Universidad Europea del Atlántico

www.uneatlantico.es

Conteo y Probabilidad

Sumario

1. Probabilidad de Eventos Equiprobables
2. Árbol de Probabilidad
3. Regla de Multiplicación
4. Permutaciones

Probabilidad de Eventos Equiprobables

Probabilidad de Eventos Equiprobables

- **Definición**

Un **espacio muestral** es el conjunto de todos los posibles resultados de un proceso aleatorio o experimento. Un **evento** es un subconjunto de un espacio muestral.

Fórmula de probabilidad de eventos equiprobables

Si S es un espacio muestral finito en el que todos los resultados son equiprobables y E es un evento en S, entonces la **probabilidad de E**, se denota por $P(E)$, es

$$P(E) = \frac{\text{el número de resultados en } E}{\text{el número total de resultados en } S}.$$

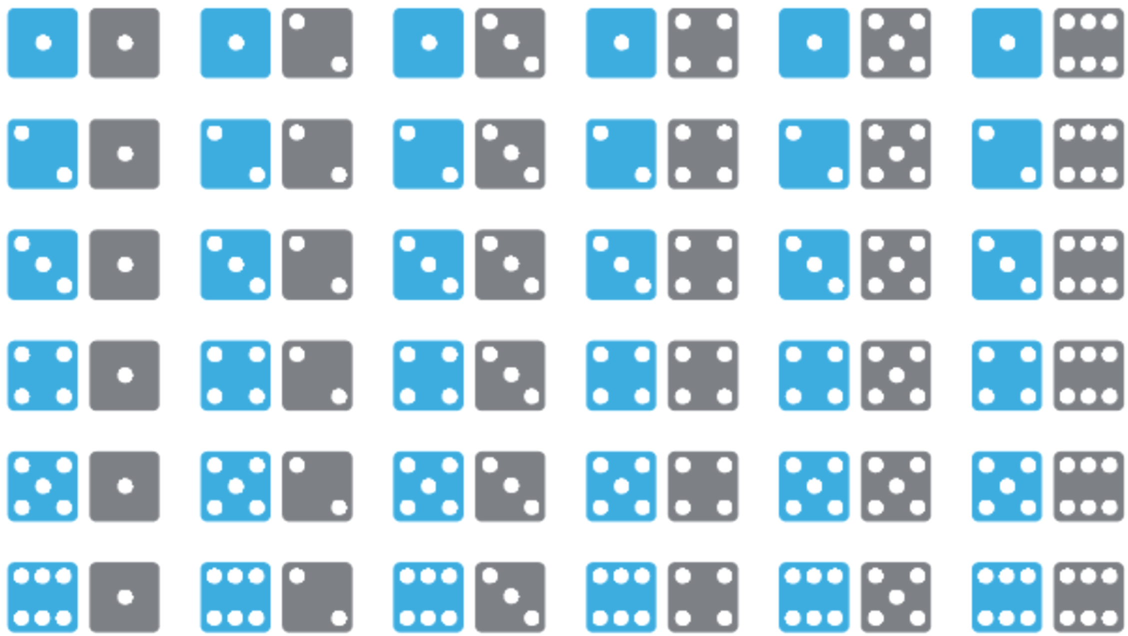
- **Notación**

Para cualquier conjunto finito A, $N(A)$ indica el número de elementos en A.

Probabilidad de Eventos Equiprobables

Probabilidad Eventos Equiprobables. Ejemplo

Lanzamiento de un par de dados



Una notación más compacta identifica, por ejemplo,  con la notación 24,  con 53 y así sucesivamente.

