Ayud_12_01_21

January 13, 2021

1 Ejercicios de las entradas 5 y 6

1. Uno parecido a la tarea moral: Demuestra que si una matriz tiene dos renglones iguales, entonces su determinante es cero.

Supongamos que tenemos una matriz A de $n \times n$:

$$A = \begin{bmatrix} \mathrm{a}_{11} & \mathrm{a}_{12} & \mathrm{a}_{13} & \dots & \mathrm{a}_{1n} \\ \mathrm{a}_{21} & \mathrm{a}_{22} & \dots & \dots & \mathrm{a}_{2n} \\ \mathrm{a}_{i1} & \dots & \dots & \dots & \mathrm{a}_{\mathrm{in}} \\ \mathrm{a}_{n1} & \dots & \dots & \dots & \mathrm{a}_{nn} \end{bmatrix}$$

Si proponemos que $r_i = [a_{i1}, a_{i2}, a_{i3} \dots a_{in}]$ sea un vector fila, entonces podemos reescribir nuestra matriz A como:

$$A = \begin{bmatrix} \mathrm{r}_1 \\ \mathrm{r}_2 \\ \dots \\ \mathrm{r}_i \\ \dots \\ \mathrm{r}_j \\ \dots \\ \mathrm{r}_n \end{bmatrix}$$

Ahora, recordemos que el determinante es una transformación multilineal alternante. Y recordando la definición de transformación multilineal alternante nos dice que:

Definición. Decimos que T es alternante si $T\left(v_1, \dots, v_d\right) = 0$ cuando hay dos v_i que sean iguales.

Es decir, obtener el determinante de A es lo mismo que aplicar una transformación multilineal alternante al conjunto:

$$\begin{bmatrix} \mathrm{r}_1 \\ \mathrm{r}_2 \\ \dots \\ \mathrm{r}_i \\ \dots \\ \mathrm{r}_j \\ \dots \\ \mathrm{r}_n \end{bmatrix}$$

Y por hipótesis del problema, este vector columna tiene dos filas que son iguales (i.e. $r_i = r_j$)

Por lo tanto,

$$A = \begin{bmatrix} \mathrm{r}_1 \\ \mathrm{r}_2 \\ \dots \\ \mathrm{r}_i \\ \dots \\ \mathrm{r}_i \\ \dots \\ \mathrm{r}_n \end{bmatrix}$$

Y en conclusión

$$det(A) = det \begin{bmatrix} \mathrm{r}_1 \\ \mathrm{r}_2 \\ \dots \\ \mathrm{r}_i \\ \dots \\ \mathrm{r}_i \\ \dots \\ \mathrm{r}_n \end{bmatrix} = 0$$

Para demostrar que lo mismo ocurre si tienen dos columnas iguales, se sigue el mismo procedimiento pero en lugar de definir la matriz como un vector columna, hay que definirla como un vector fila.

Observación: con un razonamiento muy similar se puede demostrar que siempre que haya dos columnas o dos filas que sean linealmente dependientes, el determinante se hará cero. Sólo es cuestión de agregar un escalar a una de las entradas de la trasnformación multilineal alternante y ocupar la propiedad de que el determinante es multilineal.

Segunda Observación: lo anterior también se puede concluir a partir de este ejercicio de el primer punto del primer teorema de la quinta entrada del blog.

2. Calcular el siguiente determinante:

$$A := \begin{bmatrix} -8 & -13 & 15 & -16 & 6 & -16 & -13 \\ 4 & 7 & -6 & 7 & -2 & 8 & 7 \\ -50 & -60 & 74 & -77 & 29 & -100 & -60 \\ -82 & -98 & 118 & -125 & 47 & -164 & -98 \\ 4 & 7 & -6 & 7 & -2 & 8 & 7 \\ -56 & -66 & 80 & -86 & 32 & -112 & -66 \\ 48 & 59 & -70 & 75 & -28 & 96 & 59 \end{bmatrix}$$

Podemos afirmar que el determinante es cero, pues la segunda columna y la última columna son iguales.

3. Calcular el determinante de la siguiente matriz:

$$A := \begin{bmatrix} -8 & -13 & 15 & -16 & 6 & -16 & -3 \\ 4 & 7 & -6 & 7 & -2 & 8 & 1 \\ -50 & -60 & 74 & -77 & 29 & -100 & -13 \\ -82 & -98 & 118 & -125 & 47 & -164 & -21 \\ 2 & 1 & -2 & 2 & 1 & 4 & 0 \\ -56 & -66 & 80 & -86 & 32 & -112 & -14 \\ 48 & 59 & -70 & 75 & -28 & 96 & 15 \end{bmatrix}$$

¿Cuántas operaciones tendríamos que haber hecho si lo hubiéramos calculado por definición?

