Solución Inciso a:

Demuestra que para todo $a, b \in \mathbb{R}$ se tiene $A(a)A(b) = A(a+b-2ab)$.
Sea $a, b \in \mathbb{R}$ entonces:

$$A(a) = \begin{pmatrix} 1-a & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & 1-a \end{pmatrix} \textbf{ y } A(b) = \begin{pmatrix} 1-b & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 \\ b & 0 & 1-b \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow A(a)\cdot A(b) &= \begin{pmatrix} 1-a & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & 1-a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-b & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 \\ b & 0 & 1-b \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (1-a)(1-b)+0+ab & (1-a)0+0(1)+a(0) & (1-a)b+0(0)+a(1-b) \\ 0(1-b)+(1)0+0(b) & 0(0)+1(1)+0(0) & 0(b)+(1)0+0(1-b) \\ a(1-b)+0+(1-a)b & a(0)+0(1)+(1-a)0 & ab+0(0)+(1-a)(1-b) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (1-a)(1-b)+ab & 0 & (1-a)b+a(1-b) \\ 0 & 1 & 0 \\ a(1-b)+(1-a)b & 0 & ab+(1-a)(1-b) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (1-b)-a(1-b)+ab & 0 & b-ab+a-ab \\ 0 & 1 & 0 \\ a-ab+b-ba & 0 & ab+(1-b)-a(1-b) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1-b-a+ab+ab & 0 & b+a-2ab \\ 0 & 1 & 0 \\ a+b-2ba & 0 & ab+1-b-a+ab \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1-b-a+2ab & 0 & b+a-2ab \\ 0 & 1 & 0 \\ a+b-2ba & 0 & 1-b-a+2ab \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1-(b+a-2ab) & 0 & b+a-2ab \\ 0 & 1 & 0 \\ a+b-2ba & 0 & 1-(b+a-2ab) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1-(a+b-2ab) & 0 & a+b-2ab \\ 0 & 1 & 0 \\ a+b-2ba & 0 & 1-(a+b-2ab) \end{pmatrix} \\
&= A(a+b-2ab) \text{ } \textbf{[Según la definición de } A(x)\textbf{]}
\end{aligned}$$

Por lo tanto $A(a) \cdot A(b) = A(a + b - 2ab)$

Solución Inciso b:

Dado $x \in \mathbb{R}$, **calcula** $A(x)^n$.
Evaluemos de forma explicita algunas potencias.

$$
\begin{aligned}
[A(x)]^2 &= A(x) \cdot A(x) \\
&= A(x + x - 2x \cdot x) && \textbf{(Usando el inciso a)} \\
&= A(2x - 2x^2) \\
[A(x)]^3 &= A(2x - 2x^2) \cdot A(x) \\
&= A(2x - 2x^2 + x - 2x(2x - 2x^2)) && \textbf{(Usando el inciso a)} \\
&= A[3x - 2x^2 - (4x^2 - 4x^3)] = A[3x - 2x^2 - 4x^2 + 4x^3] \\
&= A[3x - 6x^2 + 4x^3] \\
[A(x)]^4 &= A(3x - 6x^2 + 4x^3) \cdot A(x) && \textbf{(Usando el inciso a)} \\
&= A[3x - 6x^2 + 4x^3 + x - 2x(3x - 6x^2 + 4x^3)] \\
&= A[4x - 6x^2 + 4x^3 - (6x^2 - 12x^3 + 8x^4)] = A(4x - 6x^2 + 4x^3 - 6x^2 + 12x^3 - 8x^4) \\
&= A(4x - 12x^2 + 16x^3 - 8x^4) \\
[A(x)]^5 &= A(4x - 12x^2 + 16x^3 - 8x^4) \cdot A(x) && \textbf{(Usando el inciso a)} \\
&= A(4x - 12x^2 + 16x^3 - 8x^4 + x - 2x(4x - 12x^2 + 16x^3 - 8x^4)) \\
&= A(5x - 12x^2 + 16x^3 - 8x^4 - 8x^2 + 24x^3 - 32x^4 + 19x^5) \\
&= A(5x - 20x^2 + 40x^3 - 40x^4 + 16x^5)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
[A(x)]^6 &= A(5x - 20x^2 + 40x^3 - 40x^4 + 16x^5) \cdot A(x) && \textbf{(Usando el inciso a)} \\
&= A[5x - 20x^2 + 40x^3 - 40x^4 + 16x^5 + x - 2x(5x - 20x^2 + 40x^3 - 40x^4 + 16x^5)] \\
&= A(6x - 20x^2 + 40x^3 - 40x^4 + 16x^5 - 10x^2 + 40x^3 - 80x^4 + 80x^5 - 32x^6) \\
&= A(6x - 30x^2 + 80x^3 - 120x^4 + 96x^5 - 32x^6)
\end{aligned}
$$

En resumen tenemos que:

$$
\begin{aligned}
[A(x)]^2 &= A(2x - 2x^2) \\
[A(x)]^3 &= A(3x - 6x^2 + 4x^3) \\
[A(x)]^4 &= A(4x - 12x^2 + 16x^3 - 8x^4) \\
[A(x)]^5 &= A(5x - 20x^2 + 40x^3 - 40x^4 + 16x^5) \\
[A(x)]^6 &= A(6x - 30x^2 + 80x^3 - 120x^4 + 96x^5 - 32x^6)
\end{aligned}
$$

Podemos notar que en el argumento de A **se encuentra un polinomio, y dependiendo del grado al que se eleva el polinomio es del mismo grado, es decir:**

$$[A(x)]^n = A\left(\sum_{k=1}^{n} a_k x^k\right) \textbf{Donde } a_k \textbf{ es una sucesión}$$

Podemos notar que cuando $k = 1$ **entonces** $a_k = n$.
También podemos notar que cuando $k = 2$ **entonces** $a_k = -(n-1)n$
También podemos notar que cuando $k = n$ **entonces** $a_k = (-1)^{n-1} \cdot 2^{n-1} = (-2)^{n-1}$
Si usamos el coeficiente binomial podemos notar un comportamiento de los coeficientes del polinomio que buscamos.
Recordemos que: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ **Entonces si** $k = n$ **entonces:** $(-2)^{k-1}\binom{n}{k} = (-2)^{n-1}\binom{n}{n} = (-2)^{n-1}$ **Y**

si $k=2$ **entonces:** $(-2)^{k-1}\binom{n}{k}=(-2)^{2-1}\binom{n}{2}=(-2)\frac{n!}{2!(n-2)!}=-\frac{2(n!)}{2\cdot(n-2)!}=-\frac{(n-2)!\cdot(n-1)n}{(n-2)!}=-(n-1)n$ **Y si** $k=1$ **entonces:** $(-2)^{k-1}\binom{n}{k}=(-2)^{1-1}\binom{n}{1}=(-2)^0\frac{n!}{1!(n-1)!}=n$ **Justamente parece que esta expresión está siendo coherente con el comportamiento del polinomio que estamos buscando. Así podemos hacer una afirmación.**
Llamemos:

$$P_n(x)=\sum_{k=1}^{n}(-2)^{k-1}\binom{n}{k}x^k$$

Afirmación:$[A(x)]^n=A[P_n(x)]$

Procedemos a demostrar nuestra afirmación por Inducción.
Sea $\mathbb{B}=\{n\in\mathbb{N}|[A(x)]^n=A[P_n(x)]\}$
$\boxed{\textbf{P.D.}}$ $\mathbb{B}=\mathbb{N}$

Caso Base

Sea $n=1$ **entonces:** $[A(x)]^n=[A(x)]^1=A(x)$ **y**

$$A[P_n(x)]=A[P_1(x)]=A[\sum_{k=1}^{1}(-2)^{k-1}\binom{1}{k}x^k]=A[(-2)^{1-1}\binom{1}{1}x^1]=A(1\cdot x)=A(x)$$

Por lo tanto : $[A(x)]^n=A[P_n(x)]$ **cuando** $n=1$
Por lo tanto $1\in\mathbb{B}$

Hipótesis Inductiva

Supongamos que $n\in\mathbb{B}$ **es decir que:**$[A(x)]^n=A[P_n(x)]$

Paso Inductivo

$\boxed{\textbf{P.D.}}$ $n+1\in\mathbb{B}$
$\boxed{\textbf{P.D.}}$ $[A(x)]^{n+1}=A[P_{n+1}(x)]$
Ya que por definición $A^{n+1}=A^n\cdot A$
Y ya que (Por hipótesis) $[A(x)]^n=A[P_n(x)]$

$$\begin{aligned}\Rightarrow A^{n+1}(x)&=A[P_n(x)]\cdot A(x) &&\textbf{(Usando el inciso a)}\\ &=A[[P_n(x)]+x-2x[P_n(x)]]\end{aligned}$$