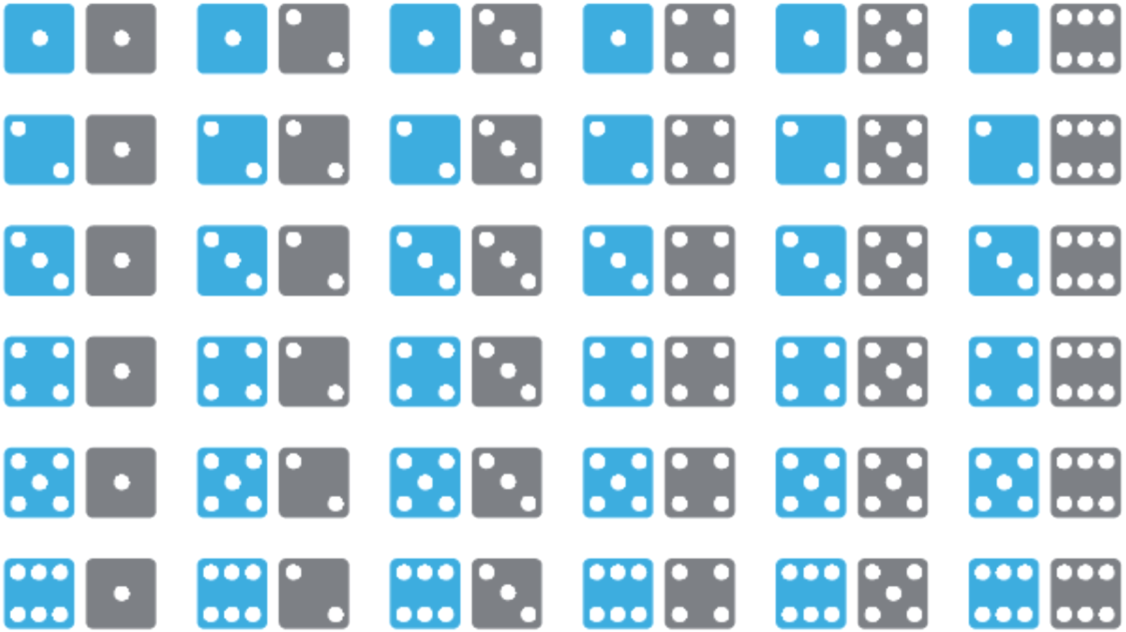
a. Utilice la notación compacta para escribir el espacio muestral S de posibles resultados.

b. Use la notación de conjunto para escribir el evento E que los números que se muestran cara arriba suman 6 y encuentre la probabilidad de este evento.

Probabilidad de Eventos Equiprobables

Probabilidad Eventos Equiprobables. Ejemplo

Lanzamiento de un par de dados



Solución

a. $S = \{11, 12, 13, 14, 15, 16, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 61, 62, 63, 64, 65, 66\}$.

b. $E = \{15, 24, 33, 42, 51\}$.

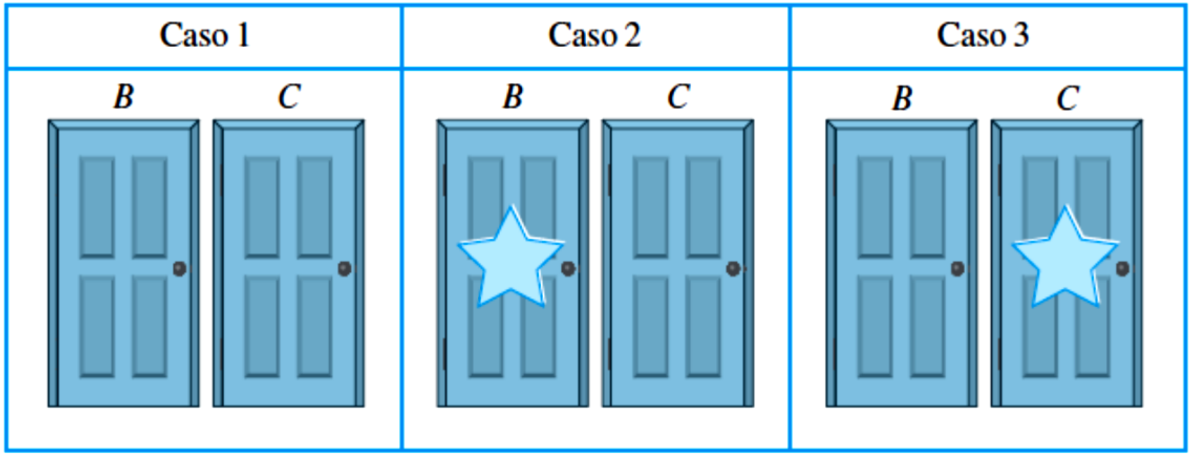
La probabilidad de que la suma de los números es $6 = P(E) = \dfrac{N(E)}{N(S)} = \dfrac{5}{36}$. ■

Probabilidad de Eventos Equiprobables

Problema de Monty Hall. Ejemplo

El problema de *Monty Hall*

Hay tres puertas en el escenario de un programa de juegos. Llamadas A, B y C. Si selecciona la puerta derecha gana el premio. Selecciona la puerta A. El conductor del programa, *Monty Hall*, abre una de las otras dos y revela que no hay ningún premio detrás de ésta. Mantiene las restantes dos puertas cerradas, le pregunta si desea cambiar su elección a la otra puerta cerrada o si permanece con su elección original de puerta A. ¿Qué debe hacer si desea maximizar su oportunidad de ganar el premio: permanecer en la puerta A o cambiar, o de cualquier forma la probabilidad de ganar sería la misma?



Probabilidad de Eventos Equiprobables

Conteo de Elementos de una Lista

Algunos de los problemas de conteo son tan simples como el conteo de los elementos de una lista. Por ejemplo, ¿cuántos enteros existen de 5 al 12? Para responder a esta pregunta, imagine que va a lo largo de la lista de enteros del 5 al 12, contando uno cada vez.

lista:	5	6	7	8	9	10	11	12
	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$
conteo:	1	2	3	4	5	6	7	8

Por lo que la respuesta es 8.

Teorema 9.1.1 El número de elementos en una lista

Si m y n son enteros y $m \leq n$, entonces hay $n - m + 1$ enteros de m a n inclusive.

Probabilidad de Eventos Equiprobables

Conteo de Elementos de una Sublista. Ejemplo

Conteo de los elementos de una sublista

a. ¿Cuántos enteros de tres dígitos (enteros del 100 a 999 inclusive) son divisibles entre 5?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que un entero aleatorio de tres dígitos sea divisible entre 5?

Solución

a. Imagine escribir enteros de tres dígitos en un renglón, observe los que son múltiplos de 5 y dibuje flechas entre cada uno de los enteros y su correspondiente múltiplo de 5.

$$
\begin{array}{cccccccccccccccccc}
100 & 101 & 102 & 103 & 104 & 105 & 106 & 107 & 108 & 109 & 110 & \cdots & 994 & 995 & 996 & 997 & 998 & 999 \\
\updownarrow & & & & & \updownarrow & & & & & \updownarrow & & & \updownarrow & & & & \\
5\cdot 20 & & & & & 5\cdot 21 & & & & & 5\cdot 22 & & & 5\cdot 199 & & & &
\end{array}
$$

Del esbozo es claro que hay tantos números de tres dígitos que son múltiplos de 5 como enteros del 20 al 199 inclusive. Por el teorema 9.1.1, hay $199 - 20 + 1$, o 180, de esos enteros. Por tanto hay 180 enteros de tres dígitos que son divisibles entre 5.

b. Por el teorema 9.1.1 el número total de enteros del 100 al 999 es $999 - 100 + 1 = 900$. Por el inciso *a*), 180 de ellos son divisibles entre 5. Por tanto la probabilidad de que un entero aleatorio de tres dígitos sea divisible entre 5 es $180/900 = 1/5$. ■

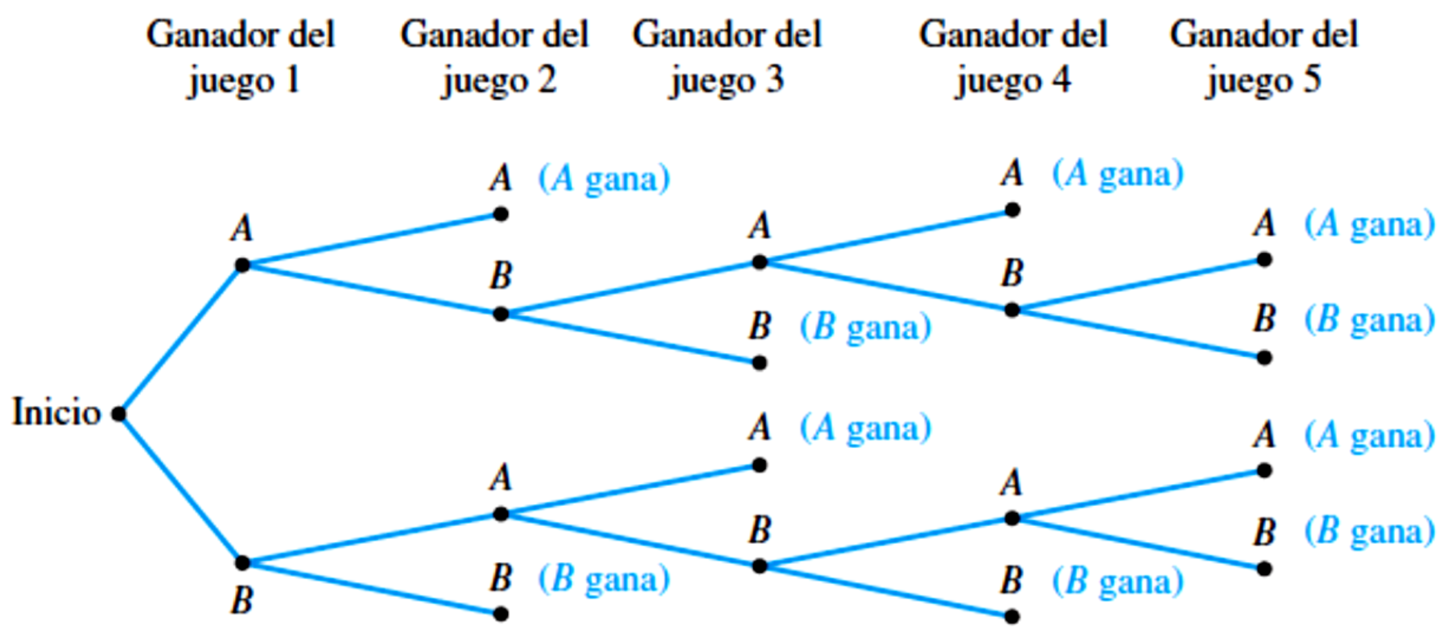
Árbol de Probabilidad. Ejemplo

Posibilidades para los juegos de un torneo

Los equipos *A* y *B* juegan entre sí repetidamente hasta que uno gana dos partidos consecutivos o un total de tres juegos. Una forma en la que se puede jugar este torneo es que *A* gana el primer juego, *B* gana el segundo y *A* gana el tercer y el cuarto partidos. Esto se denota escribiendo *A*-*B*-*A*-*A*.

a. ¿De cuántas maneras se puede jugar el torneo?

b. Suponiendo que todas las formas de jugar el torneo son equiprobables, ¿cuál es la probabilidad de que se necesiten cinco juegos para determinar el ganador del torneo?



Regla de Multiplicación

Teorema 9.2.1 La regla de la multiplicación

Si una operación consiste en k pasos y

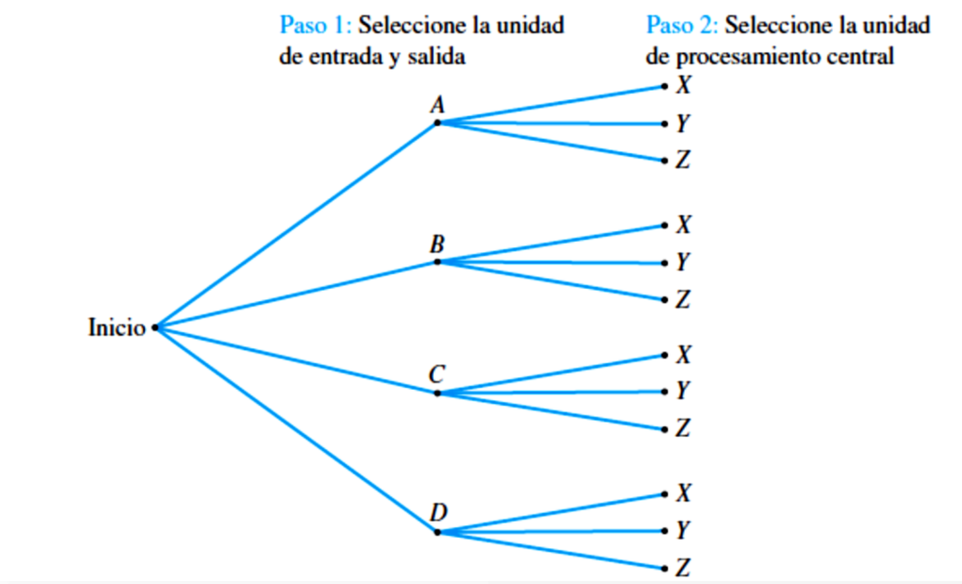
el primer paso se puede realizar en n_1 formas,

el segundo paso se puede realizar en n_2 formas *[independientemente de cómo se realizó el primer paso]*,

⋮

el k-ésimo paso se puede realizar en n_k formas *[independientemente de cómo se realizan los pasos anteriores]*,

entonces, la operación se puede realizar de $n_1 n_2 \cdots n_k$ formas.



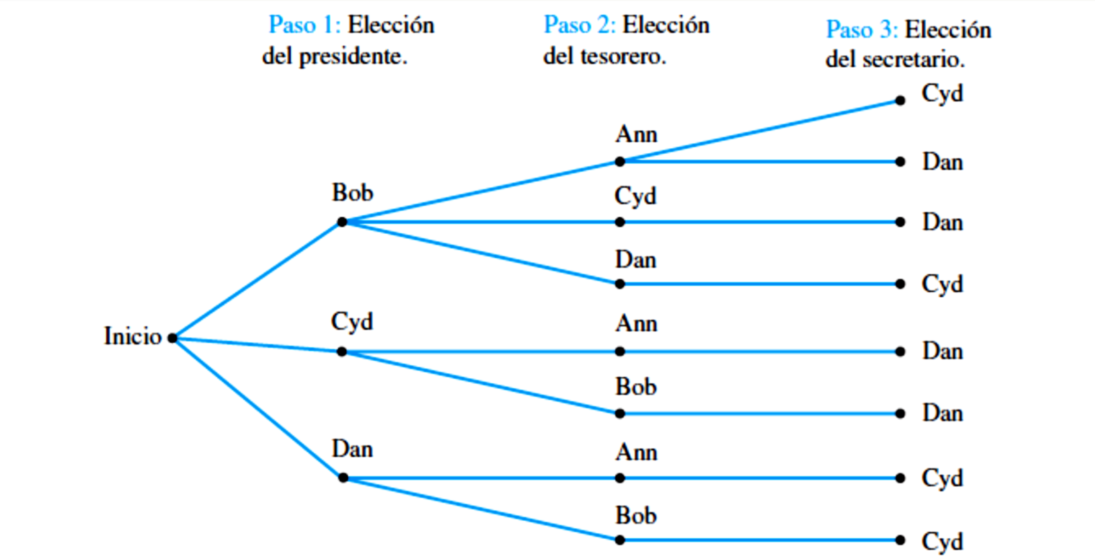
Regla de Multiplicación (Inaplicable)

Considere el siguiente problema:

> Tres funcionarios: un presidente, un tesorero y un secretario, deben elegirse entre cuatro personas: Ann, Bob, Cyd y Dan. Suponga que, por diversas razones, Ann no puede ser presidente y Cyd o Dan debe ser secretario. ¿De cuántas maneras se pueden elegir a los funcionarios?

Es natural tratar de resolver este problema mediante la regla de la multiplicación. Una persona puede responder como sigue:

> Hay tres opciones para Presidente (todos excepto Ann), tres opciones para tesorero (todos excepto el elegido como Presidente) y dos opciones de Secretario (Cyd o Dan). Por tanto, por la regla de la multiplicación, hay $3 \cdot 3 \cdot 2 = 18$ opciones en total.



Permutaciones

Una **permutación** de un conjunto de objetos es un ordenamiento de los objetos en un renglón. Por ejemplo, el conjunto de elementos a, b y c tiene seis permutaciones.

$$abc \quad acb \quad cba \quad bac \quad bca \quad cab$$

En general, dado un conjunto de n objetos, ¿cuántas permutaciones son posibles con los elementos del conjunto? Imagine formar una permutación como una operación de n-pasos:

Paso 1: Elección de un elemento para escribirlo en primer lugar.

Paso 2: Elección de un elemento para escribirlo en segundo lugar.

$\vdots$ $\qquad$ $\vdots$

Paso n: Elección de un elemento para escribirlo en $n$ésimo lugar.

Teorema 9.2.2

Para cualquier entero n con $n \geq 1$, el número de permutaciones de un conjunto con n elementos es n!

Permutaciones. Ejemplo

Permutaciones de las letras de una palabra

a. ¿De cuántas maneras se pueden ordenar las letras de la palabra *EQUIPO* en un renglón?

b. ¿De cuántas formas se pueden ordenar las letras de la palabra *EQUIPO* si las letras *EQ* deben permanecer juntas (en orden) como una unidad?

c. Si las letras de la palabra *EQUIPO* están arregladas aleatoriamente en un renglón, ¿Cuál es la probabilidad de que las letras *EQ* permanecen juntas (en orden) como una unidad?

a. Todas las seis letras en la palabra *EQUIPO* son distintas, por lo que el número de formas en que podemos arreglar las letras es igual al número de permutaciones de un conjunto de seis elementos. Esto equivale a $6! = 720$.

b. Si el grupo de letras *EQ* se trata como una unidad, entonces efectivamente hay sólo cinco objetos que se pueden arreglar en un renglón.

$$\boxed{\text{EQ}}\ \boxed{\text{U}}\ \boxed{\text{I}}\ \boxed{\text{P}}\ \boxed{\text{O}}$$

Por tanto hay tantas formas de escribir las letras como de permutaciones de un conjunto de cinco elementos, es decir $5! = 120$.

c. Cuando las letras están arregladas aleatoriamente en un renglón, el número total de arreglos es 720 por el inciso *a*) y el número de arreglos con las letras *EQ*, juntas (en orden), como una unidad es 120. Por tanto la probabilidad es

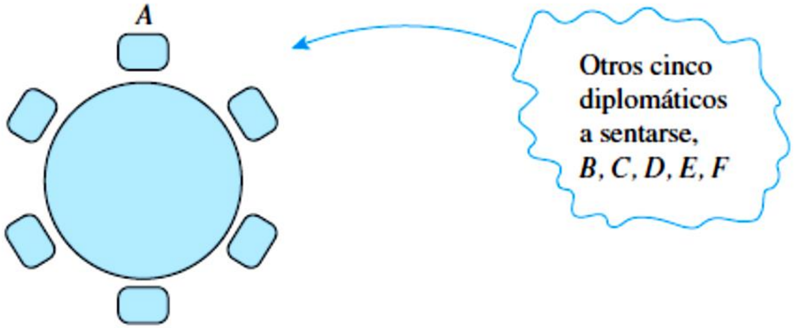
$$\frac{120}{720} = \frac{1}{6} = 16.67\% \quad \blacksquare$$

Permutaciones. Ejemplo

Permutaciones de objetos alrededor de un círculo

En una reunión de diplomáticos, los seis participantes deben estar sentados alrededor de una mesa circular. Dado que la mesa no tiene extremos para conferir un estatus particular, no importa en dónde se siente el presidente. Pero importa cómo se sienten los diplomáticos respecto a los demás. En otras palabras, dos asientos son considerados iguales si uno es rotación del otro. ¿De cuántas maneras diferentes pueden sentarse los diplomáticos?

Solución Llame a los diplomáticos por las letras A, B, C, D, E y F. Ya que sólo importa la posición relativa, puede comenzar con cualquier diplomático (por ejemplo A), coloque al diplomático en cualquier lugar (por ejemplo en el asiento superior del diagrama que se muestra en la figura 9.2.5) y, después examine todas las disposiciones de los otros diplomáticos alrededor de él. De B a F puede organizarse en los asientos alrededor del diplomático en todos los órdenes posibles. Por tanto hay $5! = 120$ formas de sentar al grupo.



Permutaciones de Elementos Seleccionados

• Definición

Una **r-permutación** de un conjunto de n elementos es una selección ordenada de r elementos tomados del conjunto de n elementos. El número de r-permutaciones de un conjunto de n elementos se denota por $\boldsymbol{P(n, r)}$.

Teorema 9.2.3

Si n y r son enteros y $1 \leq r \leq n$, entonces el número de r-permutaciones de un conjunto de n elementos está dada por la fórmula

$$P(n, r) = n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1) \qquad \text{primera versión}$$

o, equivalente,

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!} \qquad \text{segunda versión.}$$

Permutaciones de Elementos Seleccionados. Ejemplo

Permutaciones de letras seleccionadas de una palabra

a. ¿De cuántas diferentes maneras pueden tres de las letras de las palabra *BYTES* elegirse y escribirse en un renglón?

b. ¿De cuántas maneras se puede hacer esto si la primera letra es *B*?

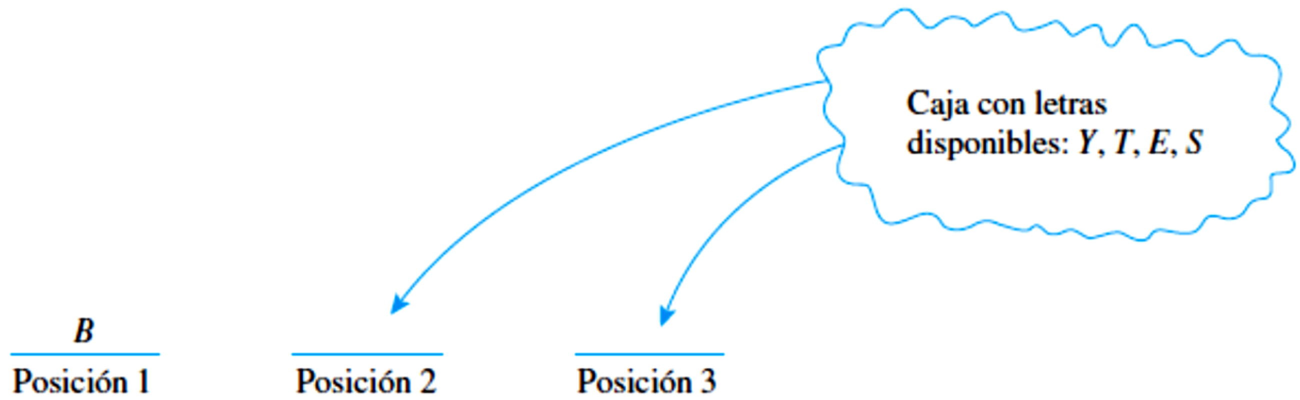
Solución

a. La respuesta es igual al número de 3-permutaciones de un conjunto de cinco elementos. Esto es igual a

$$P(5,3) = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}}{\cancel{2} \cdot \cancel{1}} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60.$$

Permutaciones de Elementos Seleccionados. Ejemplo

b. Ya que la primera letra debe ser *B*, efectivamente sólo hay dos letras a elegir y se colocan en las otras dos posiciones. Y ya que *B* se utiliza en la primera posición, hay cuatro letras disponibles para llenar las dos posiciones que faltan.



Por tanto la respuesta es el número de 2-permutaciones de un conjunto de cuatro elementos, que es

$$P(4,2) = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}}{\cancel{2} \cdot \cancel{1}} = 4 \cdot 3 = 12.$$

Permutaciones de un Conjunto con Elementos no Distinguidos

Teorema 9.5.2 Permutaciones con conjuntos de objetos no distinguibles

Suponga que una colección consiste de n objetos n de los cuales

n_1 son de tipo 1 y son no distinguibles entre sí

n_2 son de tipo 2 y son no distinguibles entre sí

$\vdots$

n_k son de tipo k y son no distinguibles entre sí

y suponga que $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$. Entonces el número de permutaciones de los n objetos es

$$\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\binom{n-n_1-n_2}{n_3}\cdots\binom{n-n_1-n_2-\cdots-n_{k-1}}{n_k}$$
$$= \frac{n!}{n_1!n_2!n_3!\cdots n_k!}.$$

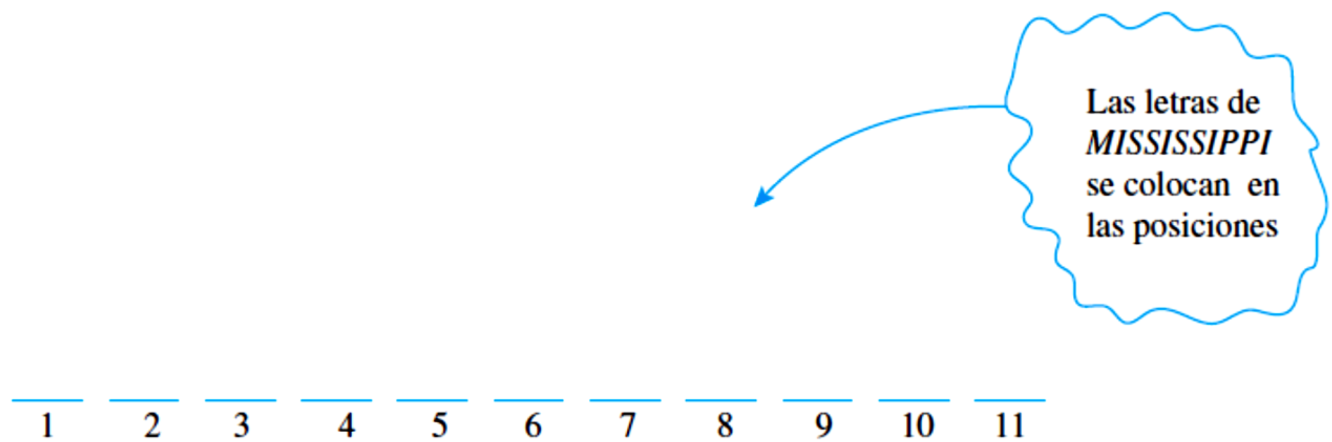
Permutaciones de un Conjunto con Elementos no Distinguidos. Ejemplo

Permutaciones de un conjunto con elementos repetidos

Considere varias formas de ordenar las letras en la palabra *MISSISSIPPI*:

IIMSSPISSIP, *ISSSPMIIPIS*, *PIMISSSSIIP*, etcétera.

¿Cuántos ordenamientos distinguibles existen?



Permutaciones de un Conjunto con Elementos no Distinguidos. Ejemplo

Paso 1: Elija un subconjunto de cuatro posiciones para las S.

Paso 2: Elija un subconjunto de cuatro posiciones para las I.

Paso 3: Elija un subconjunto de dos posiciones para las P.

Paso 4: Elija un subconjunto de una posición para la M.

Ya que hay 11 posiciones en total, hay $\binom{11}{4}$ subconjuntos de cuatro posiciones para la S. Una vez que las cuatro S están en su lugar, hay siete posiciones que permanecen vacías, por lo que hay $\binom{7}{4}$ subconjuntos de cuatro posiciones para las I. Después de que las I están en su lugar, hay tres posiciones vacías, por lo que hay $\binom{3}{2}$ subconjuntos de dos posiciones para las P. Lo que deja una posición para la M. Pero $1 = \binom{1}{1}$. Por tanto por la regla de multiplicación,

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix}\text{número de maneras de}\\ \text{colocar todas las letras}\end{bmatrix} &= \binom{11}{4}\binom{7}{4}\binom{3}{2}\binom{1}{1}\\
&= \frac{11!}{4!\cancel{7!}}\cdot\frac{\cancel{7!}}{4!\cancel{3!}}\cdot\frac{\cancel{3!}}{2!\cancel{1!}}\cdot\frac{\cancel{1!}}{1!\cancel{0!}}\\
&= \frac{11!}{4!\cdot 4!\cdot 2!\cdot 1!} = 34{,}650.
\end{aligned}$$

■

Guía para Elegir que Fórmula Usar

	Importa el orden
Repetición permitida	n^k
Repetición no permitida	$P(n, k)$

EX VERITATE LUX
EX LABORE VIRTUS

Universidad
Europea
del Atlántico

www.uneatlantico.es