Universidad Europea del Atlántico

www.uneatlantico.es

Recurrencia

Sumario

1. Relaciones de Recurrencia

Objetivos

- Escribir términos de sucesiones de manera explícita
- Ver ejemplos de sucesiones recurrentes
- Solucionar sucesiones recurrentes por iteración
- Relaciones lineales de recurrencia de segundo orden

Relaciones de Recurrencia

• Definición

Una **relación de recurrencia** para una sucesión $a_0, a_1, a_2, \ldots$ es una fórmula que relaciona cada término de a_k con algunos de sus predecesores $a_{k-1}, a_{k-2}, \ldots, a_{k-i}$ donde i es un número entero con $k - i \geq 0$. Las **condiciones iniciales** para una relación de recurrencia especifican los valores de $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}$, si i es un entero fijo, o $a_0, a_1, \ldots a_m$, donde m es un número entero con $m \geq 0$, si i depende de k.

Relaciones de Recurrencia. Ejemplo

Sucesiones que satisfacen la misma relación de recurrencia

Sea $a_1, a_2, a_3, \ldots$ y $b_1, b_2, b_3, \ldots$ que satisfacen la relación de recurrencia que el término k-ésimo es igual a 3 veces el $(k-1)$-ésimo término para todo entero $k \geq 2$:

$$1) \quad a_k = 3a_{k-1} \quad \text{y} \quad b_k = 3b_{k-1}.$$

Pero supongamos que las condiciones iniciales para las sucesiones son diferentes:

$$2) \quad a_1 = 2 \quad \text{y} \quad b_1 = 1.$$

Determine: *a*) a_2, a_3, a_4 y *b*) b_2, b_3, b_4.

Solución

a. $a_2 = 3a_1 = 3 \cdot 2 = 6$
$a_3 = 3a_2 = 3 \cdot 6 = 18$
$a_4 = 3a_3 = 3 \cdot 18 = 54$

b. $b_2 = 3b_1 = 3 \cdot 1 = 3$
$b_3 = 3b_2 = 3 \cdot 3 = 9$
$b_4 = 3b_3 = 3 \cdot 9 = 27$

Por tanto $a_1, a_2, a_3, \ldots$ comienza en $2, 6, 18, 54, \ldots$ y
$b_1, b_2, b_3, \ldots$ comienza en $1, 3, 9, 27, \ldots$

Relaciones de Recurrencia. Ejemplo

Demostración que una sucesión dada por una fórmula explícita satisface una relación de recurrencia

La sucesión de **números de Catalan**, llamada así por el matemático belga Eugène Catalan (1814-1894), aparece en una notable variedad de contextos diferentes en matemáticas discretas. Se puede definir de la siguiente manera: Para cada entero $n \geq 1$,

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

a. Encuentre C_1, C_2 y C_3.

b. Muestre que esta sucesión satisface la relación de recurrencia $C_k = \dfrac{4k-2}{k+1}C_{k-1}$ para todo entero $k \geq 2$

Solución

a. $C_1 = \frac{1}{2}\binom{2}{1} = \frac{1}{2}\cdot 2 = 1$, $C_2 = \frac{1}{3}\binom{4}{2} = \frac{1}{3}\cdot 6 = 2$, $C_3 = \frac{1}{4}\binom{6}{3} = \frac{1}{4}\cdot 20 = 5$

Relaciones de Recurrencia. Ejemplo

b. Para obtener el k-ésimo y el $(k-1)$-ésimo términos de la sucesión, simplemente sustituimos k y $k-1$ en lugar de n en la fórmula explícita para $C_1, C_2, C_3, \ldots$.

$$C_k = \frac{1}{k+1}\binom{2k}{k}$$

$$C_{k+1} = \frac{1}{(k-1)+1}\binom{2(k-1)}{k-1} = \frac{1}{k}\binom{2k-2}{k-1}.$$

Relaciones de Recurrencia. Ejemplo

Después, comience con el lado derecho de la relación de recurrencia y transforme el lado izquierdo: para cada entero $k \geq 2$,

$$\frac{4k-2}{k+1}C_{k-1} = \frac{4k-2}{k+1}\left[\frac{1}{k}\binom{2k-2}{k-1}\right]$$ sustituyendo

$$= \frac{2(2k-1)}{k+1}\cdot\frac{1}{k}\cdot\frac{(2k-2)!}{(k-1)!(2k-2-(k-1))!}$$ por la fórmula de n elija r

$$= \frac{1}{k+1}\cdot(2(2k-1))\cdot\frac{(2k-2)!}{(k(k-1)!)(k-1)!}$$ reordenando los factores

$$= \frac{1}{k+1}\cdot(2(2k-1))\cdot\frac{1}{k!(k-1)!}\cdot(2k-2)!\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{k}\cdot 2k.$$ ya que $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{k}\cdot 2k = 1$

$$= \frac{1}{k+1}\cdot\frac{2}{2}\cdot\frac{1}{k!}\cdot\frac{1}{(k-1)!}\cdot\frac{1}{k}\cdot(2k)\cdot(2k-1)\cdot(2k-2)!$$ reordenando los factores

$$= \frac{1}{k+1}\cdot\frac{(2k)!}{k!k!}$$ ya que $k(k-1)! = k!$, $\frac{2}{2} = 1$ y $2k\cdot(2k-1)\cdot(2k-2)! = (2k)!$

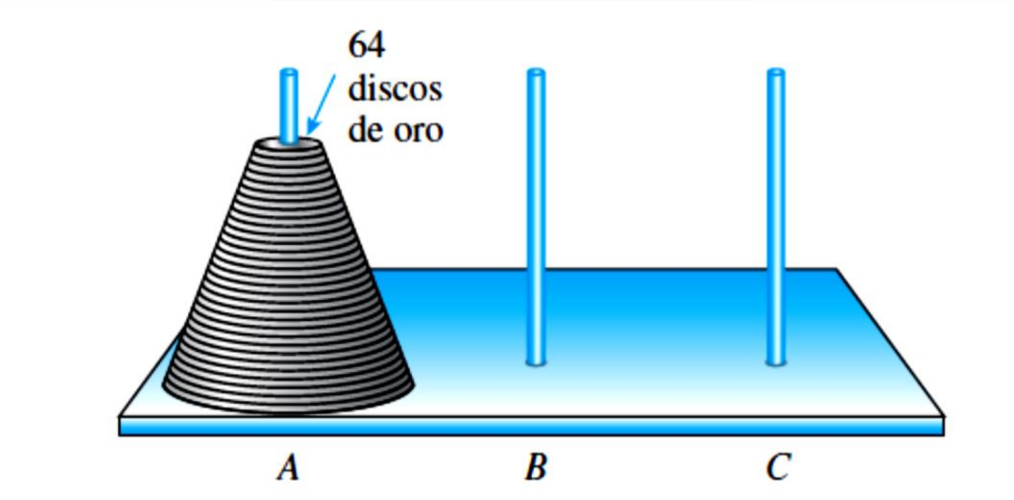
$$= \frac{1}{k+1}\binom{2k}{k}$$ por la fórmula de n elija r

$$= C_k$$ por definición de $C_1, C_2, C_3, \ldots$.

■

Sucesiones Recursivas. Torre de Hanoi

Cortesía de Paul Stockmeyer



El rompecabezas ofrece un premio de diez mil francos (unos 34 000 dólares americanos de hoy) a cualquiera que pudiera mover una torre de 64 discos a mano siguiendo las reglas del juego.

Sucesiones Recursivas. Torre de Hanoi

Solución Una manera elegante y eficiente para resolver este problema es pensar de forma recursiva. Supongamos que, de alguna manera u otra, se ha encontrado la manera más eficiente para la transferencia de un poste de $k - 1$ discos uno a uno de un poste a otro, obedeciendo la restricción de nunca colocar un disco más grande en la parte superior de uno más pequeño. ¿Cuál es la forma más eficiente de transferir de un poste de k discos a otro? La respuesta se esboza en la figura 5.6.3, donde el poste A es el poste inicial y el poste C es el poste objetivo y se describe de la siguiente manera:

Paso 1: Transfiera la parte superior de $k - 1$ discos de un poste A al poste B. Si $k > 2$, para la ejecución de este paso se requerirá un número de movimientos de los discos individuales entre los tres postes. Pero al momento de pensar de forma recursiva no se detenga en imaginar los detalles de cómo se producen esos movimientos.

Paso 2: Mueva el disco de la parte inferior del poste A al poste C.

Paso 3: Transfiera $k - 1$ discos de la parte superior del poste B al poste C. (De nuevo, si $k > 2$, la ejecución de este paso requerirá de más de un movimiento.)

Sucesiones Recursivas. Torre de Hanoi

La condición inicial o básica, de esta recursión se encuentra utilizando la definición de la sucesión. Debido a que sólo se necesita un movimiento para mover un disco de un poste a otro,

$$m_1 = \left[\begin{array}{l} \text{el número mínimo de movimientos necesarios} \\ \text{para mover una torre de un disco de un poste a otro} \end{array} \right] = 1.$$

De ahí que la especificación completa la recursividad de la sucesión $m_1, m_2, m_3, \ldots$ es la siguiente:

Para todo entero $k \geq 2$,

1) $m_k = 2m_{k-1} + 1$ relación de recurrencia

2) $m_1 = 1$ condiciones iniciales

Aquí hay un cálculo de los siguientes cinco términos de la sucesión:

3) $m_2 = 2m_1 + 1 = 2 \cdot 1 + 1 = 3$ por 1) y 2)

4) $m_3 = 2m_2 + 1 = 2 \cdot 3 + 1 = 7$ por 1) y 3)

5) $m_4 = 2m_3 + 1 = 2 \cdot 7 + 1 = 15$ por 1) y 4)

6) $m_5 = 2m_4 + 1 = 2 \cdot 15 + 1 = 31$ por 1) y 5)

7) $m_6 = 2m_5 + 1 = 2 \cdot 31 + 1 = 63$ por 1) y 6)

Sucesiones Recursivas. Números de Fibonacci

Números de Fibonacci

Uno de los primeros ejemplos de una sucesión definida de forma recursiva surge en los escritos de Leonardo de Pisa, más conocido como Fibonacci, que era el más grande matemático europeo de la Edad Media. En 1202 Fibonacci plantea el siguiente problema:

Un par de conejos (macho y hembra) nace a principios de año. Supongamos las siguientes condiciones:

1. Los pares de conejos no son fértiles durante su primer mes de vida, pero a partir de entonces dan a luz a un nuevo par macho/hembra a fines de cada mes.
2. No mueren conejos.

¿Cuántos conejos habrá al final del año?

1) $F_k = F_{k-1} + F_{k-2}$ relación de recurrencia

2) $F_0 = 1 \qquad F_1 = 1$ condiciones iniciales

Para responder a la pregunta de Fibonacci, calculamos F_2, F_3 y así sucesivamente hasta F_{12}:

Sucesiones Recursivas. Números de Fibonacci

Números de Fibonacci

$$
\begin{array}{lllll}
3) & F_2 = F_1 + F_0 & = 1 + 1 & = 2 & \text{por 1) y 2)} \\
4) & F_3 = F_2 + F_1 & = 2 + 1 & = 3 & \text{por 1), 2) y 3)} \\
5) & F_4 = F_3 + F_2 & = 3 + 2 & = 5 & \text{por 1), 3) y 4)} \\
6) & F_5 = F_4 + F_3 & = 5 + 3 & = 8 & \text{por 1), 4) y 5)} \\
7) & F_6 = F_5 + F_4 & = 8 + 5 & = 13 & \text{por 1), 5) y 6)} \\
8) & F_7 = F_6 + F_5 & = 13 + 8 & = 21 & \text{por 1), 6) y 7)} \\
9) & F_8 = F_7 + F_6 & = 21 + 13 & = 34 & \text{por 1), 7) y 8)} \\
10) & F_9 = F_8 + F_7 & = 34 + 21 & = 55 & \text{por 1), 8) y 9)} \\
11) & F_{10} = F_9 + F_8 & = 55 + 34 & = 89 & \text{por 1), 9) y 10)} \\
12) & F_{11} = F_{10} + F_9 & = 89 + 55 & = 144 & \text{por 1), 10) y 11)} \\
13) & F_{12} = F_{11} + F_{10} & = 144 + 89 & = 233 & \text{por 1), 11) y 12)}
\end{array}
$$

Al final del duodécimo mes hay 233 pares de conejos o 466 conejos en total. ■

Sucesiones Recursivas. Interés Compuesto

Interés compuesto

En su vigésimo primer cumpleaños recibe una carta informándole que el día que nació, una excéntrica tía rica depositó \$100 000 en una cuenta bancaria ganando 4% de interés compuesto anual y que ahora pretende poner la cuenta a su nombre, siempre y cuando pueda calcular cuánto vale la pena. ¿Cuál es la cantidad que hay actualmente en la cuenta?

Solución Para abordar este problema de forma recursiva, observe que

$$\left[\begin{array}{l}\text{la cantidad en la}\\ \text{cuenta a fines}\\ \text{de cualquier}\\ \text{año dado}\end{array}\right] = \left[\begin{array}{l}\text{la cantidad en}\\ \text{la cuenta a}\\ \text{fines del año}\\ \text{anterior}\end{array}\right] + \left[\begin{array}{l}\text{los intereses}\\ \text{ganados en la}\\ \text{cuenta durante}\\ \text{el año}\end{array}\right]$$

Ahora los intereses ganados durante el año son iguales a la tasa de interés de $4\% = 0.04$ veces la cantidad en la cuenta a fines del año anterior. Por tanto

$$\left[\begin{array}{l}\text{la cantidad en la}\\ \text{cuenta a fines}\\ \text{de cualquier}\\ \text{año dado}\end{array}\right] = \left[\begin{array}{l}\text{la cantidad}\\ \text{en la cuenta a}\\ \text{fines del año}\\ \text{anterior}\end{array}\right] + (0.04)\cdot\left[\begin{array}{l}\text{la cantidad}\\ \text{en la cuenta a}\\ \text{fines del año}\\ \text{anterior}\end{array}\right].$$

Sucesiones Recursivas. Interés Compuesto

$$\begin{aligned} A_k &= A_{k-1} + (0.04) \cdot A_{k-1} \\ &= (1 + 0.04) \cdot A_{k-1} = (1.04) \cdot A_{k-1} \qquad \text{factorizando } A_{k-1}. \end{aligned}$$

En consecuencia, los valores de la sucesión $A_0, A_1, A_2, \ldots$ están completamente especificadas de la siguiente manera: para todo entero $k \geq 1$,

1) $A_k = (1.04) \cdot A_{k-1}$ relación de recurrencia
2) $A_0 = \$100000$ condición inicial.

El número 1.04 se llama *factor de crecimiento* de la sucesión.

En la siguiente sección se deduce una fórmula explícita para el valor de la cuenta en cualquier año n. El valor en su vigésimo primer cumpleaños también se puede calcular mediante la sustitución repetida siguiente:

$$\begin{array}{lllll}
3) & A_1 = 1.04 \cdot A_0 & = (1.04) \cdot \$100000 & = \$104000 & \text{por 1) y 2)} \\
4) & A_2 = 1.04 \cdot A_1 & = (1.04) \cdot \$104000 & = \$108160 & \text{por 1) y 3)} \\
5) & A_3 = 1.04 \cdot A_2 & = (1.04) \cdot \$108160 & = \$112486.40 & \text{por 1) y 4)} \\
 & \vdots & & \vdots & \\
22) & A_{20} = 1.04 \cdot A_{19} & \cong (1.04) \cdot \$210684.92 & \cong \$219112.31 & \text{por 1) y 21)} \\
23) & A_{21} = 1.04 \cdot A_{20} & \cong (1.04) \cdot \$219112.31 & \cong \$227876.81 & \text{por 1) y 22)}
\end{array}$$

Solución iterativa de relaciones de Recurrencia

• Definición

Una sucesión $a_0, a_1, a_2, \ldots$ se llama una **sucesión aritmética**, si y sólo si, existe una constante d tal que

$$a_k = a_{k-1} + d \quad \text{para todo entero } k \geq 1.$$

De lo que se tiene que,

$$a_n = a_0 + dn \qquad \text{para todo entero } n \geq 0.$$

• Definición

Una sucesión $a_0, a_1, a_2, \ldots$ se llama una **sucesión geométrica**, si y sólo si, existe una constante r tal que

$$a_k = ra_{k-1} \quad \text{para todo entero } k > 1$$

De lo que se tiene que,

$$a_n = a_0 r^n \qquad \text{para todo entero } n \geq 0$$

Solución iterativa de relaciones de Recurrencia. Ejemplo

Una sucesión geométrica

Como se muestra en el ejemplo 5.6.7, si un banco paga intereses a una tasa de 4% anual compuesto anualmente y A_n denota la cantidad en la cuenta al final del año n, entonces, $A_k = (1.04)\,A_{k-1}$, para todo entero $k \geq 1$, suponiendo que no haya depósitos o retiros durante el año. Supongamos que la cantidad inicial depositada es de \$100 000 y suponga que no se hacen depósitos o retiros adicionales.

a. ¿Cuánto habrá en la cuenta al final, de 21 años?

b. ¿En cuántos años la cuenta tendrá 1 000 000 de dólares?

Solución

a. $A_0, A_1, A_2, \ldots$ es una sucesión geométrica con un valor inicial de 100000 y una constante multiplicadora de 1.04. Por tanto,

$$A_n = \$100000 \cdot (1.04)^n \quad \text{para todo entero } n \geq 0.$$

Después de 21 años, la cantidad en la cuenta será

$$A_{21} = \$100000 \cdot (1.04)^{21} \cong \$227876.81.$$

Relaciones lineales de recurrencia de segundo orden con coeficientes constantes.

• Definición

Una **relación lineal de recurrencia homogénea de segundo orden con coeficientes constantes** es una relación de recurrencia de la forma

$$a_k = Aa_{k-1} + Ba_{k-2} \quad \text{para todo entero } k \geq \text{algún entero fijo,}$$

donde A y B son números reales fijos con $B \neq 0$.

Relaciones lineales de recurrencia de segundo orden con coeficientes constantes. Ejemplo

Relaciones lineales homogéneas de recurrencia de segundo orden con coeficientes constantes

Indique si cada una de las siguientes expresiones es una relación lineal homogénea de recurrencia de segundo orden con coeficientes constantes:

a. $a_k = 3a_{k-1} + 2a_{k-2}$

b. $b_k = b_{k-1} + b_{k-2} + b_{k-3}$

c. $c_k = \frac{1}{2}c_{k-1} - \frac{3}{7}c_{k-2}$

d. $d_k = d_{k-1}^2 + d_{k-1} \cdot d_{k-2}$

e. $e_k = 2e_{k-2}$

f. $f_k = 2f_{k-1} + 1$

g. $g_k = g_{k-1} + g_{k-2}$

h. $h_k = (-1)h_{k-1} + (k-1)h_{k-2}$

Solución

a. Sí; $A = 3$ y $B = 2$

b. No; no de segundo orden

c. Sí; $A = \frac{1}{2}$ y $B = -\frac{3}{7}$

d. No; no lineal

e. Sí; $A = 0$ y $B = 2$

f. No; no es homogénea

g. Sí; $A = 1$ y $B = 1$

h. No; coeficientes no constantes

Relaciones lineales de recurrencia. Raíces distintas

Teorema 5.8.3 Teorema de raíces diferentes

Supongamos que una sucesión de $a_0, a_1, a_2, \ldots$ satisface una relación de recurrencia

$$a_k = Aa_{k-1} + Ba_{k-2} \tag{5.8.1}$$

para algunos números reales A y B con $B \neq 0$ y todos los enteros $k \geq 2$. Si la ecuación característica

$$t^2 - At - B = 0 \tag{5.8.2}$$

tiene dos raíces distintas r y s, entonces, $a_0, a_1, a_2, \ldots$ está dada por la fórmula explícita

$$a_n = Cr^n + Ds^n$$

donde C y D son los números cuyos valores se determinan por los valores de a_0 y a_1.

Relaciones lineales de recurrencia. Raíces distintas. Ejemplo

Una fórmula para la sucesión de Fibonacci

La sucesión de Fibonacci, $F_0, F_1, F_2, \ldots,$ satisface la relación de recurrencia

$$F_k = F_{k-1} + F_{k-2} \quad \text{para todo } k \geq 2$$

con condiciones iniciales

$$F_0 = F_1 = 1.$$

Encuentre una fórmula explícita para esta sucesión.

Solución La sucesión de Fibonacci satisface parte de la hipótesis del teorema de raíces distintas ya que la relación de Fibonacci es una relación de recurrencia de segundo orden lineal homogénea con coeficientes constantes ($A = 1$ y $B = 1$). ¿La segunda parte de la hipótesis también se satisface? ¿La ecuación característica

$$t^2 - t - 1 = 0$$

tiene raíces distintas? Usando la fórmula cuadrática, las raíces son

$$t = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4(-1)}}{2} = \begin{cases} \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \\ \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Relaciones lineales de recurrencia. Raíces distintas. Ejemplo

y así que la respuesta es sí. De lo que se deduce del teorema de raíces distintas que la sucesión de Fibonacci está dada por la fórmula explícita

$$F_n = C\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + D\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \quad \text{para todo entero } n \geq 0, \qquad 5.8.7$$

donde C y D son los números cuyos valores se determinan por el hecho de que $F_0 = F_1 = 1$. Para encontrar C y D, se escribe

$$F_0 = 1 = C\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0 + D\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^0 = C\cdot 1 + D\cdot 1 = C + D$$

y

$$\begin{aligned} F_1 = 1 &= C\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 + D\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1 \\ &= C\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + D\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \end{aligned}$$

Relaciones lineales de recurrencia. Raíces distintas. Ejemplo

Así, el problema es encontrar a los números C y D tales que

$$C + D = 1$$

y

$$C\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + D\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1.$$

Esto puede parecer complicado, pero de hecho es sólo un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas. En el ejercicio 7 al final de esta sección, se le pide demostrar que

$$C = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \quad \text{y} \quad D = \frac{-(1-\sqrt{5})}{2\sqrt{5}}.$$

$$F_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{-(1-\sqrt{5})}{2\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n,$$

Relaciones lineales de recurrencia. Raíz única

Teorema 5.8.5 Teorema de una sola raíz

Supongamos que una sucesión $a_0, a_1, a_2, \ldots$, satisface una relación de recurrencia

$$a_k = Aa_{k-1} + Ba_{k-2}$$

para algunos números reales A y B con $B \neq 0$ y para todos los enteros $k \geq 2$. Si la ecuación característica $t^2 - At - B = 0$ tiene una raíz única (real) r, entonces, a_0, a_1, $a_2, \ldots$ está dada por la fórmula explícita

$$a_n = Cr^n + Dnr^n,$$

donde C y D son los números reales cuyos valores se determinan por los valores de a_0 y de cualquier otro valor conocido de la sucesión.

Relaciones lineales de recurrencia. Raíz única. Ejemplo

Caso de una sola raíz

Supongamos que una sucesión $b_0, b_1, b_2, \ldots,$ satisface la relación de recurrencia

$$b_k = 4b_{k-1} - 4b_{k-2} \quad \text{para todo entero } k \geq 2, \tag{5.8.11}$$

con condiciones iniciales

$$b_0 = 1 \quad \text{y} \quad b_1 = 3.$$

Determine una fórmula explícita para $b_0, b_1, b_2, \ldots.$

Solución Esta sucesión satisface una parte de la hipótesis del teorema de una sola raíz ya que satisface una relación de recurrencia de segundo orden lineal homogénea con coeficientes constantes ($A = 4$ y $B = -4$). La condición de una única raíz también se cumple ya que la ecuación característica

$$t^2 - 4t + 4 = 0$$

tiene la única raíz $r = 2$ [*ya que* $t^2 - 4t + 4 = (t-2)^2$].

Relaciones lineales de recurrencia. Raíz única. Ejemplo

Lo que se deduce del teorema de una sola raíz que $b_0, b_1, b_2, \ldots$, está dado por la fórmula explícita

$$b_n = C \cdot 2^n + Dn2^n \quad \text{para todo entero } n \geq 0, \qquad 5.8.12$$

donde C y D son números reales cuyos valores se determinan por el hecho de que $b_0 = 1$ y $b_1 = 3$. Para encontrar C y D, se escribe

$$b_0 = 1 = C \cdot 2^0 + D \cdot 0 \cdot 2^0 = C$$

y

$$b_1 = 3 = C \cdot 2^1 + D \cdot 1 \cdot 2^1 = 2C + 2D.$$

Por tanto el problema es encontrar los números C y D tales que

$$C = 1$$

y

$$2C + 2D = 3.$$

Sustituyendo $C = 1$ en la segunda ecuación se obtiene

$$2 + 2D = 3,$$

y así

$$D = \frac{1}{2}.$$

Relaciones lineales de recurrencia. Raíz única. Ejemplo

Ahora sustituyendo $C = 1$ y $D = \frac{1}{2}$ en la fórmula (5.8.12) se concluye que

$$b_n = 2^n + \frac{1}{2}n2^n = 2^n\left(1 + \frac{n}{2}\right) \quad \text{para todo entero } n \geq 0.$$

Universidad
Europea
del Atlántico

www.uneatlantico.es