Universidad Nacional Autónoma de México, Álgebra Lineal I
2020-4

Soluciones a la tarea en equipo de la unidad 1

August 14, 2020

1

Enunciado del problema: Sea n un entero positivo y$A = [a_{ij}]$ la matriz en $M_n(\mathbb{R})$ dada por $a_{ij} = 2$ si $i \geq j$ y $a_{ij} = 0$ en otro caso. Por ejemplo, a continuación está la matriz cuando $n = 3$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Para cada n, muestra que A es una matriz invertible. Encuentra de manera explícita su inversa.

Solución:
Sea la matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$:

$$A_n = \begin{pmatrix} 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 & \cdots & 2 \end{pmatrix}$$

Supongamos que tenemos un sistema de la forma $AX = b$. Entonces, podemos escribirlo así:

$$AX = \begin{pmatrix} 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 & \cdots & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_1 + 2x_2 \\ \vdots \\ 2x_1 + 2x_2 + \cdots + 2x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Observamos que:

$$\begin{gathered} 2x_1 = b_1 \\ 2x_1 + 2x_2 = b_2 \\ \vdots \\ 2x_1 + 2x_2 + \cdots + 2x_n = b_n \end{gathered}$$

Despejando la primera ecuación:

$$2x_1 = b_1 \Rightarrow x_1 = \frac{b_1}{2}$$

Luego, despejamos la segunda:

$$2x_1 + 2x_2 = b_2 \Rightarrow 2\left(\frac{b_1}{2}\right) + 2x_2 = b_2 \Rightarrow x_2 = \frac{b_2 - b_1}{2} = \frac{1}{2}(-b_1 + b_2)$$

Sucesivamente hasta el n-ésimo término y obtenemos la siguiente expresión:

$$x_n = \frac{b_n - b_{n-1}}{2} = \frac{1}{2}(-b_{n-1} + b_n)$$

Entonces, la solución a nuestro sistema $AX = b$ es:

$$A^{-1}b = X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{b_1}{2} \\ -\frac{b_1}{2} + \frac{b_2}{2} \\ \vdots \\ -\frac{b_{n-1}}{2} + \frac{b_n}{2} \end{pmatrix}$$

Analizando un poco los índices y teniendo en mente cómo funciona el producto de matrices, podemos observar que la primera fila de A^{-1} es:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

La segunda fila es:

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

Así sucesivamente hasta concluir que nuestra matriz inversa es:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Como la matriz tiene una matriz inversa, entonces es invertible.

2

Enunciado del problema: Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$,

(a) Encuentra, con demostración, todas las matrices $B \in M_2(\mathrm{C})$ que conmutan con A.

(b) Encuentra, con demostración, todas las matrices $B \in M_2(\mathrm{C})$ para las cuales $AB + BA$ es la matriz cero.

Solución:
Para el primer inciso:

$$\text{Sea } A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Para las matrices conmuten se tiene que cumplir que $AB = BA$, entonces se debe cumplir que:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Haciendo la multiplicación:

$$\begin{pmatrix} a+3c & b+3d \\ 2a+c & 2b+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2b & 3a+b \\ c+2d & 3c+d \end{pmatrix}$$

Por la definición de igualdad de matrices obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{gathered} a+3c = a+2b \\ b+3d = 3a+b \\ 2a+c = c+2d \\ 2b+d = 3c+d \end{gathered}$$

Solucionamos el sistema de ecuaciones:

$$a = a$$
$$b = b$$
$$c = \frac{2b}{3}$$
$$d = a$$

Entonces, todas las matrices que conmutan con A tienen la siguiente forma:

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ \frac{2b}{3} & a \end{pmatrix} a, b \in \mathbb{C}$$

Para el segundo inciso:

$$\text{Sea } B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(C)$$

Se debe de cumplir entonces que:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Desarrollando el producto:

$$\begin{pmatrix} a + 3c & b + 3d \\ 2a + c & 2b + d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a + 2b & 3a + b \\ c + 2d & 3c + d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Hacemos la suma:

$$\begin{pmatrix} 2a + 3c + 2b & 2b + 3d + 3a \\ 2a + 2c + 2d & 2b + 2d + 3c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$2a + 3c + 2b = 0$$
$$2b + 3d + 3a = 0$$
$$2a + 2c + 2d = 0$$
$$2b + 2d + 3c = 0$$

Para este sistema, la única solución es la solución trivial:

$$a = 0$$
$$b = 0$$
$$c = 0$$
$$d = 0$$

Entonces las matrices B que cumplen que $AB + BA = O_2$ son de la siguiente forma:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3

Enunciado del problema: Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$ una matriz diagonal cuyas entradas diagonales son distintas dos a dos. Sea $B \in M_n(\mathbb{R})$ una matriz tal que $AB = BA$. Demuestra que B es una matriz diagonal.

Solución:
Como B conmuta con A entonces $AB = BA$ coordenada a coordenada. Primero veamos como son las coordenadas de AB

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=0}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

Luego como A es diagonal sus entradas $a_{ij} \neq 0$ si $i = j$ lo que provoca que todos los terminos de la suma sean cero excepto cuando $k = i$

$$(AB)_{ij} = a_{ii} b_{ij}$$

Ahora veamos como son las coordenadas de BA

$$(BA)_{ij} = \sum_{k=0}^{n} b_{ik} a_{kj}$$

Como A es diagonal provoca que todos los términos de la suma sean cero excepto cuando $k = j$

$$(BA)_{ij} = b_{ij} a_{jj}$$

Luego como B conmuta con A

$$a_{ii} b_{ij} = b_{ij} a_{jj}$$
$$b_{ij} (a_{ii} - a_{jj}) = 0$$

pero $a_{ii} - a_{j,j} \neq 0$ pues supusimos que las entradas de la matriz A eran distintas con lo que concluimos que $b_{ij} = 0$si $j \neq i$ que es la definicion de matriz diagonal por lo tanto B es diagonal

4

Enunciado del problema: Sean a y b números reales. Encuentre todas las soluciones para el siguiente sistema de ecuaciones en las variables w, x, y y z:

$$\begin{cases} w + x = a \\ x + y = b \\ y + z = a \\ z + w = b \end{cases}$$

Solución:
Obtenemos la matriz aumentada del problema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & 0 & 1 & b \end{pmatrix}$$

La llevamos a su forma escalonada reducida con el algoritmo de reducción gaussiana:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 2a-b \\ 0 & 1 & 0 & -1 & b-a \\ 0 & 0 & 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2b-2a \end{pmatrix}$$

Entonces obtenemos este sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} w+z=2a-b \\ x-z=b-a \\ y+z=a \\ 0=2b-2a \end{cases}$$

De lo anterior tenemos que $x=z$. También sabemos que $w+z=$ a y $y+z=a$, por lo tanto $w=y$. Para poner lo anterior en términos de a y z (que son nuestras variables libres), tenemos que $w=y=a-z$ y $x=z$. Por lo tanto, nuestras soluciones al sistema son

$$\{(a-z, z, a-z, z) \mid a, z \in \mathbb{R}\}$$

Para cada $x \in \mathbb{R}$ sea

5

Enunciado del problema: Para cada $x \in \mathbb{R}$ sea

$$A(x) = \begin{pmatrix} 1-x & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 \\ x & 0 & 1-x \end{pmatrix}$$

(a) Demuestra que para todo $a, b \in \mathbb{R}$ se tiene

$$A(a)A(b) = A(a+b-2ab).$$

(b) Dado $x \in \mathbb{R}$, calcula $A(x)^n$.

Solución: