entonces $\dim(V) \geq \dim(W)$.Desarrollando el ejercicio justo como se hizo en el ejercicio anterios, vemos que existen transformaciones lineales suprayectivas para los enteros positivos n que cumplen que

$$\sqrt{18} \geq n$$

o lo que es lo mismo:
$$4 \leq n$$

2

Enunciado: (2pts) Considera la transformación $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y) = \left(y^5, x^5\right)$ y la transformación $R : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $R(x, y, z) = (x-y, y-z, z-x)$.

- Demuestra que T no es una transformación lineal.
- Muestra que R es una transformación lineal. Determina su kernel, su imagen y su rango.

Solución:
Por un lado tenemos que:

$$T(2, 2) + T(1, 1) = (32, 32) + (1, 1) = (33, 33)$$

por otro lado, tenemos que:

$$T((2, 2) + (1, 1)) = T(3, 3) = (243, 243)$$

Por lo tanto la transformación T no abre sumas.
Para demostrar la linealidad de R nos tomamos una triada de vectores cualquiera:

$$\begin{aligned} R\left(x_1, y_1, z_1\right) + \alpha R\left(x_2, y_2, z_2\right) &= \left(x_1 - y_1, y_1 - z_1, z_1 - x_1\right) + \alpha\left(x_2 - y_2, y_2 - z_2, z_2 - x_2\right) \\ &= \left(x_1 - y_1, y_1 - z_1, z_1 - x_1\right) + \left(\alpha\left(x_2 - y_2\right), \alpha\left(y_2 - z_2\right), \alpha\left(z_2 - x_2\right)\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \left(x_1 - y_1, y_1 - z_1, z_1 - x_1\right) + \left(\alpha x_2 - \alpha y_2, \alpha y_2 - \alpha z_2, \alpha z_2 - \alpha x_2\right) \\ &= \left(x_1 - y_1 + \alpha x_2 - \alpha y_2, y_1 - z_1 + \alpha y_2 - \alpha z_2, z_1 - x_1 + \alpha z_2 - \alpha x_2\right) \end{aligned}$$

$= ((x_1 + \alpha x_2) - (y_1 + \alpha y_2), (y_1 + \alpha y_2) - (z_1 + \alpha z_2), (z_1 + \alpha z_2) - (x_1 + \alpha x_2))$
$= (x - y, y - z, z - x)$

Para obtener el kernel se tiene que cumplir:

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ y - z = 0 \\ z - x = 0 \end{cases}$$

Entonces, pasamos este sistema a la forma matricial y sacamos su forma escalonada reducida:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)^{red} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Entonces, obtenemos lo siguiente:

$$\begin{cases} x - z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

Por lo tanto, $x = y = z$. De ahi tenemos que $\ker(R) = \{(a, a, a) \mid a \in \mathbb{R}\}$

Para obtener la imagen:

$$\begin{aligned} -1R(e_1) - 1R(e_2) &= R(e_3) \\ -1(1, 0, -1) - 1(-1, 1, 0) &= (0, -1, 1) \\ (-1, 0, 1) + (1, -1, 0) &= (0, -1, 1) \end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(R) &= \{aR(e_1) + bR(e_2) \mid a, b \in \mathbb{R}\} \\ &= \{a(1, 0, -1) + b(-1, 1, 0) \mid a, b \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(a - b, b, -a) \mid a, b \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Finalmente, a partir de lo anterior, tenemos que el rango a partir de la base de la imagen de R es $\{(1, 0, -1), (-1, 1, 0)\}$. Y sabemos que rank $(R) = 2$

3

Enunciado: (3pts) Sea $V = \mathbb{R}_3[x]$ el espacio vectorial de polinomios con coeficientes reales con grado a lo más 3. Sea $T : V \to V$ la transformación dada por $T(p(x)) = p(x) + p'(x)$. Recuerda que $p'(x)$ es la derivada del polinomio. Prueba que T es lineal y encuentra la matriz asociada a T con respecto a la base $\mathcal{B} = \{1, 1 + x, 1 + x + x^2, 1 + x + x^2 + x^3\}$ de V

Solución:
Para demostrar que T es lineal, tomaremos $p(x), q(x) \in \mathbb{R}_3[x]$ y un escalar c

$$\begin{aligned}
T(p(x)) + cT(q(x)) &= (p(x) + p'(x)) + c\,(q(x) + q'(x)) \\
&= p(x) + p'(x) + cq(x) + cq'(x) \\
&= p(x) + cq(x) + p'(x) + cq'(x) \\
&= (p(x) + cq(x)) + (p'(x) + cq'(x)) \\
&= T(p(x) + cq(x))
\end{aligned}$$

Para sacar la matriz asociada a T con respecto a la base $\mathcal{B}$.

