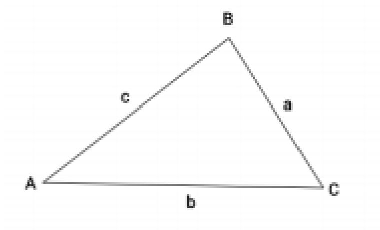
Repaso de trigonometría Parte 2

Durante las dos ayudantías de la primera semana, haremos un repaso rápido de algunos temas de trigonometría. Probablemente recuerden haber visto estos temas durante la preparatoria; trataremos de mantenerlo interesante mientras que refrescamos lo que sabemos.

La Ley de Senos nos ayuda a encontrar información faltante cuando estamos trabajando con triángulos oblicuos (triángulos que no son triángulos rectángulos).

Law of Sines

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$



Reutilizando la figura del triángulo oblicuo, podemos enunciar la Ley de Cosenos:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

La Ley de Senos y la Ley de Cosenos, cuando se aplica en triángulos rectangulos, nos da la definición de seno y el teorema de pitágoras respectivamente. Podemos ver por encimita esta demostración que encontré en internet para demostrar esto que acabo de escribir.

Yes, the laws apply to right-angled triangles as well. But, they're not particularly interesting there:

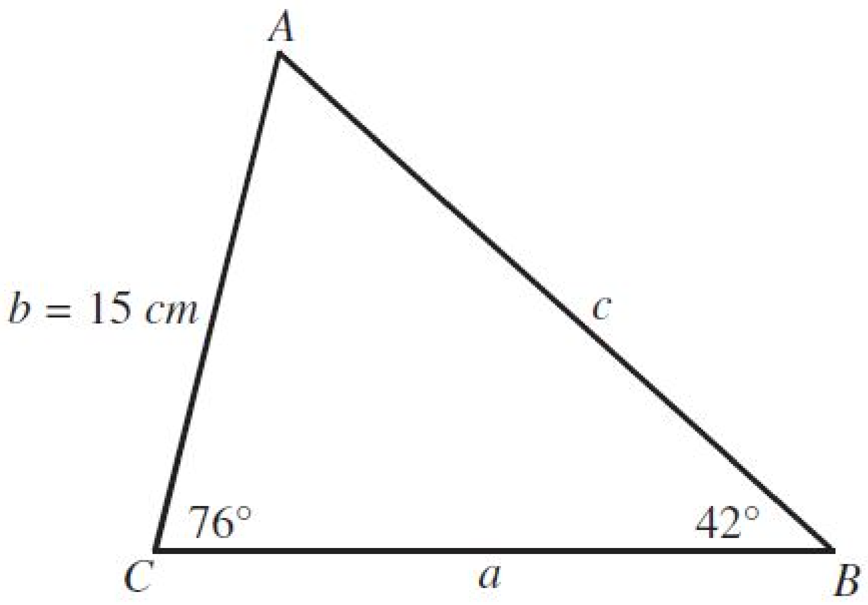
For $\triangle ABC$ with $\theta = \angle ABC$ a right angle, we can try to apply the cosine law about the right angle and get $AC^2 = AB^2 + BC^2 - AB \cdot BC \cdot \cos\theta = AB^2 + BC^2$, as $\cos 90^\circ$ = 0. But this is nothing more than Pythagoras' theorem!

For the sine law, letting $\alpha = \angle ACB$ and $\beta = \angle BAC$, we have that

$$\begin{aligned} \frac{\sin\theta}{AC} &= \frac{\sin\alpha}{AB} = \frac{\sin\beta}{BC} \\ \frac{1}{AC} &= \frac{\sin\alpha}{AB} = \frac{\sin\beta}{BC} \qquad \Leftrightarrow \\ \sin\alpha &= \frac{AB}{AC} \\ \sin\beta &= \frac{BC}{AC}, \end{aligned}$$

which is nothing more than the definition of the sine of an angle.

1. En el triángulo $\mathrm{ABC, b = 15\ cm, < B = 42^\circ, y < C = 76^\circ}$. Calculemos la medida de los lados y ángulos restantes



Solución.

Nos falta un ángulo, entonces podemos aplicar la propiedad de los triángulos:

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$$

$$\begin{aligned} \angle A + 42^\circ + 76^\circ &= 180^\circ \\ \angle A + 118^\circ &= 180^\circ \\ \angle A = 180^\circ - 118^\circ &= 62^\circ \end{aligned}$$

Por lo tanto, el ángulo faltante será:

$$\angle A = 62^\circ$$

Ahora, para calcular los lados faltantes utilizamos la ley de senos:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}$$

Para el primero:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} 62^\circ} = \frac{b}{\operatorname{sen} 42^\circ}$$

Luego,

$$a = \frac{b \cdot \operatorname{sen} 62^\circ}{\operatorname{sen} 42^\circ} = 19.79 \text{ cm}$$

Para el siguiente lado:

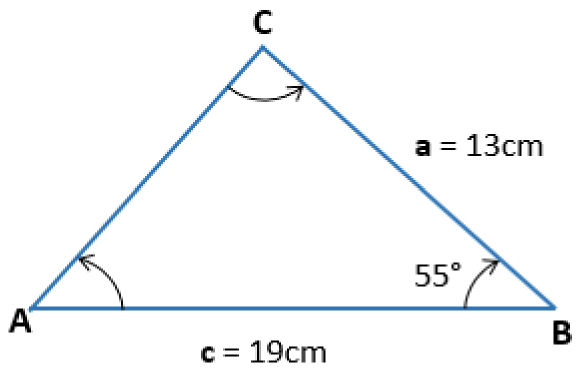
$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}$$

Entonces,

$$c = \frac{(19.79 \text{ cm})\,(\operatorname{sen} 76^\circ)}{\operatorname{sen} 62^\circ} = 21.75 \text{ cm}$$

Con esto, ya encontramos la información faltante del triángulo.

2. En el siguiente triángulo $\mathrm{ABC}, \mathrm{a} = 13 \text{ cm}, \mathrm{c} = 19 \text{ cm}, < \mathrm{B} = 55^\circ,$ Resuelva el triángulo.



La Ley de Senos no es muy útil en nuestro caso. Vamos a atacar el problema con la Ley de Cosenos:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B$$

Por lo que,

$$b^2 = 13^2 + 19^2 - 2(13)(19) \cdot \cos(55^\circ)$$
$$b^2 = 169 + 361 - 494(0.5735)$$

De esto resulta que,

$$b^2 = 246.6532$$
$$b = 15.7052 \text{ cm}$$

Ya que tenemos los tres lados, nos falta un ángulo. Utilizando otra vez la Ley de Cosenos:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$$

Despejando:

$$a^2 - b^2 - c^2 = -2bc \cdot \cos A$$

Despejando aún más:

$$\cos A = \frac{a^2 - b^2 - c^2}{-2bc}$$

Sustituyendo valores:

$$\cos A = \frac{13^2 - 15.7052^2 - 19^2}{-2(15.7052)(19)} = 0.7350$$

Por lo tanto:

$$A = \cos^{-1}(0.7350) = 42.69^\circ$$

Con esto, ya podemos concluir que el ángulo faltante será:

$$\angle C = 180^\circ - 42.69^\circ + 55^\circ = 82.31^\circ$$

.

A pesar de ser de los teoremas trigonométricos más usados y de tener una demostración particularmente simple, es poco común que se presente o discuta la misma en cursos de trigonometría, de modo que es poco conocida.

Dado el triángulo *ABC*, denotamos por *O* su circuncentro y dibujamos su circunferencia circunscrita. Prolongando el segmento *BO* hasta cortar la circunferencia, se obtiene un diámetro *BP*.

Ahora, el triángulo *PCB* es recto, puesto que *BP* es un diámetro, y además los ángulos *A* y *P* son congruentes, porque ambos son ángulos inscritos que abren el segmento *BC* (Véase definición de arco capaz). Por definición de la función trigonométrica seno, se tiene

$$\operatorname{sen} A = \operatorname{sen} P = \frac{BC}{BP} = \frac{a}{2R}$$

donde *R* es el radio de la circunferencia. Despejando *2R* obtenemos:

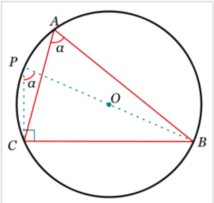
$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = 2R$$

Repitiendo el procedimiento con un diámetro que pase por *A* y otro que pase por *C*, se llega a que las tres fracciones tienen el mismo valor *2R* y por tanto son iguales.

La conclusión que se obtiene suele llamarse teorema de los senos generalizado y establece:

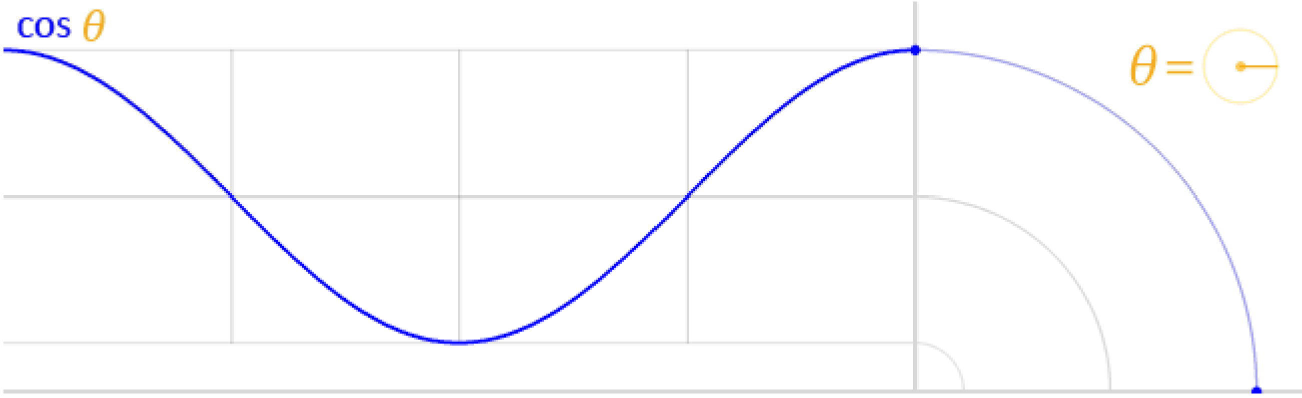
Para un triángulo ABC donde a, b, c son los lados opuestos a los ángulos A, B, C respectivamente, si R denota el radio de la circunferencia circunscrita, entonces:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C} = 2R.$$

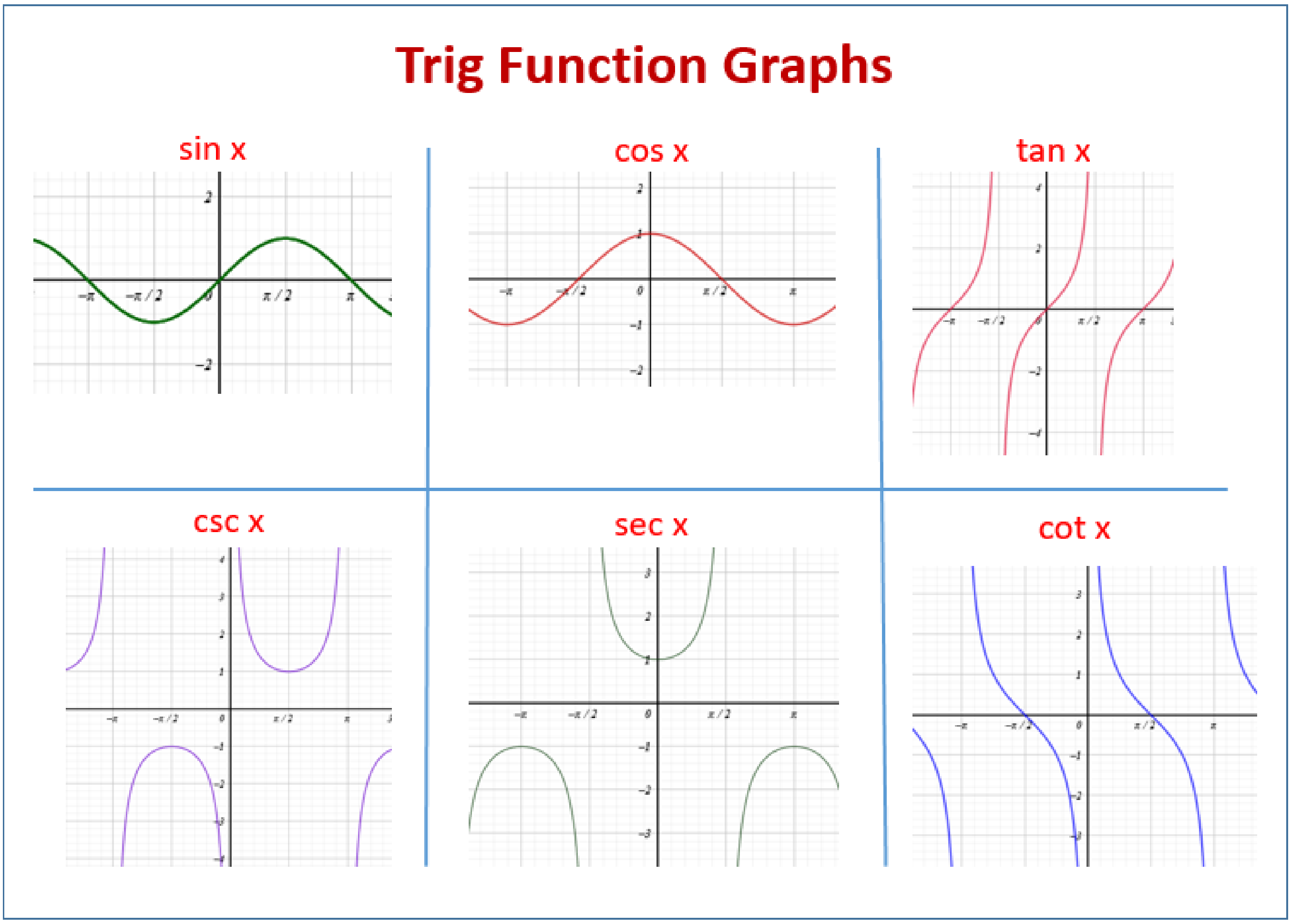


El teorema de los senos establece que *a/sin(A)* es constante.

```
from IPython.display import Image
Image(url='https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/3/3b/Circle_cos_sin.gif')
```



Las gráficas de las funciones trigonométricas más comunes aparecen en la siguiente lista:



Vamos a ver cómo cambiando algunos parámetros de las funciones trigonométricas, cambian sus gráficas. Los parámetros que vamos a discutir serán:

$$f(x) = a + A\sin(bx + c)$$
$$f(x) = a + A\cos(bx + c)$$

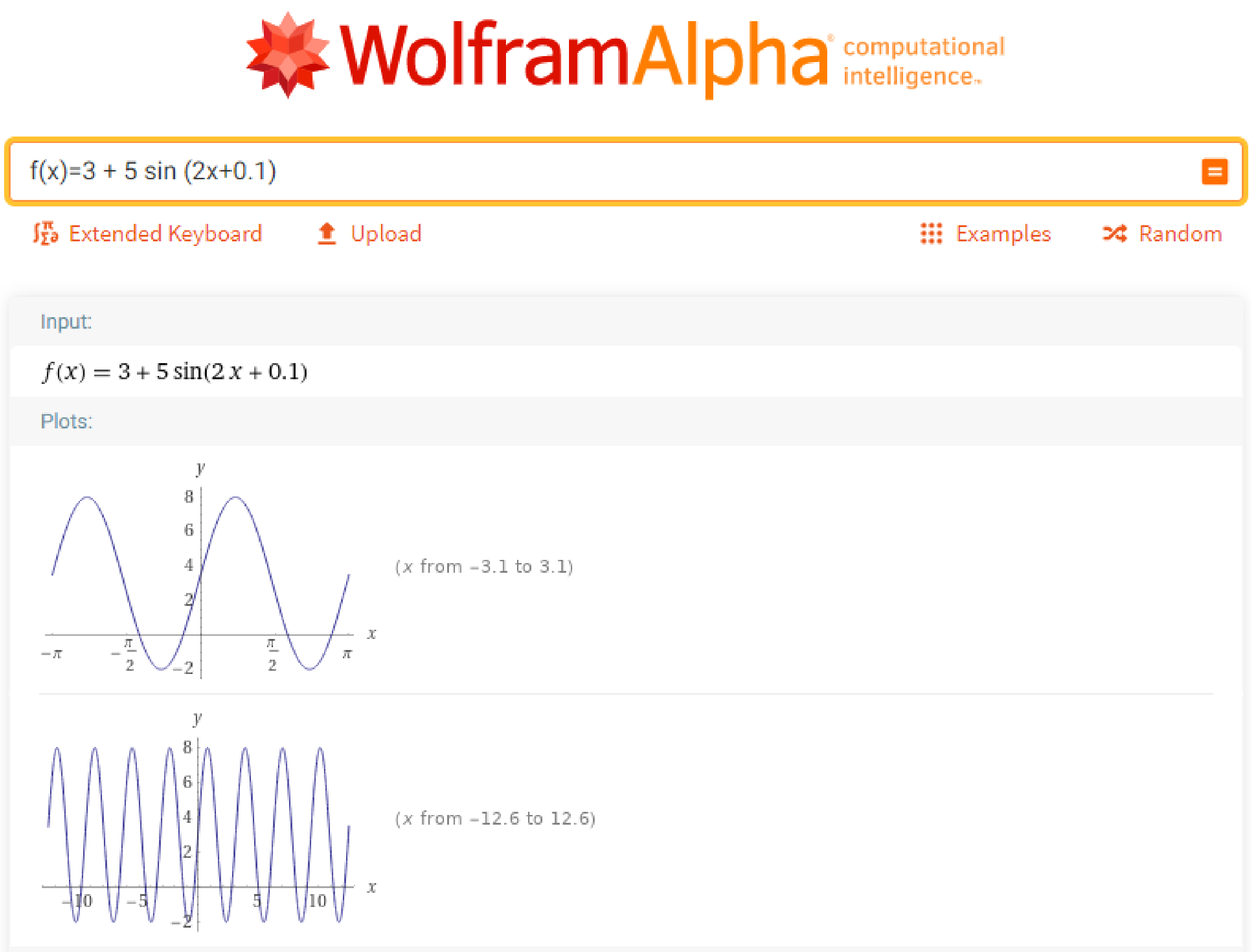
https://www.geogebra.org/m/r5Zw4y7p

3. Realice la gráfica de la función:

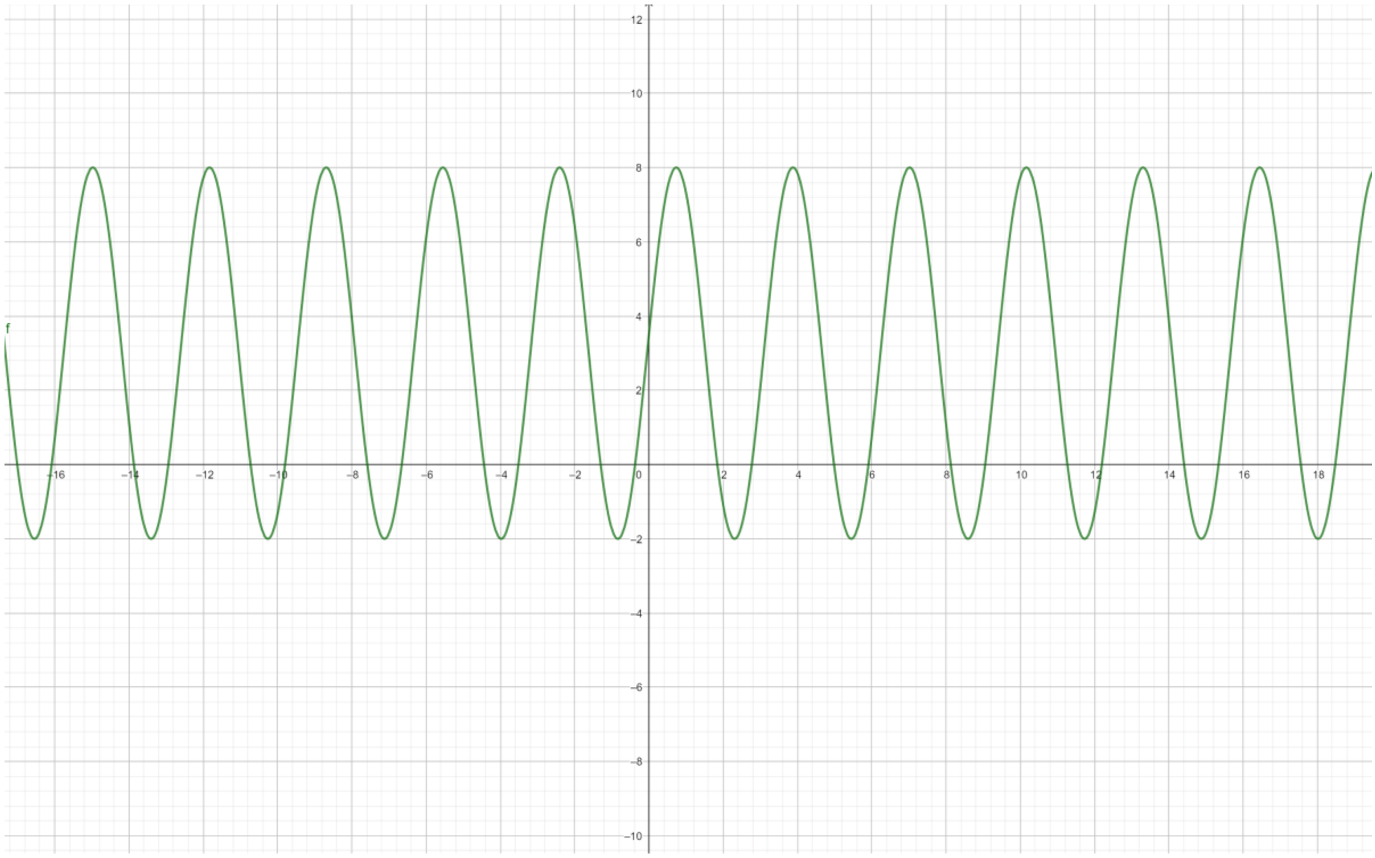
$$f(x) = 3 + 5\sin(2x + \frac{1}{10})$$

Vamos a resolverlo de varias maneras, para que nos demos una idea de qué herramientas podemos usar para graficar durante el curso:

Usando Wolfram:

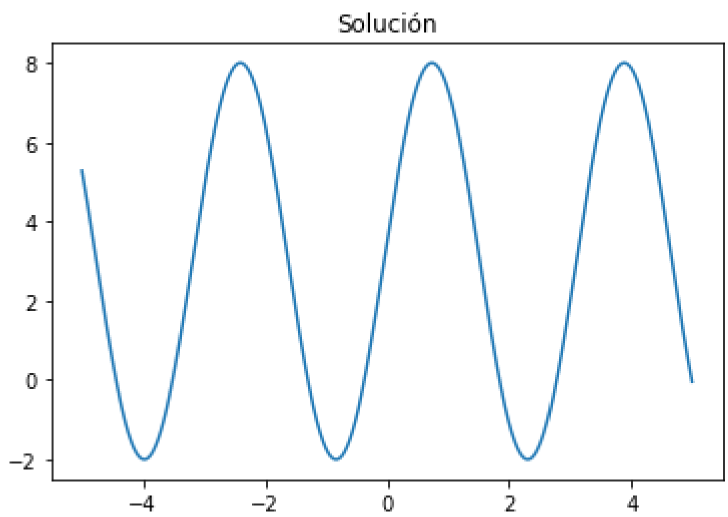


Utilizando Geogebra:



Utilizando algún lenguaje de programación:

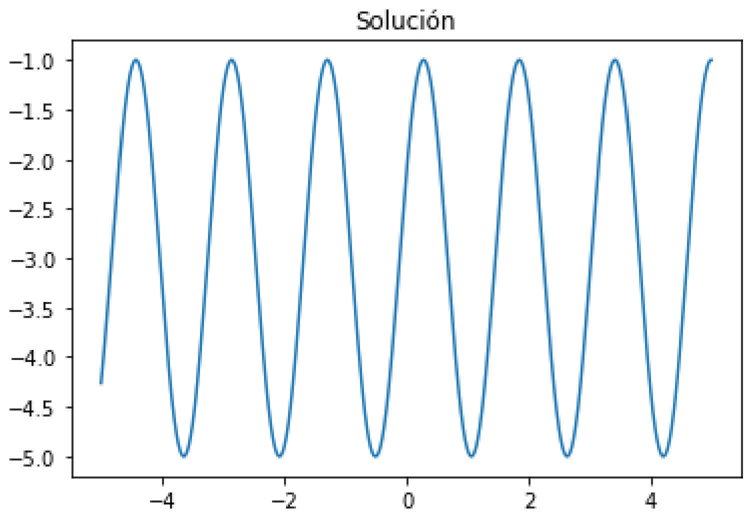
```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

def f(x):
  return 3+5*np.sin(2*x+0.1)

A = np.arange(-5,5,0.01)

plt.plot(A,f(A))
plt.title('Solución')
plt.show()
```



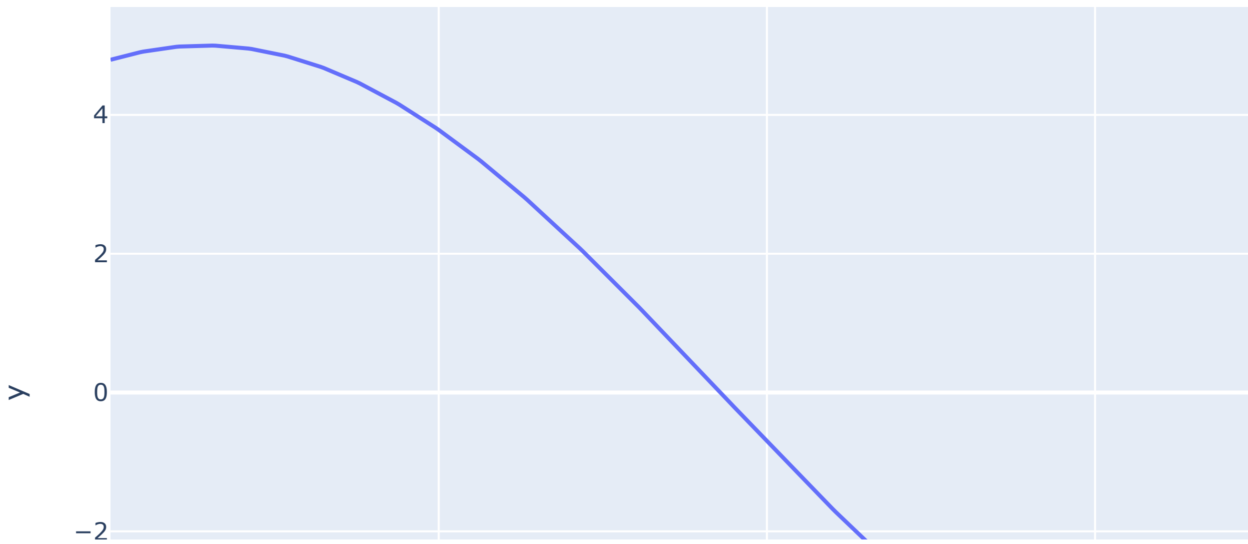
4. Realice la gráfica de la siguiente función:

$$f(x) = -3 + 2\cos\left(4x + \frac{7}{15}\right)$$

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

def f(x):
  return -3+2*np.sin(4*x+ (7/15))

A = np.arange(-5,5,0.01)

plt.plot(A,f(A))
plt.title('Solución')
plt.show()
```




```
import plotly.graph_objects as go
import plotly.express as px
import numpy as np

A = np.arange(-5,5,0.01)
B = 5 * np.sin(A)
fig = px.line(x = A, y = B  )
fig.show()
```



5. Discutamos un poquito la tarea moral:

Prob. ¿Qué son geométricamente los siguientes conjuntos?

- $\{(x,y) : x \geq 0, y < 1\}$
- $\{(x,y) : x \leq 0, y \leq 0\}$
- $\{(x,y) : x \geq 2, y \leq 3\}$
- $\{(x,y) : x \leq 1\}$
- $\{(x,y) : x \leq 1, x \geq -3, y \geq 2\}$

6. Realice las siguientes sumas de vectores:

$$(2,3)+(5,2)=(7,5)$$

$$(3,6)+(7,2)-(4,5)=(3,3)$$

$$(2,3,4)+(5,4,6)$$

$$(2,3,1,4)+(2,3,1,5)+(2,3,1,6)$$