Ayud_03_08

August 3, 2020

1 Solución de ejercicios y dudas

Fecha: 3 de agosto del 2020

1. Escriba todos los bloques (submatrices) que se obtienen al segmentar la siguiente matriz de bloque de la siguiente manera:

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ \hline 5 & 16 & 2 & 0 \\ 17 & 19 & -5 & 3 \\ 117 & 0 & 0 & 11 \end{array} \right)$$

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_{12} = (2)$$

$$A_{21} = \begin{pmatrix} 5 & 16 & 2 \\ 17 & 19 & -5 \\ 117 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_{22} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 11 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix}$$

2. Haga la partición de la siguiente matriz y reescribala como 4 matrices de 2×2.

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 7 \\ 1 & 5 & 6 & 2 \\ 3 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 3 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}_{12} = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}_{21} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}_{22} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{11} & \mathbf{P}_{12} \\ \mathbf{P}_{21} & \mathbf{P}_{22} \end{bmatrix}$$

Observación: las matrices por bloques no necesariamente tienen que ser cuadradas. Las matrices diagonales por bloques, sí.

3. Escriba de forma explícita la siguiente matriz como una matriz diagonal por bloques:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Observación final: Al ser 'matrices de matrices', las matrices de bloques se comportan adecuadamente con las operaciones que conocemos.

4. Escribe el siguiente sistema de ecuaciones en la forma $AX = b$; diga si es homogéneo. Obtenga su sistema lineal homogéneo asociado. ¿Es consistente o inconsistente?

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{aligned}$$

Recordando las reglas de multiplicación de matrices, lo pasamos a la forma $AX = b$:

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$$

Un sistema homogéneo es un sistema de ecuaciones del tipo $AX = b$, con $b = 0$. Entonces no es homogéneo.

El sistema lineal homogéneo asociado es el sistema $AX = 0$, entonces será:

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

No podemos determinar si es consiste o inconsistente porque tendríamos que saber los valores de las entradas para poder determinar si el sistema tiene soluciones o no. Pero si tuviera al menos una, sería consistente.

4. Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 2x + 3y = 8 \\ 5x - y = -2 \end{aligned}$$

Lo escribimos en la forma $AX = b$:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Sacamos la inversa de la matriz (por el momento esto es una caja negra):

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{17} & \frac{3}{17} \\ \frac{5}{17} & -\frac{2}{17} \end{pmatrix}$$

Multiplicamos por la inversa de ambos lados de la ecuación:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{17} & \frac{3}{17} \\ \frac{5}{17} & -\frac{2}{17} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{17} & \frac{3}{17} \\ \frac{5}{17} & -\frac{2}{17} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{8}{17} + \frac{-6}{17} \\ \frac{40}{17} + \frac{4}{17} \end{bmatrix}$$

5. Diga si la siguiente matriz está en la forma escalonada reducida:

-Todos los renglones cero de A están hasta abajo de A (es decir, no puede seguirse un renglón distinto de cero después de uno cero).

-El término principal de un renglón no-cero está estrictamente a la derecha del término principal del renglón de encima.

-En cualquier renglón distinto de cero, el término principal es 1 y es el único elemento distinto de cero en su columna.

Estas son las matrices:

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Observación: no es lo mismo una matriz en forma escalonada que una matriz en forma escalonada reducida.

6. Desarrolle el siguiente producto tensorial:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} & a_{12} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \\ a_{21} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} & a_{22} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & a_{12}b_{11} & a_{12}b_{12} \\ a_{11}b_{21} & a_{11}b_{22} & a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} & a_{22}b_{11} & a_{22}b_{12} \\ a_{21}b_{21} & a_{21}b_{22} & a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

[ ]: