Tarea moral 2, álgebra lineal I

Elsa Fernanda Torres Feria

Semestre 2020-4

1. Verificar las propiedades de a) compatibilidad con el producto por escalares y b)distributividad con respecto a la suma del producto de matrices.

   a) Compatibilidad con el producto por escalares:

   P.D. $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$, con $\alpha \epsilon F$, $A \epsilon M_{m,n}(F)$ y $B \epsilon M_{n,p}(F)$.

   Demostración:

   Tenemos que por la Regla del producto, la (i,j)-ésima entrada de AB es:

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$$

$$\Rightarrow \alpha(AB)_{ij} = \alpha \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = \sum_{k=1}^{n} (\alpha a_{ik})b_{kj} = ((\alpha A)B)_{ij}$$

   Como las entradas de la matriz $\alpha(AB)$ son iguales a las entradas de la matriz $(\alpha A)B$, entonces las matrices son las mismas, i.e. $\alpha(AB) = (\alpha A)B$. De manera análoga se obtiene la última igualdad. □

   b) Distributividad con respecto a la suma del producto de matrices:

   P.D. $(A + B)C = AC + BC$, si A,B $\epsilon M_{m,n}(F)$ y C $\epsilon M_{n,p}(F)$.

   Demostración:

   Sea $(A + B)_{ij}$=$a_{i,j} + b_{i,j}$ la (i,j)-ésima entrada de la matriz suma $(A + B)$ y $c_{i,j}$ la (i,j)-ésima entrada de la matriz C. Usando la regla del producto podemos escribir $(A + B)C$ como:

$$[(A + B)C]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} (a_{ik} + b_{ik})c_{kj} = \sum_{k=1}^{n} (a_{ik}c_{kj} + b_{ik}c_{kj})$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_{ik}c_{kj} + \sum_{k=1}^{n} b_{ik}c_{kj} = (AC)_{ij} + (BC)_{ij}$$

$$\Rightarrow [(A + B)C]_{ij} = (AC)_{ij} + (BC)_{ij} \tag{1}$$

   Como son iguales entrada a entrada, entonces: (A+B)C=AC+BC. □

   De manera análoga se puede mostrar que $D(A + B) = DA + DB$.

2. Verificar que las matrices identidad actúan como neutro para la multipicación de matrices.

   Ejemplo: Para matrices en $M_3(F)$. Sea A $\epsilon M_3(F)$ e I_3 $\epsilon M_3(F)$ y A dada por: A= $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow AI = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

   Como la multiplicación de matrices NO es conmutativa, entonces también debemos checar la multiplicación IA:

$$AI = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

$\therefore$ para el ejempleo planteado se cumple que la matriz identidad actúa como neutro para la multiplicación de matrices.

Caso general

Sea A,$I_n \in M_n(F)$, con A una matriz cualquiera cuyas entradas son a_{ij} e I la matriz identidad de tamaño nxn en el campo F.

Para poder representar la matriz identidad con índices, introducimos la delta de Kronecker: Sean i,j enteros, entonces definimos la **delta de Kronecker** como:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}$$

Podemos notar que es prácticamente la definición de la matriz identidad (de cualquier tamaño), es decir: $I = \delta_{ij}$. Con esto en cuenta, podemos escribir el producto AI_n en término de sus entradas, usando la regla del producto tenemos que:

$$(AI_n)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\delta_{kj}$$

Pero por definición de la Delta de Kronecker, el producto $a_{ik}\delta_{kj} \neq 0 \Leftrightarrow$ k=j (y $a_{ik} \neq 0$), por lo que las únicas entradas distintas de cero del producto AI_n son aquellas con k=j y cuando esto sucede, entonces δ_{kj}=1 (para k=j):

$$\Rightarrow (AI_n)_{ij} = a_{ij}$$

Que representa las entradas de la matriz A. Como son iguales entrada a entrada, entonces AI=A.

De manera análoga se puede validar que IA=A