Ayud_30_07

July 30, 2020

1 Solución de ejercicios y dudas

1.1 Reto: 20 mini-ejercicios

Fecha: 30 de julio del 2020

1. Escribe cinco ejemplos de campos y menciona superficialmente sus propiedades.

- La suma y el producto son asociativas.
- La suma y el producto son conmutativas.
- La suma y el producto tienen ambas neutro, que llamaremos 0 y 1 respectivamente.
- La suma y el producto tienen ambas inversos (informalmente, siempre podemos «restar» y «dividir entre cosas nocero»).
- La suma y producto satisfacen la regla distributiva.

Ejemplos de campos: $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{F}, \mathbb{F}$

2. El siguiente vector $Y = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{4}{3}, 12, 26, \sqrt{2}\right)$ ¿es un vector sobre el campo $\mathbb{Q}$?¿Qué tal sobre el campo $\mathbb{R}$? y ¿sobre el campo $\mathbb{C}$?

Sobre $\mathbb{Q}$ no, sobre $\mathbb{R}$ sí y sobre $\mathbb{C}$ también.

3. Escriba una matriz de 4×4, una de 5×3 y una de 4×6. ¿Se dan cuenta cómo el primer número define el número de filas y el segundo el número de columnas?

$$A_{4\times 4} = A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_{5\times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 \end{bmatrix}$$

$$A_{4\times 6} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 5 & 5 & & \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 5 & 5 & & \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 5 & 5 & & \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 5 & 5 & & \end{bmatrix}$$

4. Consideremos la matriz A en $M_3(\mathbb{R})$ dada por $A = \left[a_{ij}\right] = [2i + 5j]$. Escriba A de forma explícita.

\begin{aligned} A=(\begin{array}{lll}a_{11}&a_{12}&a_{13}\a_{21}&a_{22}&a_{23}\a_{31}&a_{32}&a_{3
(

$$\begin{array}{lll} 2\cdot 1+5\cdot 1 & 2\cdot 1+5\cdot 2 & 2\cdot 1+5\cdot 3 \\ 2\cdot 2+5\cdot 1 & 2\cdot 2+5\cdot 2 & 2\cdot 2+5\cdot 3 \\ 2\cdot 3+5\cdot 1 & 2\cdot 3+5\cdot 2 & 2\cdot 3+5\cdot 3 \end{array}$$

\& = (

$$\begin{array}{lll} 7 & 12 & 17 \\ 9 & 14 & 19 \\ 11 & 16 & 21 \end{array}$$

&\end{aligned}

5. Escriba la matriz identidad de $n \times n$ y la matriz cero de 4×5.

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

$$O_{4,5} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \end{pmatrix}$$

Nota: la matriz identidad por definición siempre es cuadrada. La matriz cero no tiene esa restricción.

6. Pregunta: ¿la matriz identidad es una matriz diagonal?¿triangular superior?¿triangular inferior?

Claro. Las matrices diagonales se definen como todas las matrices que cumplen que si $A = [a_{ij}]$,

$$a_{i,j} = 0 \text{ si } i \neq j$$

En pocas palabras, todo lo que está arriba y abajo de la diagonal es cero.

Las matrices triangulares superiores tienen puros ceros abajo de la diagonal, entonces I_n lo cumple.

Las matrices triangulares inferiores tienen puros ceros arriba de la diagonal, entonces I_n lo cumple.

I_n es diagonal, triangular superior y triangular inferior al mismo tiempo.

7. Escribe una matriz triangular superior llena de números complejos y una matriz triangular inferior cuyas entradas diferentes de cero sean irracionales.

8. Sean A y B las siguientes matrices,

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Encuentre la suma de las matrices:

$$\begin{aligned} A + B &= \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1+3 & 2+(-1) & 3+2 \\ 2+1 & -3+0 & 1+3 \\ 3+2 & 1+(-1) & -2+0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & -3 & 4 \\ 5 & 0 & -2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

1.1.1 Insistiendo: si no coinciden la cantidad de filas o de columnas, entonces las matrices no se pueden sumar.

9. Sea A la siguiente matriz,

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 6 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

encuentre la matriz $2A$.

$$\begin{aligned}2A =& 2 \cdot \begin{bmatrix} 10 & 6 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \\ =& \begin{bmatrix} 2 \cdot 10 & 2 \cdot 6 \\ 2 \cdot 4 & 2 \cdot 3 \end{bmatrix} \\ =& \begin{bmatrix} 20 & 12 \\ 8 & 6 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

10. Demuestre el teorema de representación única de una matriz en términos de la base canónica. Créditos: Edgar Armando Trejo López.

Teorema. Toda matriz A en $M_{m,n}(F)$ se puede escribir de manera única de la forma

$$A = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} E_{ij}$$

en donde para $i = 1, \ldots, m$ y $j = 1, \ldots, n$, se tiene que x_{ij} son escalares en F y E_{ij} son las matrices de la base canónica.

