Ayud_17_08

August 17, 2020

1 Ejercicios de ayudantía

Fecha: 17 de agosto del 2020

1. Sea el conjunto $A = \{\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}\}$, donde $\bar{u} = (2, 1)$, $\bar{v} = (2, 4)$ y $\bar{w} = (5, 4)$. Representar al vector $\bar{w}$ como combinación lineal de los vectores u y v

Escribimos a $\vec{w}$ como combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$:

$$\bar{w} = \alpha_1 \bar{u} + \alpha_2 \bar{v}$$

$$\begin{aligned} (5,4) &= \alpha_1(2,1) + \alpha_2(2,4) \\ (5,4) &= (2\alpha_1, \alpha_1) + (2\alpha_2, 4\alpha_2) \\ (5,4) &= (2\alpha_1 + 2\alpha_2, \alpha_1 + 4\alpha_2) \end{aligned}$$

Ahora, escribámoslo como un sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 2\alpha_1 + 2\alpha_2 &= 5 \\ \alpha_1 + 4\alpha_2 &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 0 & -6 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 1/2 \end{array}\right)$$

Como $\alpha_2 = \frac{1}{2}$,

$$\alpha_1 + 4\alpha_2 = 4 \rightarrow \alpha_1 = 4 - 2 \rightarrow \alpha_1 = 2$$

Esta es la combinación lineal que nos pedían:

$$\bar{w} = 2\bar{u} + \frac{1}{2}\bar{v}$$

2. Determinar si el siguiente conjunto de vectores de $\mathbb{R}^3$ es linealmente dependiente o independiente:

$$B = \{(1,0,-2),(-4,2,0),(0,2,-4)\}$$

Suponiendo que es linealmente dependiente, lo vamos a poder escribir así:

$$\alpha_1 \bar{b}_1 + \alpha_2 \bar{b}_2 + \alpha_3 \bar{b}_3 = \bar{0}$$

Sustituyendo los valores de B:

$$\begin{aligned} &\alpha_1(1,0,-2) + \alpha_2(-4,2,0) + \alpha_3(0,2,-4) = (0,0,0) \\ &(\alpha_1 - 4\alpha_2, 2\alpha_2 + 2\alpha_3, -2\alpha_1 - 4\alpha_3) = (0,0,0) \end{aligned}$$

Igualando los términos:

$$\begin{aligned} \alpha_1 - 4\alpha_2 &= 0 \\ 2\alpha_2 + 2\alpha_3 &= 0 \\ -2\alpha_1 - 4\alpha_3 &= 0 \end{aligned}$$

Ahora, resolvamos el sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Podemos ver que $\alpha_2 = 0$ y

$$\begin{aligned} \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 - 4\alpha_2 = 0 \end{aligned}$$

entonces, $\alpha_1 = 0$, y $\alpha_3 = 0$.

Según la definición si los escalares eran cero, el conjunto era linealmente independiente.

3. Para el siguiente conjunto:

$$\mathrm{A} = \left\{(k-5)x^2 + x, 2x^2 - 2x + 3, 2x^2 + 3x - 3\right\}$$

Obtener el valor de $k \in \mathbb{R}$ tal que A sea linealmente dependiente.

Si queremos que A sea linealmente dependiente, se tiene que cumplir que:

$$\alpha \bar{a}_1 + \beta \bar{a}_2 + \gamma \bar{a}_3 = \bar{0}$$

Sustituyendo los valores de A:

$$\alpha \left[(k-5)x^2 + x\right] + \beta \left(2x^2 - 2x + 3\right) + \gamma \left(2x^2 + 3x - 3\right) = \bar{0}$$

Observando los coeficientes del polinomio:

$$\begin{array}{c}\alpha(k-5,1,0)+\beta(2,-2,3)+\gamma(2,3,-3)=(0,0,0)\\(\alpha k-5\alpha+2\beta+2\gamma,\alpha-2\beta+3\gamma,3\beta-3\gamma)=(0,0,0)\end{array}$$

Extrayendo un sistema de ecuaciones de nuestro problema:

$$\begin{aligned}\alpha(k-5)+2\beta+2\gamma&=0\\\alpha-2\beta+3\gamma&=0\\3\beta-3\gamma&=0\end{aligned}$$

Resolviendo con reducción gaussiana:

$$\begin{pmatrix}1&-2&3\\k-5&2&2\\0&3&-3\end{pmatrix}()\to\begin{pmatrix}1&-2&3\\0&2k-8&-3k+17\\0&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-2\\3&\\0&1\\-1&\\0&0\\-k+9&\end{pmatrix}$$

Del último renglón tenemos que:

$$(-k+9)\gamma=0$$

Para que sea linealmente independiente se tiene que cumplir que,

$$\gamma\neq 0\quad y\quad -k+9=0$$

Para que A sea linealmente dependiente, se tiene que cumplir que $k=9$.

4. Muestre que $\{1,x-1,x^2-1\}$ es base de $P_2(\mathbb{R})$.

Sea $B=\{1,x-1,x^2-1\}$. Dado que el número de elementos de B que es 3 coincide con la dimensión de $P_2(\mathbb{R})$, basta probar que B es linealmente independiente para mostrar que es base,

$$\begin{array}{l}\alpha_1 1+\alpha_2(x-1)+\alpha_3\left(x^2-1\right)=0+0x+0x^2\Rightarrow\\\alpha_1+\alpha_2x-\alpha_2+\alpha_3x^2-\alpha_3=0+0x+0x^2\Rightarrow\\(\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3)+\alpha_2x+\alpha_3x^2=0+0x+0x^2\Rightarrow\end{array}$$

$$\begin{array}{l}\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3=0\Rightarrow\alpha_1=0\\\alpha_2=0\\\alpha_3=0\end{array}$$

Por lo tanto ese conjunto es base.

5. Determinar el valor de x para que el vector $(1,x,5)\in\mathbb{R}^3$ pertenezca al subespacio $<(1,2,3),(1,1,1)>$.

$(1, x, 5)$ pertenece al subespacio $< (1,2,3), (1,1,1) >$ si y sólo si $(1, x, 5)$ es combinación lineal de los elementos del conjunto. Entonces,

$$(1, x, 5) = \alpha(1,2,3) + \beta(1,1,1)$$

Luego,

$$\begin{aligned} 1 &= \alpha + \beta \\ x &= 2\alpha + \beta \\ 5 &= 3\alpha + \beta \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema anterior:

$$\alpha = 2, \beta = -1 \text{ y } x = 3$$

6. Si $U, W \leq V$ dos subespacios distintos de V y $\dim(\ V\ ) = n, \dim(U) = \dim(W) = n - 1$, ¿cuánto vale la dimensión de $U \cap W$?

Sabemos que,

$$n - 1 = \max\{\dim(U), \dim(W)\} \leq \dim(U + W) \leq \dim(V) = n$$

Por tanto, $\dim(U + W) = n, n - 1$. Pero si $\dim(U + W) = n - 1$, al ser $U, W \subseteq U + W$, y coincidir las dimensiones, se deduce que $U = U + W = W$, lo cual es falso, por ser $U \neq W$. Consecuentemente, $\dim(U + W) = n$ y llevandolo a

$$\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$$

deducimos que,

$$\dim(U \cap W) = n - 1 + n - 1 - n = n - 2$$

.

7. Sea $U = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(x) = f(-x), \forall x \in \mathbb{R}\}$ y $W = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(x) = -f(-x), \forall x \in \mathbb{R}\}$. Probar que $\mathbb{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ es aplicación } \}$ es suma directa de U y W.

Por definición, $\mathbb{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = U \oplus W$ si y sólo si $\mathbb{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = U + W$ y $U \cap W = \{0_{\mathbb{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})}\}$, donde $0_{\mathbb{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})}$ denota la aplicación nula.

Comprobemos que $\mathbb{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = U + W$:

La ida:

Sea $f \in \mathbb{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ y definimos $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}$ y $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $h(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}$ Es claro que $f = g + h$. Además, $g \in U$ ya que $g(-x) = \frac{f(-x)+f(x)}{2} = \frac{f(x)+f(-x)}{2} = g(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$ y $h \in W$ porque $h(-x) = \frac{f(-x)-f(x)}{2} = -\frac{f(x)-f(-x)}{2} = -h(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$

La vuelta:

Es inmediato porque $U, W \subseteq \mathbb{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Por otro lado, si $f \in U \cap W$, se tiene que $f \in U$ y $f \in W$, luego para todo $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(-x)$, por ser $f \in U$ y $f(x) = -f(-x)$ por ser $f \in W$. Entonces,

$$f(x) = f(-x) = -f(x) \Rightarrow 2f(x) = 0 \Rightarrow f(x) = 0$$

Esto es f la aplicación nula.

8. Determinar los valores de a y b, si es que existen, para que se cumpla:

$$< (a, 1, -1, 2), (1, b, 0, 3) >=< (1, -1, 1, -2), (-2, 0, 0, -6) >$$

Para que los dos subespacios coincidan debemos pedir que $(a, 1, -1, 2)$ y $(1, b, 0, 3)$ se escriban como combinación lineal de $(1, -1, 1, -2)$ y $(-2, 0, 0, -6)$ y que ambos vectores sea linealmente independientes. Por lo tanto:

$$\left.\begin{aligned} (a, 1, -1, 2) &= \alpha_1(1, -1, 1, -2) + \alpha_2(-2, 0, 0, -6)\} \Rightarrow \\ (1, b, 0, 3) &= \beta_1(1, -1, 1, -2) + \beta_2(-2, 0, 0, -6) \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} a &= \alpha_1 - 2\alpha_2 \\ 1 &= -\alpha_1 \\ -1 &= \alpha_1 \\ 2 &= -2\alpha_1 - 6\alpha_2 \\ 1 &= \beta_1 - 2\beta_2 \\ b &= -\beta_1 \\ 0 &= \beta_1 \\ 3 &= -2\beta_1 - 6\beta_2 \end{aligned}$$

La solución al sistema anterior es:

$$\alpha_1 = -1, \alpha_2 = 0, a = -1, \beta_1 = 0, \beta_2 = -\frac{1}{2} \text{ y } b = 0$$

y ambos vectores son linealmente independientes.

[ ]: