Universidad Europea del Atlántico

www.uneatlantico.es

Conteo y Probabilidad

Sumario

Conteo de Elementos de Conjuntos Disjuntos

Teorema 9.3.1 La regla de la suma

Suponga un conjunto finito A que es igual a la unión de k subconjuntos distintos mutuamente disjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_k$. Entonces,

$$N(A) = N(A_1) + N(A_2) + \cdots + N(A_k).$$

Teorema 9.3.2 La regla de la diferencia

Si A es un conjunto finito y B es un subconjunto de A, entonces

$$N(A - B) = N(A) - N(B).$$

Fórmula para la probabilidad del complemento de un evento

Si S es un espacio muestral finito y A es un evento en S, entonces

$$P(A^c) = 1 - P(A).$$

Conteo de Elementos de Conjuntos Disjuntos.

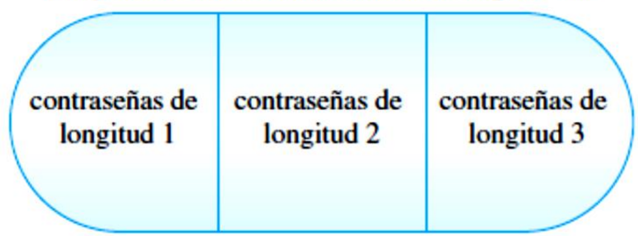
Ejemplo

Conteo de contraseñas con tres o menos letras

Una contraseña de acceso a la computadora consta de una a tres letras elegidas de las 26 letras del alfabeto con repeticiones permitidas. ¿Cuántas contraseñas diferentes son posibles?

Solución El conjunto de todas las contraseñas puede particionarse en subconjuntos conformados por los de longitud 1, los de longitud 2 y los de longitud 3, como se muestra en la figura 9.3.1.

Conjunto de todas las contraseñas de longitud ≤ 3



número de contraseñas de longitud 1 $= 26$ — ya que hay 26 letras en el alfabeto

número de contraseñas de longitud 2 $= 26^2$ — ya que formar esa palabra puede considerarse como un proceso de dos-pasos en el que hay 26 formas de realizar cada paso

número de contraseñas de longitud 3 $= 26^3$ — ya que formar dicha palabra puede considerarse como un proceso de tres-pasos en el que hay 26 formas de realizar cada paso.

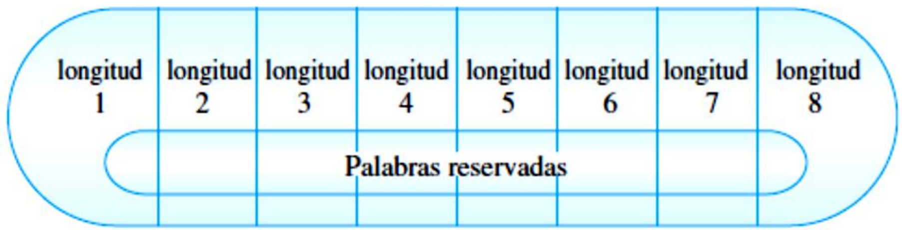
Por tanto el número total de contraseñas $= 26 + 26^2 + 26^3 = 18\,278$. ■

Conteo de Elementos de Conjuntos Disjuntos. Ejemplo

Número de identificadores *Python* de ocho o menos caracteres

En el lenguaje de programación *Python*, los identificadores deben empezar con uno de los 53 símbolos: ya sea una de las 52 letras del alfabeto romano minúsculas o mayúsculas o un carácter subrayado (_). El carácter inicial puede ser independiente, estar seguido de cualquier número de caracteres adicionales elegidos de un conjunto de 63 símbolos: los 53 símbolos permitidos como un carácter inicial y diez dígitos. Sin embargo, determinadas palabras clave, tales como *y*, *si*, *imprimir*, etc., se hacen a un lado y no se admitirán como identificadores. En una implementación de *Python* hay 31 palabras clave reservadas, ninguna de las cuales tiene más de ocho caracteres. ¿Cuántos identificadores *Python* hay de longitud menor o igual a ocho caracteres?

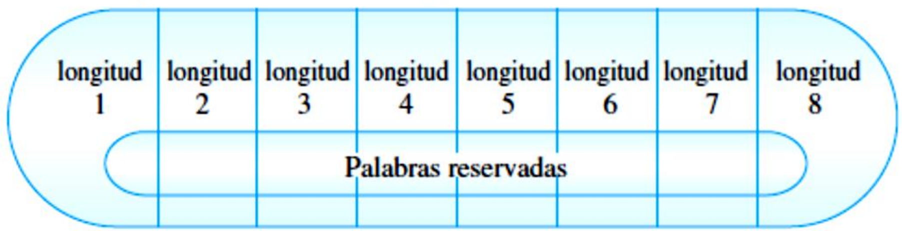
Conjunto de identificadores *Python* con ocho o menos caracteres



Conteo de Elementos de Conjuntos Disjuntos.

Ejemplo

Conjunto de identificadores *Python* con ocho o menos caracteres



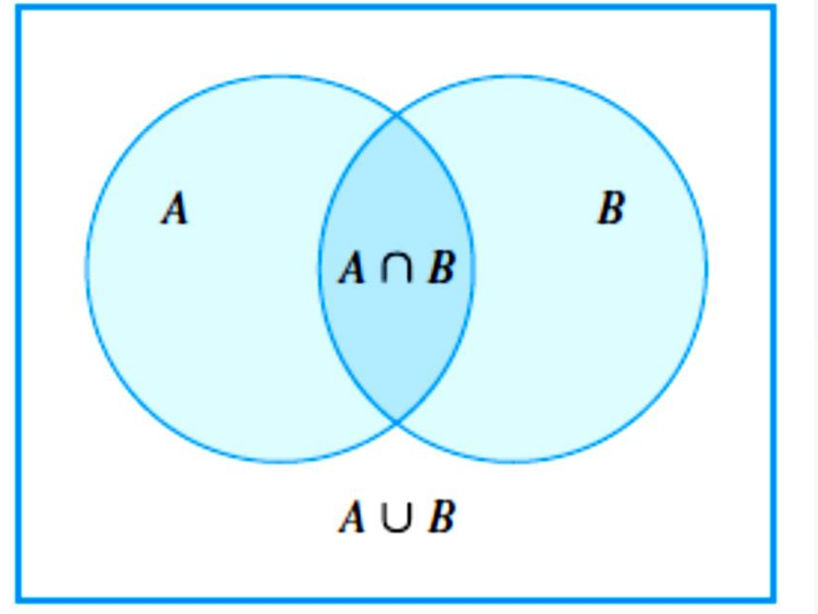
Así, por la regla de adición, que es el número de posibles identificadores *Python* con menos de ocho caracteres

$$53 + 53\cdot 63 + 53\cdot 63^2 + 53\cdot 63^3 + 53\cdot 63^4 + 53\cdot 63^5 + 53\cdot 63^6 + 53\cdot 63^7$$
$$= 53\left(\frac{63^8 - 1}{63 - 1}\right)$$
$$= 212\,133\,167\,002\,880.$$

Ahora están reservados 31 de estos identificadores potenciales, por la regla de la diferencia, el número real de identificadores *Python* con menos de ocho caracteres es

$$212\,133\,167\,002\,880 - 31 = 212\,133\,167\,002\,849.$$

Regla de Inclusión/Exclusión



Teorema 9.3.3 La regla de inclusión/exclusión de dos o tres conjuntos

Si A, B y C son conjuntos finitos cualesquiera, entonces

$$N(A \cup B) = N(A) + N(B) - N(A \cap B)$$

y

$$N(A \cup B \cup C) = N(A) + N(B) + N(C) - N(A \cap B) - N(A \cap C) - N(B \cap C) + N(A \cap B \cap C).$$

Regla de Inclusión/Exclusión. Ejemplo

Conteo del número de elementos en una intersección

Un profesor en una clase de matemáticas discretas pasa un formato pidiendo a los estudiantes que registren todos los cursos de matemáticas y de informática que han tomado recientemente. Encontrando que de un total de 50 alumnos de la clase,

30 tomaron precálculo;
18 tomaron cálculo;
26 tomaron Java;
9 tomaron tanto precálculo como cálculo;
16 tomaron tanto precálculo como Java;
8 tomaron tanto cálculo como Java;
47 tomaron al menos uno de los tres cursos.

Observe que cuando escribimos "30 estudiantes tomaron precálculo", entendemos que el número total de estudiantes que tomaron precálculo es 30 y nos permite la posibilidad de que algunos de estos estudiantes hubiese tomado uno o dos de los otros cursos. Si queremos decir que 30 estudiantes tomaron *sólo* precálculo (y no cualquiera de los otros cursos), lo diremos explícitamente.

a. ¿Cuántos estudiantes no tomaron ninguno de los tres cursos?

b. ¿Cuántos estudiantes tomaron los tres cursos?

c. ¿Cuántos estudiantes tomaron precálculo y cálculo pero no Java? ¿Cuántos estudiantes tomaron precálculo pero ni cálculo ni Java?

Regla de Inclusión/Exclusión. Ejemplo

Solución

a. Por la regla de diferencia, el número de estudiantes que no tomó ninguno de los tres cursos es igual al número de la clase menos el número que tomó al menos un curso. Por tanto el número de estudiantes que no tomó ninguno de los tres cursos es

$$50 - 47 = 3.$$

b. Sea

$$P = \text{el conjunto de estudiantes que tomaron precálculo}$$
$$C = \text{el conjunto de estudiantes que tomaron cálculo}$$
$$J = \text{el conjunto de estudiantes que tomaron Java.}$$

Entonces, por la regla de inclusión/exclusión,

$$N(P \cup C \cup J) = N(P) + N(C) + N(J) - N(P \cap C) - N(P \cap J) - N(C \cap J) + N(P \cap C \cap J)$$

Sustituyendo valores conocidos, obtenemos

$$47 = 30 + 26 + 18 - 9 - 16 - 8 + N(P \cap C \cap J).$$

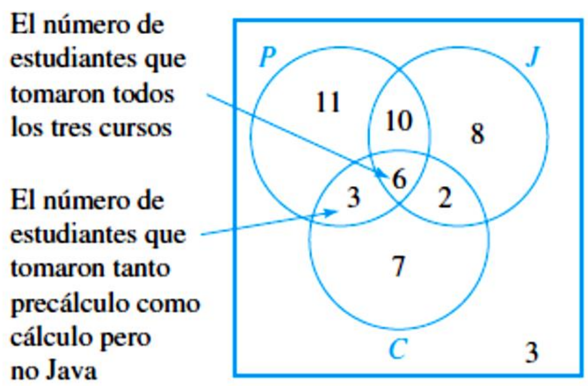
Resolviendo para $N(P \cap C \cap J)$ se obtiene

$$N(P \cap C \cap J) = 6.$$

Por tanto hay seis estudiantes que tomaron los tres cursos. En general, si conoce cualquiera de siete de los ocho términos en la fórmula de inclusión/exclusión de tres conjuntos, se puede resolver para el octavo término.

Regla de Inclusión/Exclusión. Ejemplo

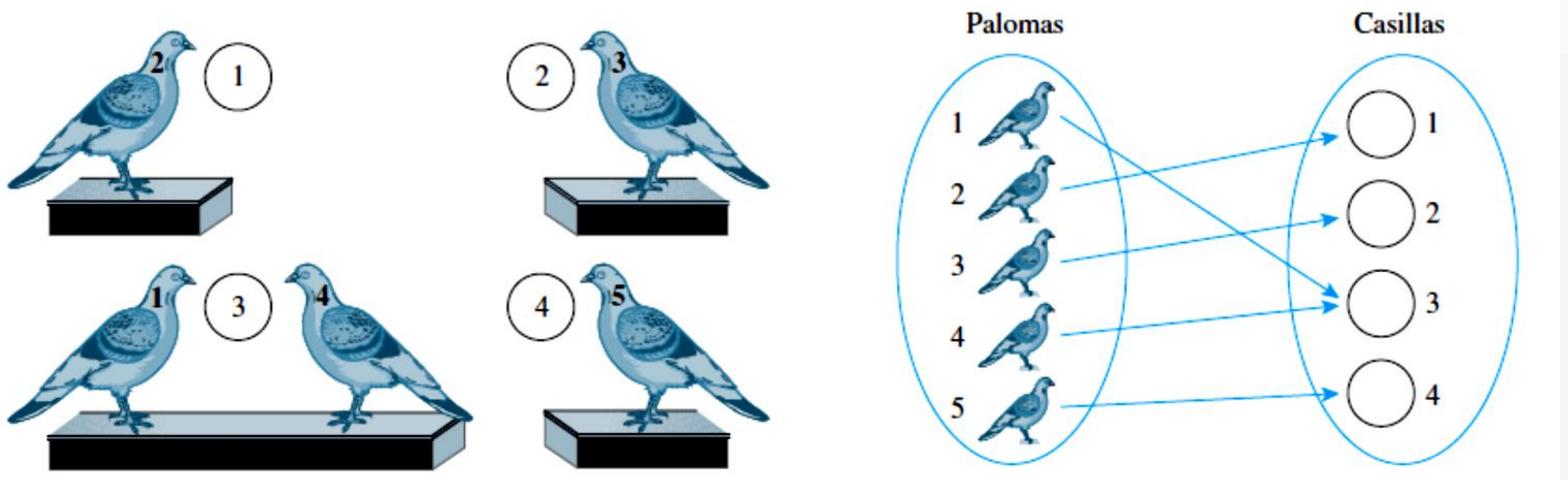
c. Para responder las preguntas del inciso *c*), observe el diagrama de la figura 9.3.6.



Principio de las Casillas

Principio de las casillas

Una función de un conjunto finito a un conjunto finito más pequeño no puede ser uno a uno: debe haber al menos dos elementos en el dominio que tengan la misma imagen en el codominio.



a) *b)*

Principio de las Casillas. Ejemplo

Selección de un par de enteros con una suma dada

Sea $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

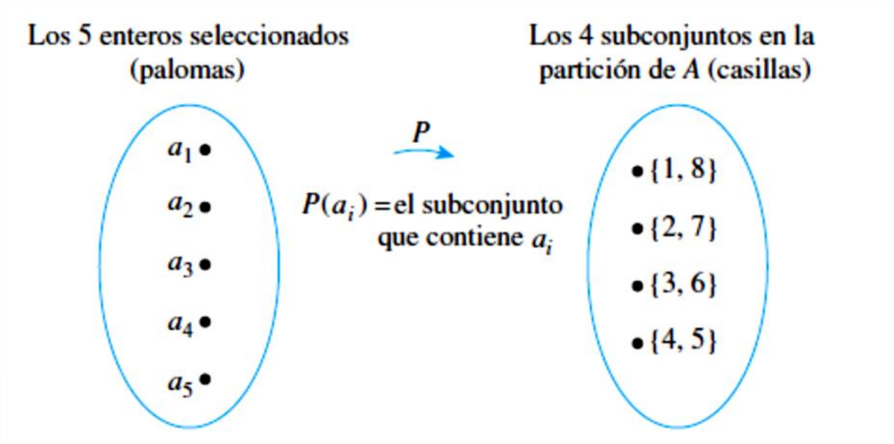
a. Si se seleccionan cinco enteros de A, ¿debe haber al menos un par de enteros que sumen 9?

b. Si se seleccionan cuatro enteros de A, ¿debe haber al menos un par de enteros que sumen 9?

Solución

a. Sí. Se particiona el conjunto A en los siguientes cuatro subconjuntos disjuntos:

$$\{1, 8\}, \quad \{2, 7\}, \quad \{3, 6\} \quad \text{y} \quad \{4, 5\}$$



Principio de las Casillas. Ejemplo

Selección de un par de enteros con una suma dada

Sea $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

a. Si se seleccionan cinco enteros de A, ¿debe haber al menos un par de enteros que sumen 9?

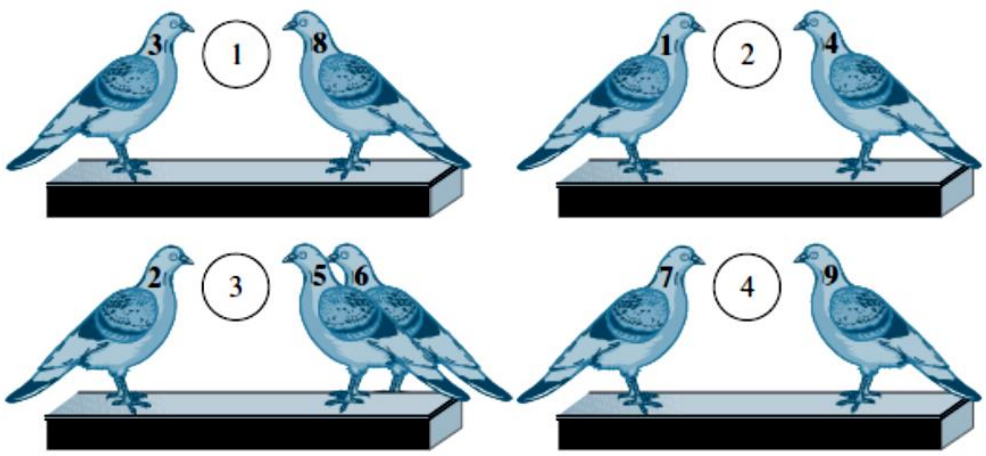
b. Si se seleccionan cuatro enteros de A, ¿debe haber al menos un par de enteros que sumen 9?

Solución

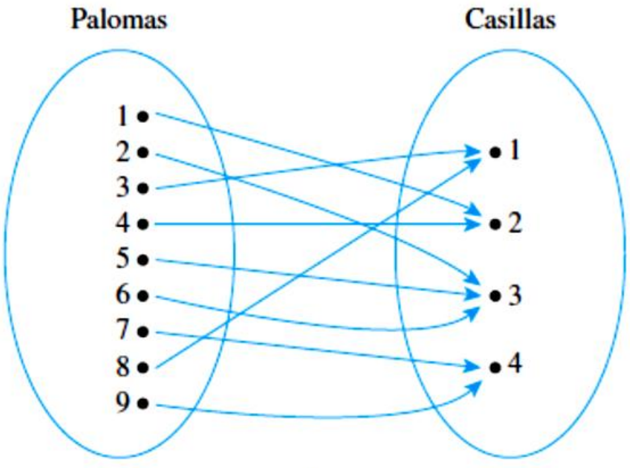
b. La respuesta es no. Se trata de un caso donde no se aplica el principio de las casillas; el número de palomas no es mayor que el número de casillas. Por ejemplo, si selecciona los números 1, 2, 3 y 4, entonces ya que la mayor suma de dos de estos números es 7, no hay dos de ellas que sumen 9. ■

Principio de las Casillas

Principio Generalizado de las Casillas



a)



b)

Principio de las casillas generalizado

Para cualquier función f de un conjunto finito X con n elementos a un conjunto finito Y con m elementos y para cualquier entero positivo k, si $k < n/m$, entonces hay algún $y \in Y$ tal que y es la imagen de al menos $k + 1$ elementos distintos de X.

Principio de las casillas generalizado (forma contrapositiva)

Para cualquier función f de un conjunto finito X con n elementos a un conjunto finito Y con m elementos y para cualquier entero positivo k, si cada $y \in Y$, $f^{-1}(y)$ tiene a lo más k elementos, entonces X tiene a lo más km elementos; en otras palabras, $n \leq km$.

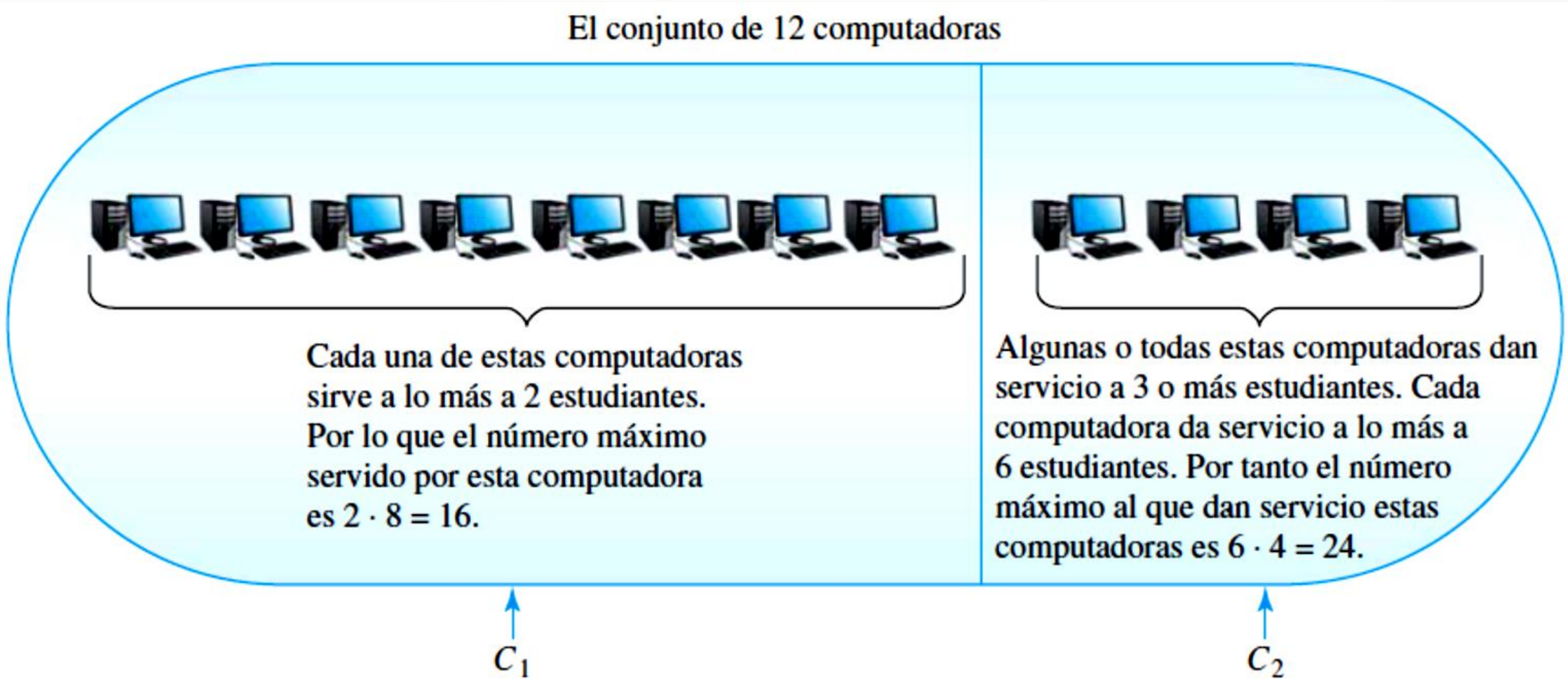
Principio Generalizado de las Casillas. Ejemplo

Utilizando la forma contrapositiva del principio de las casillas generalizado

Hay 42 estudiantes que comparten 12 computadoras. Cada alumno utiliza exactamente 1 computadora y ninguna computadora se utiliza por más de 6 estudiantes. Demuestre que al menos 5 computadoras son utilizadas por 3 o más estudiantes.

Solución

a. ***Utilización de un argumento por contradicción:*** Supongamos que no. Supongamos que se utilizan 4 o menos computadoras por 3 o más estudiantes. *[Se deducirá una contradicción.]*



Principio Generalizado de las Casillas. Ejemplo

Utilizando la forma contrapositiva del principio de las casillas generalizado

Hay 42 estudiantes que comparten 12 computadoras. Cada alumno utiliza exactamente 1 computadora y ninguna computadora se utiliza por más de 6 estudiantes. Demuestre que al menos 5 computadoras son utilizadas por 3 o más estudiantes.

Solución

b. ***Utilización de un argumento directo:*** Sea k el número de computadoras utilizadas por 3 o más estudiantes. *[Debemos demostrar que $k \geq 5$.]* Ya que cada computadora se utiliza a lo más por 6 estudiantes, estas computadoras se utilizan a lo más por $6k$ estudiantes (por la forma contrapositiva del principio de las casillas generalizado). Cada una de las $12 - k$ computadoras restantes se utiliza a lo más por 2 estudiantes. Por tanto, en conjunto, las computadoras son utilizadas a lo más por $2(12 - k) = 24 - 2k$ estudiantes (otra vez, por la forma contrapositiva del principio de las casillas generalizado). Por tanto el número máximo de alumnos al que le dan servicio las computadoras es $6k + (24 - 2k) = 4k + 24$. Ya que a 42 estudiantes se le da servicio con las computadoras, $4k + 24 \geq 42$. Despejando a k se obtiene que $k \geq 4.5$ y ya que k es un entero, esto implica que $k \geq 5$ *[como se quería demostrar]*. ■

Combinaciones

• Definición

Sean n y r enteros no negativos con $r \leq n$. Una ***r*-combinación** de un conjunto de n elementos es un subconjunto de r de los n elementos. Como se indica en la sección 5.1, el símbolo

$$\binom{n}{r},$$

que se lee "de n elija r", denota el número de subconjuntos de tamaño r (r-combinaciones) que se puede elegir de un conjunto de n elementos.

Subconjuntos de un Conjunto

Combinaciones. Ejemplo

3-combinaciones

Sea $S = \{\text{Ann, Bob, Cyd, Dan}\}$. Cada comité formado por tres de las cuatro personas en S es una 3-combinación de S.

a. Enumere todas esas 3-combinaciones de S. b. ¿A qué es igual $\binom{4}{3}$?

Solución

a. Cada 3-combinación de S es un subconjunto de S de tamaño 3. Pero cada subconjunto de tamaño 3 puede obtenerse sacando uno de los elementos de S. Las 3-combinaciones son

$\{\text{Bob, Cyd, Dan}\}$ sale Ann
$\{\text{Ann, Cyd, Dan}\}$ sale Bob
$\{\text{Ann, Bob, Dan}\}$ sale Cyd
$\{\text{Ann, Bob, Cyd}\}$ sale Dan.

b. Ya que $\binom{4}{3}$ es el número de 3-combinaciones de un conjunto con cuatro elementos, por el inciso *a*), $\binom{4}{3} = 4$. ■

Subconjuntos de un Conjunto

Combinaciones

Teorema 9.5.1

El número de subconjuntos de tamaño r (o r-combinaciones) que se pueden elegir entre un conjunto de n elementos, $\binom{n}{r}$, está dado por la fórmula

$$\binom{n}{r} = \frac{P(n,r)}{r!} \qquad \text{primera versión}$$

o, de forma equivalente,

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} \qquad \text{segunda versión}$$

donde n y r son enteros no negativos con $r \leq n$.

Combinaciones. Ejemplo

Problemas de mano de póquer

El juego de póquer se juega con una baraja ordinaria de cartas (vea el ejemplo 9.1.1). A varias manos de póquer de cinco cartas se le dan nombres especiales y ciertas manos de póquer le ganan a otras manos de póquer. A continuación se enumeran las manos de póquer con nombres de mayor a menor.

a. ¿Cuántas manos de póquer de cinco cartas contienen dos pares?

b. Si se saca aleatoriamente una mano de cinco cartas de una baraja ordinaria de cartas, ¿cuál es la probabilidad de que la mano contenga dos pares?

Combinaciones. Ejemplo

Problemas de mano de póquer

Solución

a. Considere la formación de una mano con dos pares como un proceso de cuatro pasos:

Paso 1: Elija las dos denominaciones de los pares.

Paso 2: Elija las dos cartas de la denominación más pequeña.

Paso 3: Elija las dos cartas de la denominación más grande.

Paso 4: Elija una carta de las restantes.

El número de formas de realizar el paso 1 es $\binom{13}{2}$ ya que hay 13 denominaciones en total. El número de formas de realizar los pasos 2 y 3 es $\binom{4}{2}$ ya que hay cuatro cartas de cada denominación, una en cada palo. El número de formas de realizar el paso 4 es $\binom{44}{1}$ ya que la quinta carta se elige de las once denominaciones no incluidas en el par y hay cuatro cartas de cada denominación. Así,

$$\begin{bmatrix}\text{número total de manos}\\ \text{con dos pares}\end{bmatrix} = \binom{13}{2}\binom{4}{2}\binom{4}{2}\binom{44}{1}$$

$$= 78 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 44 \;=\; 123\,552.$$

Combinaciones con Repetición

• Definición

Una ***r*-combinación con repetición permitida** o **multiconjunto de tamaño *r***, elegida de un conjunto X de n elementos es una selección no ordenada de elementos tomados de X con repetición permitida. Si $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ escribimos una r-combinación con repetición permitida o multiconjunto de tamaño r, como $[x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_r}]$ donde cada x_{i_j} está en X y algunos de los x_{i_j} pueden ser iguales entre sí.

Teorema 9.6.1

El número de r-combinaciones con repetición permitida (multiconjuntos de tamaño r) que se pueden seleccionar de un conjunto de n elementos es

$$\binom{r+n-1}{r}.$$

Este es igual al número de formas en que se pueden seleccionar r objetos de n categorías de objetos con repetición permitida.

Combinaciones con Repetición. Ejemplo

Cuantas fichas tiene un dominó cubano

Solución

$$nCr = \frac{(10+2-1)!}{2!\,(10+2-1-2)!} = 55$$

Subconjuntos de un Conjunto

Guía para Elegir que Fórmula Usar

	Importa el orden	No importa el orden
Repetición permitida	n^k	$\binom{k+n-1}{k}$
Repetición no permitida	$P(n, k)$	$\binom{n}{k}$

Teorema Binomial

Teorema 9.7.2 Teorema binomial

Dados cualesquiera números reales a y b y cualquier entero no negativo n,

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$
$$= a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1} a^1 b^{n-1} + b^n.$$

• Definición

Para cualquier número real a y cualquier entero no negativo n, las **potencias enteras no negativas de *a*** se definen como sigue:

$$a^n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ a \cdot a^{n-1} & \text{si } n > 0 \end{cases}$$

Teorema Binomial. Ejemplo

Sustituyendo en el teorema binomial

Desarrolle las siguientes expresiones utilizando el teorema binomial:

a. $(a+b)^5$ b. $(x-4y)^4$

Solución

$$\text{a. } (a+b)^5 = \sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k} a^{5-k} b^k$$

$$= a^5 + \binom{5}{1} a^{5-1}b^1 + \binom{5}{2} a^{5-2}b^2 + \binom{5}{3} a^{5-3}b^3 + \binom{5}{4} a^{5-4}b^4 + b^5$$

$$= a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

$$\text{b. } (x-4y)^4 = \sum_{k=0}^{4} \binom{4}{k} x^{4-k}(-4y)^k$$

$$= x^4 + \binom{4}{1} x^{4-1}(-4y)^1 + \binom{4}{2} x^{4-2}(-4y)^2 + \binom{4}{3} x^{4-3}(-4y)^3 + (-4y)^4$$

$$= x^4 + 4x^3(-4y) + 6x^2(16y^2) + 4x^1(-64y^3) + (256y^4)$$

$$= x^4 - 16x^3y + 96x^2y^2 - 256xy^3 + 256y^4 \quad \blacksquare$$

Universidad
Europea
del Atlántico

www.uneatlantico.es