Ayudantía del 21 de junio

En las dos ayudantías pasadas hicimos un repaso de las diferentes representaciones de rectas: vimos la forma funcional, paramétrica, baricéntrica y normal. Vimos cómo saltar entre estas diferentes representaciones y cómo podemos representar gráficamente cada una; como discutimos la clave está en manejar correctamente las operaciones entre vectores que nos permiten obtener la repsentación analítica de las rectas.

$$f(x) = y = mx + b \quad \text{forma funcional de la recta}$$
$$\ell := \{\mathbf{p} + \mathbf{t}\boldsymbol{v} \mid \mathbf{t} \in \mathbb{R}\} \quad \text{forma paramétrica de la recta}$$
$$\ell := \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \mathbf{d}^\perp \cdot \mathbf{x} = \mathbf{d}^\perp \cdot \mathbf{p} = \mathbf{c}\right\}$$
$$l := \{rP + sQ : r, s \in \mathbb{R} \quad y \quad r + s = 1\} \quad \text{forma baricéntrica de la recta}$$

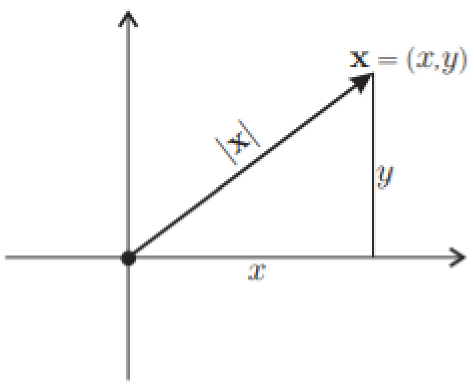
En la sesión de hoy vamos a hablar de norma de vectores y ángulos entre vectores.

Norma de un vector

Definición 1.9.1 Dado un vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, su *norma* (o *magnitud*) es el número real:

$$|\mathbf{v}| := \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}},$$

de tal manera que la norma es una función de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$.



Intuitivamente la norma de un vector nos dice qué tan largo es ese vector. Operacionalmente, podemos calcular al aplicar una raíz cuadrada a un producto punto entre dos vectores, que como podrás recordar es un escalar. La definición anterior, es equivalente a:

$$|\boldsymbol{v}|^2 = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}$$
$$|\boldsymbol{v}|^2 = (x, y) \cdot (x, y) = x^2 + y^2$$

Lo anterior se cumple para $\mathbb{R}^n$. Si limitamos nuestras operaciones a $\mathbb{R}^2$ es fácil ver que la norma de un vector $\mathbf{v} = (x, y)$ se puede escribir como:

$$|\boldsymbol{v}|^2 = x^2 + y^2$$

En $\mathbb{R}^3$, para un vector con coordenadas $\mathrm{v} = (x, y, z)$, la norma se escribe

$$|\boldsymbol{v}|^2 = \mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2 + z^2$$

Ángulo entre vectores

Antes de hacer algunos ejercicios sobre esta sección, extenderemos un poco nuestra forma de calcular productos punto. Como recordarás cuando empezamos a calcular productos punto dijimos que podían pensarse como la suma de la multiplicación entrada por entrada de cada uno de los elementos de los vectores. Esta forma de calcular el producto punto es muy útil, pero también nos conviene pensarlo partir del siguiente teorema:

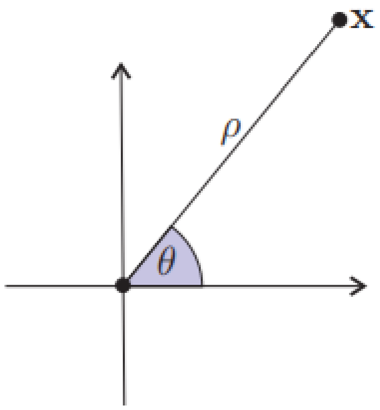
Teorema 1.25 *Sean* $\mathbf{u}$ *y* $\mathbf{v}$ *dos vectores en* $\mathbb{R}^2$ *y* α *el ángulo entre ellos, entonces*

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}| \cos \alpha.$$

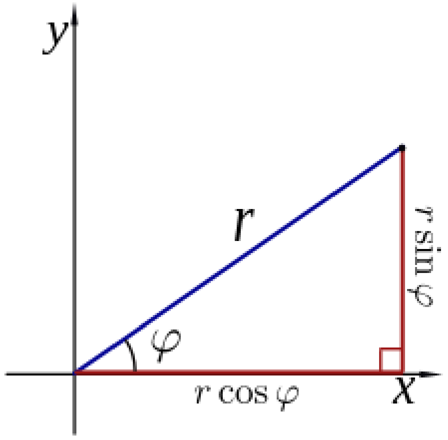
$$cos\alpha = \frac{u \cdot v}{|u||v|}$$

Coordenadas polares

Las coordenadas polares son un sistema de coordenadas bidimensional en el que cada punto del plano se determina por una distancia y un ángulo. Entonces, en lugar de representar a un punto $\mathbf{p}$ en $\mathbb{R}^2$ como el par ordenado (x, y), donde x y y son distancias hacia la izquierda o derecha para x y hacia arriba o abajo para y, lo que hacemos es que ubicamos al punto $\mathbf{p}$ a partir de un ángulo y una distancia:



Si recuerdan lo que vimos en nuestro repaso de trigonometría, podemos utilizar las funciones trigonométricas para pasar de un sistema de coordenadas a otro de las siguiente manera:



$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\theta = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \text{si } x > 0 \text{ y } y \geq 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } x = 0 \text{ y } y > 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi & \text{si } x < 0 \\ \frac{3\pi}{2} & \text{si } x = 0 \text{ y } y < 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + 2\pi & \text{si } x > 0 \text{ y } y < 0 \end{cases}$$

Es muy importante saber pasar de un sistema de coordenadas a otro: las reglas para transformar coordenadas cartesianas a polares y polares a cartesianas son las siguientes.

Distancia

Dados dos puntos $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ se puede definir su distancia euclidiana, o simplemente su distancia, $\mathrm{d}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$, como la norma de su diferencia, es decir, como la magnitud del vector que lleva a uno en otro, i.e.,

$$\mathrm{d}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = |\mathbf{p} - \mathbf{q}|$$

que explícitamente en coordenadas da la fórmula (en $\mathbb{R}^2$)

$$\mathrm{d}\left(\left(\mathrm{x}_1, \mathrm{y}_1\right), \left(\mathrm{x}_2, \mathrm{y}_2\right)\right) = \sqrt{\left(\mathrm{x}_1 - \mathrm{x}_2\right)^2 + \left(\mathrm{y}_1 - \mathrm{y}_2\right)^2}$$

Distancia de un punto a una recta

La ecuación vectorial de una recta es:

$$\mathbf{x} = \mathbf{a} + t\mathbf{n}$$

La distancia de un punto arbirtrario a esta recta es:

$$\operatorname{distance}(\mathbf{x} = \mathbf{a} + t\mathbf{n}, \mathbf{p}) = \|(\mathbf{p} - \mathbf{a}) - ((\mathbf{p} - \mathbf{a}) \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}\|$$

0. Dados los siguientes vectores calcule un vector ortogonal. Justifique su respuesta: $P(-3,4)$, $Q(2,5)$, $R(-5,-9)$, $S(2,6,8)$, $T(1,3,2)$.

$$P^{\perp}(4,3)$$
$$Q^{\perp}(-5,2)$$
$$R^{\perp}(9,-5)$$

$$(2,6,8) \cdot (x,y,z) = 0$$
$$2x + 6y + 8z = 0$$
$$S^{\perp}(-7,1,1)$$
$$(1,3,2) \cdot (x,y,z) = 0$$
$$x + 3y + 2z = 0$$
$$T^{\perp}(1,1,-2)$$

1. Sean $A(1,2)$, $B(3,5)$, $C(6,-2)$, $D(1,2,3)$, $E(5,8,9,6)$. Calcule las siguientes operaciones:

$$|A|, |B|, |C|, |D|, |E|$$

$$|A| = \sqrt{A \cdot A} = \sqrt{(1,2) \cdot (1,2)} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$

$$|B| = \sqrt{34}$$

$$|C| = \sqrt{40}$$

$$|D| = \sqrt{14}$$

$$|E| = \sqrt{5^2 + 8^2 + 9^2 + 6^2} = 206$$

2. ¿Cuál es el ángulo de x a y, cuando a) $x = (4, 6), y = (5, -2)$; b) $x = (1, 1), \mathbf{y} = (0, 1)$; c) $x = (\sqrt{3}, 2), \mathbf{y} = (1, 0)$

a)

$$\cos\alpha = \frac{(4,6) \cdot (5,-2)}{|(4,6)||(5,-2)|}$$

$$\cos\alpha = \frac{8}{\sqrt{52}\sqrt{29}}$$

$$\alpha = cos^{-1}\frac{8}{\sqrt{52}\sqrt{29}} = 78.11^o$$

b)

$$\cos\alpha = \frac{(1,1) \cdot (0,1)}{|(1,1)||(0,1)|}$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\alpha = cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}} = 45^o$$

c)

$$\cos\alpha = \frac{(\sqrt{3},1) \cdot (1,0)}{|(\sqrt{3},1)||(1,0)|}$$

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\alpha = cos^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2} = 30^o$$

3. Da las coordenadas (cartesianas) de los vectores cuyas coordenadas polares son $(\pi/2, 3), (\pi/4, \sqrt{2}), (\pi/6, 2), (\pi/6, 1)$.

a)

$$x = 3\cos\frac{\pi}{2} = 0$$
$$y = 3\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{2} = 3$$
$$(0,3)$$

b)

$$x = \sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4} = 1$$
$$y = \sqrt{2}\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{4} = 1$$
$$(1,1)$$

c)

$$x = 2\cos\frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$$
$$y = 2\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{6} = 1$$
$$(\sqrt{3},1)$$

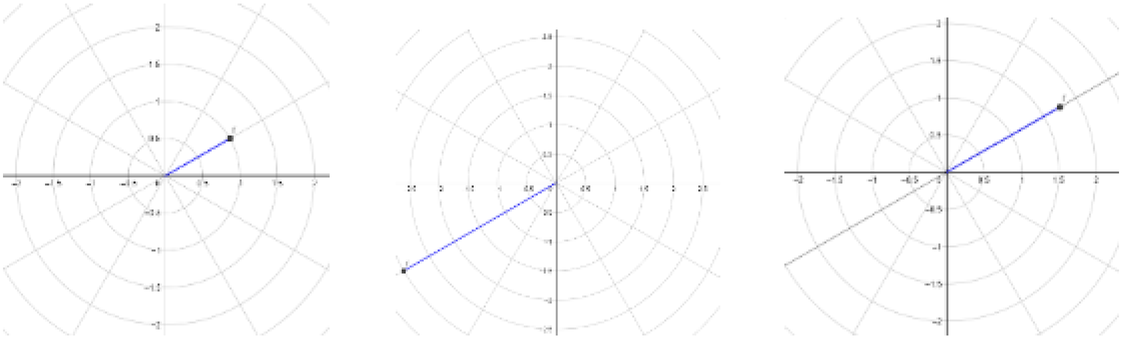
d)

$$x = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$y = \mathrm{sen}\,\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$
$$(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2})$$

4. Si tomamos (θ, ρ) como coordenadas polares, describe los subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ definidos por las ecuaciones $\theta =$ cte $('' \ \theta$ igual a una constante" $)$ y $\rho =$ cte

Si tomamos (θ, ρ) como coordenadas polares, describe los subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ definidos por las ecuaciones $\theta = cte$ ("θ igual a una constante") y $\rho = cte$.

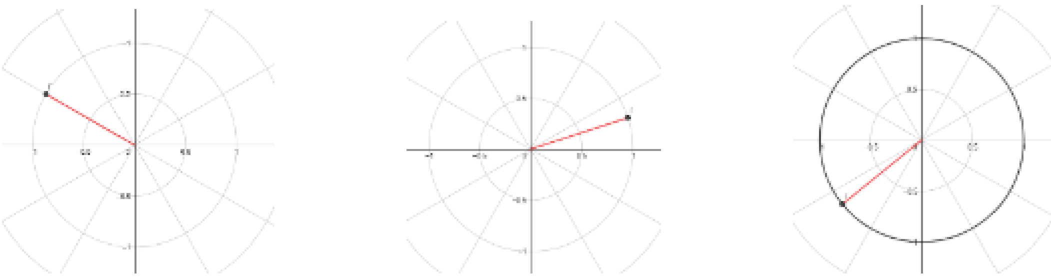
1. Considere el caso donde $\theta = cte$ y ρ es variable, es decir $(\theta, \lambda\rho) : \lambda \in \mathbb{R}$. Note que esto nos quiere decir que la distancia ρ puede escalarse cuanto se quiera respetando el ángulo formado de θ con respecto al eje de las abscisas



En otras palabras, lo que nos está queriendo describir es una recta de la forma

$$\mathcal{L} = (r \sin\theta, r\cos\theta) + \lambda(-r\sin\theta, -r\cos\theta)$$

2. Considere el caso donde θ es variable y $\rho = cte$, es decir $(\lambda\theta, \rho) : \lambda \in \mathbb{R}$. Como la distancia ρ es fija, el ángulo ρ al ser escalado formará el conjunto de puntos que definen a un círculo



Es decir, describe los puntos de la forma $P = (h, k)$ que cumplen con la ecuación

$$\mathcal{C} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid d(\mathbf{x}, P) = r\}$$

5. Escribe los vectores $(1, 0), (0, 1), (2, 1)$ y $(-1, 3)$ como combinación lineal de $\mathbf{u} = (3/5, 4/5)$ y $\boldsymbol{v} = (4/5, -3/5)$, es decir, como $t\mathbf{u} + s\boldsymbol{v}$ con t y s apropiadas.

Una combinación lineal tiene esta forma:

$$v = k_1 v_1 + k_2 v_2 + \cdots + k_n v_n = \sum_{i=1}^{n} k_i v_i$$

Este es el caso "largo" en $\mathbb{R}^2$ queremos llegar a algo de la siguiente forma:

$$(a, b) = t\mathbf{u} + \mathbf{s}\boldsymbol{v}$$

a)

$$(1, 0) = t\mathbf{u} + \mathbf{s}\boldsymbol{v}$$
$$(1, 0) = t(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}) + s(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5})$$
$$(1, 0) = (\frac{3t}{5}, \frac{4t}{5}) + (\frac{4s}{5}, -\frac{3s}{5})$$
$$(1, 0) = (\frac{3t}{5} + \frac{4s}{5}, \frac{4t}{5} - \frac{3s}{5})$$

Por lo tanto, tenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\frac{3t}{5} + \frac{4s}{5} = 1$$
$$\frac{4t}{5} - \frac{3s}{5} = 0$$

$$s = \frac{4}{5} \quad t = \frac{3}{5}$$

c)

$$(2, 1) = t\mathbf{u} + \mathbf{s}\boldsymbol{v}$$
$$(2, 1) = t(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}) + s(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5})$$
$$(2, 1) = (\frac{3t}{5}, \frac{4t}{5}) + (\frac{4s}{5}, -\frac{3s}{5})$$
$$(2, 1) = (\frac{3t}{5} + \frac{4s}{5}, \frac{4t}{5} - \frac{3s}{5})$$

Por lo tanto, tenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\frac{3t}{5} + \frac{4s}{5} = 2$$
$$\frac{4t}{5} - \frac{3s}{5} = 1$$

$$s = 1 \quad t = 2$$

Los incisos b) y d) se pueden discutir en la ayudantía si es necesario.

6. Obten la distancia entre los puntos $A(3, 4)$ y $B(8, 9)$; y entre los puntos $D(6, -3)$ y $T(3, 2)$.

Utilizando la distancia entre dos puntos tal como la vimos en estas notas:

$$|AB| = \sqrt{(3-8)^2 + (4-9)^2} = \sqrt{50}$$
$$|DT| = \sqrt{(6-3)^2 + (-3-2)^2} = \sqrt{34}$$

7. Da explícitamente con coordenadas la fórmula de la distancia en $\mathbb{R}^3$ y en $\mathbb{R}^n$.

Vamos a suponer que los puntos en $\mathbb{R}^3$ son el punto $p(p_1, p_2, p_3)$ y el punto $q(q_1, q_2, q_3)$.

$$d(p,q) = \sqrt{(p_1 - q_1)^2 + (p_2 - q_2)^2 + (p_3 - q_3)^2}$$

Vamos a suponer que los puntos en $\mathbb{R}^n$ son el punto $p(p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n)$ y el punto $q(q_1, q_2, q_3, \ldots, q_n)$.

$$d(p,q) = \sqrt{(p_1 - q_1)^2 + (p_2 - q_2)^2 + \cdots + (p_i - q_i)^2 + \cdots + (p_n - q_n)^2}$$