# Ayudantía 31 de agosto, álgebra lineal.

Elsa Fernanda Torres Feria

Semestre 2020-4

1. Considera el plano $P$ in $\mathbb{R}^3$ que pasa por el origen y por los vectores $(u_1, u_2, u_3)$ y $(v_1, v_2, v_3)$. Encuentra los reales $a, b, c$ tales que $P = \{(x, y, z) : ax + by + cz = 0\}$

   *solución*

   Notemos que nos piden los coeficientes para las formas lineales de $P^\perp$ y tenemos la ecuación vectorial del plano como:

   $$(x, y, z) = t(u_1, u_2, u_3) + s(v_1, v_2, v_3)$$

   Siguiendo la receta de la entrada *Ortogonalidad, hiperplanos y ecuaciones*, debemos:

   *a*) Determinar una base $l_1, l_2, ..., l_n$ para el espacio $W^\perp$ como visto en entradas anteriores

   $$l(u_1, u_2, u_3) = au_2 + bu_2 + cu_3 = 0$$
   $$l(v_1, v_2, v_3) = av_2 + bv_2 + cv_3 = 0$$

   Solucionamos el sistema de ecuaciones y a partir de las soluciones obtenemos la base para $W^\perp$.

   *b*) Definimos $L_i = \{v \in V : l_i(v) = 0\}$

   *c*) W será la intersección de los $L_i$

   *Ejemplo*

   Sea $W$ un subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores $v_1 = (1, 1, -1, 0)$ y $v_2 = (-1, 2, -1, 1)$. Encuentra $a, b, c, d$ tales que $\forall v = (w, x, y, z) \in W$, $aw + bx + cy + dz = 0$

   1) Determinamos la base para $W^\perp$ aplicando la definición de forma lineal a los vectores que generan a $W$:

   $$l(1, 1, -1, 0) = a(1) + b(1) + c(-1) + d(0) = a + b - c \tag{1}$$

   $$l(-1, 2, -1, 1) = a(-1) + b(2) + c(-1) + d(1) = -a + 2b - c + d \tag{2}$$

   Como queremos la base de $W^\perp$, igualamos las ecuaciones (1) y (2) a cero y obtenemos entonces un sistema de ecuaciones:

   $$a + b - c = 0$$
   $$-a + 2b - c + d = 0$$

   Del cual:

   $$c = a + b \text{ y } d = a + c - 2b$$

Sustituimos $c$ en d:

$$\Rightarrow d = 2a - b$$

Usando estas soluciones en las formas lineales $l$:

$$\Rightarrow l(w, x, y, z) = aw + bx + (a + b)y + (2a - b)z \tag{3}$$

Si nos piden a W como la intersección de hiperplanos, de aquí podemos obtener la base de $W^{\perp}$ y definir a los $L_i$ en términos de esta base. Por último definir a W como la intersección de estos $L_i$.

Sin embargo, lo que nosotros buscamos son los coeficientes $a, b, c, d$ que cumplan con la restricción dada y notamos que encontramos los coeficientes en términos de dos parámetros libres $a, b$. Si definimos estos parámetros, entonces tenemos los 4 escalares:

$$\text{Tomemos } a = 1 \text{ y } b = 2$$
$$\Rightarrow c = 3 \text{ y } d = 0$$

Así tenemos los 4 escalares que cumplen la condición dada. Nótese que $c$ y $d$ dependen del valor que nosotros escojamos para los parámetros $a$ y $b$, si escogemos $a = 2$ y $b = 3$, entonces $c$ y $d$ tendrán valores distintos.

2. Considere el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ , $v, w \in \mathbb{R}^3$ con $v = (v_1, v_2, v_3)$ y $w = (w_1, w_2, w_3)$ y la función:

$$b(v, w) = 3v_1w_2 + v_3w_3$$

Muestre que $b(v, w)$ es una forma bilineal.

*Solución*

Para ver que $b(v, w)$ es bilineal hay que mostrar dos igualdades:

*a*) Tomemos $u, p \in \mathbb{R}^3$ y $\alpha \in \mathbb{R}$.
P.D. $b(v, u + \alpha p) = b(v, u) + \alpha b(v, p)$:

$$\begin{aligned} b(v, u + \alpha p) &= 3v_1(u_2 + \alpha p_2) + v_3(u_3 + \alpha p_3) \\ &= 3v_1u_2 + 3\alpha v_1p_2 + v_3u_3 + \alpha v_3p_3 \\ &= 3v_1u_2 + v_3u_3 + \alpha 3v_1p_2 + \alpha v_3p_3 \\ &= 3v_1u_2 + v_3u_3 + \alpha(3v_1p_2 + v_3p_3) = b(v, u) + \alpha b(v, p) \end{aligned}$$

$\therefore b(v, u + \alpha p) = b(v, u) + \alpha b(v, p)$.

*b*) Tomemos $m, n \in \mathbb{R}^3$ y $\beta \in \mathbb{R}$
P.D. $b(m + \beta n, w) = b(m, w) + \beta b(n, w)$:

$$\begin{aligned} b(m + \beta n, w) &= 3(m_1 + \beta n_1)w_2 + (m_3 + \beta n_3)w_3 \\ &= 3m_1w_2 + \beta n_1w_2 + m_3w_3 + \beta n_3w_3 \\ &= 3m_1w_2 + m_3w_3 + \beta n_1w_2 + \beta n_3w_3 \\ &= 3m_1w_2 + m_3w_3 + \beta(n_1w_2 + n_3w_3) = b(m, w) + \beta b(n, w) \end{aligned}$$

$\therefore b(m + \beta n, w) = b(m, w) + \beta b(n, w)$

Así mostramos que $b(v, w) = 3v_1w_2 + v_3w_3$ es una forma bilineal.