Ejercicios 12/08, álgebra lineal I

Elsa Fernanda Torres Feria

Semestre 2020-4

1. Sean U=$\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 = x_2 = x_4, x_3 = 0\}$,

   V=$\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 = x_2 = x_3, x_4 = 0\}$

   y $W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_2 = x_1 + x_3, 3x_1 = x_2 + x_4\}$

   a) Demostrar que $\mathbb{R}^4 = U \oplus V \oplus W$ y b) descomponer el vector (1,2,3,4) en la forma $u+v+w \in U+V+W$.

   Solución

   Para demostrar a) basta ver que $\mathbb{R}^4 = U + V + W$ y que $U \cap V \cap W = \{0\}$

   Para ver su intersección tomemos un elemento en ella, es decir $r \in U \cap V \cap W$, con $r = (a, b, c, d)$. Si está en la intersección, entonces cumple con las condiciones de los tres subespacios, esto es:

   a) Como r está en U, entonces cumple que: $a = b = d$ y que $c = 0$.

   b) Pero r también está en $V \Rightarrow a = b = c$ y $d = 0$.

   c) Y también está en W, por lo que $c = b - a$ y $d = 3a - b$.

   Por a) sabemos que $c = 0$ y esto implica (por b)) que $a = b = c = 0$.

   Ahora $d = 0$ por b) y además, por c) tenemos que $d = 3a - b = 3(0) - 0 = 0$.

   $\Rightarrow r = (0, 0, 0, 0) = \mathbf{0}$

   $\therefore U \cap V \cap W = \{0\}$.

   Para ver ahora que $\mathbb{R}^4 = U + V + W$, tomemos un elemento $x \in \mathbb{R}^4$ $(x = (x_1, x_2, x_3, x_4))$ e intentemos escribirlo como $u + v + w$, donde $u + v + w \in U + V + W$ y son de la forma $u = (u_1, u_2, u_3)$, $v = (v_1, v_2, v_3)$ y $w = (w_1, w_2, w_3)$:

$$\begin{aligned} u + v + w &= (u_1 + v_1 + w_1, u_2 + v_2 + w_2, u_3 + v_3 + w_3, u_4 + v_4 + w_4) \\ &= (u_1 + v_1 + w_1, u_1 + v_1 + w_2, v_1 + (w_2 - w_1), u_1 + (3w_1 - w_2)) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x_1 = u_1 + v_1 + w_1,$$

$$x_2 = u_1 + v_1 + w_2$$

$$x_3 = v_1 + w_2 - w_1$$

$$x_4 = u_1 + 3w_1 - w_2$$

$\therefore$ podemos escribir a x como $x = u + v + w$.

Para b), debemos descomponer el vector $(1, 2, 3, 4)$ en la forma $u + v + w \in U + V + W$:

Utilizamos las igualdades de arriba y tenemos que:

$$\Rightarrow 1 = u_1 + v_1 + w_1, \tag{1}$$

$$2 = u_1 + v_1 + w_2 \tag{2}$$

$$3 = v_1 + w_2 - w_1 \tag{3}$$

$$4 = u_1 + 3w_1 - w_2 \tag{4}$$

Podemos asociarle un sistema de la forma $Ax = b$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Realizamos reducción gausssiana sobre la matriz aumentada (A|b) y obtenemos que:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow u_1 = -7, v_1 = 2, w_1 = 6, w_2 = 7$$

Con esto podemos escribir a los vectores u, v y w:

$$u = (-7, -7, 0, -7)$$
$$v = (2, 2, 2, 0)$$
$$w = (6, 7, 1, 11)$$

Y expresar a x como la suma de estos $x = u + v + w$:

$$\begin{aligned} x &= (-7, -7, 0, -7) + (2, 2, 2, 0) + (6, 7, 1, 11) \\ &= (-7 + 2 + 6, -7 + 2 + 7, 2 + 1, -7 + 11) \\ &= (1, 2, 3, 4) \end{aligned}$$