Ayud_26_01_21

January 29, 2021

0.1 Ejercicios de las entradas 13 y 14

1. Diagonalice la siguiente matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 3 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Paso 1: encuentre el polinomio característico.

$$p(t) = \det(A - tI) = \begin{vmatrix} 4-t & -3 & -3 \\ 3 & -2-t & -3 \\ -1 & 1 & 2-t \end{vmatrix}$$

Utilizando la expansión por cofactores:

$$p(t) = -(t-1)^2(t-2)$$

Paso 2: Encuentre los eigenvalores.

$t = 1$ con multiplicidad algebraica de 2.

$t = 2$ con multiplicidad algebraica de 1.

Paso 3: Encuentre el eigen-espacio.

$$A - I = \begin{bmatrix} 3 & -3 & -3 \\ 3 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Encontrando los eigenvectores:

$$(A - I)\mathbf{x} = \mathbf{0} \text{ para } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$$

Obteniendo el espacio de soluciones:

$$E_1 = \mathcal{N}(A - I) = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{x} = x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Nos tomamos una base de este espacio:

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \right\}$$

Para el segundo eigenvalor:

$$A - 2I = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -3 \\ 3 & -4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \cdots \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Resolviendo:

$$(A - 2I)\mathbf{x} = \mathbf{0} \text{ para } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$$

Encontrando el espacio de soluciones:

$$E_2 = \mathcal{N}(A - 2I) = \left\{ \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \quad \mathbf{x} = x_3 \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

La base del eigen espacio será:

$$\left\{ \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \right\}$$

Paso 4. Verificar la indepenencia lineal de los vectores.

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2 + c\mathbf{v}_3 \neq 0$$

Paso 5: Define la matriz invertible S.

Definimos la matriz invertible S como \$ S=[$\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2\mathbf{v}_3$] \$.

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

La matriz S es no singular pues sus columnas son linealmente independientes.

Paso 6. Defina la matriz diagonal D que tenga a los eigenvalores en las entradas de la diagonal.

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Paso 7: diagonalice la matriz A como \$ S^{-1} A S=D \$.

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ and } D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

2. Considere la siguiente matriz:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Calcule y simplifique la siguiente expresión:

$$-T^3 + 4T^2 + 5T - 2I$$

Calculamos su polinomio característico:

$$p_T(t) = \det(T - tI) = (1-t)(1-t)(2-t) = -t^3 + 4t^2 - 5t + 2$$

Si aplicamos el teorema Cayley Hamilton:

$$p_T(T) = -T^3 + 4T^2 - 5T + 2I = O$$

Intentamos simplificar el polinomio:

$$\begin{aligned} -T^3 + 4T^2 + 5T - 2I &= \left(-T^3 + 4T^2 - 5T + 2I\right) + (10T - 4I) \\ &= p_T(T) + 10T - 4I = 10T - 4I \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} 10 & 0 & 20 \\ 0 & 10 & 10 \\ 0 & 0 & 20 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 6 & 0 & 20 \\ 0 & 6 & 10 \\ 0 & 0 & 16 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto la respuesta será:

$$-T^3 + 4T^2 + 5T - 2I = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 20 \\ 0 & 6 & 10 \\ 0 & 0 & 16 \end{bmatrix}$$

3. Encuentre la inversa de la siguiente matriz utilizando el teorema de Cayley Hamilton:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 9 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Calculamos primero el polinomio característico de la matriz:

$$p(t) = \det(A - tI)$$

$$\begin{vmatrix} 1-t & 1 & 2 \\ 9 & 2-t & 0 \\ 5 & 0 & 3-t \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{3+1}5 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2-t & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{3+2} \cdot 0 \begin{vmatrix} 1-t & 2 \\ 9 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{3+3}(3-t) \begin{vmatrix} 1-t & 1 \\ 9 & 2-t \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= 5(2t-4) + 0 + (3-t)((1-t)(2-t) - 9) \\ &= -t^3 + 6t^2 + 8t - 41 \end{aligned}$$

Aplicando el teorema Cayley-Hamilton:

$$p(A) = O$$

$$O = p(A) = -A^3 + 6A^2 + 8A - 41I$$

Entonces,

$$41I = -A^3 + 6A^2 + 8A = A\left(-A^2 + 6A + 8I\right)$$

Equivalentemente:

$$I = A\left(\frac{1}{41}\left(-A^2 + 6A + 8I\right)\right)$$

Por lo tanto:

$$A^{-1} = \frac{1}{41}\left(-A^2 + 6A + 8I\right)$$

Calculando directamente:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 20 & 3 & 8 \\ 27 & 13 & 18 \\ 20 & 5 & 19 \end{bmatrix}$$

Añadiendo los términos faltantes:

$$\begin{aligned} -A^2 + 6A + 8I &= -\begin{bmatrix} 20 & 3 & 8 \\ 27 & 13 & 18 \\ 20 & 5 & 19 \end{bmatrix} + 6\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 9 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & 3 \end{bmatrix} + 8\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -6 & 3 & 4 \\ 27 & 7 & -18 \\ 10 & -5 & 7 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Por lo tanto, la matriz inversa es:

$$A^{-1} = \frac{1}{41}\begin{bmatrix} -6 & 3 & 4 \\ 27 & 7 & -18 \\ 10 & -5 & 7 \end{bmatrix}$$

4. attachment:image.png

Tómate cualquier base ortonormal v_1, v_2, v_3 de $\mathbb{R}$ (cualquiera que no tenga ceros). Después, tienes que sacar los eigenvalores de la matriz. Como tu matriz es una matriz diagonal, sabemos que sus eigenvalores son 1, 5 y -3.

Entonces, cualquier matriz que construyas de esta forma, va a ser una matriz similar a la que estás buscando y no va a tener entradas iguales a cero:

$$A = 1v_1v_1^T + 5v_2v_2^T - 3v_3v_3^T$$

attachment:image.png

5. Encuentre los eigenvalores y eigenvectores de la siguiente matriz:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 7 & 0 & -3 \\ -9 & -2 & 3 \\ 18 & 0 & -8 \end{bmatrix}$$

Calcularemos su polinomío característico:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 7-\lambda & 0 & -3 \\ -9 & -2-\lambda & 3 \\ 18 & 0 & -8-\lambda \end{vmatrix} &= (-2-\lambda)(-1)^4 \begin{vmatrix} 7-\lambda & -3 \\ 18 & -8-\lambda \end{vmatrix} \\ &= -(2+\lambda)[(7-\lambda)(-8-\lambda)+54] \\ &= -(\lambda+2)\left(\lambda^2+\lambda-2\right) \\ &= -(\lambda+2)^2(\lambda-1) \\ &= -(\lambda+2)(\lambda+2)(\lambda-1) \end{aligned}$$

Calcularemos los eigenvectores:

$$\begin{aligned} (\mathbf{A}-\mathbf{I})\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 6x_1 - 3x_3 \\ -9x_1 - 3x_2 + 3x_3 \\ 18x_1 - 9x_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \Rightarrow x_3 = 2x_1 \quad \text{and} \quad x_2 &= x_3 - 3x_1 \\ \Rightarrow x_3 = 2x_1 \quad \text{and} \quad x_2 &= -x_1 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{A}+2\mathbf{I})\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 9x_1 - 3x_3 \\ -9x_1 + 3x_3 \\ 18x_1 - 6x_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \Rightarrow x_3 = 3x_1 \end{aligned}$$

Como no tenemos información sobre x_2 puede ser elegido de manera arbitraria.

Entonces podemos elegir dos eigenvectores independientes asociados a $\lambda = -2$, por ejemplo \$u*{1}=(1,0,3) y u*{2}=(1,1,3) \$

El eigen vector asociado a este eigenvalor será cualquier $a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2$

El eigenvector puede ser:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

[ ]: