

# Grafos

1. Representación Matricial
2. Isomorfismo

# Representaciones Matriciales

www.uneatlantico.es

## Matrices

- Definición

Una **matriz A**  $m \times n$  (se lee “ $m$  por  $n$ ”) sobre un conjunto  $S$  es un arreglo rectangular de elementos de  $S$  dispuestos en  $m$  renglones y  $n$  columnas:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

←  $i$ -ésimo renglón de  $\mathbf{A}$

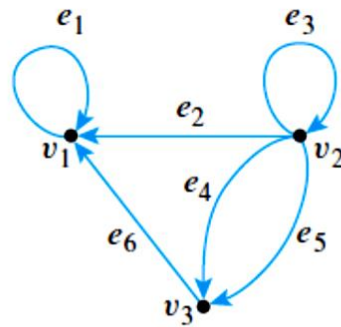
↑  
 $j$ -ésima columna de  $\mathbf{A}$

Se escribe  $\mathbf{A} = (a_{ij})$ .

# Representaciones Matriciales

www.uneatlantico.es

## Matriz de Adyacencia (Grafo Dirigido)



Grafo dirigido  $G$

a)

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Matriz de adyacencia

b)

### • Definición

Sea  $G$  un grafo dirigido con vértices ordenados  $v_1, v_2, \dots, v_n$ . La **matriz de adyacencia de  $G$**  es la matriz  $n \times n$   $A = (a_{ij})$  sobre el conjunto de enteros no negativos tales que

$$a_{ij} = \text{al número de flechas de } v_i \text{ a } v_j \quad \text{para toda } i, j = 1, 2, \dots, n.$$

# Representaciones Matriciales

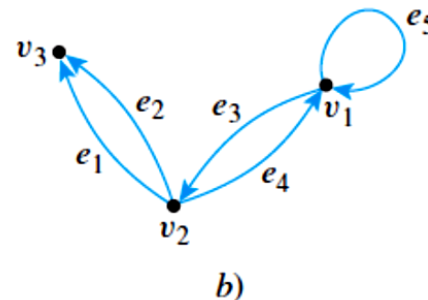
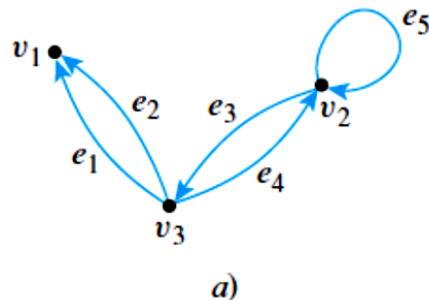
[www.uneatlantico.es](http://www.uneatlantico.es)

## Matriz de Adyacencia (Grafo Dirigido).

### Ejemplo

#### La matriz de adyacencia de un grafo

Los dos grafos dirigidos que se muestran a continuación difieren sólo en el orden de sus vértices. Encuentre sus matrices de adyacencia.



$$\begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

a)

$$\begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

b)

# Representaciones Matriciales

[www.uneatlantico.es](http://www.uneatlantico.es)

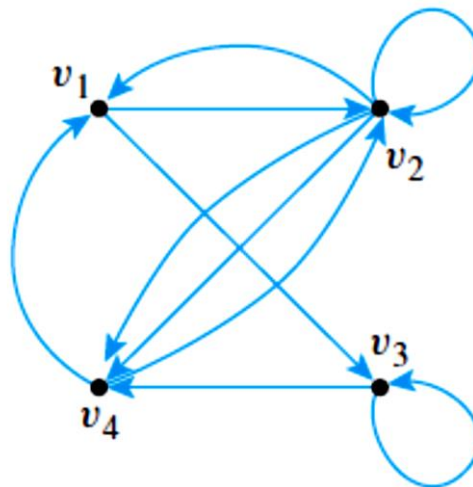
## Matriz de Adyacencia (Grafo Dirigido). Ejemplo

### Determinación de un grafo dirigido de una matriz

Sea

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dibuje un grafo dirigido que tiene a  $\mathbf{A}$  como su matriz de adyacencia.



# Representaciones Matriciales

www.uneatlantico.es

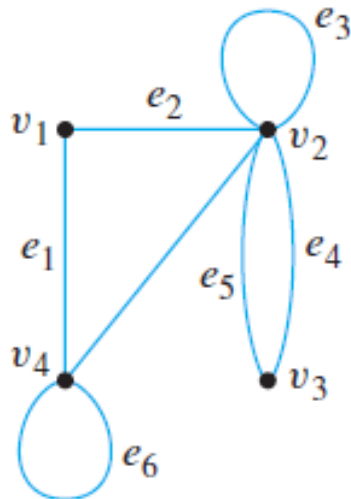
## Matriz de Adyacencia (Grafo No Dirigido)

### • Definición

Sea  $G$  un grafo no dirigido con vértices ordenados  $v_1, v_2, \dots, v_n$ . La **matriz de adyacencia de  $G$**  es la matriz  $n \times n$ ,  $A = (a_{ij})$  sobre el conjunto de los enteros no negativos tales que

$$a_{ij} = \text{número de aristas que conectan } v_i \text{ con } v_j$$

para todas  $i, j = 1, 2, \dots, n$ .



$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

## Matriz Simétrica

### • Definición

Una matriz cuadrada  $n \times n$ ,  $A = (a_{ij})$  se llama **simétrica**, si y sólo si, para toda  $i$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ ,

$$a_{ij} = a_{ji}.$$

### Matrices simétricas

¿Cuáles de las siguientes matrices son simétricas?

a.  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$       b.  $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$       c.  $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

**Solución** Sólo *b*) es simétrica. En *a*) la entrada en el primer renglón y la segunda columna difiere de la entrada en el segundo renglón y la primera columna; la matriz en *c*) no es cuadrada. ■

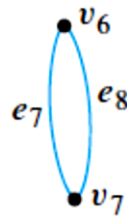
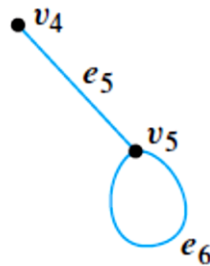
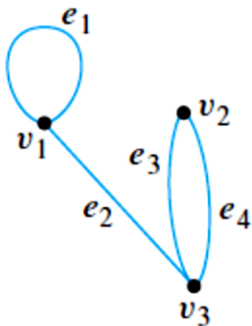
## Matrices y Componentes Conexos

### Teorema 10.3.1

Sea  $G$  un grafo con componentes conexos  $G_1, G_2, \dots, G_k$ . Si hay  $n_i$  vértices en cada componente conexas  $G_i$  y estos vértices están numerados consecutivamente, entonces la matriz de adyacencia de  $G$  tiene la forma

$$\begin{bmatrix} A_1 & O & O & \dots & O & O \\ O & A_2 & O & \dots & O & O \\ O & O & A_3 & \dots & O & O \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ O & O & O & \dots & O & A_k \end{bmatrix}$$

donde cada  $A_i$  es la matriz de adyacencia  $n_i \times n_i$  de  $G_i$ , para toda  $i = 1, 2, \dots, k$  y los  $O$  representan matrices cuyas entradas son todas 0.



$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

# Representaciones Matriciales

www.uneatlantico.es

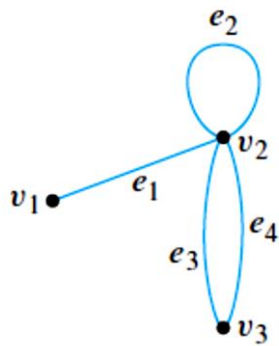
## Camino de Longitud N

### Teorema 10.3.2

Si  $G$  es un grafo con vértices  $v_1, v_2, \dots, v_m$  y  $A$  es la matriz de adyacencia de  $G$ , entonces para cada entero positivo  $n$  y para todos los enteros  $i, j = 1, 2, \dots, m$ ,

la  $ij$ -ésima entrada de  $A^n$  = número de caminos de longitud  $n$  de  $v_i$  a  $v_j$ .

¿Cuántos distintos caminos de longitud 2 conectan a  $v_2$  y  $v_2$ ?

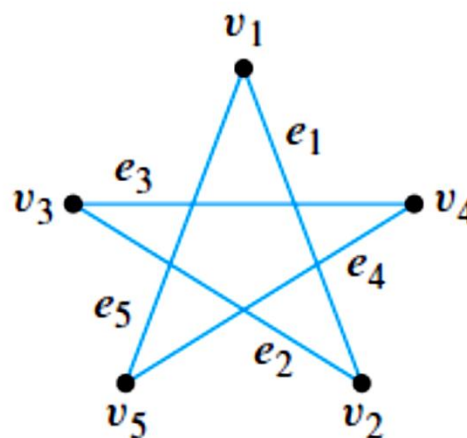
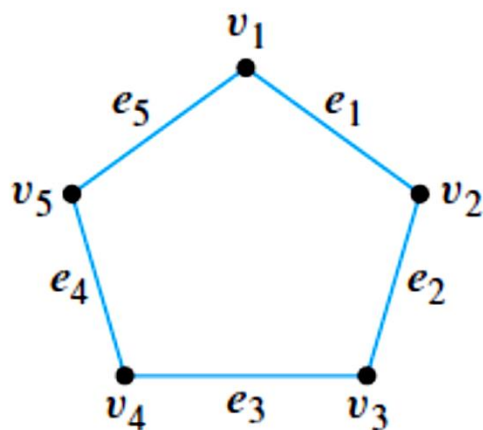


$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}.$$

Calcule  $A^2$  como:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

## Isomorfismo en Grafos



### • Definición

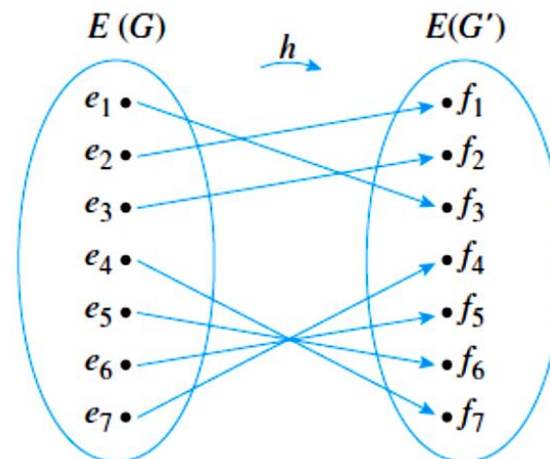
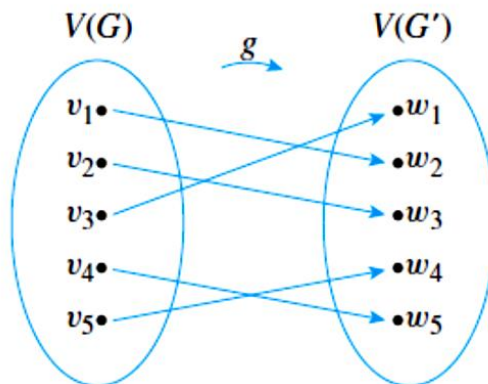
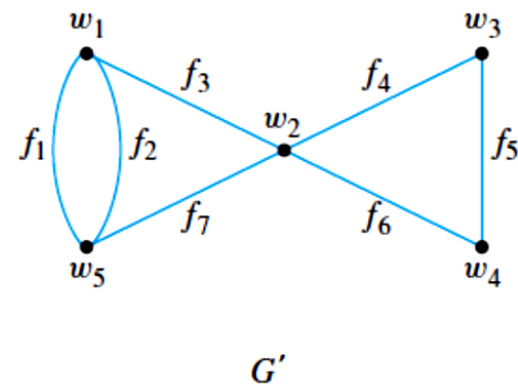
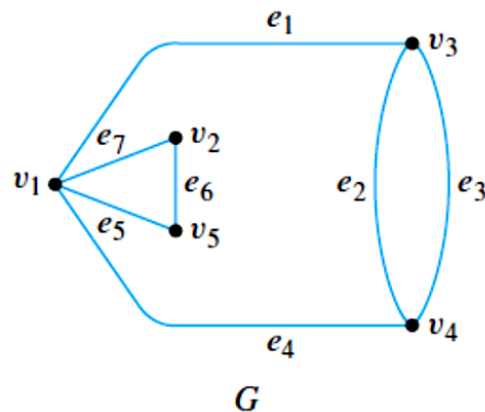
Sean  $G$  y  $G'$  grafos con conjuntos de vértices  $V(G)$  y  $V(G')$  y conjuntos de aristas,  $E(G)$  y  $E(G')$ , respectivamente.  $G$  es **isomorfo a  $G'$**  si y sólo si, existe una correspondencia uno a uno  $g: V(G) \rightarrow V(G')$  y  $h: E(G) \rightarrow E(G')$  que preserve las funciones de punto extremo-aristas de  $G$  y  $G'$  en el sentido que para todo  $v \in V(G)$  y  $e \in E(G)$ ,

$$v \text{ es un punto extremo de } e \Leftrightarrow g(v) \text{ es un punto extremo de } h(e). \quad 10.4.1$$

## Isomorfismo en Grafos. Ejemplo

### Demostración de que dos grafos son isomorfos

Demuestre que los siguientes dos grafos son isomorfos.



## Isomorfismo en Grafos

### Teorema 10.4.1 El isomorfismo gráfico es una relación de equivalencia

Sea  $S$  un conjunto de grafos y sea  $R$  la relación de isomorfismo gráfico en  $S$ . Entonces  $R$  es una relación de equivalencia en  $S$ .

#### • Definición

Una propiedad  $P$  se llama una **invariante del isomorfismo del grafo** si y sólo si, dados los grafos cualesquiera  $G$  y  $G'$ , si  $G$  tiene la propiedad  $P$  y  $G'$  es isomorfa a  $G$ , entonces  $G'$  tiene la propiedad  $P$ .

### Teorema 10.4.2

Cada una de las siguientes propiedades es un invariante del isomorfismo del grafo, donde  $n$ ,  $m$  y  $k$  son todos enteros no negativos:

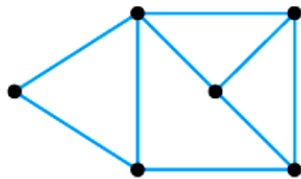
1. tiene  $n$  vértices;
2. tiene  $m$  aristas;
3. tiene un vértice de grado  $k$ ;
4. tiene  $m$  vértices de grado  $k$ ;
5. tiene un circuito de longitud  $k$ ;
6. tiene un circuito simple de longitud  $k$ ;
7. tiene  $m$  circuitos simples de longitud  $k$ ;
8. es conexo;
9. tiene un circuito de Euler;
10. tiene un circuito hamiltoniano.

## Isomorfismo en Grafos. Ejemplo

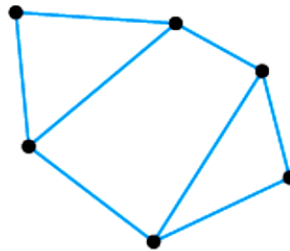
### Demostración de que dos grafos no son isomorfos

Demuestre que los siguientes pares de grafos no son isomorfos encontrando un invariante isomorfo que no comparten.

a.

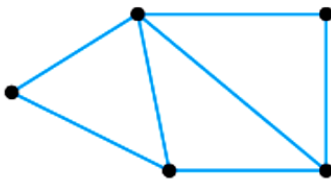


$G$

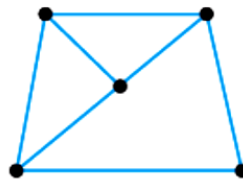


$G'$

b.



$H$



$H'$

### Solución

a.  $G$  tiene nueve aristas;  $G'$  tiene sólo ocho.

b.  $H$  tiene un vértice de grado 4;  $H'$  no.



## Isomorfismo en Grafos Simples

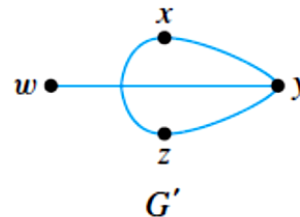
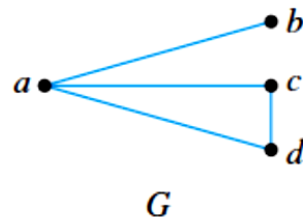
### • Definición

Si  $G$  y  $G'$  son grafos simples, entonces  $G$  es **isomorfo a  $G'$**  si y sólo si, existe una correspondencia  $g$  uno a uno del conjunto de vértices  $V(G)$  de  $G$  al conjunto de vértices  $V(G')$  de  $G'$  que conserva las funciones de punto extremo-aristas de  $G$  y  $G'$  en el sentido que para todos los vértices  $u$  y  $v$  de  $G$ ,

$$\{u, v\} \text{ es una arista en } G \Leftrightarrow \{g(u), g(v)\} \text{ es una arista en } G'. \quad 10.4.2$$

### Isomorfismo de grafos simples

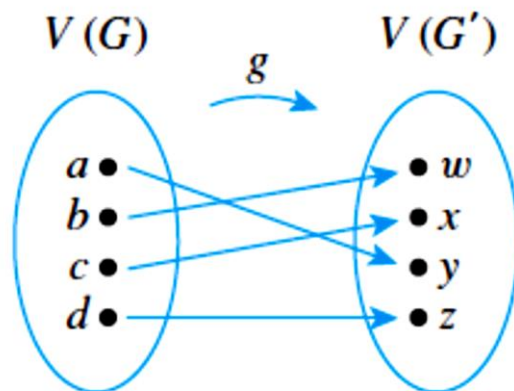
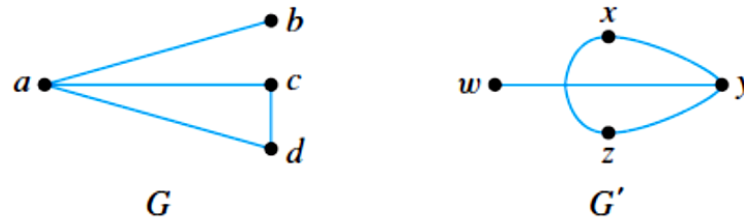
¿Los dos grafos que se muestran a continuación son isomorfos? Si es así, defina un isomorfismo.



## Isomorfismo en Grafos Simples

### Isomorfismo de grafos simples

¿Los dos grafos que se muestran a continuación son isomorfos? Si es así, defina un isomorfismo.



| Aristas de $G$ | Aristas de $G'$             |
|----------------|-----------------------------|
| $\{a, b\}$     | $\{y, w\} = \{g(a), g(b)\}$ |
| $\{a, c\}$     | $\{y, x\} = \{g(a), g(c)\}$ |
| $\{a, d\}$     | $\{y, z\} = \{g(a), g(d)\}$ |
| $\{c, d\}$     | $\{x, z\} = \{g(c), g(d)\}$ |



Universidad  
Europea  
del Atlántico

[www.uneatlantico.es](http://www.uneatlantico.es)