$$\begin{aligned}
T(1) &= 1 \\
T(1+x) &= 2 + x \\
T\left(1 + x + x^2\right) &= 2 + 3x + x^2 \\
T\left(1 + x + x^2 + x^3\right) &= 2 + 3x + 4x^2 + x^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T(1) &= 1 \cdot 1 + 0 \cdot (1+x) + 0 \cdot \left(1 + x + x^2\right) + 0 \cdot \left(1 + x + x^2 + x^3\right) \\
T(1+x) &= 1 \cdot 1 + 1 \cdot (1+x) + 0 \cdot \left(1 + x + x^2\right) + 0 \cdot \left(1 + x + x^2 + x^3\right) \\
T\left(1 + x + x^2\right) &= -1 \cdot 1 + 2 \cdot (1+x) + 1 \cdot \left(1 + x + x^2\right) + 0 \cdot \left(1 + x + x^2 + x^3\right) \\
T\left(1 + x + x^2 + x^3\right) &= -1 \cdot 1 + -1 \cdot (1+x) + 3 \cdot \left(1 + x + x^2\right) + 1 \cdot \left(1 + x + x^2 + x^3\right)
\end{aligned}$$

Por lo tanto la matriz es:

$$\operatorname{Mat}_B(T) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4

Enunciado: Considera la siguiente matriz,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

la suma de las entradas en cada fila es cero, pues

$$1 + 0 - 1 = 2 - 2 + 0 = -3 + 2 + 1 = 0$$

También las suma de las entradas en cada columna es cero.

Una matriz en $M_3(\mathbb{R})$ es mágica si la suma de las entradas en cada fila y en cada columna es igual a cero.

Demuestra que el conjunto de matrices mágicas es un subespacio de $M_3(\mathbb{R})$. Encuentra una base para este subespacio y determina su dimensión.

Solución:
Veamos que las matrices mágicas en prinicipio no son vacías por lo que tenemos que la primera condición que nos da el problema; la suma de columnas y filas da como resultado 0 entonces $0 \in M_3(\mathbb{R})$. Ahora solo falta comprobar dos cosas para que cumpla que sea subespacio: Sea $A, B \in M_3(\mathbb{R})$, y son ambas mágicas entoces comprobemos la primera condición:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{31} & b_{33} \end{bmatrix}$$

Entonces;

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{23} \\ a_{31} + b_{31} & a_{32} + b_{32} & a_{33} + b_{33} \end{bmatrix} = C$$

Veamos que $A + B = C$ y como la suma de las matrices magicas da otra matriz magica entonces $C \in M_3(\mathbb{R})$ por lo tanto se cumple la primera condición que $A + B \in M_3(\mathbb{R})$.
Ahora sea $k \in \mathbb{R}$ entonces;

$$k \cdot A = \begin{bmatrix} k \cdot a_{11} & k \cdot a_{12} & k \cdot a_{13} \\ k \cdot a_{21} & k \cdot a_{22} & k \cdot a_{23} \\ k \cdot a_{31} & k \cdot a_{32} & k \cdot a_{33} \end{bmatrix}$$

Por lo tanto la multiplicación de un escalar está dentro de la defninción de un subespacio vectorial esto implica que $k \cdot A \in M_3(\mathbb{R})$ por lo tanto es un subespacio vectorial en $M_3(\mathbb{R})$
Para encontrar la base debemos resolver el sistema que se obtiene al considerar las condiciones:

$$\begin{aligned} a_{13} + a_{22} + a_{31} &= a_{11} + a_{22} + a_{31} \\ a_{13} + a_{22} + a_{31} &= a_{21} + a_{22} + a_{23} \\ a_{13} + a_{22} + a_{31} &= a_{31} + a_{32} + a_{33} \\ a_{13} + a_{22} + a_{31} &= a_{11} + a_{21} + a_{31} \\ a_{13} + a_{22} + a_{31} &= a_{12} + a_{22} + a_{32} \\ a_{13} + a_{22} + a_{31} &= a_{13} + a_{23} + a_{33} \end{aligned}$$

Resolviendo:

$$B = \left\{ A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} ; A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & \\ 1 & 0 \\ 0 & \\ 0 & 1 \\ 0 & \end{pmatrix} \cdot A_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} ; A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

y su dimensión es 4.

5

Enunciado del problema: (+2 pts extra) Sea X cualquier conjunto finito con n elementos y $P(X)$ la familia de subconjuntos de X. Sea $\mathbb{F}_2$ el campo de dos elementos. Definimos las siguientes operaciones binarias:

$$\begin{aligned} + &: P(X) \times P(X) \to P(X) \\ \cdot &: \mathbb{F}_2 \times P(X) \to P(X) \end{aligned}$$

dadas por:

- Para cualesquiera dos subconjuntos A y B de X, se tiene que $A + B$ es la diferencia simétrica de A y B, es decir, el conjunto $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$ que tiene a los elementos de A o de B, pero que no están en $A \cap B$.
- Para cualquier subconjunto A de X, se tiene $1 \cdot A = A$ y $0 \cdot A = 0$.

(a) Demuestra que $P(X)$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{F}_2$ con estas operaciones. Muestra que la familia $\mathcal{B}$ de conjuntos unitarios de X es una base para $P(X)$. ¿Cuál es entonces la dimensión de $P(X)$?

(b) Demuestra que la familia W de subconjuntos de X con cardinalidad par es un subespacio de $P(X)$. Encuentra una base para W y su dimensión.

(c) Completa la base de W a una base $\mathcal{B}'$ de $P(X)$. Da un subespacio W' tal que $P(X) = W \oplus W'$

(d) Encuentra la matriz de cambio de base de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$ y su inversa.

Solución: