

Ayud_28_01_21

January 29, 2021

1. Considere la siguiente matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

- a) Encuentre los eigenvalores de la matriz A .
- b) Encuentre cada uno de los eigenvectores de cada eigenvalor de A .
- c) Diagonalice la matriz A .
- d) Diagonalice la matriz $A^3 - 5A^2 + 3A + I$.
- e) Calcule A^{100} .
- f) Calcule

$$(A^3 - 5A^2 + 3A + I)^{100}$$

a)

$$\begin{aligned} p(t) = \det(A - tI) &= \begin{vmatrix} 1-t & 2 \\ 4 & 3-t \end{vmatrix} \\ &= (1-t)(3-t) - 8 = t^2 - 4t - 5 = (t+1)(t-5) \end{aligned}$$

Los eigenvalores son -1 y 5 .

b)

Para el primer eigenvalor:

$$A + I = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{then } \frac{1}{2}R_1]{R_2 - 2R_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Resolvemos el sistema:

$$(A - 5I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

Obtenemos el eigenvector:

$$a \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

De igual forma para el segundo eigenvalor:

$$A - 5I = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{then } \frac{-1}{4}R_1]{R_2+R_1} \begin{bmatrix} 1 & -1/2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Resolvemos el sistema:

$$(A + I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

Obtenemos el eigenvector:

$$a \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

c) Diagonalizamos la matriz:

$$S = [\mathbf{u} \quad \mathbf{v}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Calculamos la matriz diagonal:

$$S^{-1}AS = D$$

$$D = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

d) Diagonalizamos la matriz:

En la parte c) obtuvimos que

$$S^{-1}AS = D$$

con:

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \text{ y } D = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Como $A = SDS^{-1}$, entonces:

$$\begin{aligned} A^2 &= AA = SDS^{-1} \cdot SDS^{-1} = SD^2S^{-1} \\ A^3 &= A^2A = SD^2S^{-1} \cdot SDS^{-1} = SD^3S^{-1} \end{aligned}$$

De esta forma:

$$\begin{aligned} A^3 - 5A^2 + 3A + I &= SD^3S^{-1} - 5SD^2S^{-1} + 3SDS^{-1} + I \\ &= S(D^3 - 5D^2 + 3D + I)S^{-1}. \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
& S^{-1} (A^3 - 5A^2 + 3A + I) S \\
&= D^3 - 5D^2 + 3D + I \\
&= \begin{bmatrix} (-1)^3 & 0 \\ 0 & 5^3 \end{bmatrix} - 5 \begin{bmatrix} (-1)^2 & 0 \\ 0 & 5^2 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -8 & 0 \\ 0 & 16 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

e) Calcule A^{100} :

Utilizando el argumento de d) (se puede pensar como inducción matemática).

$$A^{100} = S D^{100} S^{-1}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
A^{100} &= S D^{100} S^{-1} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}^{100} \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (-1)^{100} & 0 \\ 0 & 5^{100} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 + 5^{100} & -1 + 5^{100} \\ -2 + 2 \cdot 5^{100} & 1 + 2 \cdot 5^{100} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

f) Ahora, calcule $(A^3 - 5A^2 + 3A + I)^{100}$:

Hagamos:

$$B := A^3 - 5A^2 + 3A + I$$

Por un resultado anterior:

$$S^{-1} B S = \begin{bmatrix} -8 & 0 \\ 0 & 16 \end{bmatrix}$$

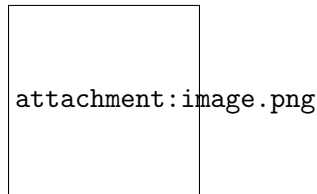
$$\begin{aligned}
B^{100} &= S \begin{bmatrix} -8 & 0 \\ 0 & 16 \end{bmatrix}^{100} S^{-1} \\
&= S \begin{bmatrix} (-8)^{100} & 0 \\ 0 & 16^{100} \end{bmatrix} S^{-1} \\
&= S \begin{bmatrix} 2^{300} & 0 \\ 0 & 2^{400} \end{bmatrix} S^{-1} \\
&= S \begin{bmatrix} w^3 & 0 \\ 0 & w^4 \end{bmatrix} S^{-1}
\end{aligned}$$

En el último paso definimos $w = 2^{100}$.

$$\begin{aligned}
 B^{100} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w^3 & 0 \\ 0 & w^4 \end{bmatrix} \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \frac{w^3}{3} \begin{bmatrix} 2+w & -1+w \\ -2+2w & 1-2w \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Con esto terminamos el ejercicio.

2.



Otra vez!

Considere el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 = 9 \\ 2x_1 - \frac{1}{3}x_2 = -5 \\ -x_1 = 2 \end{cases}$$

La pregunta es: ¿Es este sistema consistente? ¿Cuántas soluciones admite?

Tenemos que calcular el rango de la matriz asociada al sistema y de la matriz extendida:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & -\frac{1}{3} \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad [A \mid \mathbf{b}] = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 9 \\ 2 & -\frac{1}{3} & -5 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Observemos que:

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & -\frac{1}{3} \end{vmatrix} \neq 0$$

Notemos que A es una matriz de 3×2 . Entonces, el valor máximo que puede tomar su rango es el mínimo entre estos dos números. Ahora, calculamos la submatriz cuadrada que aparece arriba y vemos que su determinante es distinto de cero. Con esto podemos concluir que el rango de A tiene que ser 2.

Por lo tanto: $\text{rank}(A) = 2$.

Para la matriz extendida, notemos lo siguiente:

$$\text{rank}(A) \leq \text{rank}(A \mid b)$$

Repitiendo el argumento de arriba, el rango de la matriz extendida puede ser máximo 3.

Pero si calculamos la submatriz de 3×3 en esta caso la única submatriz de esas dimensiones:

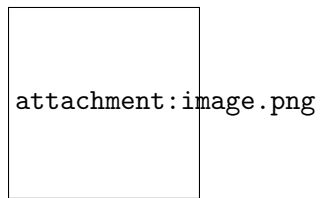
$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 9 \\ 2 & -\frac{1}{3} & -5 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \dots = 0$$

Por lo tanto, $\text{rank}(A \mid b) = 2$.

Como:

$$\text{rank}(A) = \text{rank}(A \mid b)$$

Obteniendo los grados de libertad del sistema:



Como los grados de libertad del sistema son 0 la solución es única.