# Ayudantía del 24 de junio

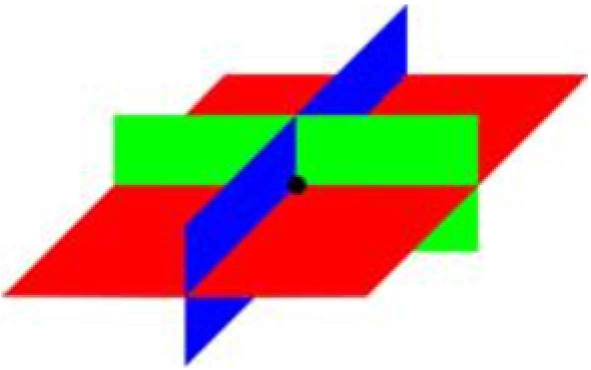
En las sesión de hoy vamos a hacer un repaso que les va a servir para tener material que puedan utilizar cuando estudien para su evaluación. Vamos a hacer ejercicios similares a los de la tarea. MUCHO OJO: no son los ejercicios de la tarea, pero lo que vamos a ver les va a servir para hacerla.

# Cómo resolver sistemas de 3 ecuaciones?

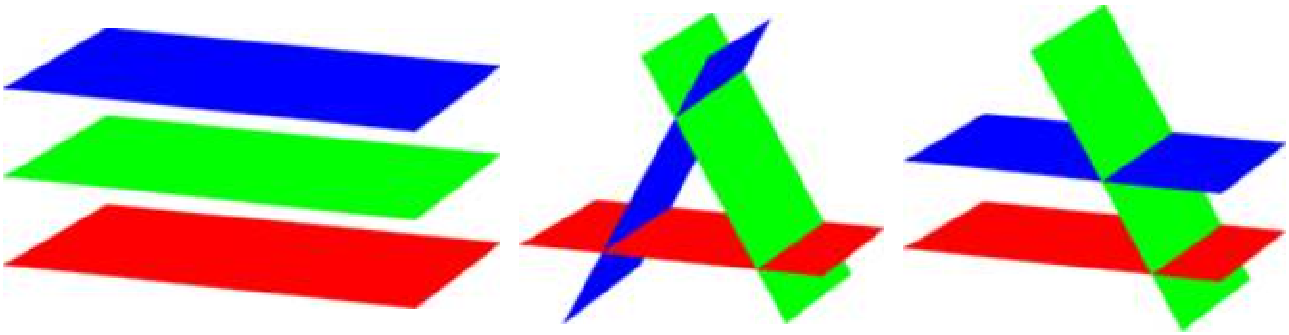
Cuando lleven álgebra lineal aprenderán sobre el uso de matrices para resolver este problema. Recordemos de la sesión anterior que una ecuación del tipo $ax + by + cz + d = 0$ representa un plano en $\mathbb{R}^3$.

Cuando intentemos resovler un sistema de tres ecuaciones, existen tres posibilidades:

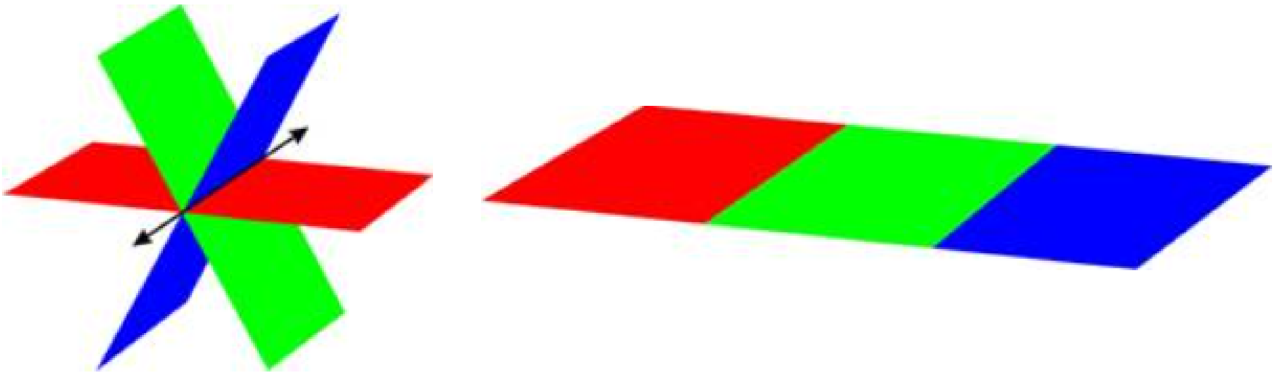
Caso 1: El sistema tiene una solución. Es decir, interpretando el problema como la búsqueda de una intersección de planos, los planos quedan como se ve en la imagen entonces es un único punto el que cumple la condición de estar en los tres planos.



Caso 2. No hay solución. Los tres planos no tienen puntos en común. Date cuenta cómo dos de ellos sí pueden tener puntos en común pero no los tres la mismo tiempo. La interpretación geométrica de este caso se puede ver en la figura.



Caso 3. Un número infinito de soluciones. Esto ocurre cuando los tres plano se intersectan en una línea o son el mismo plano:



Pensemos primero en el caso 1, donde el sistema tiene una única solución:

Aquí hay un sistema de 3 variables y 3 ecuaciones:

$$\begin{array}{llll} 3x+4y-z=8 & & & \\ 5x- & 2y+ & z= & 4 \\ 2x- & 2y+ & z= & 1 \end{array}$$

Para el primer paso, usa eliminación para eliminar una de las variables; $z$ puede ser eleminida sumando la primera y segunda ecuación:

$$\begin{array}{ccccc} 3x+ & 4y- & z & = & 8 \\ 5x- & 2y+ & z & = & 4 \\ \hline 8x+ & 2y & = & 12 & \end{array}$$

Para resolver el sistema, se necesitan dos ecuaciones de dos variables. Sumando la primera y la tercera ecuación del sistema original obtenemos otra ecuación que queda en términos de $x$ y $y$:

$$\begin{array}{ccccc} 3x+ & 4y- & z= & 8 & \\ 2x- & 2y+ & z & = & 1 \\ \hline 5x+ & 2y & = & 9 & \end{array}$$

Ahora tenemos un sistema de dos ecuación y dos variables:

$$8x+2y=12$$
$$5x+2y=9$$

Resolvemos el sistema usando eliminación de nuevo. En este caso podemos eliminar $y$ restando ambas ecuaciones:

$$\begin{array}{rrl} 8x+ & 2y & = 12 \\ -5x+ & -2y & = -9 \\ \hline 3x & = & 3 \end{array}$$

Resolvemos la ecuación para la variable que queda:

$$\begin{aligned} 3x &= 3 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Ahora, usamos una de las ecuaciones del sistema de dos variables:

$$\begin{aligned} 5x + 2y &= 9 \\ 5(1) + 2y &= 9 \\ 5 + 2y &= 9 \\ 2y &= 4 \\ y &= 2 \end{aligned}$$

Ahora, utilizando cualquiera de las ecuaciones del sistema origina despejamos para la última variable:

$$\begin{aligned} 2x - 2y + z &= 1 \\ 2(1) - 2(2) + z &= 1 \\ 2 - 4 + z &= 1 \end{aligned}$$

Muy importante, verificamos que nuestra solución funciona para las tres ecuaciones en el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 3x + 4y - z &= 8 \\ 3(1) + 4(2) - 3 &= 8 \\ 3 + 8 - 3 &= 8 \\ 11 - 3 &= 8 \\ 8 &= 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5x - 2y + z &= 4 \\ 5(1) - 2(2) + 3 &= 4 \\ 5 - 4 + 3 &= 4 \\ 1 + 3 &= 4 \\ 4 &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x - 2y + z &= 1 \\ 2(1) - 2(2) + 3 &= 1 \\ 2 - 4 + 3 &= 1 \\ -2 + 3 &= 1 \\ 1 &= 1 \end{aligned}$$

> **Solving a system of three variables**
> 1. Choose two equations and use them to eliminate one variable.
> 2. Choose another pair of equations and use them to eliminate *the same* variable.
> 3. Use the resulting pair of equations from steps 1 and 2 to eliminate one of the two remaining variables.
> 4. Solve the final equation for the remaining variable.
> 5. Find the value of the second variable. Do this by using one of the resulting equations from steps 1 and 2 and the value of the found variable from step 4.
> 6. Find the value of the third variable. Do this by using one of the original equations and the values of the found variables from steps 4 and 5.
> 7. ***Check your answer in all three equations***!

Vamos a checar un sistema que cae dentro del caso 2 y 3:

$$5x - 2y + z = 3$$
$$4x - 4y - 8z = 2$$
$$-x + y + 2z = -3$$

Supongamos que queremos resolver este sistema y empezamos con las últimas dos ecuacones. Multiplicando la última por $4$ y sumándolas para eliminar $x$:

$$\begin{array}{rrrrr} 4x- & 4y- & 8z & = & 2 \\ 4(-x+ & y+ & 2z) & = & 4(-3) \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrr} 4x- & 4y- & 8z= & 2 \\ -4x+ & 4y+ & 8z= & -12 \\ \hline & & 0 & = & -10 \end{array}$$

En este caso, nos topamos con una contradicción. Esto significa que no hay soluciones para el sistema de ecuaciones. Si esta contradicción se da para dos de las tres ecuaciones, significa que no hay solución.

Ahora veamos un sistema que tiene un número infinito de soluciones:

$$x - 2y + z = 3$$
$$-3x + 6y - 3z = -9$$
$$4x - 8y + 4z = 12$$

Para el primer paso, se escojen dos ecuaciones y se combinan para eliminar una de las variables. Se puede eliminar $x$ multiplicando la primer ecuación por $3$ y sumándola a la segunda ecuación:

$$\begin{array}{rrrrrrr} 3(x & - & 2y & + & z) & = & 3(3) \\ -3x & + & 6y & - & 3z & = & -9 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrrrr} 3x & - & 6y & + & 3z & = & 9 \\ -3x & + & 6y & - & 3z & = & -9 \\ \hline & & & & 0 & = & 0 \end{array}$$

Como todas las variables se eliminan y llegamos al enunciado $0 = 0$ decimos que ambas ecuaciones son equivalentes, es decir son el mismo plano.

Como ambas ecuaciones son equivalentes, el sistema de ecuaciones puede ser escrito con sólo dos ecuaciones. Continuando como antes:

$$-4(x - 2y + z) = -4(3)$$
$$4x - 8y + 4z = -12$$

$$\begin{array}{c} -4x+8y-4z=-12 \\ 4x-8y+4z=12 \\ \hline 0=0 \end{array}$$

Entonces en nuesro sistema de ecuaciones las tres ecuaciones eran el mismo plano por lo que hay un número infinito de soluciones.

Cálculo de determinantes:

$$\begin{aligned} |A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} &= a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} \\ &= aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh. \end{aligned}$$

Si el determinante es distinto de cero, los vectores que conforman a la matriz son linealmente independientes.