Ejercicios 20/08, álgebra lineal I

Elsa Fernanda Torres Feria

Semestre 2020-4

1. ¿Qué sucede en el primer ejemplo si multiplicas ambas matrices de cambio de base que encontramos?

   Se encontró que la matriz de cambio de base de B a B' es:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   Y la matriz de cambio de base de B' a B:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow AC = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Considera las cuatro matrices de 2×2 que puedes formar colocando tres unos y un cero. Muestra que estas cuatro matrices forman una base B de $M_{2,2}(\mathbb{R})$. Determina la matriz de cambio de base de B a la base canónica de $M_2(\mathbb{R})$.

   Solución

   Sea B el conjunto de matrices:

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\} = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$$

   Notemos que cualquier matriz $A \in M_2(\mathbb{R})$ se puede escribir como combinación lineal de los elementos de B, por lo que B genera a $M_2\mathbb{R}$. Ahora sólo falta ver que es un conjunto linealmente independiente para afirmar que B es base. Para ver que B es l.i. hay que ver que para

$$a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + a_4b_4 = 0$$

   los únicos $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}$ que cumplen son todos cero:

$$a_1\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}+a_2\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}+a_3\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}+a_4\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}a_2+a_3+a_4 & a_1+a_2+a_3\\a_1+a_3+a_4 & a_1+a_2+a_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

$$\begin{gathered}\Rightarrow a_2+a_3+a_4=0\\a_1+a_2+a_3=0\\a_1+a_3+a_4=0\\a_1+a_2+a_4=0\end{gathered}$$

Que podemos ver como un sistema de la forma $Aa=0$:

$$Aa=\begin{pmatrix}0&1&1&1\\1&1&1&0\\1&0&1&1\\1&1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\\a_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\tag{1}$$

Realizamos reducción gaussiana y obtenemos:

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

Como el número total de variables es 4 y el número total de variables pivote es 4, y no hay variables libres por lo que la única solución es la trivial.

$\therefore$ B es base.

$\square$

Ahora nos falta determinar la matriz de cambio de base de B a la base canónica:

Para esto debemos expresar a los elementos de la base canónica en términos de B y aunque en varios casos los escalares necesarios suelen ser fáciles de ver, no siempre pasa, en este caso haremos un sistema de ecuaciones, muy similar a (1), pero ya no será homogéneo:

$$Aa=\begin{pmatrix}0&1&1&1\\1&1&1&0\\1&0&1&1\\1&1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\\a_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\tag{2}$$

Realizamos reducción gaussiana en la matriz extendida y tenemos que:

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&0&0&-\frac{2}{3}\\0&1&0&0&\frac{1}{3}\\0&0&1&0&\frac{1}{3}\\0&0&0&1&\frac{1}{3}\end{array}\right)$$

$$\Rightarrow E_1 = \frac{-2}{3}b_1 + \frac{1}{3}b_2 + \frac{1}{3}b_3 + \frac{1}{3}b_4$$

De manera análoga escribimos la matriz extendida para cada E_i, cin $i \in \{2,3,4\}$. Para $i = 2$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Aplicamos reducción gaussiana:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow E_2 = \frac{1}{3}b_1 + \frac{1}{3}b_2 + \frac{1}{3}b_3 + \frac{-2}{3}b_4$$

Para E_3:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Después de reducción gaussiana:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow E_3 = \frac{1}{3}b_1 + \frac{-2}{3}b_2 + \frac{1}{3}b_3 + \frac{1}{3}b_4$$

Y por último para E_4:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Aplicamos reducción gaussiana:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow E_4 = \frac{1}{3}b_1 + \frac{1}{3}b_2 + \frac{-2}{3}b_3 + \frac{1}{3}b_4$$

Ahora escribimos la matriz de cambio de la base B a la canónica P colocando los coeficientes que encontramos como columnas.

$$P = \begin{pmatrix} -2/3 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & -2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & -2/3 \\ 1/3 & -2/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$