Ayud_07_01_21

January 11, 2021

0.1 Ejercicios sobre las entradas 3 y 4 de la unidad 4.

1. Calcule por definición el determinante de los siguientes vectores con respecto a la base canónica de $\mathbb{R}$

(1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1),

$$(1,4,5,2),(0,3,2,1),(0,0,-1,4)\ \ (0,0,0,1)$$

Primero expresamos los vectores en términos de la base:

$$(1,4,5,2) = 1(1,0,0,0) + 4(0,1,0,0) + 5(0,0,1,0) + 2(0,0,0,1)$$

$$(0,3,2,1) = 0(1,0,0,0) + 3(0,1,0,0) + 2(0,0,1,0) + 1(0,0,0,1)$$

$$(0,0,-1,4) = 0(1,0,0,0) + 0(0,1,0,0) - 1(0,0,1,0) + 4(0,0,0,1)$$

$$(0,0,0,1) = 0(1,0,0,0) + 0(0,1,0,0) + 0(0,0,1,0) + 1(0,0,0,1)$$

Luego, observamos qué coeficiente multiplica a cada término de la base:

$$\begin{aligned}
&a_{11} = 1, a_{21} = 4, a_{31} = 5, a_{41} = 2\\
&a_{12} = 0, a_{22} = 3, a_{32} = 2, a_{42} = 1\\
&a_{13} = 0, a_{23} = 0, a_{33} = -1, a_{43} = 4\\
&a_{14} = 0, a_{24} = 0, a_{34} = 0, a_{44} = 1
\end{aligned}$$

Si queremos calcular el determinante, tenemos que considerar las $4! = 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 24$ permutaciones en S_4. Estas permutaciones son

$1234, 1243, 1423, 4123, 1324, 1342, 1432, 4132, 3124, 3142, 3412, 4312, 2134,$
$2143, 2413, 4213, 2314, 2341, 2431, 4231, 3214, 3241, 3421, 4321$

Vamos a escribir las primeras tres en la notación de la ayudantía anterior:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$
$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$
$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 \\ 1 & 4 & 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$
$$\sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 \\ 4 & 1 & 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$
$$\sigma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$
$$\sigma_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Los signos de $\sigma_1, \ldots, \sigma_6$ son, como puedes verificar, $1, -1, 1, -1, -1$ y $1,$ respectivamente.

Ahora hay que calcular qué sumando le corresponde a cada permutación.

Para σ_1:

$$\begin{aligned} &\operatorname{sign}(\sigma_1)\, a_{1\sigma_1(1)} a_{2\sigma_1(2)} a_{3\sigma_1(3)} a_{4\sigma_1(4)} \\ &= 1 \cdot a_{11} a_{22} a_{33} a_{44} \\ &= 1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot -1 \cdot 1 = -3 \end{aligned}$$

Para σ_2:

$$\begin{aligned} \operatorname{sign}(\sigma_2)\, a_{1\sigma_2(1)} a_{2\sigma_2(2)} a_{3\sigma_2(3)} a_{4\sigma_2(4)} \\ &= (-1) \cdot a_{11} a_{22} a_{34} a_{43} \\ &= (-1) \cdot 1 \cdot 3 \cdot 0 \cdot 4 = 0. \end{aligned}$$

Así le tenemos que hacer para cada uno de los sumandos! En total son 24 pues la cantidad de sumandos equivale al número de permutaciones.

Si hacen todas las cuentas con mucho cuidado para cada uno de los 24 sumandos les va a quedar que el determinante es -3:

Esto es equivalente a la definición de determinante que ya conocemos?

attachment:image.png

2. ¿Cuántos sumandos tendrá el determinante de 13 vectores en un espacio vectorial de dimensión 13 con respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^{13}$? Da el número de manera explícita.

Tendrá 13! es decir 6227020800 sumandos. Esto significa que para encontrar el determinante de una matriz de 13×13 habrá que hacer 6227020800 cuentas.

Para números más grandes podemos utilizar la aproximación de Stirling para darnos una idea de cuántas operaciones tenemos que hacer para encontrar un determinante:

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

3.

Encuentra el determinante de los vectores $(3,1)$ y $(2,4)$ con respecto a la base $((5,1),(2,3))$ de $\mathbb{R}^2$

4.

Usa un argumento de determinantes para mostrar que los vectores $(1,4,3)$,$(2,-2,9)$, $(7,8,27)$ de $\mathbb{R}^3$ no son linealmente independientes.

Hay que calcular el determinante con respecto a la base canónica, justo como lo hicimos en el ejemplo 1. (escribiendo los vectores en términos de la base canónica, checando los coeficientes, obteniendo los signos de las permutaciones y escribiendo cada uno de los 6 sumandos de cada permutación).

Ahora viene lo importante:

Si el determinante de un conjunto de vectores es DISTINTO de cero, los vectores son linealmente independientes.

Haciendo la talacha vamos a encontrar que los vectores $(1,4,3)$,$(2,-2,9)$, $(7,8,27)$ da un determinante igual a cero.

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & -2 & 9 \\ 7 & 8 & 27 \end{pmatrix} = 0$$

Por lo tanto ese conjunto de vectores NO son linealmente independientes.

5. Calcula por definición el determinante de la matriz

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

sea la matriz de 2×2

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Para calcular el determinante de A, primero listemos todas las posibles permutaciónes de los índices S_2

$$\text{id } = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

La permutación id tiene signo de 1 y la otra permutación σ tiene signo -1.

Aplicando la definición del determinante de una matriz,

$$\det(A) = \sum_{\pi \in \mathcal{S}_0} \text{sign}(\pi) a_{1,\pi(1)} a_{2,\pi(2)} \cdots a_{n,\pi(n)}$$

Vemos que el determinante es:

$$\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Entonces sólo tenemos que sustituir $a_{11} = 3, a_{12} = 2, a_{21} = 4, a_{22} = 1$

Por lo tanto el determinante es -5.

6. Calcula por definición el determinante de la matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \end{pmatrix}$$

y compáralo con el determinante de:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 16 \end{pmatrix}$$

Al igual que el ejercicio anterior, la definición nos dice que hay que listar todas las posibles permutaciones de S_3 y aplicar la definición:

$$\det(A) = \sum_{\pi \in \mathcal{S}_0} \text{sign}(\pi) a_{1,\pi(1)} a_{2,\pi(2)} \cdots a_{n,\pi(n)}$$

$$D = -a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{31}a_{23} + a_{22}a_{11}a_{33} - a_{22}a_{31}a_{13} - a_{32}a_{11}a_{23} + a_{32}a_{21}a_{13}$$

Entonces, el determinante será 2.