Ayud_14_01_21

January 20, 2021

0.1 Ejercicios de las entradas 7 y 8

1. Demuestre que la fórmula para el determinante de una matriz de 3×3 obtenida con fórmula de Leibniz del determinante es igual a la que se obtiene con el teorema de expansión de Laplace.

Primero, calculemos el determinante por definición de la matriz:

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Para calcular el determinante de A, primero listemos todas las posibles permutaciónes de los índices S_3. Recordemos que son 6 usando la fórmula para la cantidad de permutaciones.

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \\
\sigma_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \\
\sigma_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \\
\sigma_4 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \\
\sigma_5 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\
\sigma_6 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Los signos de $\sigma_1, \ldots, \sigma_6$ son, como puedes verificar, $1, -1, -1, 1, 1$ y -1, respectivamente.

Luego, aplicamos la fórmula de Leibniz del determinante:

$$\sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)}$$

Entonces, obtendremos cada uno de los sumandos.

Para σ_1:

$$\begin{aligned}&\operatorname{sign}(\sigma_1)\, a_{1\sigma_1(1)}a_{2\sigma_1(2)}a_{3\sigma_1(3)}\\ &= 1 \cdot a_{11}a_{22}a_{33}\end{aligned}$$

Para σ_2:

$$\begin{multlined}\operatorname{sign}(\sigma_2)\, a_{1\sigma_2(1)}a_{2\sigma_2(2)}a_{3\sigma_2(3)}\\ = (-1) \cdot a_{11}a_{23}a_{32}\end{multlined}$$

Para σ_3:

$$\operatorname{sign}(\sigma_3)\, a_{1\sigma_3(1)}a_{2\sigma_3(2)}a_{3\sigma_3(3)} = (-1) \cdot a_{12}a_{21}a_{33}$$

Para σ_4:

$$\operatorname{sign}(\sigma_4)\, a_{1\sigma_4(1)}a_{2\sigma_4(2)}a_{3\sigma_4(3)}$$

Para σ_5:

$$\operatorname{sign}(\sigma_5)\, a_{1\sigma_5(1)}a_{2\sigma_5(2)}a_{3\sigma_5(3)}$$

Para σ_6:

$$\operatorname{sign}(\sigma_6)\, a_{1\sigma_6(1)}a_{2\sigma_6(2)}a_{3\sigma_6(3)}$$

Así le tenemos que hacer para cada uno de los cuatro sumandos restantes.

Ahora, sólo sumamos lo que obtuvimos y nos damos cuenta que llegamos a que el determinante de una matriz cuadrada de 3×3 es:

$$\begin{aligned}&= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}\\ &- a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}\end{aligned}$$

Ahora, calculémoslo con la expansión por cofactores (teorema de expansión de Laplace):

attachment:image.png

Ahora, calculamos los determinantes:

$$\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Y sólo tenemos que sustituir los determinantes en la fórmula que obtuvimos arriba para concluir que el determinante calculado por expansión de cofactores es:

$$\begin{gathered} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \end{gathered}$$

Lo mismo que obtuvimos calculándolo por la definición de Leibniz.

2. Calular el determinante de la siguiente matriz por cofactores:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -3 & -1 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

attachment:image.png

3. Encuentre qué valores de x hacen que la siguiente matriz de 4×4 sea singular:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -x & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -x \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & -x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -x & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -x \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -x & 0 \\ 0 & 1 & -x \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} -x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -x \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} -x & 0 & 0 \\ 1 & -x & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} -x & 0 & 0 \\ 1 & -x & 0 \\ 0 & 1 & -x \end{vmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
&= \begin{vmatrix} 1 & -x & 0 \\ 0 & 1 & -x \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & -x \\ 0 & -1 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} -x & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -x & 0 \\ 1 & -x \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto el determinante es $det(A) = -1 + x^2$.

Vimos la ayudantía pasada que una matriz es singular (i.e. es NO invertible) cuando su determinante es igual a cero.

Entonces, igualando el determinante a cero:

$$det(A) = 0 - 1 + x^2 = 0$$

Podemos concluir que la matriz es singular sólo cuando $x = \pm 1$

4. Calcular el determinante de la siguiente matriz (idealmente con el menor número de operaciones):

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 7 & 1 & -5 \\ -3 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & -4 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Si hacemos una expansión por cofactores sobre la primera fila, sólo tenemos que calcular dos determinante. Pero observen que si lo hacemos sobre la tercera fila sólo tendríamos que calcular dos, porque la tercera fila tiene dos ceros.

Primero, notemos que el algoritmo de expansión por cofactores nos sugiere lo siguiente:

Para las matrices cuadradas de 4×4 los signos de los cofactores están distribuidos de esta manera:

attachment:image.png

Luego, sólo expandimos por cofactores sobre esa fila, teniendo cuidado con los signos:

attachment:image.png

Podemos ver que sólo tenemos que calcular dos determinantes de 3×3

El primero lo exapandiremos por su tercera columna:

attachment:image.png

El segundo lo vamos a expandir por su primera fila:

attachment:image.png

Por lo tanto el determinante de nuestra matriz será:

$$\begin{aligned} \det A &= a_{31} \operatorname{cof}(a_{31}) + a_{34} \operatorname{cof}(a_{34}) \\ &= (1)(50) + (2)(48) \\ &= 146 \end{aligned}$$

5. Determine los valores de x que hacen que la siguiente matriz sea invertible:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & x \\ 1 & x & x \\ x & x & x \end{bmatrix}$$

Para esos valores, encuentre la inversa A^{-1}:

Utilizamos la propiedad de que una matriz sólo es invertible si su determinante NO es cero:

$$\begin{aligned} &\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & x \\ 1 & x & x \\ x & x & x \end{vmatrix} \\ &= (1) \begin{vmatrix} x & x \\ x & x \end{vmatrix} - (1) \begin{vmatrix} 1 & x \\ x & x \end{vmatrix} + x \begin{vmatrix} 1 & x \\ x & x \end{vmatrix} \quad \text{por expansión sobre la primera fila.} \\ &= (x^2 - x^2) - (x - x^2) + x(x - x^2) \\ &= (x-1)(x-x^2) \\ &= x(x-1)^2. \end{aligned}$$

Con esto vemos que el determinante es cero, si y sólo si $x = 0, 1$

Ahora, vamos a suponer que el determinante es distinto de cero (es decir x no toma ninguno de esos dos valores):

$$[A \mid I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & x & 1 & 0 & 0 \\ 1 & x & x & 0 & 1 & 0 \\ x & x & x & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_3-xR_1]{R_2-R_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & x-1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & x-x^2 & -x & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\frac{1}{x-x^2}R_3]{\frac{1}{x-1}R_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-1}{x-1} & \frac{1}{x-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{1-x} & 0 & \frac{1}{x-x^2} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_1-R_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & x & \frac{x}{x-1} & \frac{-1}{x-1} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-1}{x-1} & \frac{1}{x-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{1-x} & 0 & \frac{1}{x-x^2} \end{array}\right] \xrightarrow{R_1-xR_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{x-1} & \frac{-x}{x-x^2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-1}{x-1} & \frac{1}{x-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{1-x} & 0 & \frac{1}{x-x^2} \end{array}\right].$$

Por lo tanto, podemos concluir que la matriz inversa es la siguiente matriz:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-1}{x-1} & \frac{-x}{x-x^2} \\ \frac{-1}{x-1} & \frac{1}{x-1} & 0 \\ \frac{-1}{1-x} & 0 & \frac{1}{x-x^2} \end{bmatrix} = \frac{1}{x(1-x)} \begin{bmatrix} 0 & x & -x \\ x & -x & 0 \\ -x & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

6. Calcule el determinante de la siguiente matriz:

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 & 6 \\ 0 & 3 & 5 & -8 \\ 0 & 0 & 6 & -16 \\ 0 & 0 & 0 & -12 \end{bmatrix}$$

El determinante es la multiplicación de los elementos de la diagonal, es decir el determinante es $1 \cdot 3 \cdot 6 \cdot -12$.

7. Utilice eliminación gaussiana para encontrar el determinante de la siguiente matriz:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 5 & 8 \end{bmatrix}$$

Hacemos fila 3 menos fila 1 y fila 4 menos dos veces fila 1:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & -4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

Ahora, hacemos fila 4 menos 4 veces fila 2:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 22 \end{bmatrix}$$

Cambiar filas no es una operacion elemental: pero se cumple una propiedad importante, cuando hacen un cambio de fila (o columna) el determinante se multiplica por -1

Entonces, el determinante es

$$1 \cdot (-1) \cdot 1 \cdot (-3) = 3$$

```
[ ]:
```