

Álgebra Lineal 2020-4

Tarea 3

Estos son los enunciados para la tarea en equipo. Debes entregar la tarea con todas las indicaciones precisadas en Moodle.

1. Aplica el proceso de Gram-Schmidt a la base de \mathbb{R}^4 que consiste de los vectores $(1, 0, 0, 0)$, $(1, 1, 0, 0)$, $(1, 1, 1, 0)$ y $(1, 1, 1, 1)$. Expresa a $(1, 2, 3, 4)$ como combinación lineal de la base ortonormal que obtengas.

Solución:

2. Sean $r_0 < r_1 < r_2 < \dots < r_n$ números reales. Para cada i , considera la forma lineal $\text{ev}_{r_i} : \mathbb{R}_n[x] \rightarrow \mathbb{R}$ que a cada polinomio $p(x)$ lo manda a su evaluación en r_i , es decir,

$$\text{ev}_{r_i}(p(x)) = p(r_i).$$

Muestra que $\text{ev}_{r_0}, \text{ev}_{r_1}, \dots, \text{ev}_{r_n}$ forman una base del espacio dual $(\mathbb{R}_n[x])^*$.

Solución:

3. Demuestra que si $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ son reales y l_1, l_2, l_3 son formas lineales en \mathbb{R}^3 , entonces la función

$$q(x) = \alpha_1 l_1(x) l_2(x) + \alpha_2 l_2(x) l_3(x) + \alpha_3 l_3(x) l_1(x)$$

es una forma cuadrática. Encuentra su forma polar.

Solución:

4. Considera $V = \mathbb{R}_3[x]$ el espacio vectorial de polinomios con coeficientes reales y grado a lo más 3. Definimos

$$\langle p, q \rangle = \sum_{j=1}^5 p(j)q(j).$$

- a) Muestra que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ así definido es un producto interior.
- b) Encuentra el ángulo entre los polinomios $1 + x^3$ y $3x - 2x^2$.
- c) Para cada entero positivo n , determina la norma del polinomio $1 + nx^3$.
- d) Determina la distancia entre los polinomios 1 y $1 + x + x^2 + x^3$.

Solución:

5. Sea $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^+$ una función continua que no toma valores negativos y sea

$$x_n = \int_0^1 t^n f(t) dt.$$

Demuestra que para cualesquiera $n, p \geq 0$ se tiene que

$$x_{n+p} \leq \sqrt{x_{2n}} \cdot \sqrt{x_{2p}}.$$

Sugerencia: Define un producto interior sobre el cual puedas usar la desigualdad de Cauchy-Schwarz.

Solución: