Ayudantía del 29 de junio

Distancias entre puntos, rectas y planos

A petición del profesor, en esta entrada vamos a ver algunos aspectos de teoría. Vamos a retomar el tema de distancia para ver cómo podemos calcular distancias punto-punto, punto-recta, y distancias de un punto a un plano.

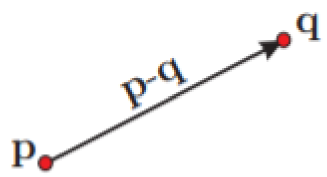
Distancia punto-punto

Las distancias entre puntos ya las habíamos platicado, como repaso podemos decir que dados dos puntos $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ se puede definir su distancia euclidiana, o simplemente su distancia, $d(\mathbf{p}, \mathbf{q})$, como la norma de su diferencia, es decir, como la magnitud del vector que lleva a uno en otro, i.e.

$$d(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = |\mathbf{p} - \mathbf{q}|$$

que explicitamente en coordenadas da la fórmula (en $\mathbb{R}^2$)

$$d\left(\left(x_1, y_1\right), \left(x_2, y_2\right)\right) = \sqrt{\left(x_1 - x_2\right)^2 + \left(y_1 - y_2\right)^2}.$$



Las distancia entre puntos cumple el siguiente teorema:

Teorema Para todos los vectores $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ se cumple que

$$\begin{aligned}
(\mathrm{M1}): &\quad \forall x \in A : d(x, x) = 0 \\
(\mathrm{M2}): &\quad \forall x, y, z \in A : d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z) \\
(\mathrm{M3}): &\quad \forall x, y \in A : d(x, y) = d(y, x) \\
(\mathrm{M4}): &\quad \forall x, y \in A : x \neq y \Longrightarrow d(x, y) > 0
\end{aligned}$$

Demostración

Prueba de M1

$$\begin{aligned} d_2(x,x) &= \left(\sum_{i=1}^{n}\left(d_{i'}\left(x_i,x_i\right)\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n} 0^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Entonces la distancia euclidiana d_2 cumple la propiedad M1 . $\square$

Prueba de M2

Sea:

$(1): \quad z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$

(2): todas las sumas sobre $i = 1, 2, \ldots, n$

$(3): \quad d_{i'}\left(x_i, y_i\right) = r_i$

$(4): \quad d_{i'}\left(y_i, z_i\right) = s_i$ Entonces, tenemos que probar que:

$\left(\sum\left(d_{i'}\left(x_i,y_i\right)\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum\left(d_{i'}\left(y_i,z_i\right)\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \geq \left(\sum\left(d_{i'}\left(x_i,z_i\right)\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}$

$$\begin{aligned} &\text{Tenemos que:} \\ d_2(x,y) + d_2(y,z) &= \left(\sum\left(d_{i'}\left(x_i,y_i\right)\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum\left(d_{i'}\left(y_i,z_i\right)\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{definición de } d_2 \\ &= \left(\sum r_i^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum s_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\geq \left(\sum\left(r_i+s_i\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{desigualdad de Minkowsky para sumas} \\ &= \left(\sum\left(d_{i'}\left(x_i,y_i\right)+d_{i'}\left(y_i,z_i\right)\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{definición de } r_i \text{ y } s_i \\ &\geq \left(\sum\left(d_{i'}\left(x_i,z_i\right)\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{pues } d_{i'} \text{ es un espacio métrico que cum} \\ &= d_2(x,z) \end{aligned}$$

Prueba de M3

$$\begin{aligned} d_2(x,y) &= \left(\sum\left(d_{i'}\left(x_i,y_i\right)\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\sum\left(d_{i'}\left(y_i,x_i\right)\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= d_2(y,x) \end{aligned}$$

Prueba de M4

$$\begin{aligned} & x \neq y \\ \rightsquigarrow \quad & \exists k \in [1 \ldots n] : x_k \neq y_k \\ \rightsquigarrow \quad & d_k\left(x_k, y_k\right) > 0 \\ \rightsquigarrow \quad & \left(\sum\left(d_{i'}\left(x_i, y_i\right)\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \quad > 0 \\ \rightsquigarrow \quad & d_2(x, y) \quad > 0 \end{aligned}$$

Espacio métrico es un conjunto en el que está definida una distancia que cumple con las cuatro propiedades del Teorema.

EJERCICIO 1.90 Da explicitamente con coordenadas la fórmula de la distancia en $\mathbb{R}^3$ y en $\mathbb{R}^n$.

EJERCICIO 1.91 Demuestra el Teorema **1.11.1.**

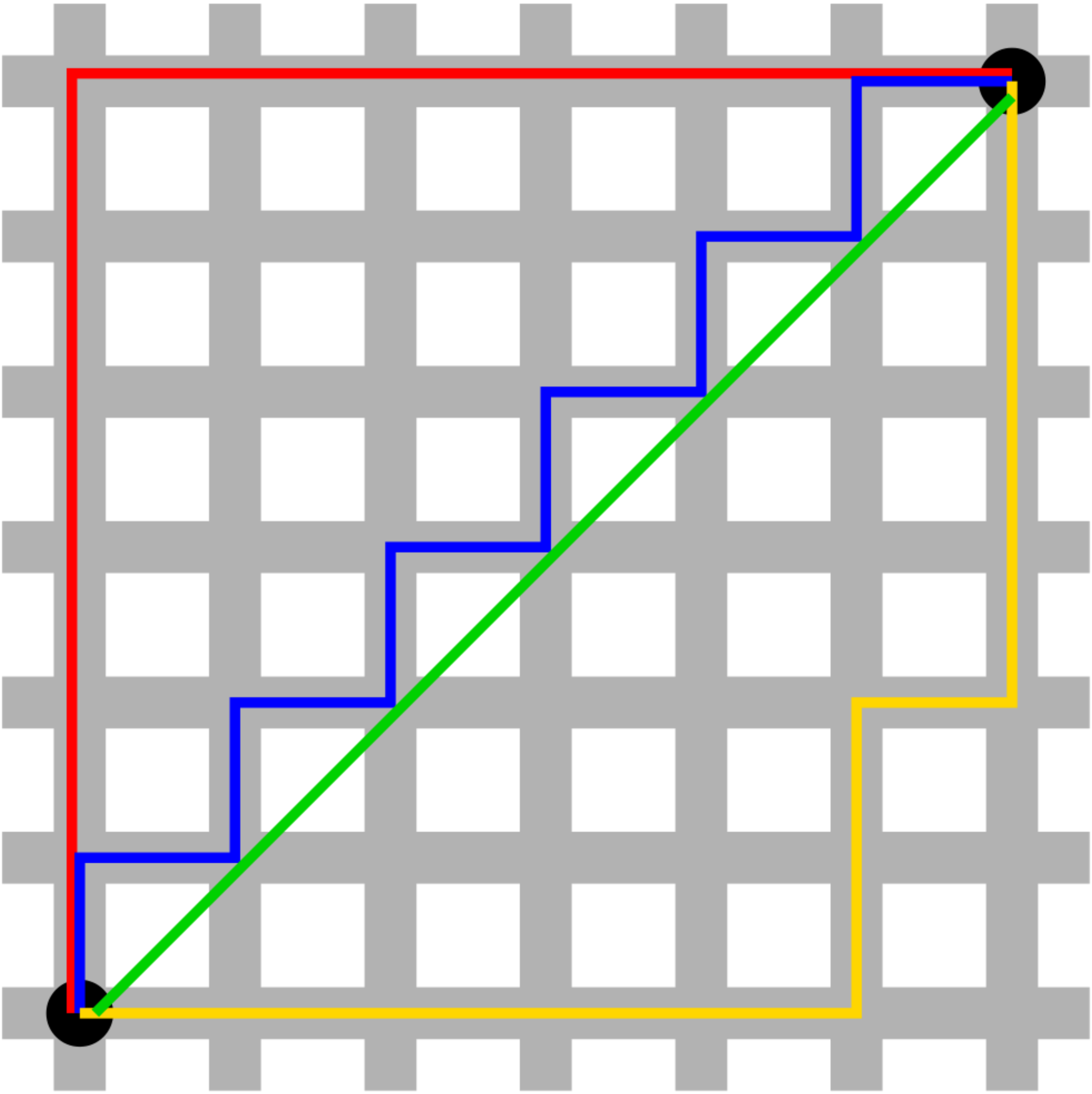
EJERCICIO 1.92 ¿Podría el lector mencionar algún espacio métrico distinto del que se definió arriba?

Métrica de Manhattan

(Un ejemplo cotidiano de otro espacio métrico). El plano con la métrica de "Manhattan" (en honor de la famosísima y bien cuadriculada ciudad) se define como $\mathbb{R}^2$ con la función de distancia

$$d_m\left(\left(x_1, x_2\right), \left(y_1, y_2\right)\right) := \left|y_1 - x_1\right| + \left|y_2 - x_2\right|;$$

pensando que para ir de un punto a otro sólo se puede viajar en dirección horizontal o vertical (como en las calles de una ciudad).

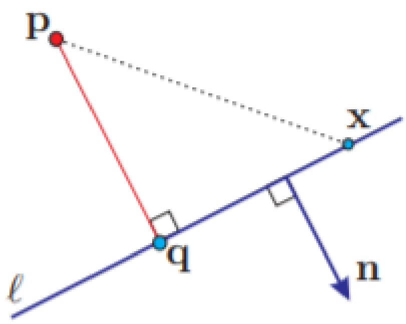


Distancia de un punto a una recta

Consideremos el siguiente problema. Nos dan una recta

$$\ell : \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{x} = c$$

y un punto $\mathbf{p}$ (que puede estar fuera o dentro de ella); y se nos pregunta cuál es la distancia de $\mathbf{p}$ a ℓ, que podemos denotar $d(\mathbf{p}, \ell)$



Es más fácil resovlerlo si lo pensamos junto con un problema que en apariencia es más complicado: ¿cuál es el punto ℓ más cercano a p? Llamémosle $\mathrm{q} \in \ell$, aunque sea incógnito. El meollo del asunto es que la recta por $\mathbf{p}$ y $\mathbf{q}$ debe ser ortogonal a ℓ. Es decir, si el segmento $\overline{\mathbf{pq}}$ es ortogonal a ℓ entonces q es el punto en ℓ más cercano a p. Para demostrarlo considérese cualquier otro punto $\mathbf{x} \in \ell$ y el triángulo rectángulo $\mathbf{x}, \mathbf{q}, \mathbf{p}$ y apliquése el Teorema de Pitágoras para ver que $d(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \geq d(\mathbf{q}, \mathbf{p})$. Como la dirección ortogonal a ℓ es precisamente $\mathbf{n}$, entonces debe existir $t \in \mathbb{R}$ tal que $\mathbf{q} - \mathbf{p} = t\mathbf{n}$. La nueva incógnita t nos servirá para medir la distancia de $\mathbf{p}$ a ℓ. Tenemos entonces que nuestras incógnitas $\mathbf{q}$ y t cumplen las siguientes ecuaciones

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{q} = c$$
$$\mathbf{q} - \mathbf{p} = t\mathbf{n},$$

la primera dice que $\mathbf{q} \in \ell$ y la segunda que el segmento $\overline{\mathbf{pq}}$ es ortogonal a ℓ.

Tomando el producto interior de $\mathbf{n}$ con la segunda ecuación, obtenemos

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{q} - \mathbf{n} \cdot \mathbf{p} = t(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n})$$

De donde, sustituyendo la primera ecuación, se puede despejar t (pues $\mathbf{n} \neq \mathbf{0}$) en puros términos conocidos:

$$t = \frac{c - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{p})}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}}$$

De aquí se deduce que

$$\mathbf{q} = \mathbf{p} + \left(\frac{c - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{p})}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}} \right) \mathbf{n}$$
$$\begin{aligned} d(\mathbf{p}, \ell) &= |t\mathbf{n}| = |t||\mathbf{n}| \\ &= \frac{|c - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{p})|}{|\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}|} |\mathbf{n}| = \frac{|c - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{p})|}{|\mathbf{n}|}. \end{aligned}$$

Puesto que sólo hemos usado las propiedades del producto interior, y la norma, sin ninguna referencia a las coordenadas, podemos generalizar a $\mathbb{R}^3$; o bien a $\mathbb{R}^n$ pensando que un hiperplano (definido por una ecuación lineal $\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} = c$) es una recta cuando $n = 2$ y es un plano cuando $n = 3$.

Proposicion Sea Π un hiperplano en $\mathbb{R}^n$ dado por la ecuación $\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} = c, y$ sea $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ cualquier punto. Entonces

$$d(\mathbf{p}, \Pi) = \frac{|c - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{p})|}{|\mathbf{n}|}$$

y la proyección ortogonal de $\mathbf{p}$ sobre Π (es decir, el punto más cercano $a\mathbf{p}$ en Π) es

$$\mathbf{q} = \mathbf{p} + \left(\frac{c - \mathbf{n} \cdot \mathbf{p}}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}}\right)\mathbf{n}$$

4. Encuentra la distancía de los puntos $P_1 = (0,5), P_2 = (4,0), P_3 = (-1,1)$ a la recta $L = \{t(4,3) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

Primero tranformemos la descripción parametria de la recta a una ecuación normal. Tencmos un vector $(4,3)$, cntonces el ortogonal es $(-3,4)$y el punto es $(0,0)$, entonces:

$$(-3,4) \cdot x = (-3,4) \cdot (0,0)$$
$$(-3,4) \cdot x = 0$$
$$-3x + 4y = 0$$

Ahora aplicando la formula:

$$\frac{|c - (n \cdot p)|}{|n|}$$

veremos la distancía del punto a la recta.

a) $P_1 = (0,5)$ Tencmos $\mathrm{p} = (0,5), \mathrm{c} = 0 \mathrm{y} \mathrm{n} = (-3,4)$

Primero saquemos $|n|$:

$$|n| = \sqrt{(-3)^2 + (4)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

La norma de n es 5 , ahora sustituyendo:

$$\frac{|0 - ((-3,4) \cdot (0,5)|}{5} \rightarrow \frac{|0 - (0+20)|}{5} \rightarrow \frac{20}{5} = 4$$

La distancía del punto 1 a la recta es de 4.

b)$P_2 = (4,0)$ Tenemos ahora $\mathrm{p} = (4,0)$, sustituyendo

$$\frac{|0 - ((-3,4) \cdot (4,0)|}{5} \rightarrow \frac{|0 - (-12+0)|}{5} \rightarrow \frac{12}{5}$$

La distancía del punto 1 a la recta es de $\frac{12}{5}$

c) $P_3 = (-1,1)$ Tencmos ahora $\mathrm{p} = (-1,1)$, sustituycndo

$$\frac{|0 - ((-3,4) \cdot (-1,1)|}{5} \rightarrow \frac{|0 - (3+4)|}{5} \rightarrow \frac{7}{5}$$

La distancía del punto 1 a la recta es de $\frac{7}{5}$

2. Encuentre la distancia del punto $P = (4,-4,3)$ al plano $2x - 2y + 5z + 8 = 0$.

El plano en su forma normal es:

$(2,-2,5)\cdot(x,y,z)=-8$

Luego, aplicamos la fórmula.

$$\frac{|c-(n\cdot p)|}{|n|}=\frac{|-8-31|}{\sqrt{34}}=\frac{39}{\sqrt{33}}=6.8$$

Distancia entre planos

Se toma un punto en el plano y se aplica la formula punto plano. Si son paralelos, y dadas ecuaciones $\mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\mathrm{C}z+\mathrm{D}_1=0$ y $\mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\mathrm{C}z+\mathrm{D}_2=0$ también se puede aplicar la siguiente fórmula:

$$d=\frac{|\mathrm{D}_2-\mathrm{D}_1|}{\sqrt{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2+\mathrm{C}^2}}$$

3. Encuentre la distancia entre los planos $2x+4y-4z-6=0$ y $x+2y-2z+9=0$.

Podemos ver que ambos planos son paralelos pues si multiplicamos la segunda ecuación por 2 obtenemos la primera.

Si aplicamos la ecuación vemos que:

$d=\frac{|18-(-6)|}{\sqrt{2^2+4^2+(-4)^2}}=\frac{|24|}{\sqrt{36}}=\frac{24}{6}=4$