



Universidad
Europea
del Atlántico

www.uneatlantico.es

Grafos

1. Representación Matricial
2. Isomorfismo

Representaciones Matriciales

www.uneatlantico.es

Matrices

- Definición

Una **matriz A** $m \times n$ (se lee “ m por n ”) sobre un conjunto S es un arreglo rectangular de elementos de S dispuestos en m renglones y n columnas:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$\leftarrow i\text{-ésimo renglón de } A$

↑

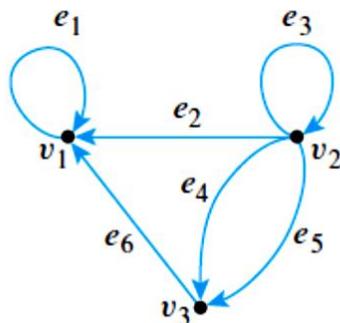
$j\text{-ésima columna de } A$

Se escribe $A = (a_{ij})$.

Representaciones Matriciales

www.uneatlantico.es

Matriz de Adyacencia (Grafo Dirigido)



Grafo dirigido G

a)

$$A = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ v_1 & 1 & 0 & 0 \\ v_2 & 1 & 1 & 2 \\ v_3 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriz de adyacencia

b)

• Definición

Sea G un grafo dirigido con vértices ordenados v_1, v_2, \dots, v_n . La **matriz de adyacencia de G** es la matriz $n \times n$ $A = (a_{ij})$ sobre el conjunto de enteros no negativos tales que

$a_{ij} =$ al número de flechas de v_i a v_j para toda $i, j = 1, 2, \dots, n$.

Representaciones Matriciales

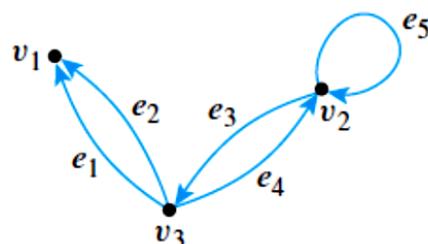
www.uneatlantico.es

Matriz de Adyacencia (Grafo Dirigido).

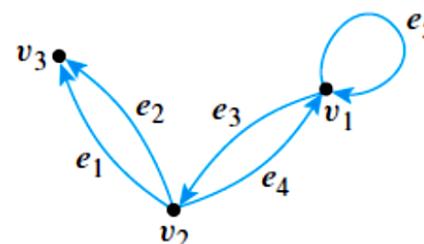
Ejemplo

La matriz de adyacencia de un grafo

Los dos grafos dirigidos que se muestran a continuación difieren sólo en el orden de sus vértices. Encuentre sus matrices de adyacencia.



a)



b)

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} & v_1 & v_2 & v_3 \\ v_1 & \left[\begin{matrix} 0 & 0 & 0 \end{matrix} \right] \\ v_2 & \left[\begin{matrix} 0 & 1 & 1 \end{matrix} \right] \\ v_3 & \left[\begin{matrix} 2 & 1 & 0 \end{matrix} \right] \end{matrix} \\ a) \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} & v_1 & v_2 & v_3 \\ v_1 & \left[\begin{matrix} 1 & 1 & 0 \end{matrix} \right] \\ v_2 & \left[\begin{matrix} 1 & 0 & 2 \end{matrix} \right] \\ v_3 & \left[\begin{matrix} 0 & 0 & 0 \end{matrix} \right] \end{matrix} \\ b) \end{array}$$



Representaciones Matriciales

www.uneatlantico.es

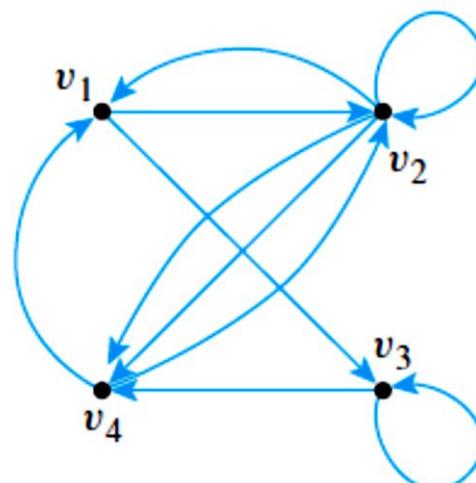
Matriz de Adyacencia (Grafo Dirigido). Ejemplo

Determinación de un grafo dirigido de una matriz

Sea

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dibuje un grafo dirigido que tiene a \mathbf{A} como su matriz de adyacencia.



Representaciones Matriciales

www.uneatlantico.es

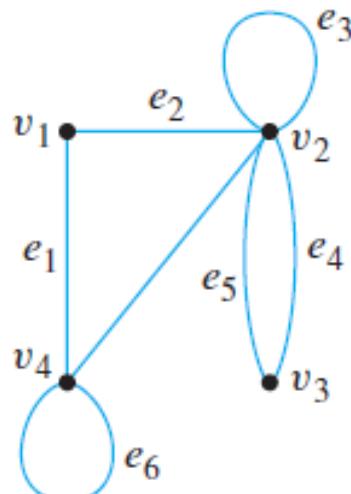
Matriz de Adyacencia (Grafo No Dirigido)

- Definición

Sea G un grafo no dirigido con vértices ordenados v_1, v_2, \dots, v_n . La **matriz de adyacencia** de G es la matriz $n \times n$, $A = (a_{ij})$ sobre el conjunto de los enteros no negativos tales que

$a_{ij} =$ número de aristas que conectan v_i con v_j

para todas $i, j = 1, 2, \dots, n$.



$$A = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ v_1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ v_2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ v_3 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ v_4 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz Simétrica

- Definición

Una matriz cuadrada $n \times n$, $A = (a_{ij})$ se llama **simétrica**, si y sólo si, para toda i , $j = 1, 2, \dots, n$,

$$a_{ij} = a_{ji}$$

Matrices simétricas

¿Cuáles de las siguientes matrices son simétricas?

a. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

b. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Solución Sólo b) es simétrica. En a) la entrada en el primer renglón y la segunda columna difiere de la entrada en el segundo renglón y la primera columna; la matriz en c) no es cuadrada.

Representaciones Matriciales

www.uneatlantico.es

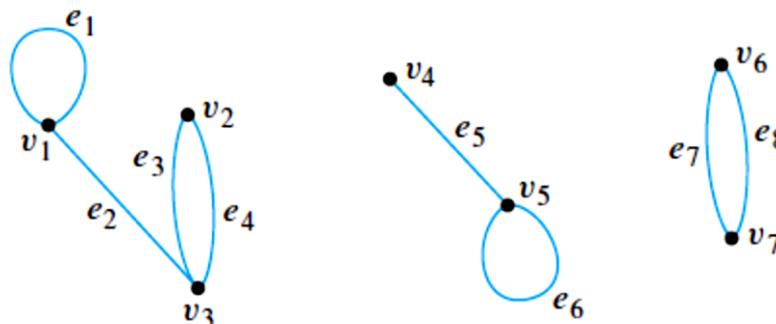
Matrices y Componentes Conexos

Teorema 10.3.1

Sea G un grafo con componentes conexos G_1, G_2, \dots, G_k . Si hay n_i vértices en cada componente conexa G_i y estos vértices están numerados consecutivamente, entonces la matriz de adyacencia de G tiene la forma

$$\begin{bmatrix} A_1 & O & O & \cdots & O & O \\ O & A_2 & O & \cdots & O & O \\ O & O & A_3 & \cdots & O & O \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ O & O & O & \cdots & O & A_k \end{bmatrix}$$

donde cada A_i es la matriz de adyacencia $n_i \times n_j$ de G_i , para toda $i = 1, 2, \dots, k$ y los O representan matrices cuyas entradas son todas 0.



$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Representaciones Matriciales

www.uneatlantico.es

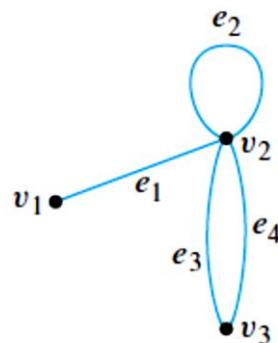
Caminos de Longitud N

Teorema 10.3.2

Si G es un grafo con vértices v_1, v_2, \dots, v_m y A es la matriz de adyacencia de G , entonces para cada entero positivo n y para todos los enteros $i, j = 1, 2, \dots, m$,

la ij -ésima entrada de A^n = número de caminos de longitud n de v_i a v_j .

¿Cuántos distintos caminos de longitud 2 conectan a v_1 y v_2 ?

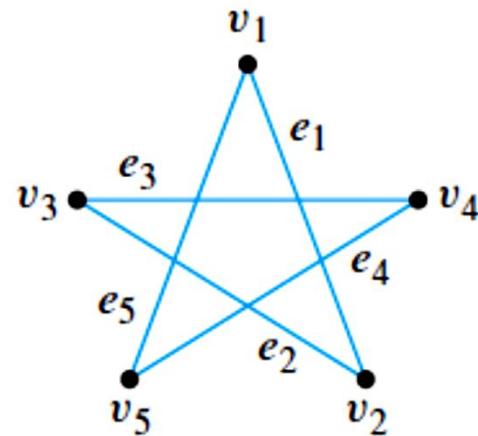
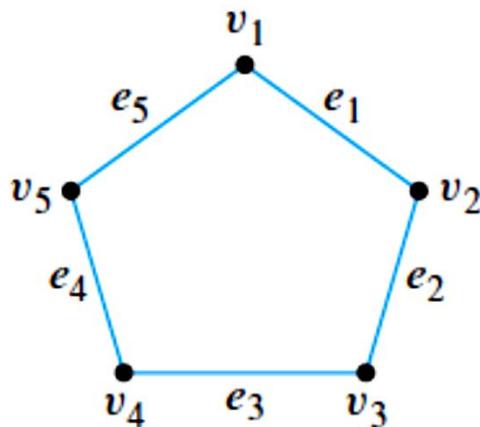


$$A = \begin{matrix} & v_1 & v_2 & v_3 \\ v_1 & 0 & 1 & 0 \\ v_2 & 1 & 1 & 2 \\ v_3 & 0 & 2 & 0 \end{matrix}.$$

Calcule A^2 como:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Isomorfismo en Grafos



• Definición

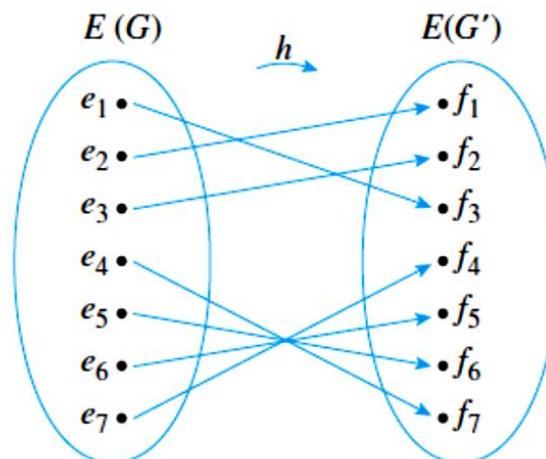
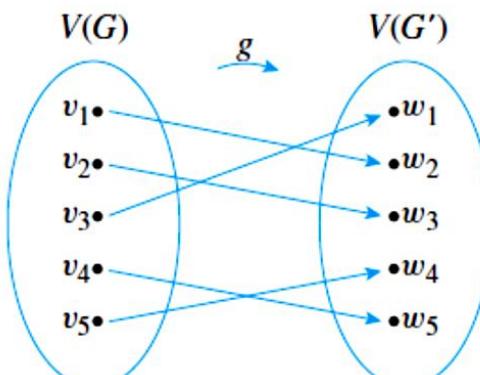
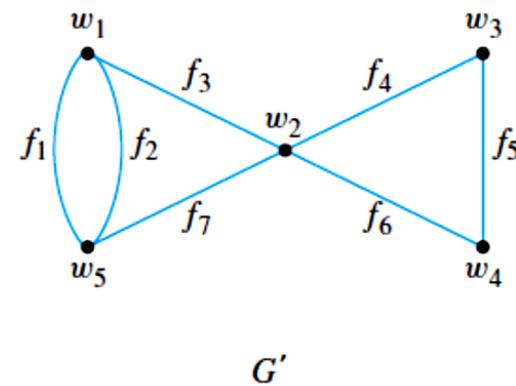
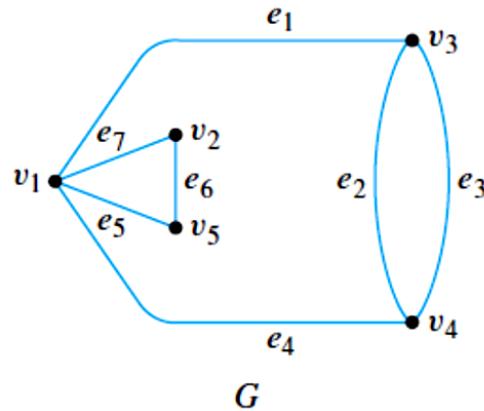
Sean G y G' grafos con conjuntos de vértices $V(G)$ y $V(G')$ y conjuntos de aristas, $E(G)$ y $E(G')$, respectivamente. G es isomorfo a G' si y sólo si, existe una correspondencia uno a uno $g: V(G) \rightarrow V(G')$ y $h: E(G) \rightarrow E(G')$ que preserva las funciones de punto extremo-aristas de G y G' en el sentido que para todo $v \in V(G)$ y $e \in E(G)$,

$$v \text{ es un punto extremo de } e \Leftrightarrow g(v) \text{ es un punto extremo de } h(e). \quad 10.4.1$$

Isomorfismo en Grafos. Ejemplo

Demostración de que dos grafos son isomorfos

Demuestre que los siguientes dos grafos son isomorfos.



Isomorfismo en Grafos

Teorema 10.4.1 El isomorfismo gráfico es una relación de equivalencia

Sea S un conjunto de grafos y sea R la relación de isomorfismo gráfico en S . Entonces R es una relación de equivalencia en S .

• Definición

Una propiedad P se llama una **invariante del isomorfismo del grafo** si y sólo si, dados los grafos cualesquiera G y G' , si G tiene la propiedad P y G' es isomorfa a G , entonces G' tiene la propiedad P .

Teorema 10.4.2

Cada una de las siguientes propiedades es un invariante del isomorfismo del grafo, donde n , m y k son todos enteros no negativos:

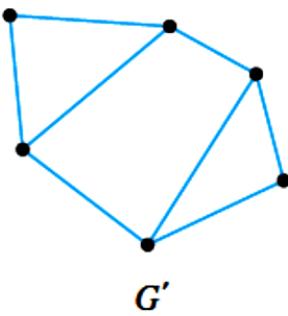
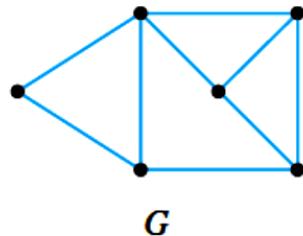
1. tiene n vértices;
2. tiene m aristas;
3. tiene un vértice de grado k ;
4. tiene m vértices de grado k ;
5. tiene un circuito de longitud k ;
6. tiene un circuito simple de longitud k ;
7. tiene m circuitos simples de longitud k ;
8. es conexo;
9. tiene un circuito de Euler;
10. tiene un circuito hamiltoniano.

Isomorfismo en Grafos. Ejemplo

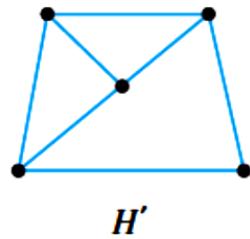
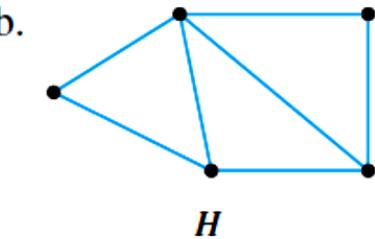
Demostración de que dos grafos no son isomorfos

Demuestre que los siguientes pares de grafos no son isomorfos encontrando un invariante isomorfo que no comparten.

a.



b.



Solución

- G tiene nueve aristas; G' tiene sólo ocho.
- H tiene un vértice de grado 4; H' no.



Isomorfismo en Grafos Simples

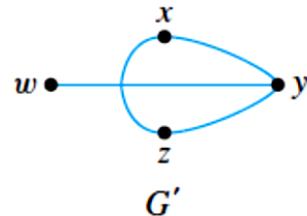
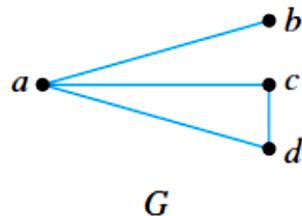
- Definición

Si G y G' son grafos simples, entonces G es **isomorfo a G'** si y sólo si, existe una correspondencia g uno a uno del conjunto de vértices $V(G)$ de G al conjunto de vértices $V(G')$ de G' que conserva las funciones de punto extremo-aristas de G y G' en el sentido que para todos los vértices u y v de G ,

$$\{u, v\} \text{ es una arista en } G \Leftrightarrow \{g(u), g(v)\} \text{ es una arista en } G'. \quad 10.4.2$$

Isomorfismo de grafos simples

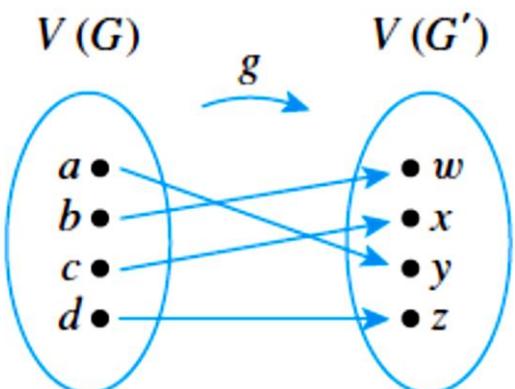
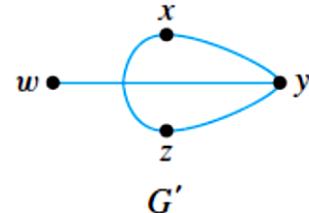
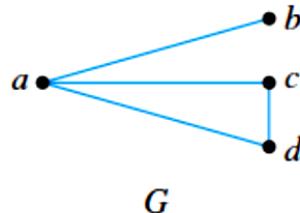
¿Los dos grafos que se muestran a continuación son isomorfos? Si es así, defina un isomorfismo.



Isomorfismo en Grafos Simples

Isomorfismo de grafos simples

¿Los dos grafos que se muestran a continuación son isomorfos? Si es así, defina un isomorfismo.



Aristas de G	Aristas de G'
$\{a, b\}$	$\{y, w\} = \{g(a), g(b)\}$
$\{a, c\}$	$\{y, x\} = \{g(a), g(c)\}$
$\{a, d\}$	$\{y, z\} = \{g(a), g(d)\}$
$\{c, d\}$	$\{x, z\} = \{g(c), g(d)\}$



Universidad
Europea
del Atlántico

www.uneatlantico.es