Ayud_19_01_21

January 20, 2021

0.1 Ejercicio de las entradas 9 y 10

1. Calcular el determinante de la siguiente matriz:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & -6 & 8 \\ 0 & 7 & 3 & 0 \\ -1 & 8 & 7 & -4 \end{bmatrix}$$

Antes de comenzar tengamos una pequeña discusión sobre la relación entre el determinante y la reducción gaussiana.

Como recordaran, se utilizaba el algoritmo de reducción gaussiana para pasar una matriz a una matriz triangular (en particular podíamos obtener su forma escalonada reducida si seguíamos el algoritmo hasta el final). También hemos platicado en la undiad 4 de esa propiedad muy interesante que nos dice que el determinante de una matriz triangular es la multiplicación de sus elementos en la diagonal.

Uniendo estas dos ideas podemos utilizar la reducción gaussiana para facilitar el cálculo de un determinante teniendo en mente estas 3 precauciones:

1) Switching two rows or columns causes the determinant to switch sign
2) Adding a multiple of one row to another causes the determinant to remain the same
3) Multiplying a row as a constant results in the determinant scaling by that constant.

Teniendo esto en mente, calculemos el determinante del problema:

Para quedarnos con una columna fácil, a la fila 2 le restamos la fila 1 multiplciada por 3 y a la fila 4 le sumamos la fila 1.

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 7 & 3 & 0 \\ 0 & 9 & 5 & -1 \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 7 & 3 & 0 \\ 0 & 9 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{cofactor } = -\det\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 7 & 3 & 0 \\ 9 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

$$R_2 - 3R_1 \to R_2', R_3 - 9R_2' \to R_3' = -\det \begin{pmatrix} 0 & -6 & 7 \\ 1 & 3 & -3 \\ 0 & -22 & 26 \end{pmatrix}$$

$$\text{permute rows } = \det \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 0 & -6 & 7 \\ 0 & -22 & 26 \end{pmatrix}$$

$$\text{cofactor } = \det \begin{pmatrix} -6 & 7 \\ -22 & 26 \end{pmatrix} = -2$$

2. Calcular el siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

Utilizando la primera fila para facilitar todas las demás:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 1 \end{vmatrix}$$

Utilizando la segunda fila para facilitar las dos de abajo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -5 \end{vmatrix}$$

Finalmente:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -13/2 \end{vmatrix}$$

Por lo tanto el determinante será:

$$= 1(1)(-4)(-13/2) = 26$$

3. Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones utilizando la regla de Cramer:

$$
\begin{aligned}
2x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= 8 \\
-x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0 \\
x_1 - x_2 - 2x_3 &= 0
\end{aligned}
$$

Utilizando regla de Cramer:

$$
x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 8 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix}}
$$

$$
x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 8 & 6 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix}}
$$

$$
x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 4 & 8 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix}}
$$

Calculando el determinante del denominador utilizando expansión por cofactores:

$$
= 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} - 4 \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} + 6 \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}
$$

attachment:image.png

$$
= 2(-3) - 4 \cdot 1 + 6(-1) = 16
$$

El denominador en todos los casos será 16. Ahora calculamos los denominadores. Será expansión por cofactores sobre las columnas con más ceros.

$$\begin{vmatrix} 8 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -24$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 8 & 6 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -8$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 8 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -8$$

Por lo tanto, la solución a nuestro sistema de ecuaciones es:

$$x_1 = \frac{3}{2} x_2 = \frac{1}{2} x_3 = \frac{1}{2}$$

4. Obtener la matriz inversa usando determinantes de la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Vamos a utilizar la siguiente fórmula para la inversa de una matriz:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \left(A^{adj} \right)^t$$

Ahora calculamos el determinante:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

$$A^{adj} = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & +\dots \\ -\dots & +\dots & -\dots \\ +\dots & -\dots & +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Ahora, transponemos la matriz anterior:

$$\left(A^{adj}\right)^t = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-1} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Determine el rango de la siguiente matriz usando determinantes:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 5 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -7 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 17 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

El rango de una matriz es el orden de la submatriz cuadrada con determinante disntito de cero más grande que tiene la matriz.

En nuestra matriz, podemos descartar la columna cinco porque está llena de ceros.

También podemos descartar la tercera columna porque resulta que es una combinación lineal de otras dos columnas.

$$c3 = c1 + c2$$

Nos queda la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -7 \\ 3 & -2 & 17 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

Hay submatrices cuadradas de orden 1 distintas de cero? Sí

Hay submatrices cuadradas de orden 2 distintas de cero? Sí

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Hay submatrices cuadradas de orden 3 distintas de cero? No.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -7 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -7 \\ 3 & -2 & 17 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & -7 \\ 3 & -2 & 17 \\ 0 & 1 & -4 \end{vmatrix} = 0$$

Por lo tanto el rango de la matriz es 2.

$$T(\vec{e_1}) = T(1,0,0) = (3,2,7) T(\vec{e_2}) = T(0,1,0) = (5,3,8) T(\vec{e_3}) = T(0,0,1) = (4,3,5)$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 5 & 3 & 8 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

[ ]: