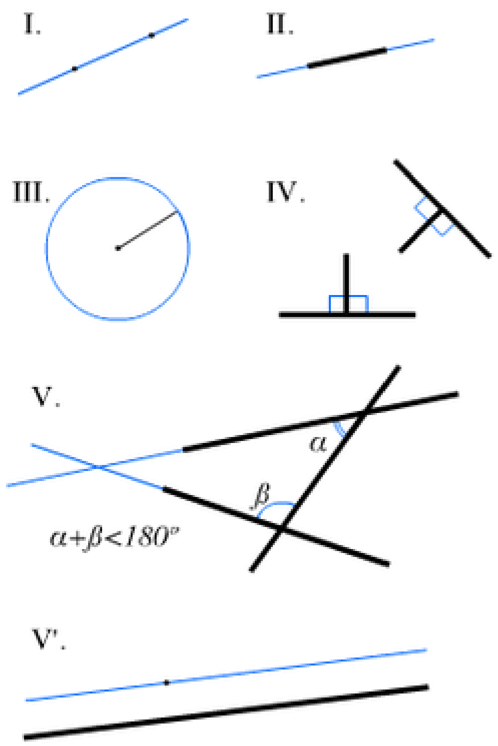
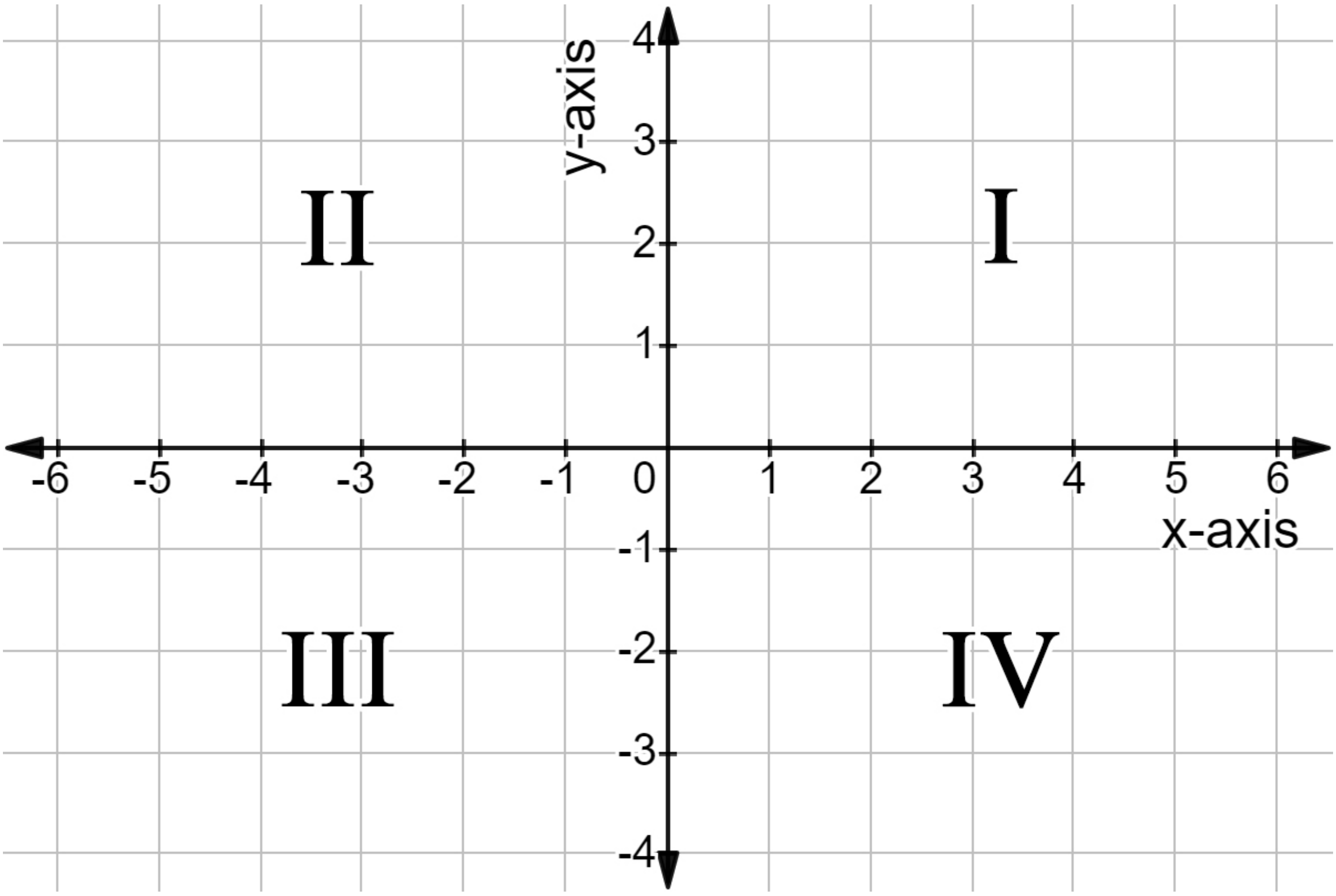
Ayudantía del 15 de junio del 2021

Rectas en su forma paramétrica, baricéntrica y normal

A lo largo de las últimas ayudantías hemos platicado sobre el plano euclidiano: hablamos de los cinco postulados de euclides con énfasis especial en el quinto postulado; del plano euclidiano como el producto cartesiano de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$; de las nociones de punto, pareja de números, vector, espacio vectorial y espacio $\mathbb{R}^n$.





También hablamos de las nociones básicas de un espacio vectorial: un conjunto que cumple con una serie de reglas y que nos permite generalizar algunas ideas algebraicas. Las reglas, para recordarlas son las siguientes:

$$
\begin{aligned}
\textit{i)}&\quad (x+y)+z = x+(y+z)\\
\textit{ii)}&\quad x+y = y+x\\
\textit{iii)}&\quad x+0 = x\\
\textit{iv)}&\quad x+(-x) = 0\\
\textit{v)}&\quad s(tx) = (st)x\\
\textit{vi)}&\quad 1x = x\\
\textit{vii)}&\quad t(x+y) = tx+ty\\
\textit{viii)}&\quad (s+t)x = sx+tx
\end{aligned}
$$

Aprendimos también a hacer operaciones entre vectores: suma, resta, producto escalar, producto punto y producto vectorial (esta última sólo superficialmente. De cada una de estas operaciones, hablamos de su interpretación geométrica. Todo esto nos llevo a abordar la idea esencial del curso: el uso de álgebra para estudiar figuras geométricas.

$$(2,3)+(4,5)=(6,8)$$

$$(3,5)-(4,3)=(-1,2)$$

$$3(2,2)=(6,6)$$

$(3,2) \cdot (4,5) = 22$

Líneas

Si algún concepto de los que utilicemos para abordar el tema de líneas se les olvidó, lo podemos revisar, es importante que compartan sus dudas a lo largo de la ayudantía.

Probablemente tengan bastante práctica con pensar en una línea como una sucesión de puntos que pueden ser descritos por la ecuación:

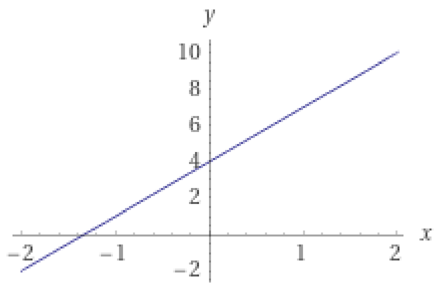
$$y = mx + b$$

donde m es la pendiente (razón de cambio, inclinación) de la recta y b es la ordenada a l origen (el punto donde intersecta al eje y).

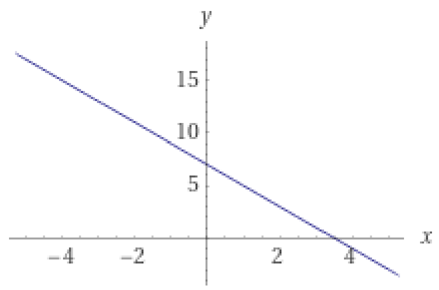
De esta forma, podemos describir cualquier recta especificando su m y su b. Por ejemplo, la recta:

$$y = 3x + 4$$

será la representación de la siguiente recta:



Si al contrario, tenemos una representación gráfica y queremos ver su expresión analítica, por ejemplo la siguiente recta:



Podemos empezar por ver que su itnersección con el eje y es 7 y dado que los puntos $(\frac{7}{2}, 0)$ y $(0, 7)$ están en la recta y por definición $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, entonces $m = -2$ y la ecuación de recta que estamos buscando es $y = -2x + 7$.

Nos referiremos a esta representación cartesiana de la recta como la "forma funcional", esta representación, como tal vez han visto en algún otro de sus cursos es muy útil en cursos relacionados a cálculo y análisis matemático. Sin embargo, en este curso estamos interesados en utilizar el concepto de vectores para estudiar las figuras geométricas.

Dejando por un momento de lado la ecuación funcional de la recta, veamos cómo podemos representar una recta de forma vectorial; para esto utilizaremos las operaciones de suma y producto escalar de vectores.

Tal como aparece en las notas, la ecuación vectorial de la recta es la siguiente:

$$\ell := \{\mathbf{p} + \mathbf{t}\boldsymbol{v} \mid \mathbf{t} \in \mathbb{R}\}$$

Esta representación nos dice que a partir de dos vectores: uno que va del origen a un punto sobre la recta p, y un vector director totalmente contenido en la recta, podemos representar a cualquier recta en $\mathbb{R}^2$.

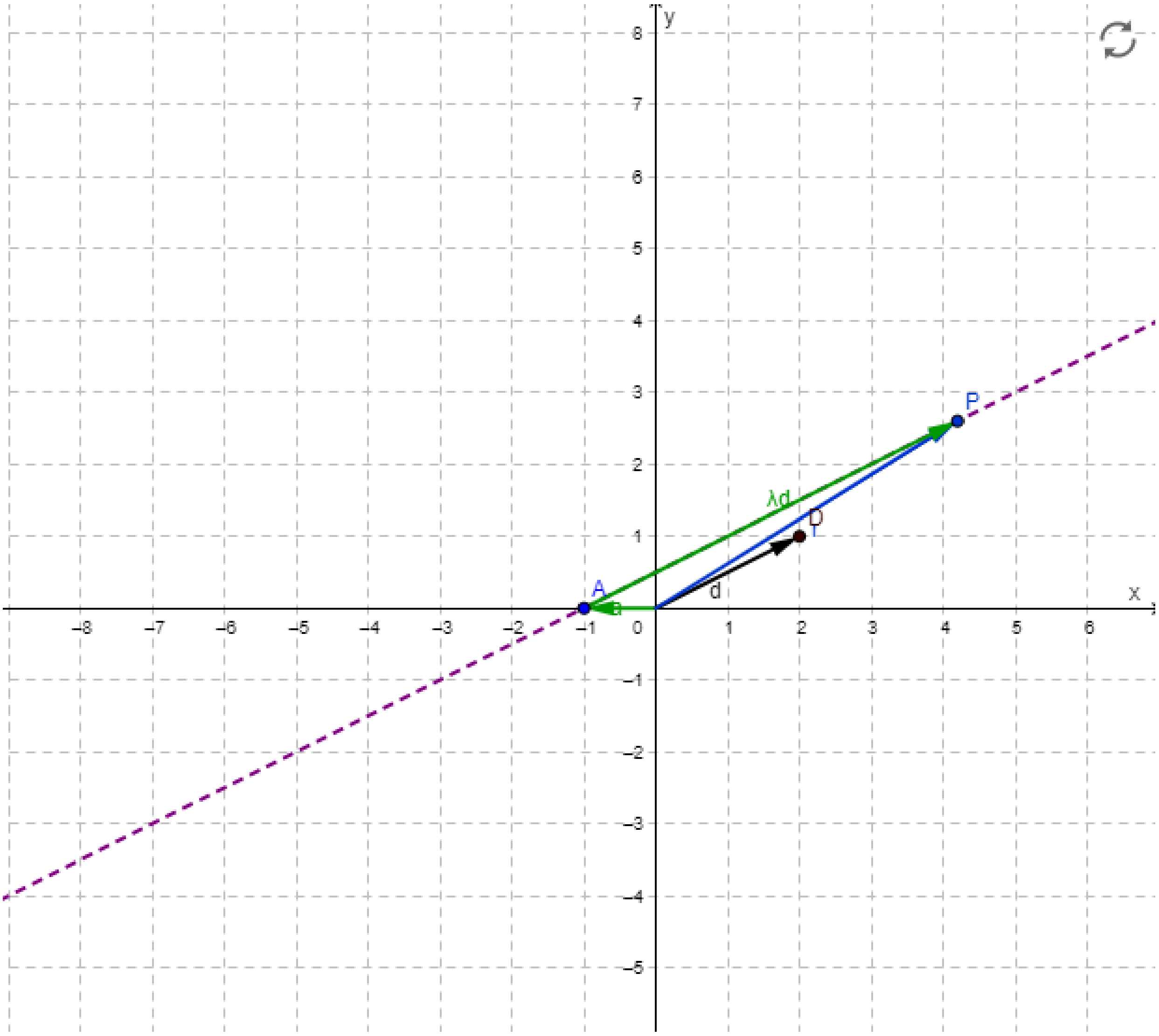
Tal vez recuerdes que antes del paro utilizamos la siguiente demostración de geogebra para abordar el concepto:

https://www.geogebra.org/m/skj88vSN

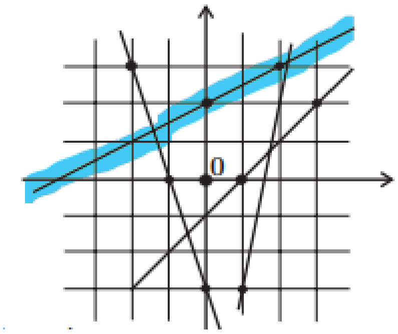
Siguiendo un poco la lógica del ejercicio anterior, supongamos que tenemos la siguiente recta:

$$A := \{(-1,0) + \mathrm{s}(2,1) \mid \mathrm{s} \in \mathbb{R}\}$$

Vamos a dibujarla; lo primero que tenemos que hacer es dibujar un vector que va del origen al punto $(-1,0)$, luego dibujaremos un vector director que va del origen al $(2,1)$ y lo "trasladaremos tal cual" a la cabeza del primer vector. Ahora, ese vector trasladado lo trataremos como un segmento de recta y lo extenderemos en ambas direcciones al infinito, para representar el producto escalar por s: la recta resultante es la representación de nuestra recta.



Al revés, vamos a obtener una expresión analítica de la siguiente recta:



A "ojo" podemos ver que un posible vector p es el vector $(0, 2)$ y un vector director para nuestra recta es el vector $(2, 1)$. De esta forma, la ecuación vectorial de la recta será:

$$\ell := \{(0, 2) + \mathbf{t}(2, 1) \mid \mathbf{t} \in \mathbb{R}\}$$

Como ya te puedes dar cuenta, la expresión vectorial de la recta no es única y un pequeño cálculo nos muestra que es equivalente a la representación funcional:

$$(0, 2) + \mathbf{t}(2, 1) = (2t, 2 + t)$$

$$\rightarrow$$

$$\begin{aligned} x &= 2t \\ y &= 2+t \end{aligned}$$

$$\rightarrow$$

$$\begin{aligned} t &= \frac{x}{2} \\ t &= y-2 \end{aligned}$$

$$\rightarrow$$

$$\begin{aligned} t &= \frac{x}{2} \\ t &= y-2 \end{aligned}$$

$$\rightarrow$$

$$\begin{aligned} \frac{x}{2} &= y-2 \\ y &= \frac{x}{2}+2 \end{aligned}$$

$(2,1)+t(0,2)$

$$(2, 2t+1)$$

$$\rightarrow$$

$$\begin{aligned} x &= 2 \\ y &= 2t+1 \end{aligned}$$

$$\rightarrow$$

$$t = \frac{y-1}{2}$$

$$\rightarrow$$

$$\begin{aligned} t &= \frac{x}{2} \\ t &= y-2 \end{aligned}$$

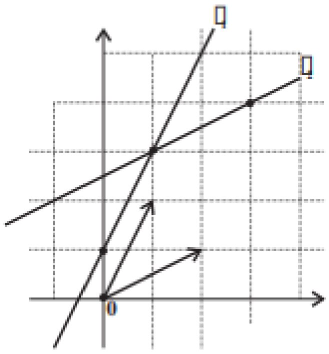
$$\rightarrow$$

$$\begin{aligned} \frac{x}{2} &= y-2 \\ y &= \frac{x}{2}+2 \end{aligned}$$

Consideremos el problema de la intersección de rectas. Este problema, cuando representamos las rectas en su forma funcional, nos lleva a resolver un sistema de ecuaciones. Veremos que para rectas en su forma vectorial ocurre lo mismo. Veamos el siguiente ejemplo:

$$\begin{aligned} \ell_1 &= \{(0,1)+t(1,2) \mid t \in \mathbb{R}\} \\ \ell_2 &= \{(3,4)+s(2,1) \mid s \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Estas dos rectas, las podemos representar gráficamente a continuación. Con esta representación gráfica podemos ver que las rectas se cortan en el punto $(1,3)$



Una solución analítica del problema consiste en resolver un sistema de dos ecuaciones, pues lo que queremos encontrar es un punto que esté en ℓ_1 y en ℓ_2 al mismo tiempo, escribiendo esta última condición algebraicamente tenemos que:

$$(0,1)+\mathrm{t}(1,2)=(3,4)+\mathrm{s}(2,1)$$

Entonces,

$$\begin{aligned}\mathrm{t}(1,2)-\mathrm{s}(2,1)&=(3,4)-(0,1)\\(\mathrm{t}-2\,\mathrm{s},2\mathrm{t}-\mathrm{s})&=(3,3)\end{aligned}$$

Por propiedades vectoriales:

$$\begin{aligned}\mathrm{t}-2\,\mathrm{s}&=3\\2\mathrm{t}-\mathrm{s}&=3\end{aligned}$$

Despejamos la primera y sustituimos en la segunda:

$$2(3+2s)-s=3$$

Resolviendo directamente:

$$\begin{aligned}6+4s-s&=3\\3s&=-3\\s&=-1.\end{aligned}$$

Por lo tanto, si sustituimos $s=-1$ en la expresión de la segunda recta:

$$(3,4)-(2,1)=(1,3)$$

Podemos ver que el punto $(1,3)$ está en ambas rectas. Este punto es la intersección de ambas rectas.

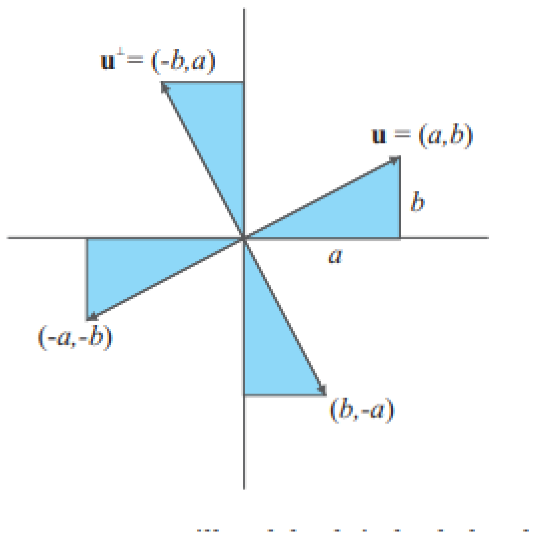
Ahora, vamos a abordar otra forma de expresar una recta: la tercera de las cuatro que veremos hoy; la representación normal de una recta. Para entender la representación normal de la recta, tenemos que usar el siguiente teorema.

Teorema.Sea $\mathrm{d} \in \mathbb{R}^2 - \{0\}$, entonces

$$\{\mathbf{p} + \mathrm{t}\mathbf{d} \mid \mathbf{t} \in \mathbb{R}\} = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \mathbf{d}^{\perp} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{d}^{\perp} \cdot \mathbf{p}\right\}$$

Un pequeño paréntesis: para sacar el vector normal a un vector tenemos que considerar que lo podemos sacar en dos direcciones. El dibujo siguiente muestra una pequeña nemotecnica sobre cómo sacar el vector ortogonal. Vale la pena recordar que si dos vectores son ortogonales se cumple que:

$$\mathrm{u} \cdot \mathrm{v} = 0$$



Vamos a hacer un ejemplo: a partir de la siguiente ecuación de recta, encuentre su ecuación normal.

$$y = -3x + 2$$

Para resolver este ejercicio, podemos seguir varios caminos. El que les propongo es el siguiente:

Primero, pasamos la ecuación funcional a su ecuación vectorial. Nos tomamos dos puntos en la recta $(0, 2)$ y $(\frac{2}{3}, 0)$, con ellos, definimos un vector director q y un vector desde el origen a la recta p. Por lo tanto, la representación vectorial será:

$$(0, 2) + t(-\frac{2}{3}, 2)$$

Para llegar a la representación normal, utilizamos el teorema que acabamos de presentar y obtenemos que:

$$d^{\perp} = (2, \frac{2}{3})$$

Por lo tanto, la representación normal queda como:

$$(2, \frac{2}{3}) \cdot \mathrm{x} = (2, \frac{2}{3}) \cdot (0, 2)$$

$$(2, \frac{2}{3}) \cdot (x, y) = (2, \frac{2}{3}) \cdot (0, 2)$$

$$2x + \frac{2}{3}y = \frac{4}{3}$$

$$6x + 2y = 4$$

$$y = -3x + 2$$

Finalmente, abordaremos la representación baricéntrica de la recta.

Supongamos que p y q son dos puntos distintos del plano. Para cualquier $t \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$\begin{aligned} \mathbf{p} + t(\mathbf{q} - \mathbf{p}) &= \mathbf{p} + \mathbf{tq} - \mathbf{tp} \\ &= (1 - \mathbf{t})\mathbf{p} + \mathbf{tq} \end{aligned}$$

$$sp + tq \quad \text{con} \quad s + t = 1$$

- A partir de la forma baricéntrica de la recta, llega a la forma paramétrica $l = \{Q + r(P - Q) : r \in \mathbb{R}\}$
- Sea $L = \{(5, 3) + r(-7, 2) : r \in \mathbb{R}\}$ una recta en su forma paramétrica, llega a su forma baricéntrica.

Considera las siguientes tres rectas:

- Una en forma paramétrica. $(3, 4) + t(2, 1)$
- Una en forma baricéntrica. $s(10, 0) + t(0, 10)$
- Una en forma normal $(-1, 2) \cdot \mathrm{x} = (-1, 2) \cdot (6, 4)$

Encontrar cuáles dos son paralelas y encuentra la interseccion de las demás.