Sea $A \in M_{mn}(F)$,

$$A = \begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & \ldots & x_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix} + \cdots + \begin{bmatrix} 0 & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix} + \cdots + \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & \cdots & 0 \end{bmatrix} + \cdots + \begin{bmatrix} 0 & \cdots \\ \vdots & \ddots \\ 0 & \cdots \end{bmatrix}$$

$$= x_{11} \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix} + \cdots + x_{1n} \begin{bmatrix} 0 & \ldots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix} + \cdots + x_{m1} \begin{bmatrix} 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \ldots & 0 \end{bmatrix} + \cdots + x_{mn} \begin{bmatrix} 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix} =$$

11. Expresa la siguiente matriz en términos de la base canónica $M_{3,4}(\mathbb{R})$

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 6 & 1 \\ 9 & 8 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

12. Encuentra la transformación asociada a la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_{3,4}(\mathbb{R})$$

Aplicamos nuestra transformación a un vector de cuatro elementos arbitrarios y obtenemos que,

$$T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}\right) = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+z \\ x+2y+3z+4w \\ w \end{pmatrix}$$

Esta es la transformación asociada a nuestra matriz.

13. Obtener la matriz asociada a la siguiente transformación lineal:

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 - x_2 \\ 2x_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} T(\overrightarrow{e_1}) &= T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) \\ &= \begin{bmatrix} 1-0 \\ 2(0) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T(\overrightarrow{e_2}) &= T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) \\ &= \begin{bmatrix} 0-1 \\ 2(0) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T(\overrightarrow{e_3}) &= T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) \\ &= \begin{bmatrix} 0-0 \\ 2(1) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

14. ¿Cuáles son las dimensiones de la matriz que se obtiene al multiplicar una matriz de 222×3 con una de 3×5? No es necesario hacer cuentas. Analizando sus dimensiones, qué requisito se podría imponer para que dos matrices se puedan multiplicar.

15. Calcule el producto de las siguientes matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 0 & 8 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 9 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 0 & 8 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 9 & 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4\cdot4+2\cdot2+0\cdot9 & 4\cdot2+2\cdot0+0\cdot4 & 4\cdot1+2\cdot4+0\cdot2 \\ 0\cdot4+8\cdot2+1\cdot9 & 0\cdot2+8\cdot0+1\cdot4 & 0\cdot1+8\cdot4+1\cdot2 \\ 0\cdot4+1\cdot2+0\cdot9 & 0\cdot2+1\cdot0+0\cdot4 & 0\cdot1+1\cdot4+0\cdot2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 20 & 8 & 12 \\ 25 & 4 & 34 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

16. Para cada $x \in \mathbb{R}$ sea,

$$A(x) = \begin{bmatrix} 1-x & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 \\ x & 0 & 1-x \end{bmatrix}$$

Demuestre que para todo $a, b \in \mathbb{R}$,

$$A(a)A(b) = A(a+b-2ab)$$

17. Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. Encuentre todas las matrices $B \in M_2(\mathbb{C})$ que conmutan con A.

Sin pérdida de generalidad, propongamos la siguiente matriz

$$B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

donde $a, b, c, d \in \mathbb{C}$.

Nosotros queremos encontrar todas las matrices B que cumplen que,

$$AB = BA$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a+3c & b+3d \\ 2a+c & 2b+d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+2b & 3a+b \\ c+2d & 3c+d \end{bmatrix}$$

$$a+3c = a+2b$$

Ustedes lo acaban (si quieren).

1.1.2 Nota: Si $A, B \in M_n(F)$ son invertibles, entonces AB también lo es y

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

18. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. ¿Es A una matriz invertible?

Solución por fuerza bruta, tenemos que encontrar una matriz

$$B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ u & v & w \end{pmatrix}$$

tal que $AB = I_n$

$$AB = \begin{pmatrix} x & y & z \\ u & v & w \\ a & b & c \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = v = c = 1 \\ y = z = a = b = u = w = 0 \end{cases}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Nota: que no les quite el sueño estos dos métodos para calular la inversa, hay métodos más eficientes y más generales. Los iremos viendo conforme vayamos avanzando en el curso.

20. Explica por qué la matriz O_n no es invertible.
21. Proponga una matriz ortogonal, una matriz antisimétrica y una matriz simétrica con sus números favoritos.

Antisimétrica:

$$\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}, a, b, c \in \mathbb{C}$$

Simétrica:

$$\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{pmatrix}, a, b, c \in \mathbb{C}$$

La matriz ortogonal cumple que, $A^{-1} = A^t$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

22. Tarea moral sobre matrices transpuestas.

Demuestre las siguientes propiedades:

- $(A^t)^t = A$ para toda $A \in M_{m,n}(F)$
- $(A+B)^t = A^t + B^t$ para todas $A, B \in M_{m,n}(F)$
- $(cA)^t = cA^t$ si$c \in F$ es un escalar $yA \in M_{m,n}(F)$

Nota: error de dedo en el blog en la última propiedad.

23. Calcule la transpuesta la siguiente matriz.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 0 & 2 & 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$