Ayud_28_01_21

January 29, 2021

1. Considere la siguiente matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

a) Encuentre los eigenvalores de la matriz A.

b) Encuente cada uno de los eigenvectores de cada eigenvalor de A.

c) Diagonalice la matriz A.

d) Diagonalice la matriz $A^3 - 5A^2 + 3A + I$.

e) Calcule A^{100}.

f) Calcule

$$\left(A^3 - 5A^2 + 3A + I\right)^{100}$$

a)

$$\begin{aligned} p(t) = \det(A - tI) &= \begin{vmatrix} 1-t & 2 \\ 4 & 3-t \end{vmatrix} \\ &= (1-t)(3-t) - 8 = t^2 - 4t - 5 = (t+1)(t-5) \end{aligned}$$

Los eigenvalores son -1 y 5.

b)

Para el primer eigenvalor:

$$A + I = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{then } \frac{1}{2}R_1]{R_2 - 2R_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Resolvemos el sistema:

$$(A - 5I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

Obtenemos el eigenvector:

$$a \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

De igual forma para el segundo eigenvalor:

$$A - 5I = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{then } \frac{-1}{4}R_1]{R_2+R_1} \begin{bmatrix} 1 & -1/2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Resolvemos el sistema:

$$(A + I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

Obtenemos el eigenvector:

$$a \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

c) Diagonalizamos la matriz:

$$S = \begin{bmatrix} \mathbf{u} & \mathbf{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Calculamos la matriz diagonal:

$$S^{-1}AS = D$$

$$D = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

d) Diagonalizamos la matriz:

En al parte c) obtuvimos que

$$S^{-1}AS = D$$

con:

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \text{ y } D = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Como $A = SDS^{-1}$, entonces:

$$\begin{aligned} A^2 &= AA = SDS^{-1} \cdot SDS^{-1} = SD^2S^{-1} \\ A^3 &= A^2A = SD^2S^{-1} \cdot SDS^{-1} = SD^3S^{-1} \end{aligned}$$

De esta forma:

$$\begin{aligned} A^3 - 5A^2 + 3A + I &= SD^3S^{-1} - 5SD^2S^{-1} + 3SDS^{-1} + I \\ &= S\left(D^3 - 5D^2 + 3D + I\right)S^{-1}. \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$
\begin{aligned}
&S^{-1}\left(A^3-5A^2+3A+I\right)S\\
&=D^3-5D^2+3D+I\\
&=\begin{bmatrix} (-1)^3 & 0\\ 0 & 5^3 \end{bmatrix} - 5\begin{bmatrix} (-1)^2 & 0\\ 0 & 5^2 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} -1 & 0\\ 0 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1 \end{bmatrix}\\
&=\begin{bmatrix} -8 & 0\\ 0 & 16 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

e) Calcule A^{100}:

Utilizando el agurmento de d) (se puede pensar como inducción matemática).

$$A^{100} = SD^{100}S^{-1}$$

Entonces,

$$
\begin{aligned}
A^{100} &= SD^{100}S^{-1}\\
&= \begin{bmatrix} 1 & 1\\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0\\ 0 & 5 \end{bmatrix}^{100} \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1\\ 1 & 1 \end{bmatrix}\\
&= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1\\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (-1)^{100} & 0\\ 0 & 5^{100} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1\\ 1 & 1 \end{bmatrix}\\
&= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2+5^{100} & -1+5^{100}\\ -2+2\cdot 5^{100} & 1+2\cdot 5^{100} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

f) Ahora, calcule $(A^3-5A^2+3A+I)^{100}$:

Hagamos:

$$B := A^3-5A^2+3A+I$$

Por un resultado anterior:

$$S^{-1}BS = \begin{bmatrix} -8 & 0\\ 0 & 16 \end{bmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
B^{100} &= S\begin{bmatrix} -8 & 0\\ 0 & 16 \end{bmatrix}^{100} S^{-1}\\
&= S\begin{bmatrix} (-8)^{100} & 0\\ 0 & 16^{100} \end{bmatrix} S^{-1}\\
&= S\begin{bmatrix} 2^{300} & 0\\ 0 & 2^{400} \end{bmatrix} S^{-1}\\
&= S\begin{bmatrix} w^3 & 0\\ 0 & w^4 \end{bmatrix} S^{-1}
\end{aligned}
$$

En el último paso definimos $w = 2^{100}$.

$$
\begin{aligned}
B^{100} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w^3 & 0 \\ 0 & w^4 \end{bmatrix} \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \frac{w^3}{3} \begin{bmatrix} 2+w & -1+w \\ -2+2w & 1-2w \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Con esto terminamos el ejercicio.

2.

attachment:image.png

Otra vez!

Considere el siguiente sismtema:

$$
\begin{cases}
3x_1 + 5x_2 = 9 \\
2x_1 - \frac{1}{3}x_2 = -5 \\
-x_1 \quad = \quad 2
\end{cases}
$$

La pregunta es: ¿Es este sistema consistente?¿Cuántas soluciones admite?

Tenemos que calcular el rango de la matriz asociada al sistema y de la matriz extendida:

$$
A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & -\frac{1}{3} \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad [A \mid \mathbf{b}] = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 9 \\ 2 & -\frac{1}{3} & -5 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}
$$

Observemos que:

$$
\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & -\frac{1}{3} \end{vmatrix} \neq 0
$$

Notemos que A es una matriz de 3×2. Entonces, el valor máximo que puede tomar su rango es el mínimo entre estos dos números. Ahora, calculamos la submatriz cuadrada que aparece arriba y vemos que su determinante es distinto de cero. Con esto podemos concluir que el rango de A tiene que ser 2.

Por lo tanto: $rank(A) = 2$.

Para la matriz extendida, notemos lo siguiente:

$$
\text{rank}(A) \leq \text{rank}(A \mid b)
$$

Repitiendo el argumento de arriba, el rango de la matriz extendida puede ser máximo 3.

Pero si calculamos la submatriz de 3×3 en esta caso la única submatriz de esas dimensiones:

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 9 \\ 2 & -\frac{1}{3} & -5 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \ldots = 0$$

Por lo tanto, $\text{rank}(A \mid b) = 2$.

Como:

$$\text{rank}(A) = \text{rank}(A \mid b)$$

Obteniendo los grados de libertad del sistema:

attachment:image.png

Como los grados de libertad del sistema son 0 la solución es única.