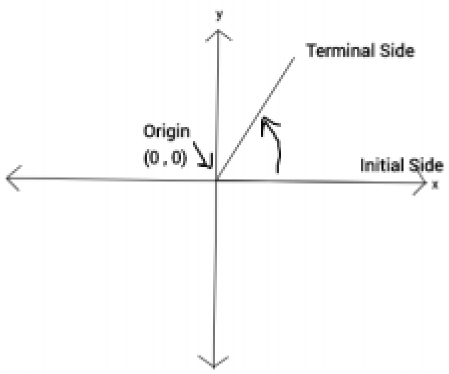
Repaso de trigonometría Parte 1

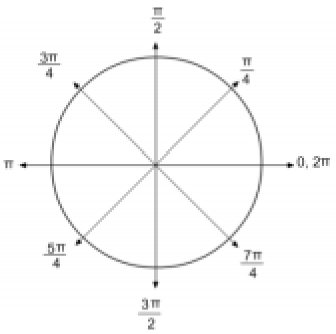
Durante las dos ayudantías de la primera semana, haremos un repaso rápido de algunos temas de trigonometría. Probablemente recuerden haber visto estos temas durante la preparatoria; trataremos de mantenerlo interesante mientras que refrescamos lo que sabemos.

Los ángulos son una medida de la apertura entre dos lados, uno inicial y uno terminal. Se pueden medir en grados o en radianes.

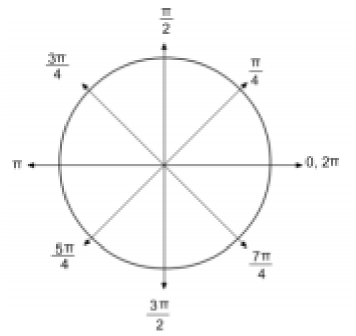


Un ángulo positivo es aquel que se mide en la dirección contraria a las manecillas del reloj y uno negativo es aquel que se mide en la dirección de las mencillas del reloj. Los ángulos, como recordarán, se pueden medir en grados o en radianes.

Si los ángulos se miden en grados, sabemos que 360 grados hacen una revolución.



Si se miden en radianes, sabemos que 2π radianes hacen una revolución.



Para pasar de ángulos a radianes es suficiente aplicar una regla de tres y podemos ver que:

$$1^\circ = \frac{\pi}{180}\text{radians}$$
$$\frac{180}{\pi}\text{ degrees } = 1\text{ radian}$$

1.
$$\text{Convertir } -\frac{7\pi}{3}\text{ radianes a grados}$$
$$-\frac{7\pi}{3}\cdot\frac{180}{\pi} = -\frac{1260}{3} = -420^\circ$$

2.
$$\text{Convertir } 60^\circ\text{ a radianes}$$
$$60\cdot(1\text{ degree })\frac{\pi}{180} = 60\cdot\frac{\pi}{180} = \frac{60\pi}{180} = \frac{\pi}{3}\text{ radian}$$

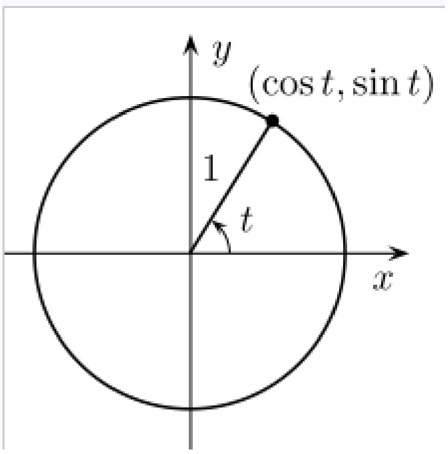
El círculo unitario es un círculo centrado en el origen que tiene radio 1. Como recordarán de algún otro curso, este círculo tiene por ecuación:

$$x^2 + y^2 = 1$$

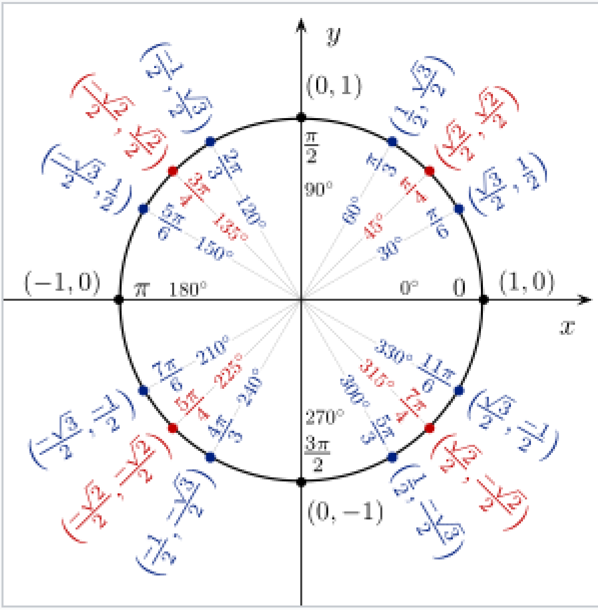
Si parametrizamos el círculo unitario, lo podemos escribir como:

$$\cos\theta = x \quad \text{and} \quad \sin\theta = y$$

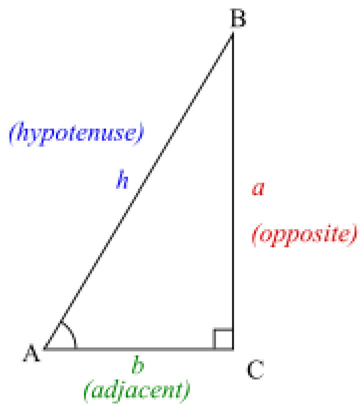
La parametrización, hace evidente la siguiente propiedad del círculo unitario:



De esta forma, el círculo unitario nos permite conocer el valor de algunas funciones trigonométricas evaluades en ciertos ángulos.



Las funciones trigonométricas son funciones reales que relacionan el ángulo de un triángulo rectángulo con una razón entre dos de sus lados.



sine

$$\sin\theta = \frac{a}{h} = \frac{\text{opposite}}{\text{hypotenuse}}$$

cosine

$$\cos\theta = \frac{b}{h} = \frac{\text{adjacent}}{\text{hypotenuse}}$$

tangent

$$\tan\theta = \frac{a}{b} = \frac{\text{opposite}}{\text{adjacent}}$$

cosecant

$$\csc\theta = \frac{h}{a} = \frac{\text{hypotenuse}}{\text{opposite}}$$

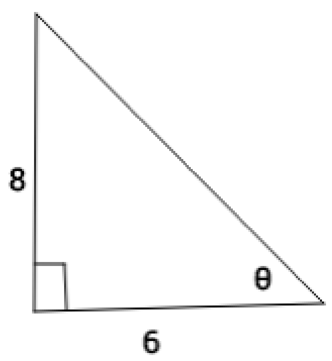
secant

$$\sec\theta = \frac{h}{b} = \frac{\text{hypotenuse}}{\text{adjacent}}$$

cotangent

$$\cot\theta = \frac{b}{a} = \frac{\text{adjacent}}{\text{opposite}}$$

3. Encuentre los valores de las funciones trigonométricas del siguiente triángulo rectángulo.



First use Pythagorean Theorem to find the hypotenuse

$a^2 + b^2 = c^2$, where a and b are legs of the right triangle and c is the hypotenuse

$$6^2 + 8^2 = c^2$$

$$36 + 64 = c^2$$

$$100 = c^2$$

$$\sqrt{100} = \sqrt{c^2}$$

$$10 = c$$

$$\sin\theta = \frac{o}{h} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5} \qquad \csc\theta = \frac{1}{\sin\theta} = \frac{5}{4}$$

$$\cos\theta = \frac{a}{h} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} \qquad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{5}{3}$$

$$\tan\theta = \frac{o}{a} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} \qquad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{3}{4}$$

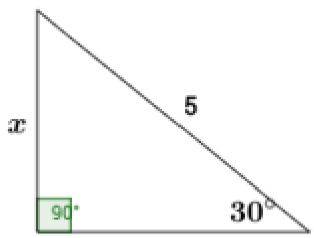
4.

$$\text{Encuentre } \sec\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2}$$

5.

$$\text{Encuentre } \cot 240^\circ = \frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

6. Con la información de la siguiente figura, encuentre el valor de x.



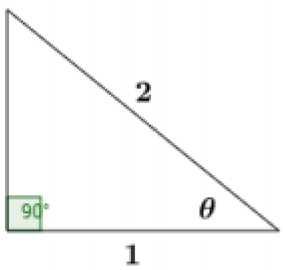
First we know that $\sin\theta = \frac{o}{h}$, therefore $\sin 30 = \frac{x}{5}$

Next we solve for x, $5 \cdot \sin 30 = x$

Use your TI calculator to compute $5 \cdot \sin 30$,

And you find out $x = 2.5$

7. Con la información de la siguiente figura, encuentre el valor de θ.



We are given information about the adjacent side and the hypotenuse, so we will use the cosine function

$$\cos\theta = \frac{1}{2}$$

$$cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 60$$

$$\theta = 60°$$

https://trigidentities.info TRIGONOMETRIC IDENTITIES

Co-function Identities

$\sin\theta = \cos(\pi/2-\theta)$
$\sec\theta = \csc(\pi/2-\theta)$
$\tan\theta = \cot(\pi/2-\theta)$

Supplement Angle Identities

$\sin(\pi-\theta) = \sin\theta$ $\quad\csc(\pi-\theta) = \csc\theta$
$\cos(\pi-\theta) = -\cos\theta$ $\quad\sec(\pi-\theta) = -\sec\theta$
$\tan(\pi-\theta) = -\tan\theta$ $\quad\cot(\pi-\theta) = -\cot\theta$

Negative Angle Identities

$\sin(-\theta) = -\sin\theta$ $\quad\csc(-\theta) = -\csc\theta$
$\cos(-\theta) = \cos\theta$ $\quad\sec(-\theta) = \sec\theta$
$\tan(-\theta) = -\tan\theta$ $\quad\cot(-\theta) = -\cot\theta$

$\sin(\pi+\theta) = -\sin\theta$ $\quad\csc(\pi+\theta) = -\csc\theta$
$\cos(\pi+\theta) = -\cos\theta$ $\quad\sec(\pi+\theta) = -\sec\theta$
$\tan(\pi+\theta) = \tan\theta$ $\quad\cot(\pi+\theta) = \cot\theta$

Addition and Subtraction Identities

$$\sin(A+B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B$$
$$\cos(A+B) = \cos A\cos B - \sin A\sin B$$
$$\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1-\tan A\tan B}$$
$$\sin(A-B) = \sin A\cos B - \cos A\sin B$$
$$\cos(A-B) = \cos A\cos B + \sin A\sin B$$
$$\tan(A-B) = \frac{\tan A - \tan B}{1+\tan A\tan B}$$

Quotient Identities

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \qquad \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{1}{\tan\theta}$$
$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \qquad \csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}$$

Pythagorean Identities

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$
$$\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$$
$$\cot^2\theta + 1 = \csc^2\theta$$

Double-Angle Identities

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$
$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$$
$$= 2\cos^2\theta - 1$$
$$= 1 - 2\sin^2\theta$$
$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$$

Half-Angle Identities

$$\sin\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$$
$$\cos\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$$
$$\tan\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}$$

https://trigidentities.info

Product Identities

$$\sin A\cos B = \frac{1}{2}\left(\sin(A+B) + \sin(A-B)\right)$$
$$\cos A\sin B = \frac{1}{2}\left(\sin(A+B) - \sin(A-B)\right)$$
$$\cos A\cos B = \frac{1}{2}\left(\cos(A+B) + \cos(A-B)\right)$$
$$\sin A\sin B = \frac{1}{2}\left(\cos(A-B) - \cos(A+B)\right)$$

Sum Identities

$$\sin A + \sin B = 2\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$
$$\sin A - \sin B = 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\sin\left(\frac{A-B}{2}\right)$$
$$\cos A + \cos B = 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$
$$\cos A - \cos B = -2\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\sin\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

8. Simplifique la siguiente expresión:

$$\sin x\cos x\sec x$$
$$\sin x\cos x\frac{1}{\cos x}$$
$$\sin x\cdot 1$$

Respuesta:

$$\sin x$$

9. Encuentre el valor de la expresión:

$$\sin^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ$$

Utilizando la identidad pitagórica, llegamos a la respuesta.

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

Respuesta:

$$1$$

10. Pruebe la siguiente identidad:

$$\cot \theta \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta = \cos^2 \theta$$

Podemos escribir la cotangente como:

$$\frac{\cos \theta}{\sin \theta} \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta = \cos^2 \theta$$

11. Determine el valor correcto de $cos(15)$ sin usar calculadora, sólo viendo el círculo unitario:

$$\begin{aligned} \cos(15^\circ) &= \cos\left(\frac{30^\circ}{2}\right) \\ &= \sqrt{\tfrac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} \\ &= \sqrt{\tfrac{2+\sqrt{3}}{4}} \\ &= \tfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} \end{aligned}$$

12. Pruebe la siguiente identidad trigonométrica:

$$\cot(x) + \tan(x) = \sec(x)\csc(x)$$

Respuesta:

$$\cot(x) + \tan(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} + \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

$$\frac{\cos(x)}{\sin(x)} + \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{\cos^2(x)}{\sin(x)\cos(x)} + \frac{\sin^2(x)}{\sin(x)\cos(x)}$$

$$\frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\sin(x)\cos(x)} = \frac{1}{\sin(x)\cos(x)}$$

$$\frac{1}{\sin(x)\cos(x)} = \left(\frac{1}{\sin(x)}\right)\left(\frac{1}{\cos(x)}\right)$$

$$\left(\frac{1}{\sin(x)}\right)\left(\frac{1}{\cos(x)}\right) = \sec(x)\csc(x)$$

13. Resuelva la siguiente integral:

$$\int \sin^2(3x)dx$$

Recordemos que:

$$\sin^2\theta = \frac{1-\cos(2\theta)}{2}$$

Por lo tanto:

$$\int \sin^2(3x)dx = \int \frac{1-\cos(2\cdot 3x)}{2}dx$$
$$\int \frac{1}{2}(1-\cos(6x))dx = \frac{1}{12}(6x-\sin(6x))+C$$

14. Encuentre el valor de $cos(105)$ sin usar calculadora, sólo con la imagen del círculo unitario.

$$\begin{aligned}\cos 105^\circ &= \cos(60^\circ+45^\circ) = \cos 60^\circ \cos 45^\circ - \sin 60^\circ \sin 45^\circ \\ &= \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{\sqrt{2}}{2} - \tfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\tfrac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \tfrac{\sqrt{2}}{4} - \tfrac{\sqrt{6}}{4} = \tfrac{1}{4}(\sqrt{2}-\sqrt{6})\end{aligned}$$

15. Probar la siguiente identidad trigonométrica:

$$\frac{1}{\tan(x)(1+\cos(2x))} = \csc(2x)$$

Respuesta:

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{\tan x(1+\cos 2x)} &= \tfrac{\cos x}{\sin x\left(\sin^2 x+\cos^2 x+\cos^2 x-\sin^2 x\right)} \\ &= \tfrac{1}{2\sin x\cos x} = \tfrac{1}{\sin 2x} = \csc 2x\end{aligned}$$

La siguiente ayudantía vamos a ver Ley de Senos y Cosenos y gráficas de funciones trigonométricas.