Resolvamos $[P_n(x)]+x-2x[P_n(x)]$
Ya que:

$$P_n(x)=\sum_{k=1}^{n}(-2)^{k-1}\binom{n}{k}x^k$$

entonces:

$$\begin{aligned}[P_n(x)]+x-2x[P_n(x)]&=\sum_{k=1}^{n}(-2)^{k-1}\binom{n}{k}x^k+x-2x\left[\sum_{k=1}^{n}(-2)^{k-1}\binom{n}{k}x^k\right]\\ &=nx+\sum_{k=2}^{n}(-2)^{k-1}\binom{n}{k}x^k+x+\left[\sum_{k=1}^{n}(-2)x(-2)^{k-1}\binom{n}{k}x^k\right]\\ &=(n+1)x+\sum_{k=2}^{n}(-2)^{k-1}\binom{n}{k}x^k+\left[\sum_{k=1}^{n}(-2)^{k}\binom{n}{k}x^{k+1}\right]\end{aligned}$$

Ahora para: $\left[\sum_{k=1}^{n}(-2)^k\binom{n}{k}x^{k+1}\right]$
Sea $k+1=i$
Si $k=1 \Rightarrow i=2$
Si $k=n \Rightarrow i=n+1$

$$\Rightarrow \left[\sum_{k=1}^{n}(-2)^k\binom{n}{k}x^{k+1}\right] = \left[\sum_{i=2}^{n+1}(-2)^{i-1}\binom{n}{i-1}x^{i}\right]$$

Y para: $\sum_{k=2}^{n}(-2)^{k-1}\binom{n}{k}x^k$ **sea** $k=i$

$$\Rightarrow \sum_{i=2}^{n}(-2)^{i-1}\binom{n}{i}x^i = \sum_{k=2}^{n}(-2)^{k-1}\binom{n}{k}x^k$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
[P_n(x)]+x-2x[P_n(x)] &= (n+1)x+\sum_{i=2}^{n}(-2)^{i-1}\binom{n}{i}x^i+\left[\sum_{i=2}^{n+1}(-2)^{i-1}\binom{n}{i-1}x^i\right]\\
&= (n+1)x+\sum_{i=2}^{n}(-2)^{i-1}\binom{n}{i}x^i+\left[\sum_{i=2}^{n}(-2)^{i-1}\binom{n}{i-1}x^i\right]+\left[(-2)^{(n+1)-1}\binom{n}{(n+1)-1}x^{n+1}\right]\\
&= (n+1)x+\sum_{i=2}^{n}\left[(-2)^{i-1}\binom{n}{i}x^i+(-2)^{i-1}\binom{n}{i-1}x^i\right]+\left[(-2)^n\binom{n}{n}x^{n+1}\right]\\
&= (n+1)x+\sum_{i=2}^{n}(-2)^{i-1}x^i\left[\binom{n}{i}+\binom{n}{i-1}\right]+\left[(-2)^n x^{n+1}\right]
\end{aligned}$$

Y ya que:

$$\binom{n}{i}+\binom{n}{i-1}=\binom{n+1}{i}$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
[P_n(x)]+x-2x[P_n(x)] &= (n+1)x+\sum_{i=2}^{n}\left[(-2)^{i-1}x^i\binom{n+1}{i}\right]+\left[(-2)^n x^{n+1}\right]\\
&= (-2)^{1-1}x^1\binom{n+1}{1}+\sum_{i=2}^{n}\left[(-2)^{i-1}x^i\binom{n+1}{i}\right]+(-2)^{(n+1)-1}x^{n+1}\binom{n+1}{n+1}\\
&= \sum_{i=1}^{n+1}\left[(-2)^{i-1}x^i\binom{n+1}{i}\right]\\
&= \sum_{i=1}^{n+1}(-2)^{i-1}\binom{n+1}{i}x^i \text{ \textbf{Usando la definición de}} P_n(x)\\
&= P_{n+1}(x)
\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$[P_n(x)]+x-2x[P_n(x)]=P_{n+1}(x)$$

Y ya que:

$$[A(x)]^{n+1}=A[P_n(x)]+x-2x[P_n(x)]()$$

Por lo tanto:

$$[A(x)]^{n+1}=A[P_{n+1}(x)]$$

Es decir que $n+1\in\mathbb{B}$

Ahora podemos asegurar que: $\mathbb{B}=\mathbb{N}$
Así concluimos que:

$$[A(x)]^n = A\left[\sum_{k=1}^{n}(-2)^{k-1}\binom{n}{k}x^k\right] \quad \forall n\in\mathbb{N}$$