AL2020-4-7-Sep

September 7, 2020

0.1 Para aclarar más lo de determinantes

La definición de determinante es la siguiente

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)}$$

Veamos a qué se refiere la notación. Tomemos la matriz $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$. Tenemos entonces que $n = 3$.

Hay 6 permutaciones, que las podemos escribir como 123, 132, 213, 231, 312, 321. Es decir, el conjunto sobre el cual se hace la suma es $S_3 = \{123, 132, 213, 231, 321, 312\}$. De esta forma, la suma tiene 6 términos.

La siguiente cosa por explicar es sign. Una forma de pensar a $\operatorname{sign}(\sigma)$ es ver cuántos cambios de dos elementos se necesitan para llegar de 123 a σ. Si es una cantidad par, el signo es 1. Si es impar, el signo es -1. Por ejemplo, para $\sigma = 231$ se usan los dos cambios

$$123 \to 213 \to 231.$$

Como usamos dos cambios y 2 es par, entonces el signo de 231 es 1.

De esta forma, el sumando correspondiente a $\sigma = 231$ es

$$1 \cdot a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31}.$$

Otro ejemplo es que $\sigma = 321$ necesita sólo un cambio: $321 \to 123$. Como 1 es impar, entonces el signo de 321 es -1. Así, el sumando que le toca sería $-a_{13}a_{22}a_{31}$, con signo negativo.

Entonces, si queremos encontrar $\det A$, hay que sumar 6 cosas, una para cada uno de los elementos en S_3. Quedaría algo así:

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} + \ldots.$$

0.2 Ejemplo de polinomios, determinante de transformación y qué sucede en linealmente dependientes.

Recordemos que para calcular el determinante de un conjunto de vectores $v_1, \ldots, v_n$, primero se necesita elegir una base $e_1, \ldots, e_n$. Y para calcular el determinante de una transformación lineal

T se elige una base $e_1, \dots, e_n$, se eligen como vectores a $T(e_1), \dots, T(e_n)$ y se hace el determinante con respecto a la base $e_1, \dots, e_n$.

Calculemos el determinante de la transformación T que consiste en derivar de $\mathbb{R}_n[x]$ a sí mismo. Para ello, tenemos que elegir una base, elegimos $1, x, x^2, \dots, x^n$. El siguiente paso es hacer la operación en cada elemento:

$$T(1) = 0, T(x) = 1, T(x^2) = 2x, \dots, T(x^n) = nx^{n-1}.$$

De esta forma, el determinante de T es el determinante

$$\det_{1,x,\dots,x^n}(0, 1, 2x, \dots, nx^{n-1}).$$

Esto ya se podría hacer por definición, usando la fórmula con permutaciones. Sin embargo, en el blog se ve que si se evalúa una forma alternante en vectores linealmente dependientes, entonces el resultado es cero. Como el determinante es una forma alternante y dentro de los vectores está el vector (polinomio) 0, entonces el determinante da 0.

Determinantes de vectores ayudan a definir determinantes de transformaciones. Determinantes de transformaciones ayudan a definir determinantes de matrices.

0.3 Aclaración de cofactores

Un *cofactor* de una matriz cuadrada A es una submatriz que se obtiene al eliminar una fila y una columna de A. Por ejemplo, si tomamos

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

un posible cofactor es $\begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$.

Observación: una matriz de $n \times n$ tiene n^2 cofactores. Para referirnos a ellos, si eliminamos la i-ésima fila y la j-ésima columna, le llamamos el cofactor (i, j) ó el (i, j)-ésimo cofactor.

0.4 Inversiones de permutaciones

Recordemos que si $\sigma = a_1 a_2 a_3 ... a_n$ es una permutación de $123 \dots n$ entonces una *inversión* consiste de una pareja $i < j$ tal que $a_i > a_j$.

Ejemplo. tomemos la permutación 15432 de 12345. ¿Cómo contamos las inversiones? Primero escribimos todas las parejas con $i < j$, y nos preguntamos si en la permutación quedan “al revés”

- 12 No (pues en la permutación 15432 quedan en el mismo orden: aparece primero el 1 que el 2.
- 13 No
- 14 No
- 15 No
- 23 Sí (pues en la permutación 15432 quedan al revés: aparece primero el 3 y luego el 2.

- 24 Sí
- 25 Sí
- 34 Sí
- 35 Sí
- 45 Sí

Finalmente, contamos cuántas sí se invirtieron. Son 6. Es una cantidad par. Así, el signo de la permutación es 1.

0.5 Sugerencia para ver que el signo del producto de permutaciones es el producto de los signos

Pensemos en que tenemos dos permutaciones. Por ejemplo

13524 y 21354

La sugerencia es preguntarse qué sucede pareja a pareja y si se volteó o no. Por ejemplo, tomemos el 1 y el 2. Recordemos que primero se aplica la permutación de la derecha, y luego la de la izquierda.

El 1 se va a la posición 2 (con la permutación 21354, el primer paso). Y luego se va a la posición 3 (pues la permutación izquierda manda al número de la segunda posicón a la tercera).

El 2 se va a la posición 1 (con la permutación 21354, el primer paso). Y luego se queda en la posición 1 (pues la permutación izquierda manda el número de la primera posición a sí mismo).

¿Cómo sabemos si tras ambos pasos se voltean el 1 y el 2? Primero hay que saber a qué lugares fueron a caer tras la primer permutación, digamos i y j. Si $i > j$, la primera permutación los volteó. Si $i < j$, entonces no los volteó. Tras el segundo paso, el 1 y 2 se voltean si la segunda permutación voltea a i y j.

Se ve más o menos así (cuando la primera sí los invierte):

Primer paso

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i & j & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Segundo paso

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & i & \dots & j & \dots & n \\ 1 & \dots & \sigma(i) & \dots & \sigma(j) & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

¿Qué le paso a i y a j? ¿Se invirtieron o no?

Básicamente, 1 y 2 se habrán invertido si y sólo si pasa alguna de las siguientes: - La primera permutación los invirtió y la segunda no invirtió i y j. - La primera no los invirtió y la segunda sí invirtió i y j.

Observa que en paridad si 1 y 2 se cambiaron en total, entonces "involucra" sólo una inversión en la primera o segunda permutación, pero no ambas. Si no se cambiaron, entonces "involucra" o dos inversiones, o cero. Más o menos por aquí va la idea de que la paridad se preservará. Hay que completar varios detalles.

0.6 Duda de un cuestionario

En un cuestionario aparece que si A es ortogonal, entonces $\det(A({}^tA)) = 1$. La definición de *ortogonal* es que A sea invertible y que $A^{-1} = {}^tA$. La sugerencia es usar directamente la definición y que el determinate de la inversa es el inverso del determinante, o bien, usar que el determinante es multiplicativo y que el determinante de la transpuesta es igual al determinante de la matriz. De hecho, se puede mostrar que el determinante de A tiene que ser 1 o -1.

0.7 Explicación visual de por qué el determinante de una matriz triangular es el producto de entradas en la diagonal

Tomemos la matriz triangular superior siguiente:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$

Para calcular su determinante, usamos la expresión de la definición

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)}$$

Una forma visual de entender esta definición es que para cada sumando se tienen que elegir tres términos, uno para cada fila y columna. En el caso de las matrices de 3×3 se puede "ver" como que se eligen los términos así:

$$\begin{pmatrix} x & & \\ & x & \\ & & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & & \\ & & x \\ & x & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & x & \\ x & & \\ & & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & x & \\ & & x \\ x & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & & x \\ x & & \\ & x & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & & x \\ & x & \\ x & & \end{pmatrix}$$

La única forma en la que se evitan términos por debajo de la diagonal inferior es cuando se eligen los tres términos de la diagonal. En cualquier otro caso, se elige un término por abajo de la diagonal. Por esta razón, el producto tendrá un cero y ese sumando se hace cero. Así, el único sumando que "sobrevive" es $a_{11}a_{22}a_{33}$.

Una forma de entender todavía mejor esto es que intenten poner 8 piezas en un tablero de ajedrez de modo que: - Haya sólo una ficha en cada fila. - Haya sólo una ficha en cada columna. - No haya fichas por debajo de la diagonal principal.

Tras jugar un poco con el problema, te darás cuenta que sólo hay una forma de hacerlo. Cada forma corresponde a una permutación, y cuando están todas en la diagonal es la permutación identidad.

```
[ ]:
```