Ayud_05_01_21

January 4, 2021

1 Transformaciones multilineales, transformaciones antisimétricas y transformaciones alternantes.

En esta sesión cubriremos las dos primeras entradas del blog. Haremos diez ejercicios y al final tendremos 10 minutos para atender las dudas que se hayan acumulado al leer las dos primeras entradas de esta unidad.

1. Demostrar que el producto mixto es una transformación 3-lineal.

Definición: Definimos el producto mixto de tres vectores $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ de un espacio euclideo 3 - dimensional como:

$$[x, y, z] = x \cdot (y \times z)$$

Entonces, podemos verlo como una transformación de $T : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^9 \to \mathbb{R}$ que cumple que:

$$T(x, y, z) = [x, y, z] = x \cdot (y \times z)$$

Para demostrar que es una transformación 3-lineal, tenemos que demostrar que es lineal sobre cada una de sus variables. Una forma de reescribir lo anterior es demostrar las siguientes tres igualdades:

$$\begin{aligned}
T(\alpha\bar{x} + \beta x', y, z) &= [\alpha\bar{x} + \beta x', y, z] = \alpha[\bar{x}, \bar{y}, z] + \beta\,[\vec{x}', \bar{y}, z] \\
T(x, \alpha\bar{y} + \beta\bar{y}', z) &= [\bar{x}, \alpha\bar{y} + \beta\bar{y}', \bar{z}] = \alpha[\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}] + \beta\,[\bar{x}, \vec{y}', \bar{z}] \\
T(x, y, \alpha\bar{z} + \beta\bar{z}') &= [\bar{x}, \bar{y}, \alpha\bar{z} + \beta\bar{z}'] = \alpha[\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}] + \beta\,[\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}']
\end{aligned}$$

Esto es identico a demostrar que una transformación es lineal: hay que ver que abre sumas y saca escalaras (que mande el cero al cero viene incluido en lo anterior). La diferencia es que ahora hay que hacerlo para cada una de las variables. Para la primera variable:

$$\left[\alpha\bar{x} + \beta x', y, z\right] = \alpha\bar{x} + \beta x' \cdot (y \times z) = \alpha\bar{x} \cdot (y \times z) + \beta x' \cdot (y \times z) = \alpha(\bar{x} \cdot (y \times z)) + \beta(x' \cdot (y \times z)) = \alpha[\bar{x}, \bar{y}, z] + \beta\,[\vec{x}',$$

Notemos cómo si usamos que el producto punto es bilineal la prueba se facilita muchísimo. Ahora, recordemos esta propiedad del producto mixto:

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$$

Entonces,

$$[x, y, z] = [z, x, y] = [y, z, x]$$

El truco para ahorrarse la talacha es poner siempre primero la variable sobre la que estamos probando la linealidad para poder usar que el producto punto es bilineal como hicimos para x. Así, las otras dos pruebas son idénticas a las de la primera entrada.

Observación:

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \det \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} = \det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$$

En la entrada del blog apareció la palabra "producto tensorial" y aunque por el momento no es totalmente necesario entender todos los detalles del producto tensorial, es útil que al menos una vez veamos cómo se hace un producto tensorial, viéndolo como una operación entre matrices.

2. Calcular el producto tensorial (o producto exterior) entre las siguientes dos matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

attachment:image.png

Hagamos un par de ejemplos más para tratar de entender intuitivamente cómo funciona esta operación.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 0 & 1 \cdot 3 & 2 \cdot 0 & 2 \cdot 3 \\ 1 \cdot 2 & 1 \cdot 1 & 2 \cdot 2 & 2 \cdot 1 \\ 3 \cdot 0 & 3 \cdot 3 & 1 \cdot 0 & 1 \cdot 3 \\ 3 \cdot 2 & 3 \cdot 1 & 1 \cdot 2 & 1 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & 6 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 9 & 0 & 3 \\ 6 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Un último ejemplo:

attachment:image.png

Con esto se intuye un poco cuál es la definición de producto exterior:

$$\mathbf{u} \otimes \mathbf{v} = \mathbf{A} = \begin{bmatrix} u_1v_1 & u_1v_2 & \dots & u_1v_n \\ u_2v_1 & u_2v_2 & \dots & u_2v_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_mv_1 & u_mv_2 & \dots & u_mv_n \end{bmatrix}$$

En un curso más avanzado de álgebra, cuántica o computación se lo pueden encontrar. Por ahora está bien saber cómo operarlo.

