Ayudantía del 17 de junio del 2021

Diferentes representaciones de recta (continuación)

La ayudantía pasada revisamos diferentes formas en las que podemos representar a una recta en el plano euclidiano $\mathbb{R}^2$. En la ayudantía de hoy acabaremos de repasar la representación baricéntrica y haremos un ejercicio "integrador" en el que utilzaremos todas las representaciones de recta.

Representación baricéntrica de la recta

Definición. Sean P y Q dos puntos distintos en $\mathbb{R}^2$, la recta por P y Q en forma baricéntrica es el conjunto

$$l := \{rP + sQ : r, s \in \mathbb{R} \quad y \quad r + s = 1\}$$

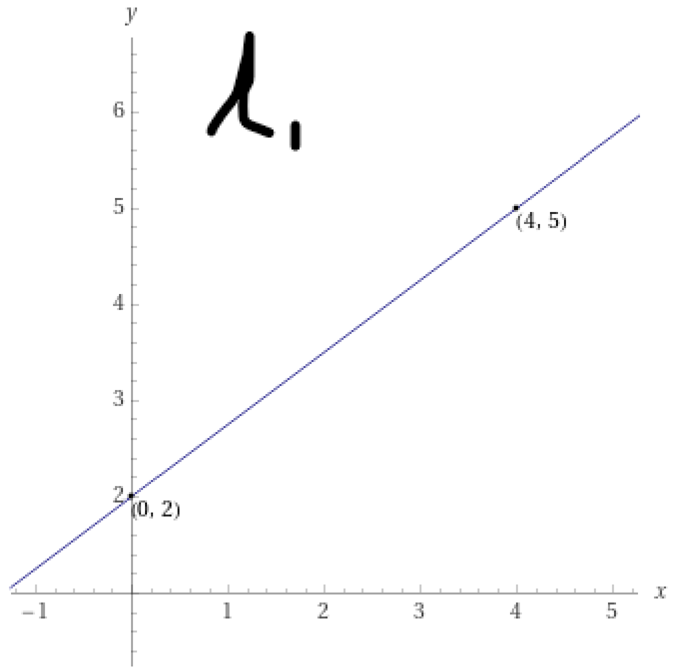
Ejemplos de rectas en su forma baricéntrica son:

$$l_1 := \{r(0,2) + s(4,5) : r, s \in \mathbb{R} \quad y \quad r + s = 1\}$$

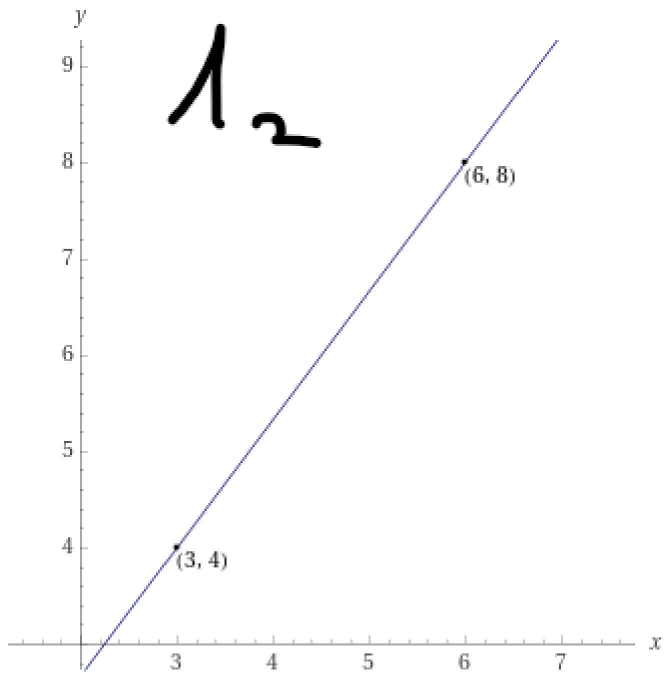
$$l_2 := \{r(6,8) + s(3,4) : r, s \in \mathbb{R} \quad y \quad r + s = 1\}$$

$$l_3 := \{r(-2,7) + s(-4,8) : r, s \in \mathbb{R} \quad y \quad r + s = 1\}$$

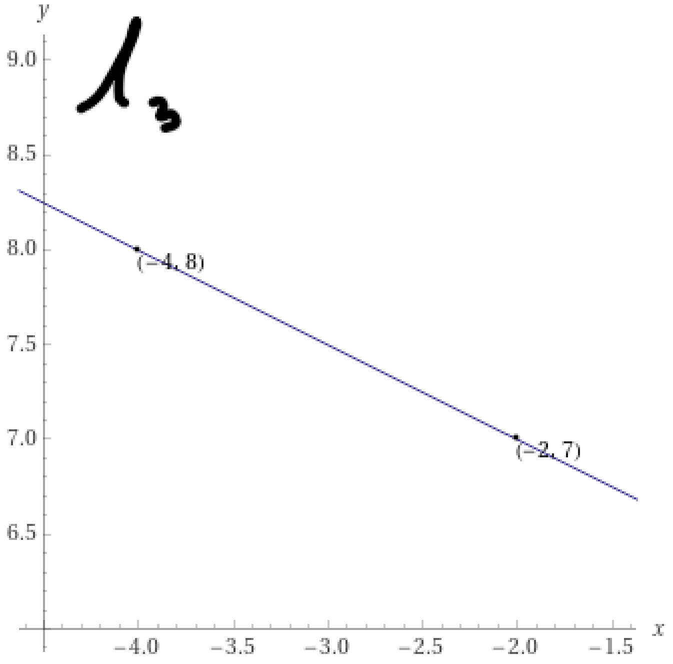
Podemos dibujarlas casi "a ojo", pues como conocemos dos puntos que están en la recta, podemos dibujar un segmento entre esos dos puntos y extenderlos al infinito: recordemos que uno de los postulados de euclides nos decían que dados dos puntos existe una única recta que los une. Haciendo los dibujos de nuestras rectas:



y
x
l_1
(4, 5)
(0, 2)



y
x
l_2
(6, 8)
(3, 4)



Sin embargo, tal vez lo que queremos es pasar directamente a alguna otra de sus representaciones. Supongamos que a las rectas ℓ_1, ℓ_2 y ℓ_3 las queremos pasar a su representacion paramétrica.

En el caso de ℓ_1 tenemos dos puntos de la recta: con esto podemos tomar uno para definir un vector que va del origen a algún punto en la recta; nuestro vector p, digamos que sería $\mathrm{p} = (0, 2)$. Ahora sólo nos falta el vector director q para la representación paramétrica. Como vimos la clase pasada, el vector director lo podemos obtener al restar dos vector que van del origen a la recta, entonces $\mathrm{q} = (4, 5) - (0, 2) = (4, 3)$. Por lo tanto, la representación paramétrica de ℓ_1 será:

$$l_1 := \{(0, 2) + \lambda(4, 3)\}$$

Con un procedimiento similar al que seguimos para ℓ_1, obtenemos las otras dos rectas:

$$l_2 := \{(6, 8) + s(3, 4)\}$$
$$l_3 := \{(-2, 7) + t(-2, 1)\}$$

Recordando la ayudantía anterior, a partir de la forma paramétrica ya sabemos cómo pasar a las forma funcional y la forma normal; a partir de ahí podemos pasar a representaciones gráficas o representaciones analíticas según nos convenga.

Vamos a hacer algunos ejercicios en donde vamos a saltar entre todas las reprentaciones:

1. Dada la siguiente recta en su forma funcional, obtenga su representación paramétricas, normal y baricéntrica. Luego, dibuje la recta.

$$y = \frac{4}{5}x + 7$$

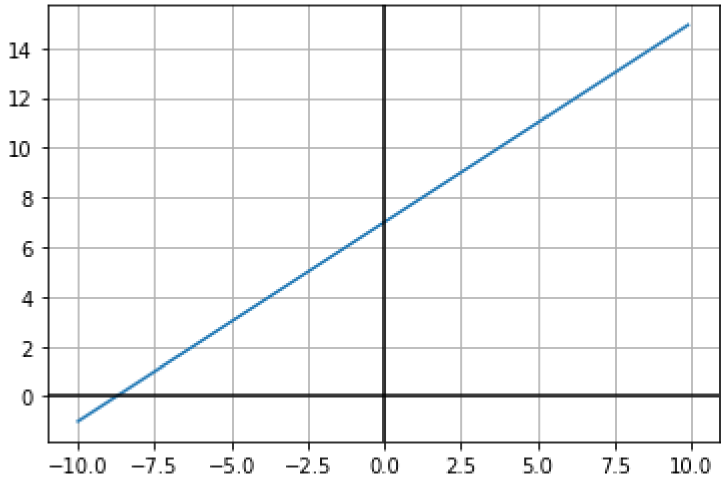
Primero vamos a dibujar la recta, pues a partir de la forma funcional, una representación gráfica se puede obtener fácilmente. La gráfica de la función será la siguiente:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

A=np.arange(-10,10,0.1)

def f(x):
  return 4/5 * x + 7

plt.plot(A,f(A))
plt.axhline(y=0, color='k')
plt.axvline(x=0, color='k')
plt.grid(True, which='both')
plt.show()
```



Ahora, vamos a pasar de la forma funcional a la forma paramétrica:

Hay una manera infinita de parametrizar esta recta, una de ellas consiste en hacer

$$x = t$$

Entonces,

$$y = \frac{4}{5}t + 7$$

Esto lo podemos reescribir como:

$$\ell := \{(x, y)\}$$

$$\ell := \{(t, \frac{4}{5}t + 7)\}$$

$$\rightarrow$$

$$\ell := \{(t, \frac{4}{5}t) + (0,7)\}$$
$$\rightarrow$$
$$\ell := \{(0,7) + (t, \frac{4}{5}t)\}$$
$$\rightarrow$$
$$\ell := \{(0,7) + t(1, \frac{4}{5})\}$$

Esta última será nuestra $\textbf{reprentación vectorial de la recta}$.

Para la $\textbf{representación normal}$ utilizamos el teorema de la ayudantía anterior que nos decía que:

$$\{\mathbf{p} + \ \mathrm{td} \ \mid \mathbf{t} \in \mathbb{R}\} = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \mathbf{d}^\perp \cdot \mathbf{x} = \mathbf{d}^\perp \cdot \mathbf{p}\right\}$$

Entonces, como ya ubicamos nuestro vector $\mathrm{p} = (0,7)$ y nuestro vector director $\mathrm{d} = (1, \frac{4}{5})$, sólo nos falta obtener el "compadre ortogonal" $\mathrm{d}^\perp = (-\frac{4}{5}, 1)$. Podemos verificar que efectivamente es el vector ortogonal si vemos que $\mathrm{d} \cdot \mathrm{d}^\perp = 0$. Así, la forma normal de la recta será:

$$\left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid (-\frac{4}{5}, 1) \cdot \mathbf{x} = (-\frac{4}{5}, 1) \cdot (0,7)\right\}$$

Equivalentemente:

$$\left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid (-\frac{4}{5}, 1) \cdot \mathbf{x} = 7\right\}$$

Ya sólo nos falta la $\textbf{representación baricéntrica}$ de la recta, la cual está fácil pues sólo nos pide tomarnos dos puntos de la recta. Vamos a tomarnos las intersecciones con el eje x y el eje y. Serán los puntos $(0,7)$ y $(-\frac{35}{4}, 0)$. Por lo tanto, una de las posibles representaciones baricéntricas de la recta será:

$$l := \{r(0,7) + s(-\frac{35}{4}, 0) : r, s \in \mathbb{R} \quad y \quad r + s = 1\}$$

2. A partir de la representación paramétrica obtenga el resto de las representaciones.

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$(3,2) + t(-2,4)$$
$$(3 - 2t, 2 - 4t)$$

$$x = 3 - 2t$$
$$y = 2 - 4t$$
$$t = \frac{x-3}{2}$$
$$t = \frac{y-2}{4}$$
$$\frac{x-3}{2} = \frac{y-2}{4}$$
$$y = -2x + 4$$

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid (4,2) \cdot \mathbf{x} = (4,2) \cdot (3,2)\}$$
$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid (4,2) \cdot \mathbf{x} = 16\}$$

Los puntos $(0,4)$ y $(2,0)$ estan en la recta:

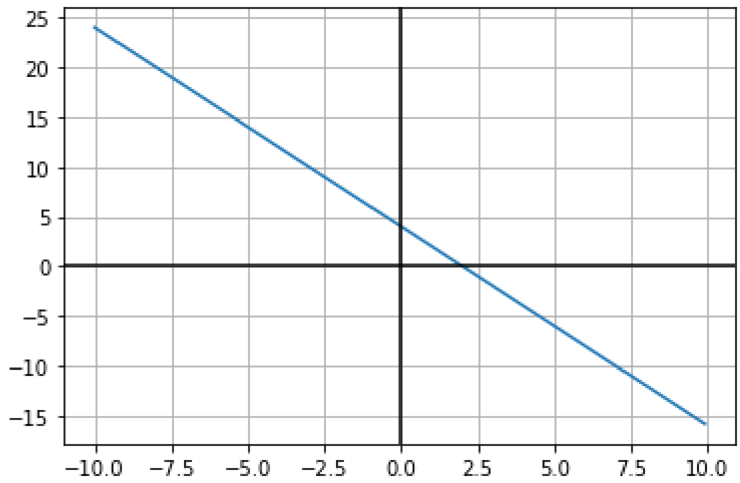
$$l_1 := \{r(0,4) + s(2,0) : r, s \in \mathbb{R} \quad y \quad r + s = 1\}$$

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

A=np.arange(-10,10,0.1)

def f(x):
  return -2 * x + 4

plt.plot(A,f(A))
plt.axhline(y=0, color='k')
plt.axvline(x=0, color='k')
plt.grid(True, which='both')
plt.show()
```



3. A partir de la representación normal obtenga el resto de las representaciones.

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid (-3,1) \cdot \mathbf{x} = 4\}$$

$$(-3,1)\cdot(x,y)=4$$
$$-3x+y=4$$
$$y=3x+4$$

4. A partir de la representación baricéntrica obtenga el resto de las representaciones.

$$l:=\{r(6,8)+s(3,4): r,s\in\mathbb{R} \quad y \quad r+s=1\}$$

5. Considere las siguientes rectas:

$$\mathbf{r}=\begin{pmatrix}2\\6\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$$
$$y=\frac{3}{2}x+7$$
$$\{r(4,2)+s(5,6): r,s\in\mathbb{R} \quad y \quad r+s=1\}$$
$$(-3,2)\cdot(x,y)=8$$

¿Cuáles son paralelas?¿Hay alguna que sea perpendicular a las demás? Dibujelas todas.

0 s completado a las 7:54