[Mencionar con el índice abierto]

Comentario inicial: el primer capítulo del libro de Javier Bracho tiene 12 secciones. Cada ayudante va a estar con ustedes más o menos un mes (8 ayudantías). Nosotros ocupamos 2 ayudantías para repasar trigonometría, entonces para que estemos al corriente, tenemos que revisar dos subsecciones por ayudantía.

Ayudantía 1: la geometría griega y puntos y parejas de números. [Páginas 1-7]

Los cinco postulados de Euclides son los siguientes:

I Por cualesquiera dos puntos, se puede trazar el segmento de recta que los une.

II Dados un punto y una distancia, se puede trazar el círculo con centro en el punto y cuyo radio es la distancia.

III Un segmento de recta se puede extender en ambas direcciones indefinidamente.

IV Todos los ángulos rectos son iguales.

V Dadas dos rectas y una tercera que las corta, si los ángulos internos de un lado suman menos de dos ángulos rectos, entonces las dos rectas se cortan y lo hacen de ese lado.

Noten cómo no se definen qué son los punto, ni las distancias, se toman como fundamentales y se habla más bien sobre la noción intuitiva que se tiene sobre estos entes.

El más famoso de estos postulados es el quinto postulado, pues se pensó que era un teorema, pero se ha demostrado que no es así, sí es un axioma. Aunque ojo, la negación de este postulado da origen a nuevas geometrías que estudiaremos en algún otro momento.

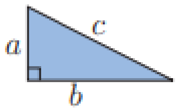
El otro gran avance de la geometría ocurrió cuando descartes introdujo el uso del álgebra para resolver problemas geométricos.

Dada la importante del quinto postulado, vamos a escribir versiones alternativas de él:

V.a (**El Quinto**) Dada una línea recta y un punto fuera de ella, existe una única recta que pasa por el punto y que es paralela a la línea.

V.b Los ángulos interiores de un triángulo suman dos ángulos rectos.

En geometría vamos a trabajar mucho con el flujo de trabajo de matemáticas: teorema-demostración. Podemos practicar un poco con el teorema de pitágoras:

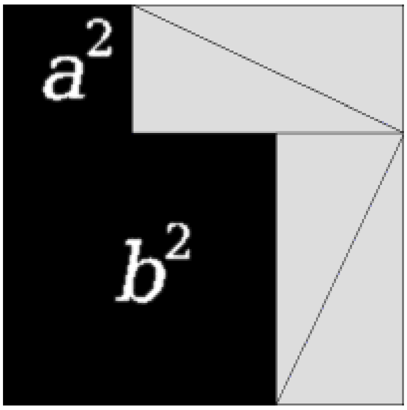


Teorema 1.1 (de Pitágoras) *Dado un triángulo rectángulo, si los lados que se encuentran en un ángulo recto (llamados* catetos*) miden* $\mathfrak{a}$ *y* $\mathfrak{b}$*, y el tercero (la* hipotenusa*) mide* $\mathfrak{c}$*, entonces*

$$\mathfrak{a}^2 + \mathfrak{b}^2 = \mathfrak{c}^2.$$

Demostración:

```
from IPython.display import Image
Image(url='https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/6/65/Pythag_anim.gif')
```

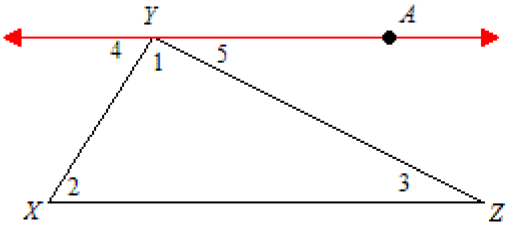


Sin pérdida de generalidad, consideramos un triángulo rectángulo con catetos a y b, e hipotenusa c. Consideremos cuatro copias idénticas de este triángulo y acomodémoslos de tal forma que se forme un cuadrado. Este cuadrado tiene un "hueco" que en realidad es otro cuadrado de área c^2. Si reacomodamos los triángulos, podemos ver que dentro del mismo cuadrado ahora el "hueco" consiste en dos cuadrados: uno de área a^2 y otro de área b^2. Como los huecos son los mismos entonces $a^2 + b^2$ es igual a c^2; lo cual es el teorema de pitágoras.

Vamos a hacer algunas pruebas usando los axiomas de euclides.

1. Probar la siguiente proposición:

Los ángulos internos de cualquier triángulo suman 180^{o}



Statements	**Reasons**
Construct a line parallel to $\overline{XZ}$ through point Y. Call this line $\overleftrightarrow{AY}$	Construction
$m\angle 1 + m\angle 5 = m\angle AYX$	Angle Addition Postulate
$m\angle AYX + m\angle 4 = 180^\circ$	Linear Pair Postulate
$m\angle 1 + m\angle 5 + m\angle 4 = 180^\circ$	Substitution
$\angle 2 \cong \angle 4$ $\angle 3 \cong \angle 5$	Alternate Interior Angles Theorem
$m\angle 2 = m\angle 4$ $m\angle 3 = m\angle 5$	Definition of Congruence
$m\angle 1 + m\angle 3 + m\angle 2 = 180^\circ$	Substitution

+ Código + Texto

Se construye una línea paralela a $\overline{XZ}$ a través del punto Y y llamamos a esa línea $\overleftrightarrow{AY}$. Observamos que $m\angle 1 + m\angle 5 = m\angle AYX$ por adición de ángulos. Vemos que $m\angle AYX + m\angle 4 = 180^\circ$ por ser ángulos complementarios. Luego por sustitución vemos que $m\angle 1 + m\angle 5 + m\angle 4 = 180^\circ$. Utilizando la propiedad de alternos internos, observamos que:

$$\angle 2 \cong \angle 4$$
$$\angle 3 \cong \angle 5$$

Luego por definición de congruencia:

$$m\angle 2 = m\angle 4$$
$$m\angle 3 = m\angle 5$$

Concluimos por sustitución que:

$$m\angle 1 + m\angle 3 + m\angle 2 = 180^\circ.$$

2.

***EJERCICIO 1.1** Demuestra la equivalencia de **V**, **V.a** y **V.b**. Aunque no muy formalmente (como en nuestra demostración del Teorema de Pitágoras), convencerse con dibujos de que tienen todo que ver entre ellos.

Sólo vamos a bosquejar la idea de la equivalencia entre el V y $V.a$.

El conjunto de números reales se representa como $\mathbb{R}$ y geométricamente representa una recta continua que contiene a todos los números reales (la recta numérica).

Ver recta numérica en GeoGebra.

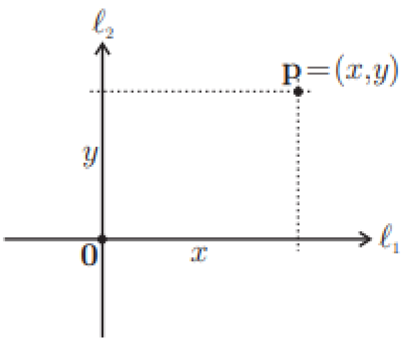
3. Ubicar los siguientes números reales en la recta numérica 12, -33, π, e, 0.00000005, 6.022×10^{23}. ¿La recta tiene discontinuidades? ¿Cuántos elementos tiene la récta numérica? ¿Puedes ubicar al número $\sqrt{-1}$ en la recta numérica?

El plano cartesiano lo podemos ver como el producto cartesiano de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, entonces nos quedamos con un conjunto de puntos que los podemos entender de la siguiente manera:

Un punto en el plano.

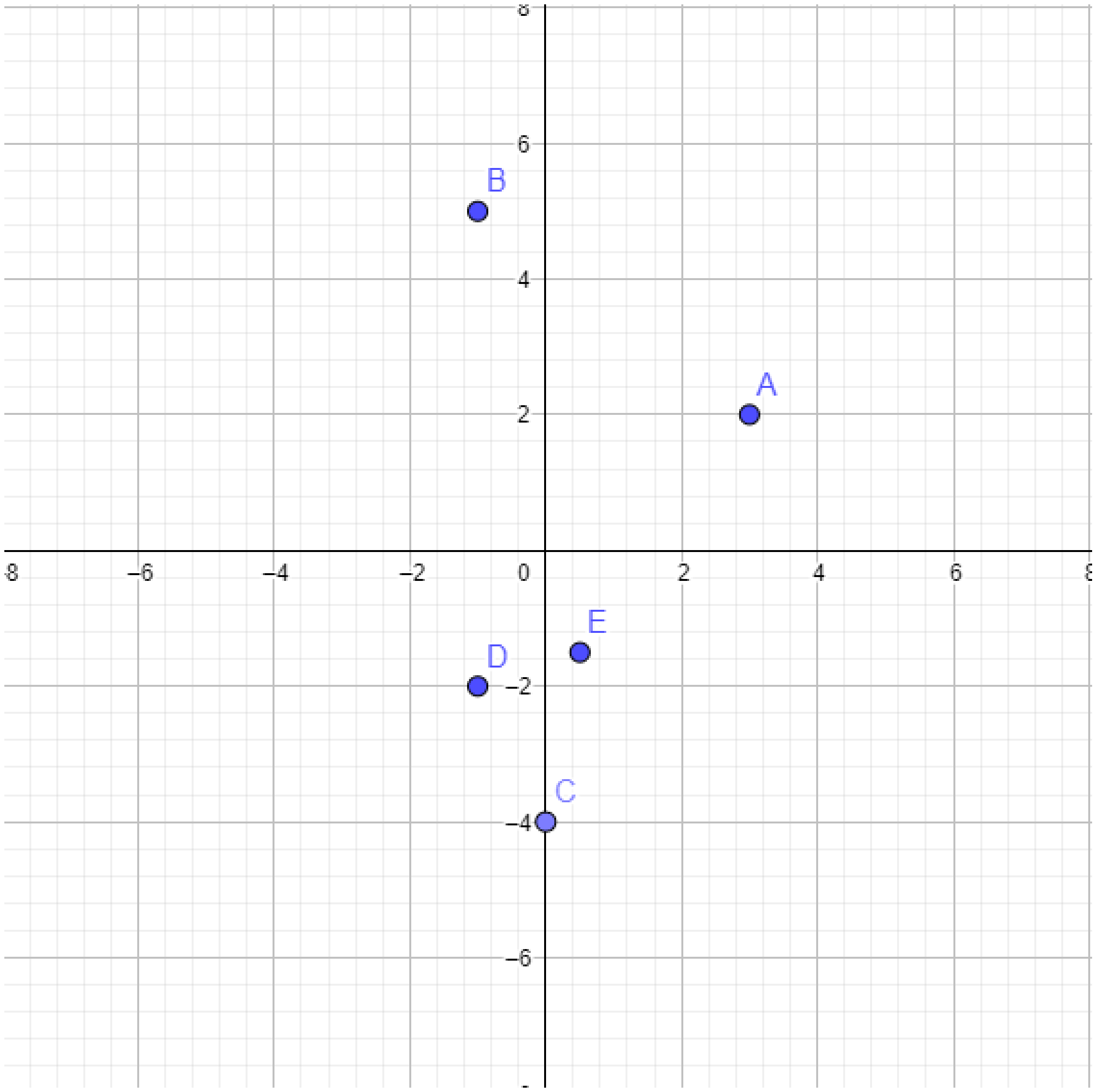
Una pareja ordenada de números reales.

Un vector que va del origen al punto.

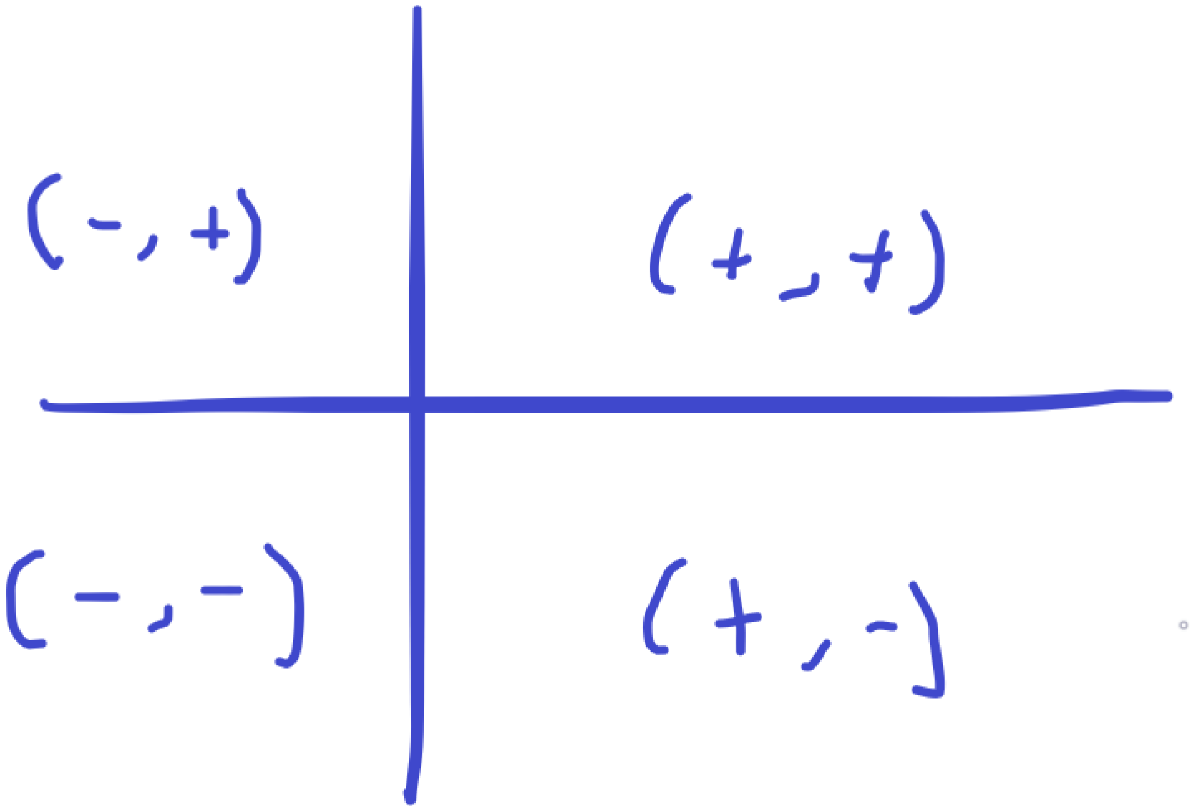


En el libro que vamos a usar las palabras punto y vector son equivalentes, pero tienen diferentes connotaciones. Mientras que un punto es pensado como un lugar (una posición) en el espacio, un vector es pensado como un segmento de línea dirigido de un punto a otro.

4. Encuentra diferentes puntos en el plano dados por sus coordenadas (por ejemplo, el $A(3,2)$, el $B(-1,5)$, el $B(0,-4)$, el $D(-1,-2)$, el $E(1/2,-3/2)$).

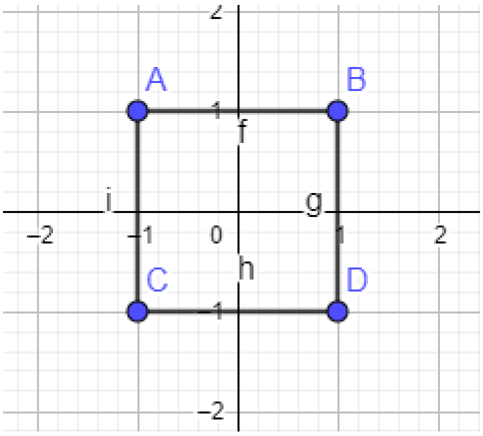


5. Identifica los cuadrantes donde las parejas tienen signos determinados.



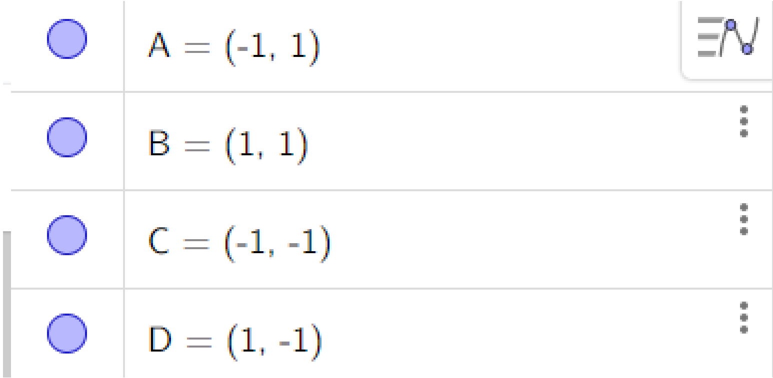
6. ¿Cúales son las coordenadas de los vértices de un cuadrado de lado 2 , centrado en el origen y con lados paralelos a los ejes?

Dibujamos el cuadrado:



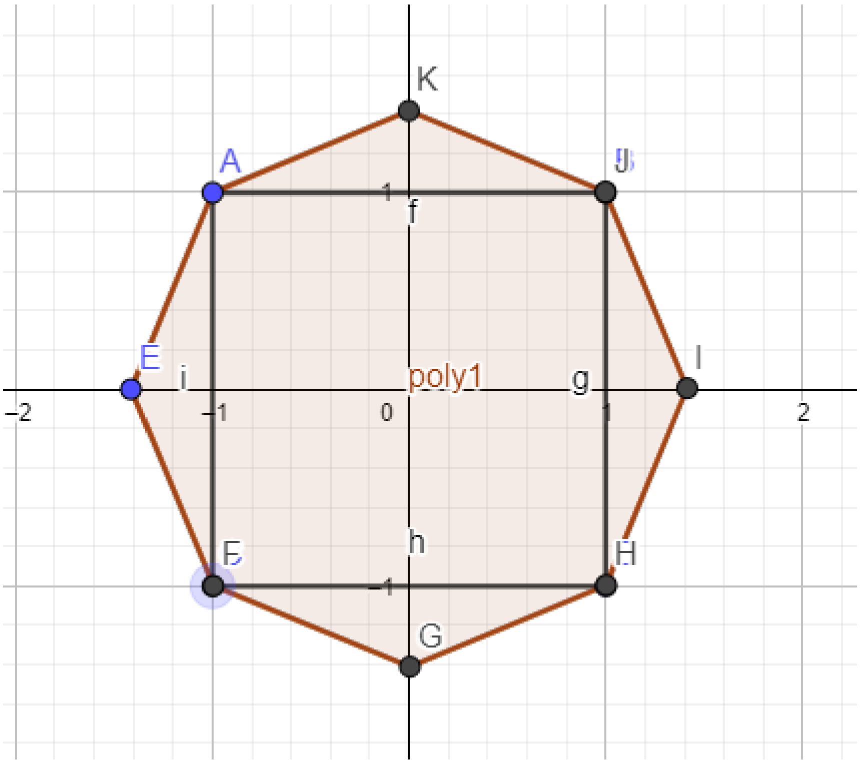
Vemos que cumple todas las condiciones del problema, pues está centrado en el origen y sus lados miden 2.

Sólo nos falta obtener las coordenadas de sus vértices:

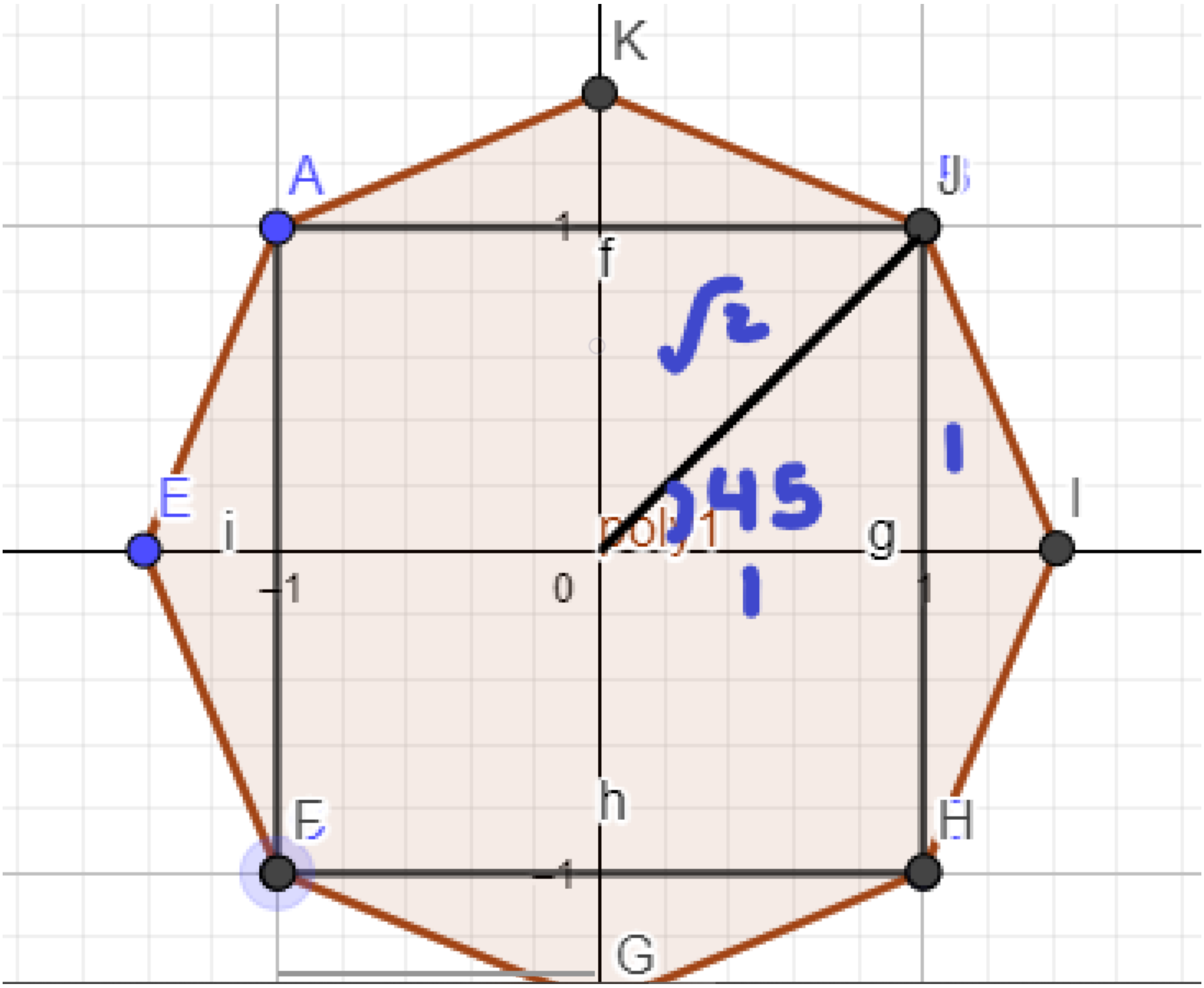


7. ¿Cúales son las coordenadas de los vértices del octágono regular que incluye como vértices a los del cuadrado anterior? (Tienes que usar el Teorema de Pitágoras.)

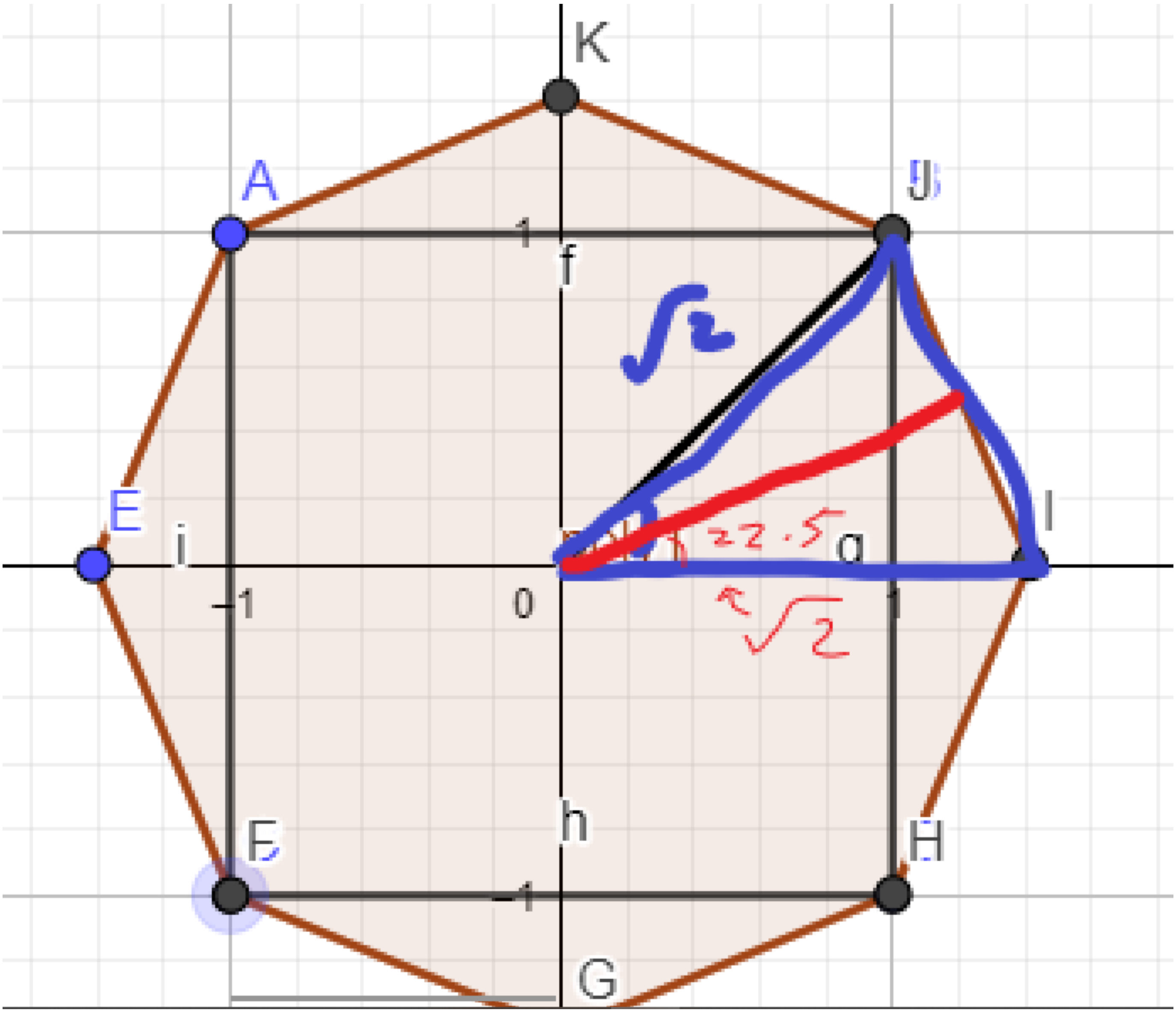
Dibujamos nuestro octágono regular:



Aplicando una vez el teorema de pitágoras podemos ver que el segmento que va del centro a uno de los vértices del cuadrado mide $\sqrt{2}$.

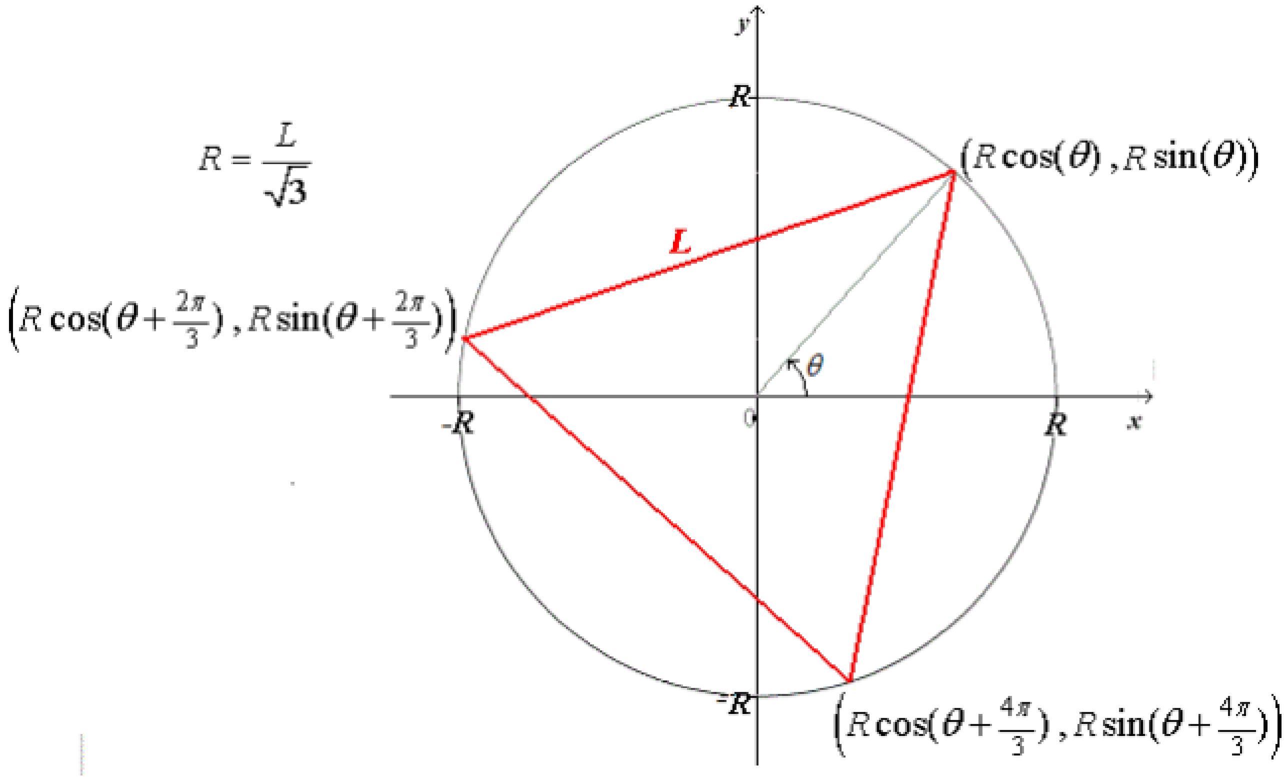


Notemos que se dibujó un triángulo isosceles entonces el punto I está alejado $\sqrt{2}$ del centro del plano.



Por simetría, se cumple que todos los puntos tienen una coordenada igual a $\sqrt{2}$ y otra igual a cero, con signos dependiendo del cuadrante.

8. ¿Puedes dar las coordenadas de los vértices de un triángulo equilátero centrado en el origen? Dibújalo.



En nuestro caso no nos dan el valor de los lados entonces podemos hacer $R = 1$ en la respuesta anterior.