Notemos que la penúltima columna es linealmente de la primera columna. Es decir $2c_1 = c_6$. Por lo que comentamos en el ejercicion anterior, podemos concluir que el determinante de A es igual a cero.

$$det(A) = 0$$

En cuanto al número de operaciones que nos ahorramos recordemos que platicamos que cuando calculamos el determinante por definición se tiene que hacer una suma donde cada sumando está asociado a una de las posibles permutaciones de los índices que corresponden a cada una de las entradas de la transformación multilineal. Y por cada sumando se tienen que hacer n multiplicaciones. Entonces, la cantidad de operaciones es $n \cdot n!$ y como en nuestro caso $n = 7$ nos ahorramos $7 \cdot 7!$ operaciones.

4. Supongamos que tenemos las siguiente matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -7 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & -4 \\ -5 & -8 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 8 \\ 9 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 3 & 4 & 1 \\ 9 & 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 25 & 3 & 8 \\ 9 & 4 & 2 & 6 \\ 6 & 4 & 4 & 1 \\ 13 & 6 & 2 & 12 \end{pmatrix}$$

y alguien nos hizo el favor de calcular el determinante de estas matrices por definición (la de las permutaciones). Esta persona nos dice que los determinantes son $det(A) = 20$, $det(B) = 559$ y $det(C) = -1126$.

A nosotros nos toca calcular sólo un determinante, el determinante de la matriz:

$$D = \begin{pmatrix} 22 & -555 & -77 & -108 \\ 98 & -161 & 5 & 31 \\ -1815 & -2217 & -599 & -1713 \\ 228 & -93 & 41 & 133 \end{pmatrix}$$

Calcule ese determinante.

No es tan fácil notar lo siguiente, pero wolfram nos puede ayudar. Resulta que la matriz D es igual a la multiplicación de las tres matrices A, B y C.

$$D = \begin{pmatrix} 5 & -7 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & -4 \\ -5 & -8 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 0 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 8 \\ 9 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 3 & 4 & 1 \\ 9 & 6 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 25 & 3 & 8 \\ 9 & 4 & 2 & 6 \\ 6 & 4 & 4 & 1 \\ 13 & 6 & 2 & 12 \end{pmatrix}$$

Entonces, $D = ABC$. En el blog demostramos que \$ $\det(AB) = \det A \cdot \det B\$. Sin embargo, podemos irms all de esa propiedad y generalizarlo como:$

$$\det(\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 \cdots \mathbf{A}_n) = \det(\mathbf{A}_1)\det(\mathbf{A}_2)\cdots\det(\mathbf{A}_n)$$

Por lo tanto, no tenemos que hacer ningún cálculo complicado, sólo tenemos que hacer:

$$det(D) = det(ABC) = det(A)det(B)det(C) = 20 \cdot 559 \cdot -1126 = -12924080$$

5. Determinar si la siguiente matriz es una matriz invertible. No hay necesidad de calcular el determinante, nos lo da el problema.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$det(A) = 16$$

Recordatorio:

attachment:image.png

En el blog se demuestra que si una matriz tiene un determinante que NO es cero, la matriz es invertible. Entonces esa matriz es invertible.

6. Obtenga el determinante de la siguiente matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

Sabiendo que el determinante de la matriz:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

es $det(B) = 0$

Nos damos cuenta que $B = A^t$. En el blog vimos que $det(A) = det(A^t) = det(B)$

Solicitado:

> Encuentra el determinante de los vectores $(3, 1)$ y $(2, 4)$ con respecto a la base $((5, 1), (2, 3))$ de $\mathbb{R}^2$.

Primero expresamos los vectores en términos de la base:

$$(3, 1) = \alpha(5, 1) + \beta(2, 3)$$

$$(3, 1) = (5\alpha, \alpha) + (2\beta, 3\beta)$$

$$(3, 1) = (5\alpha + 2\beta, \alpha + 3\beta)$$

$$5\alpha + 2\beta = 3\alpha + 3\beta = 1$$

$$(2, 4) = x(5, 1) + y(2, 3)$$

$$(3,1) = \frac{7}{13}(5,1) + \frac{2}{13}(2,3)$$

$$(2,4) = -\frac{2}{13}(5,1) + \frac{18}{13}(2,3)$$

Luego, observamos qué coeficiente multiplica a cada término de la base:

$$\begin{array}{l} a_{11} = \frac{7}{13}, a_{21} = \frac{2}{13}, \\ a_{12} = -\frac{2}{13}, a_{22} = \frac{18}{13}, \end{array}$$

Luego, consideramos las dos posibles permutaciones:

$$\text{id } = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

La permutación id tiene signo de 1 y la otra permutación σ tiene signo -1.

Aplicando la definición del determinante de una matriz,

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_0} \operatorname{sign}(\sigma) a_{1,\pi(1)} a_{2,\sigma(2)} \cdots a_{n,\sigma(n)}$$

Vemos que el determinante es:

$$\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Entonces sólo tenemos que sustituir $a_{11} = \frac{7}{13}, a_{12} = -\frac{2}{13}, a_{21} = \frac{2}{13}, a_{22} = \frac{18}{13}$.

El determinante es $\frac{126}{13^2} - (-\frac{4}{13^2})$

[ ]: