Tarea moral 2, álgebra lineal I

Elsa Fernanda Torres Feria

Semestre 2020-4

1. Verificar las propiedades de a) compatibilidad con el producto por escalares y b)distributividad con respecto a la suma del producto de matrices.

   a) Compatibilidad con el producto por escalares:

   P.D. $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$, con $\alpha \epsilon F$, $A \epsilon M_{m,n}(F)$ y $B \epsilon M_{n,p}(F)$.

   Demostración:

   Tenemos que por la Regla del producto, la (i,j)-ésima entrada de AB es:

   $$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

   $$\Rightarrow \alpha(AB)_{ij} = \alpha \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = \sum_{k=1}^{n} (\alpha a_{ik}) b_{kj} = ((\alpha A)B)_{ij}$$

   Como las entradas de la matriz $\alpha(AB)$ son iguales a las entradas de la matriz $(\alpha A)B$, entonces las matrices son las mismas, i.e. $\alpha(AB) = (\alpha A)B$. De manera análoga se obtiene la última igualdad. $\square$

   b) Distributividad con respecto a la suma del producto de matrices:

   P.D. $(A + B)C = AC + BC$, si A,B $\epsilon M_{m,n}(F)$ y C $\epsilon M_{n,p}(F)$.

   Demostración:

   Sea $(A + B)_{ij}$=$a_{i,j} + b_{i,j}$ la (i,j)-ésima entrada de la matriz suma $(A + B)$ y $c_{i,j}$ la (i,j)-ésima entrada de la matriz C. Usando la regla del producto podemos escribir $(A + B)C$ como:

   $$[(A + B)C]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} (a_{ik} + b_{ik}) c_{kj} = \sum_{k=1}^{n} (a_{ik} c_{kj} + b_{ik} c_{kj})$$

   $$= \sum_{k=1}^{n} a_{ik} c_{kj} + \sum_{k=1}^{n} b_{ik} c_{kj} = (AC)_{ij} + (BC)_{ij}$$

   $$\Rightarrow [(A + B)C]_{ij} = (AC)_{ij} + (BC)_{ij} \tag{1}$$

   Como son iguales entrada a entrada, entonces: (A+B)C=AC+BC. $\square$

   De manera análoga se puede mostrar que $D(A + B) = DA + DB$.

2. Verificar que las matrices identidad actúan como neutro para la multipicación de matrices.

   Ejemplo: Para matrices en $M_3(F)$. Sea A $\epsilon M_3(F)$ e I_3 $\epsilon M_3(F)$ y A dada por: A= $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow AI = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

   Como la multiplicación de matrices NO es conmutativa, entonces también debemos checar la multiplicación IA:

$$AI = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

$\therefore$ para el ejempleo planteado se cumple que la matriz identidad actúa como neutro para la multiplicación de matrices.

Caso general

Sea $I_n \in M_n(F)$, $I_m \in M_m(F)$ y A $\in M_{m\times n}(F)$ cuyas entradas son a_{ij} e I la matriz identidad de tamaño nxn en el campo F.

Para poder representar la matriz identidad con índices, introducimos la delta de Kronecker: Sean i,j enteros, entonces definimos la **delta de Kronecker** como:

$$\delta_{ij}= \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}$$

Podemos notar que es prácticamente la definición de la matriz identidad (de cualquier tamaño), es decir: $I = \delta_{ij}$.

Ahora, sabemos que el producto de matrices de manera general no es conmutativo por lo cual tenemos que ver que la matriz identidad multiplicada tanto por la izquierda como por la derecha a la matriz A nos deja la misma matriz, por esto es que necesitamos tanto I_n como I_m.

Con esto en cuenta, podemos empezar por la multiplicación por la derecha al escribir el producto AI_n en término de sus entradas, usando la regla del producto tenemos que:

$$(AI_n)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\delta_{kj}$$

Pero por definición de la Delta de Kronecker, el producto $a_{ik}\delta_{kj} \neq 0 \Leftrightarrow$ k=j (y $a_{ik} \neq 0$), por lo que las únicas entradas distintas de cero del producto AI_n son aquellas con k=j y cuando esto sucede, entonces δ_{kj}=1 (para k=j):

$$\Rightarrow (AI_n)_{ij} = a_{ij}$$

Que representa las entradas de la matriz A. Como son iguales entrada a entrada, entonces $AI_n = A$.

De manera análoga hacemos la multiplicación I_mA:

$$(I_mA)_{ij} = \sum_{k=1}^{m} \delta_{ik}a_{kj} = a_{ij}$$

Que de nuevo representa las entradas de la matriz A. Como son iguales entrada a entrada, entonces $I_m A = A$.

$\therefore$ la matriz I actúa como el neutro multiplicativo en la multiplicación de matrices.