3. Cuántas permutaciones diferentes existen de la cadena de números '12345678'

Podemos calcularlo a fuerza bruta, es decir encontrar todas las posibles formas en que podemos reordenar esa cadena y contarlas. Esto puede funcionar cuando tenemos pocos elementos.

[1]:
```python
from sympy.utilities.iterables import multiset_permutations
import numpy as np

def permutaciones(n):
  A=[]
  for p in multiset_permutations(n):
    A.append(p)
  return A
```

[11]:
```python
len(permutaciones([1,2,3,4,5,6,7,8]))
```

[11]: 40320

Pero para ir a la segura, podemos recordar de nuestros primeros cursos de álgebra que el número de permutaciones de un conjunto dado está dado por:

$$P(n,r) = {}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

En nuestro ejemplo $r = n$ pues tenemos 8 números que reordenar y 8 lugares para hacerlo.

Entonces, haciendo las cuentas, podemos ver que hay 40320 formas de reordenar la cadena.

4. Sigamos con nuestro ejemplo de la cadena '12345678'. Denotemos σ_5 a la quinta permutación que nos salió en el código y σ_3 a la tercera. La pregunta es: ¿qué hace la permutación $\sigma_5\sigma_3$?

La permutación σ_5 manda la cadena 12345678 a la cadena 12345867. Entonces, podemos escribirla como:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 8 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

Análogamente, la permutación σ_3 manda la cadena 12345678 a la cadena 12345768. Entonces, podemos escribirla como:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

Analizando lo que tenemos, podemos concluir que $\sigma_5\sigma_3$ manda a la cadena 12345678 a la cadena 12345876. Es decir $\sigma_5\sigma_3 = \sigma_6$.

5. Considere la permutación σ_{666} que manda la cadena 12345678 a 12856743.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 8 & 5 \\ 6 & 7 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

¿Cuál es el signo de esa permutación?

attachment:image.png

El signo es 1.

6. Demostrar que la transformación $T(x, y) = xy$ definida sobre $T : F^2 \to F$, es una transformación bilineal NO alternante.

Para demostrar que es bilineal hacemos lo que hicimos en el primer ejercicio:

$$T(\alpha\bar{x} + \beta x', y) = (\alpha\bar{x} + \beta x')y = \alpha\bar{x}y + \beta x'y = \alpha T(\bar{x}, y) + \beta T(x', y)$$

$$T(x, \alpha\bar{y} + \beta y') = x(\alpha\bar{y} + \beta y') = \alpha x\bar{y} + \beta xy' = \alpha T(x, \bar{y}) + \beta T(x, y')$$

Para ver que NO es antisimétrica basta dar un ejemplo que cumpla que si $x = y$, entonces $T(x, y) \neq 0$. En nuestro caso ver que $T(1, 1) \neq 0$ nos permite ver que T NO es antisimétrica.

7.Demostrar que la transformación definida en el ejercicio anterior es antisimétrica.

Definición. Decimos que T es antisimétrica si $\sigma T = \text{sign}(\sigma)T$ para cualquier permutación σ en S_d. En otras palabras, T es antisimétrica si $\sigma T = T$ para las permutaciones pares y $\sigma T = -T$ para las permutaciones impares.

En el caso de nuestra transformación sólo tenemos dos permutaciones: la identidad y la permutación que intercambia al primer elemento con el segundo.

Para la identidad tenemos que $(\mathrm{id}T)(x, y) = \sigma(xy)$ entonces, $(\mathrm{id}T) = T = \mathrm{sign}(\mathrm{id})T$

Para la permutación que intercambia al 1 con el 2, primero notemos que $2xy = 0$, entonces $xy = -yx$ por lo tanto $(\sigma T)(x, y) = -yx = \mathrm{sign}(\sigma)T$

Con esto concluimos que la transformación es antisimétrica.

Observación: La equivalencia entre alternancia y antisimetría no ocurre en cualquier campo, pero cuando estemos en $\mathbb{Q}, \mathbb{R} \quad \text{o} \quad \mathbb{C}$ sí la podemos usar.