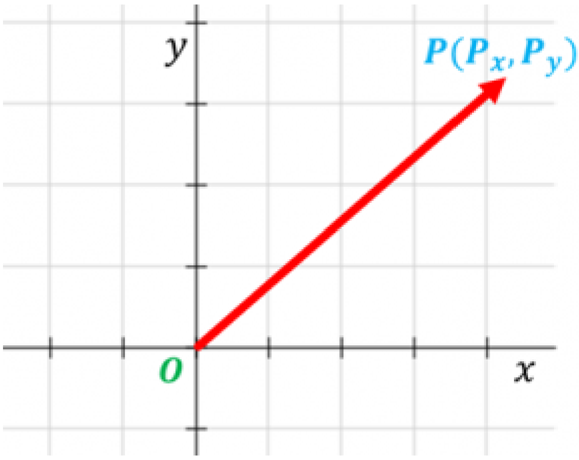
Ayudantía sobre el espacio vectorial $\mathbb{R}^2$ y sobre líneas

Un vector en el plano $\mathbb{R}^2$ o podemos interpretar geométricamente como una "flechita" direccionada. Una forma más formal de verlo es como un elemento del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$, este espacio se define como un conjunto que cumple 8 condiciones, estas condiciones se estudian a profundidad en el curso de álgebra lineal. Por el momento vamos a platicar de estos vectores en el plano como flechitas.



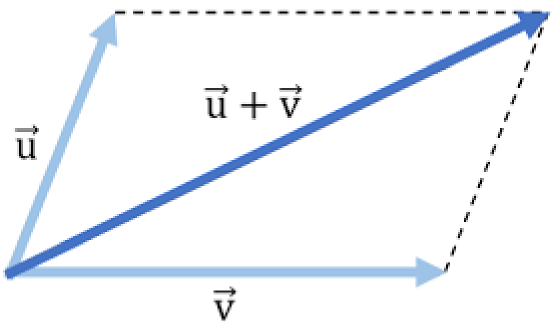
1. Grafique los vectores en el plano $(3, 2)$, $(2, 4)$, $(-4, -5)$. ¿Es lo mismo el punto $(2, 4)$ y el vector $(2, 4)$?

La suma de vectores la podemos ver algebraicamente como una suma entrada por entrada, pero tiene una interpretación geométrica bastante útile que es la ley del paralelogramo. Note que la suma y la resta de vectores son esencialmente lo mismo.

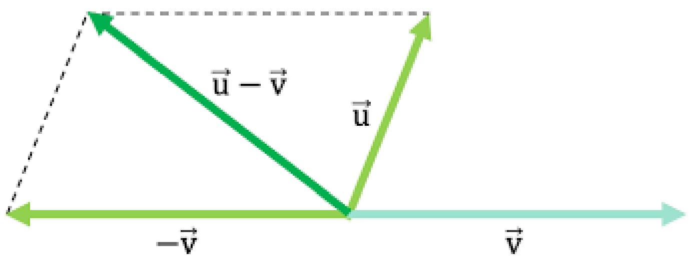
Suma de vectores: $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$

Resta de vectores: $(a, b) - (c, d) = (a - c, b - d)$

Intepretación geométrica de la suma de vectores:



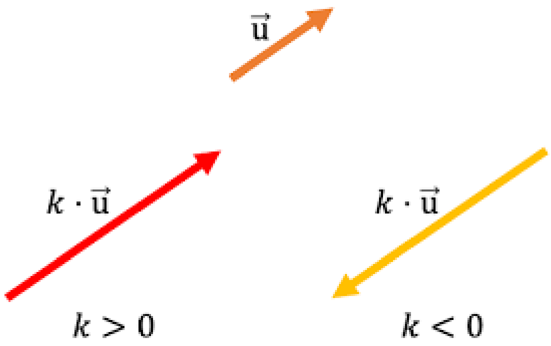
Intepretación geométrica de la resta de vectores:



La multiplicación por escalar agranda o achica el vector (o la flechita). Algebraicamente, funciona igual que la suma, entrada por entrada:

Multiplicación por escalar:

$t(a,b) = (ta, tb)$



Note que la division por un escalar es la multiplicacion por el inverso de un escalar.

2. Grafique el vector $2(3,4)$ y el vector $\frac{1}{3}(-4,5)$.

3. Sean $v_1 = (2,3), v_2 = (-1,2), v_3 = (3,-1)$ y $v_4 = (1,-4)$. Calcula y dibuja: $2v_1 - 3v_2; 2(v_3 - v_4) - v_3 + 2v_4; 2v_1 - 3v_3 + 2v_4$

$$(4,6) - (-3,6) = (7,0)$$

4. Sean $v_1 = (2,3), v_2 = (-1,2), v_3 = (3,-1)$ y $v_4 = (1,-4)$. ¿Puedes encontrar $\mathrm{r}, \mathrm{s} \in \mathbb{R}$ tales que $\mathrm{r}v_2 + \mathrm{s}\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{v}_4$?

$r(-1,2) + s(3,-1) = (1,-4)$

$$(-r, 2r) + (3s, -s) = (1,-4)$$

$$-r + 3s = 1$$
$$2r - s = -4$$

$$r = -\frac{4}{3}, \quad s = \frac{4}{3}$$

Teorema 1.2 *Para todos los vectores* $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ *y para todos los números* s, $t \in \mathbb{R}$ *se cumple que:*

$$\begin{aligned}
&\textit{i)} && (\mathbf{x}+\mathbf{y})+\mathbf{z} = \mathbf{x}+(\mathbf{y}+\mathbf{z})\\
&\textit{ii)} && \mathbf{x}+\mathbf{y} = \mathbf{y}+\mathbf{x}\\
&\textit{iii)} && \mathbf{x}+\mathbf{0} = \mathbf{x}\\
&\textit{iv)} && \mathbf{x}+(-\mathbf{x}) = \mathbf{0}\\
&\textit{v)} && s(t\,\mathbf{x}) = (st)\mathbf{x}\\
&\textit{vi)} && 1\mathbf{x} = \mathbf{x}\\
&\textit{vii)} && t\,(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = t\,\mathbf{x}+t\,\mathbf{y}\\
&\textit{viii)} && (s+t)\,\mathbf{x} = s\,\mathbf{x}+t\,\mathbf{x}
\end{aligned}$$

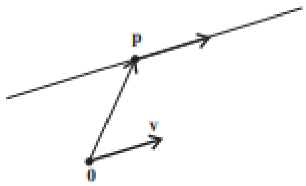
Describe el subconjunto de $\mathbb{R}^2$, o lugar geométrico, definido por $\mathcal{L}_v := \{tv \mid t \in \mathbb{R}\}$

Participación: Graficar en Geogebra el vector $2v_1 + 2_v 4$

Definición 1.4.1 Dados un punto $\mathbf{p}$ y un vector $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, la *recta que pasa por* $\mathbf{p}$ con dirección $\mathbf{v}$ es el conjunto:

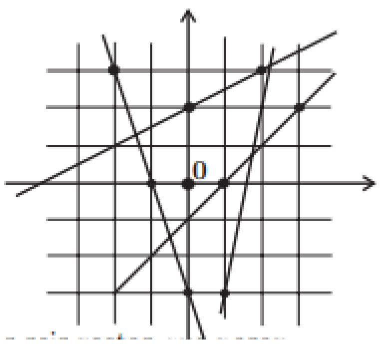
$$\ell := \{\mathbf{p} + t\,\mathbf{v} \mid t \in \mathbb{R}\}. \tag{1.1}$$

Una *recta* o *línea* en $\mathbb{R}^2$ es un subconjunto que tiene, para algún $\mathbf{p}$ y $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, la descripción anterior.



Para escribir una recta en su forma paramétrica, necesitamos un vector que vaya del origen a algún punto sobre la recta y un vector que le dé dirección. A estos vectores les vamos a llamar respectivamente p y v. No importa realmente qué número agarremos como escalar. A esta forma de expresar la recta se le conoce como forma paramétrica. La forma paramétrica, se puede pasar a la forma funcional.

5. Encuentra representaciones paramétricas de las rectas en la figura. Observa que su representación paramétrica no es única.



6. Dibuja las rectas

$$
\begin{aligned}
\{(2,3)+t(1,1) &\quad | \quad t\in\mathbb{R}\}\\
\{(-1,0)+s(2,1) &\quad |s\in\mathbb{R}\}\\
\{(0,-2)+(-r,2r) &\quad | \quad r\in\mathbb{R}\}\\
\{(t-1,-2t) &\quad |t\in\mathbb{R}\}
\end{aligned}
$$

7. Sean $\mathbf{q}_1=(2,1,2),\mathbf{q}_2=(-1,1,-1),\mathbf{q}_3=(-1,-2,-1)$.Si una partícula viaja de $2\mathbf{q}_1$ a $3\mathbf{q}_3$ en movimiento inercial y tarda cuatro unidades de tiempo en llegar. ¿Cuál es su vector velocidad?

https://www.geogebra.org/m/wKQFh2xP