Ayud_21_01_21

January 25, 2021

0.1 Ejercicios de las entradas 11 y 12

1. Encuentre los eigenvalores de la siguiente transformación lineal:

$$T\left(ax^2+bx+c\right)=bx^2+cx$$

Los eigenvalores de una transformación lineal se pueden hallar directamente resolviendo la siguiente ecuación:

$$T(v)=\lambda v$$

Sin embargo, ya que nosotros estamos acostumbrados a trabajar con matrices, el siguiente método es más amigable:

Primero elegimos una base para nuestro espacio vectorial, en este caso el vector es ax^2+bx+c y una base para este espacio vectorial es la siguiente:

$$\beta=\left[1,x,x^2\right]$$

Evaluamos los elementos de la base en la transformación y checando los coeficientes, obtenemos la matriz asociada:

$$\begin{aligned}
T(1)&=x\\
&=0(1)+1(x)+0\left(x^2\right).\\
T(x)&=x^2\\
&=0(1)+0(x)+1\left(x^2\right).\\
T\left(x^2\right)&=0\\
&=0(1)+0(x)+0\left(x^2\right).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la matriz asociada a la trasnformación lineal será la siguiente:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Solamente nos resta recordar ese teorema que leyeron en la entrada del blog: los eigenvalores de una transformación, son los eigenvalores de la matriz asociada a la transformación.

Ahora, tenemos que encontrar los eigenvalores de la matriz. Para esto tenemos que obtener las raíces del polinomio característico.

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Si desarrollamos la operación:

$$det \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} = 0$$

Por lo ranto el polinomio característico es $-\lambda^3$

Si sacamos sus raíces:

$$\lambda^3 = 0$$

Sólo tiene un eigenvalor:

$$\lambda_1 = 0$$

Y sólo tiene un eigenvector:

$$v_1 = (0, 0, 1)$$

2. Obtenga los Eigen valores y Eigenvectores de la siguiente matriz:

$$\begin{pmatrix} -2 & -4 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Obteniendo su polinomio característico e igualándolo a cero para obtener las raíces:

$$\det \begin{pmatrix} -2-\lambda & -4 & 2 \\ -2 & 1-\lambda & 2 \\ 4 & 2 & 5-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

Calculando el determinante:

$$(-2-\lambda)[(1-\lambda)(5-\lambda) - 2\times 2] + 4[(-2)\times(5-\lambda) - 4\times 2] + 2[(-2)\times 2 - 4(1-\lambda)] = 0.$$

Expandiendo los brackets y simplificando:

$$-\lambda^3 + 4\lambda^2 + 27\lambda - 90 = 0$$

Equivalentemente:

$$\lambda^3 - 4\lambda^2 - 27\lambda + 90 = 0$$

Para encontrar raíces podemos usar muchos métodos, en nuestro caso prueba y error nos da una raíz:

$$3^3 - 4 \times 3^2 - 27 \times 3 + 90 = 0$$

Por lo tanto, podemos factorizar como:

$$\lambda^3 - 4\lambda^2 - 27\lambda + 90 = (\lambda - 3)\left(\lambda^2 - \lambda - 30\right)$$

Lo cual se reduce a:

$$(\lambda - 3)\left(\lambda^2 - \lambda - 30\right) = (\lambda - 3)(\lambda + 5)(\lambda - 6) = 0$$

$$\lambda - 3 = 0 \lambda = 3$$

Por lo tanto, las raíces del polinomio serán 3, -5 y 6:

Ahora, para encontrar los eigenvectores, tenemos que resolver el siguiente sistema de ecuaciones para cada uno de nuestros eigenvalores:

$$\begin{pmatrix} -2-\lambda & -4 & 2 \\ -2 & 1-\lambda & 2 \\ 4 & 2 & 5-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Para λ_1:

$$\begin{pmatrix} -5 & -4 & 2 \\ -2 & -2 & 2 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Si hacen la reducción Gaussiana, van a llegar al siguiente sistema de ecuaciones:

$$y = -\frac{3x}{2}, \quad z = -\frac{x}{2}$$

Es decir, cualquier vector de la forma $(x, -\frac{3x}{2}, -\frac{x}{2})$ será un eigenvector!

Lo más fácil será hacer $x = 1$, entonces nuestro eigenvector es:

$$v_1 = \left(1, -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

Como cualquier múltiplo de un eigenvector, sigue siendo un eigenvector de nuestro sistema, podemos escribir el eigenvector como sigue:

$$v_1 = (2, -3, -1)$$

Análogamente para los otros dos eigenvalores, tenemos que:

Para $\lambda_2 = -5$:

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -2 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$v_2 = (1, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2})$$
$$v_2 = (2, -1, 1)$$

Para $\lambda_3 = 6$:

$$\begin{pmatrix} -8 & -4 & 2 \\ -2 & -5 & 2 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(1, 6, 16)$$

3. attachment:image.png

Considere el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 2x + 3y - z &= 1 \\ 3x - y + 2z &= 0 \\ 3x + 10y - 5z &= 0 \end{aligned}$$

Nosotros queremos determinar si este sistema tiene solución o no.

Notemos que la matriz asociada al sistema de ecuaciones es la siguiente:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 3 & 10 & -5 \end{pmatrix}$$

Si sacamos su determinante, podemos ver que el rango de esta matriz no es 3.

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 3 & 10 & -5 \end{vmatrix} &= (2)(-1)(-5) + (3)(10)(-1) + (3)(3)(2) \\ &- (-1)(-1)(3) - (2)(10)(2) - (3)(3)(-5) \\ &= 10 - 30 + 18 - 3 - 40 + 45 \\ &= 0\end{aligned}$$

Recuerde que el rando de una matriz es la dimensión de su submatriz cuadrada de mayor dimensión.

Podemos darnos cuenta que la siguiente submatriz de A:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = (2)(-1) - (3)(3) = -11$$

Tiene determinante distinto de cero. Por lo tanto, el rango de A es 2.

Ahora consideremos la matriz aumentada del sistema de ecuaciones:

$$(A \mid b) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 10 & -5 & 0 \end{pmatrix}$$

Y hay que darnos cuenta que esta matriz tiene la siguiente submatriz con determinante distinto de cero:

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 3 & 10 & 0 \end{vmatrix} &= 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 3 & 10 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 10 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \\ &= 1 \cdot (3 \cdot 10 + 1 \cdot 3) \\ &= 33.\end{aligned}$$

Por el teorema que acabamos de platicar:

$$\operatorname{rank} A = 2 \neq 3 = \operatorname{rank}(A \mid b)$$

Podemos determinar que el sistema de ecuaciones no tiene ni siquiera una solución (note la negación de la frase al menos una). Por lo tanto el sistema no tiene soluciones.

4. Encuentre los eigenvalores de la siguiente matriz diagonal:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$|A - \lambda I| = (1 - \lambda)(2 - \lambda)(3 - \lambda)$$

$$v_{\lambda_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_{\lambda_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_{\lambda_3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

5. Encuentre los eigenvalores y los eigenvectores de la siguiente matriz triangular:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$|A - \lambda I| = (1 - \lambda)(2 - \lambda)(3 - \lambda)$$

$$v_{\lambda_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad v_{\lambda_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad v_{\lambda_3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

6. attachment:image.png

```
[ ]:
```