Universidad Europea del Atlántico

www.uneatlantico.es

Grafos

Sumario

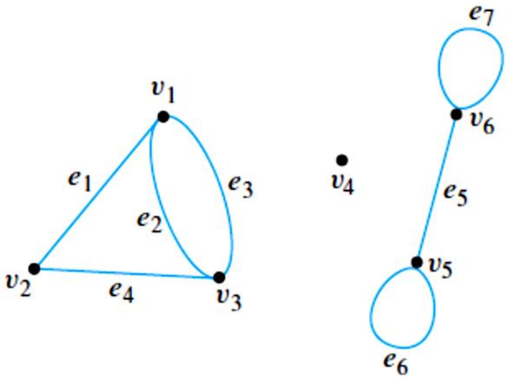
Definiciones y Propiedades Básicas

• Definición

Un **grafo** G consiste de dos conjuntos finitos: un conjunto no vacío $V(G)$ de **vértices** y un conjunto de **aristas** $E(G)$, donde cada arista está asociada a un conjunto compuesto por uno o dos vértices llamados **puntos extremos**. La correspondencia de aristas a puntos finales se llama la **función de arista a punto extremo**.

Una arista con un sólo punto extremo se llama un **bucle** y dos o más aristas distintas con el mismo conjunto de puntos extremos se dicen que son **paralelas**. Se dice que una arista **conecta** sus puntos finales; dos vértices que se conectan por una arista se denominan **adyacentes**; y un vértice que es un punto final de un bucle se dice que es **adyacente a sí mismo**.

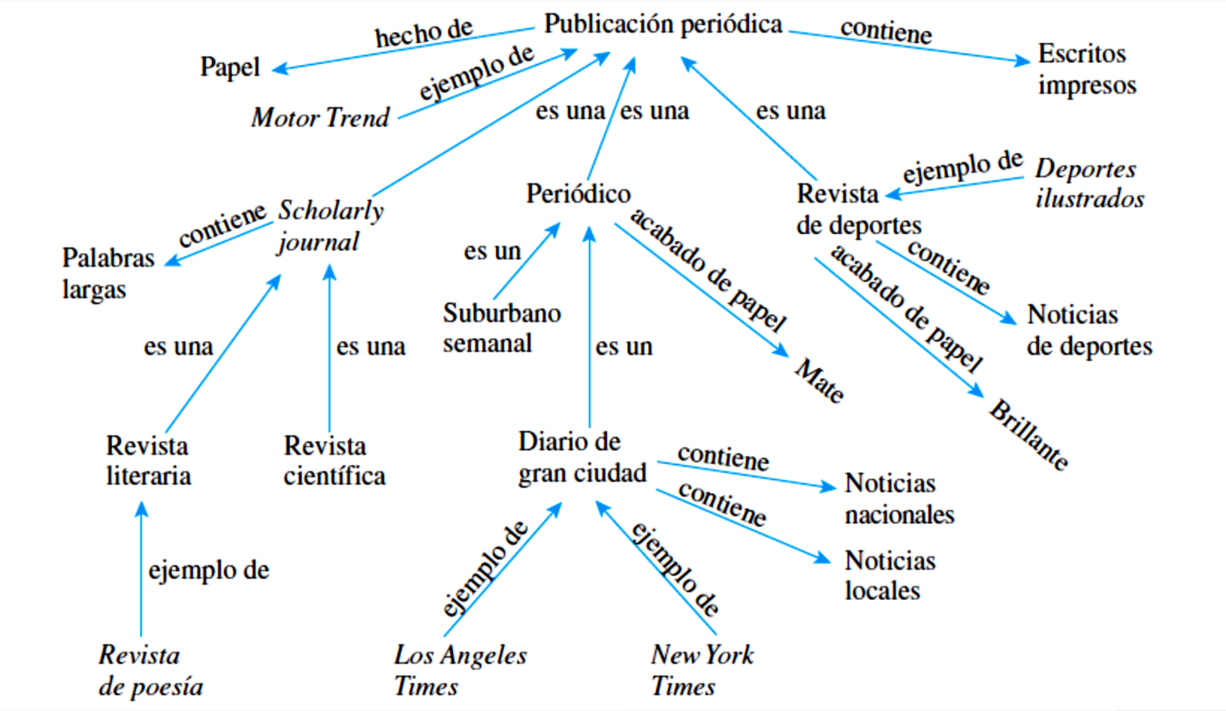
Se dice que una arista **incide sobre** cada uno de sus puntos extremos y dos aristas que inciden en el mismo punto se llaman **adyacentes**. Un vértice en el que no incide arista alguna se llama **aislado**.



Definiciones y Propiedades Básicas

• Definición

Un **grafo dirigido** o **digráfica**, consiste en dos conjuntos finitos: un conjunto no vacío $V(G)$ de vértices y un conjunto de aristas dirigidas $D(G)$, donde cada uno está asociado con un par ordenado de vértices llamado sus **puntos extremos**. Si el arista e está asociada con el par de vértices (v, w), entonces se dice que e es la arista (dirigida) de v a w.



Definiciones y Propiedades Básicas. Ejemplo

Uso de un grafo para resolver un problema: vegetarianos y caníbales

La siguiente es una variación de un famoso rompecabezas usado con frecuencia como un ejemplo en el estudio de inteligencia artificial. Se trata de una isla en la que todas las personas son de uno de dos tipos, vegetarianos o caníbales. Inicialmente, dos vegetarianos y dos caníbales están en la orilla izquierda del río. Con ellos está un barco que puede contener un máximo de dos personas. El objetivo del rompecabezas es encontrar una forma de transportar a todos los vegetarianos y caníbales a la orilla derecha del río. Lo que hace difícil es que en ningún momento puede el número de caníbales en cualquier orilla superar al número de vegetarianos. De lo contrario, les ¡sucedería un desastre a los vegetarianos!

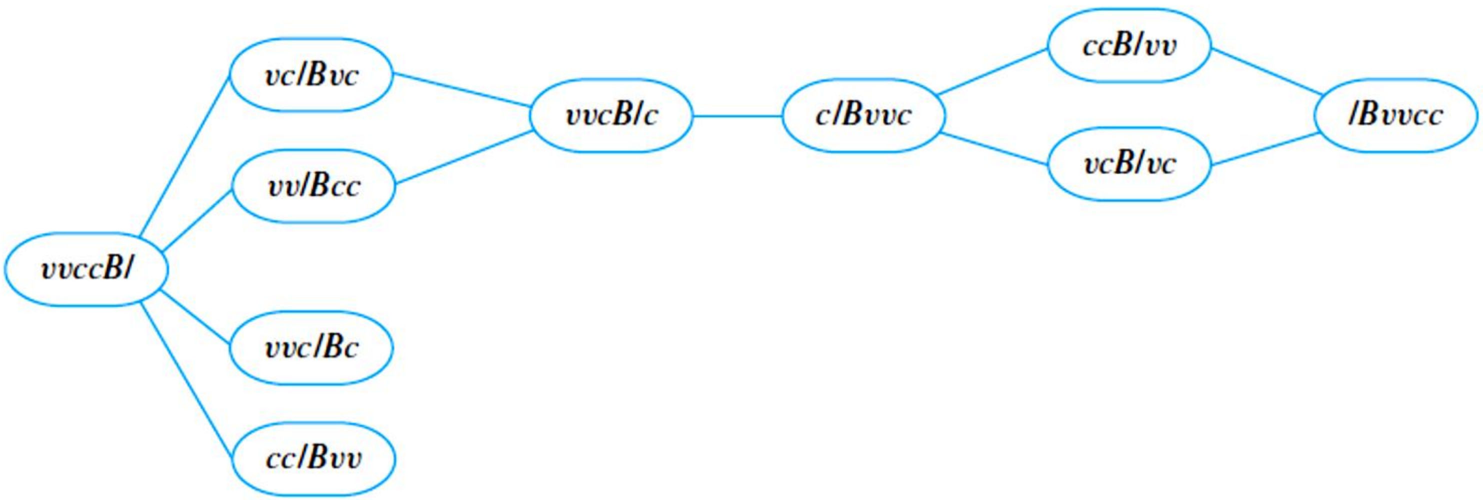
Solución Una forma sistemática de abordar este problema es introducir una notación que puede indicar todos los posibles arreglos de vegetarianos, caníbales y el barco a orillas del río. Por ejemplo, podría escribir (vvc/Bc) para indicar que hay dos vegetarianos y un caníbal en la orilla izquierda y un caníbal y el barco en la orilla derecha. Entonces $(vvccB/)$ indicaría la posición inicial en la que tanto dos vegetarianos, como dos caníbales y el barco se encuentran en la orilla izquierda del río. El objetivo del rompecabezas es entender una secuencia de movimientos para alcanzar la posición $(/Bvvcc)$ en la que tanto dos vegetarianos, como dos caníbales y el barco se encuentran en la orilla derecha del río.

Definiciones y Propiedades Básicas

Definiciones y Propiedades Básicas. Ejemplo

Uso de un grafo para resolver un problema: vegetarianos y caníbales

La siguiente es una variación de un famoso rompecabezas usado con frecuencia como un ejemplo en el estudio de inteligencia artificial. Se trata de una isla en la que todas las personas son de uno de dos tipos, vegetarianos o caníbales. Inicialmente, dos vegetarianos y dos caníbales están en la orilla izquierda del río. Con ellos está un barco que puede contener un máximo de dos personas. El objetivo del rompecabezas es encontrar una forma de transportar a todos los vegetarianos y caníbales a la orilla derecha del río. Lo que hace difícil es que en ningún momento puede el número de caníbales en cualquier orilla superar al número de vegetarianos. De lo contrario, les ¡sucedería un desastre a los vegetarianos!



Definiciones y Propiedades Básicas

Grado de un Vértice y Grado Total de un Grafo

• **Definición**

Sea G un grafo y v un vértice de G. El **grado de v**, que se denota por **deg(v)**, es igual al número de aristas que inciden en v, con una arista que es un bucle contado dos veces; El **grado total de G** es la suma de los grados de todos los vértices de G.

Teorema 10.1.1 El teorema del saludo de mano

Si G es cualquier grafo, entonces la suma de los grados de todos los vértices de G es dos veces el número de aristas de G. Específicamente, si los vértices de G son v_1, $v_2, \ldots, v_n$, donde n es un entero no negativo, entonces

$$\begin{aligned}\text{el grado total de } G &= \deg(v_1) + \deg(v_2) + \cdots + \deg(v_n)\\ &= 2 \cdot (\text{el número de aristas de } G).\end{aligned}$$

Corolario 10.1.2

El grado total de un grafo es par.

Proposición 10.1.3

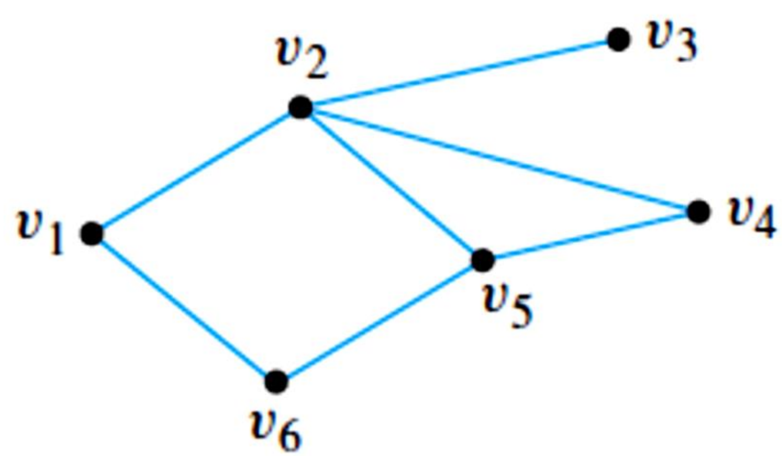
En cualquier grafo hay un número par de vértices de grado impar.

Grafos Especiales

Grafo Simple

• Definición y notación

Un **grafo simple** es un grafo que no tiene ningún bucle o aristas paralelas. En un grafo simple, una arista con puntos extremos v y w se denota por $\{v, w\}$.

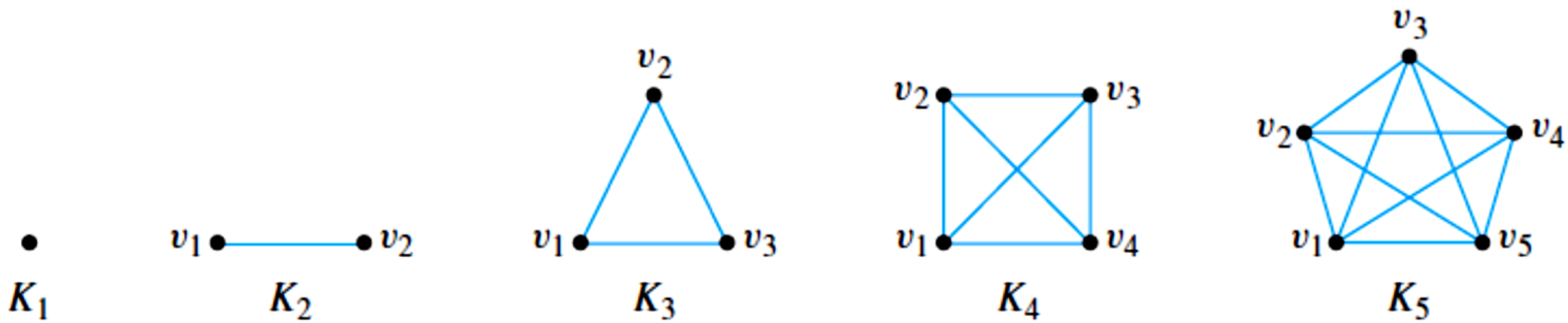


Grafos Especiales

Grafo Completo

• **Definición**

Sea n un entero positivo. Un **grafo completo de *n* vértices**, que se denota por K_n, es un grafo simple con n vértices y exactamente una arista conectando a cada par de vértices distintos.

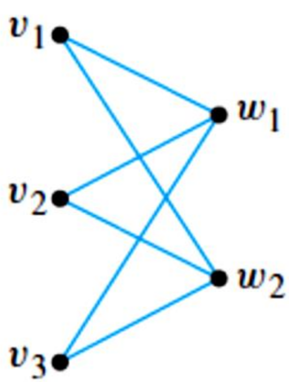


Grafo Completo Bipartito

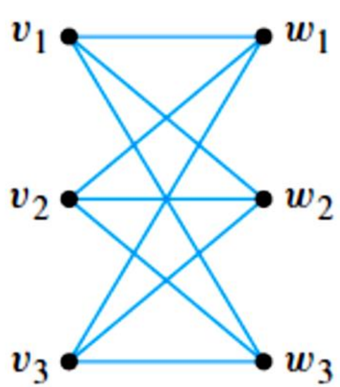
• Definición

Sean m y n enteros positivos. Un **grafo completo bipartito de vértices (m, n)**, que se denota por $K_{m,n}$, es un grafo simple con vértices distintos $v_1, v_2, \ldots, v_m$ y $w_1, w_2, \ldots, w_n$ que satisface las siguientes propiedades: Para todos $i, k = 1, 2, \ldots, m$ y para todos $j, l = 1, 2, \ldots, n$,

1. Hay una arista de cada vértice v_i, a cada vértice w_j.
2. No hay arista de cualquier vértice v_i a cualquier otro vértice v_k.
3. No hay arista de cualquier vértice w_j a cualquier otro vértice w_l.



$K_{3,2}$



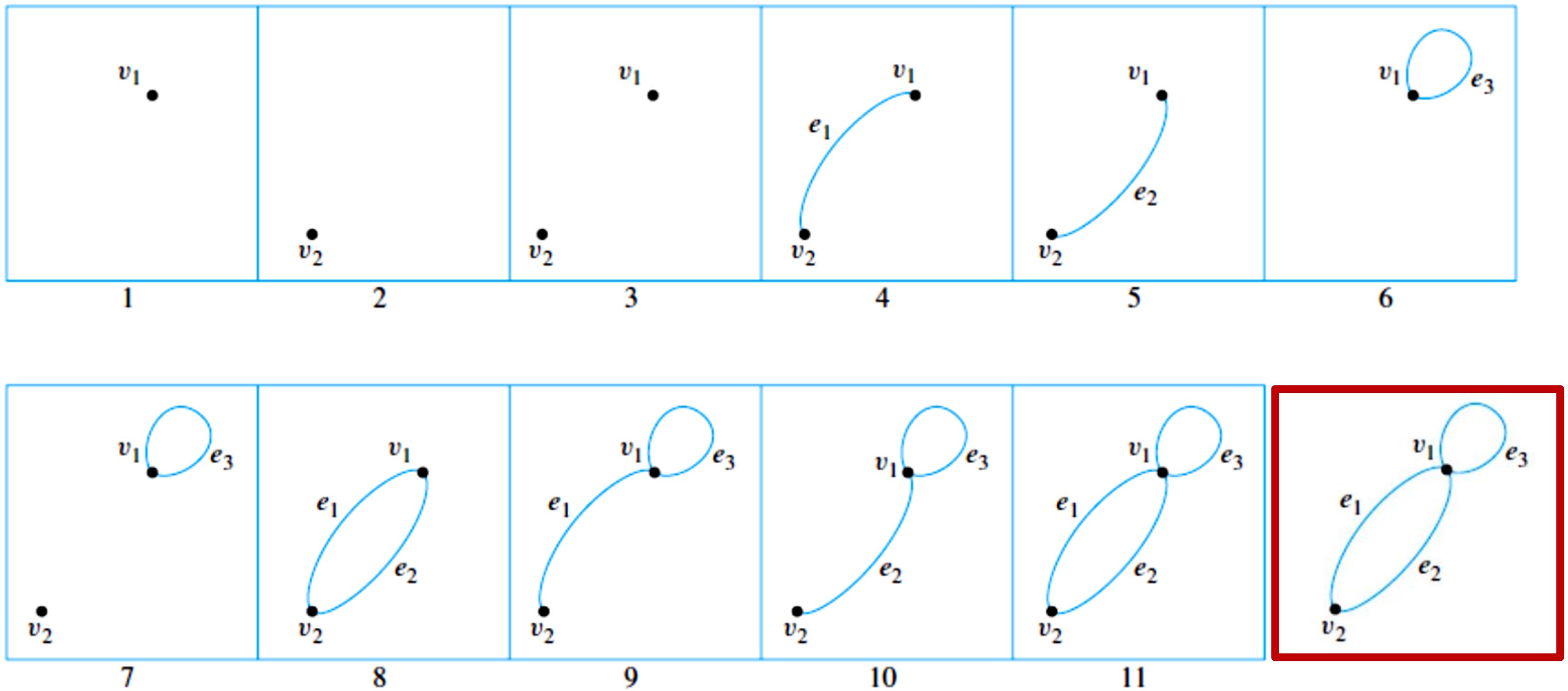
$K_{3,3}$

Grafos Especiales

Subgrafos

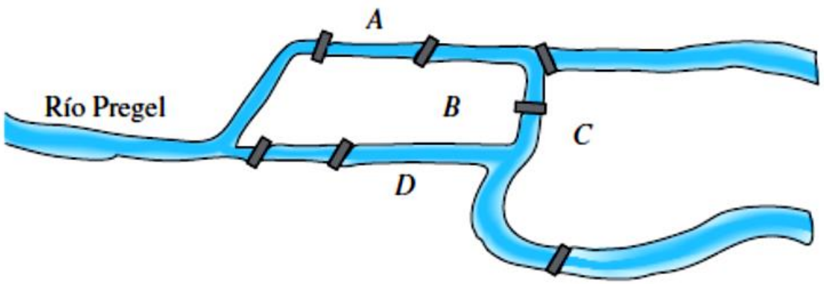
• **Definición**

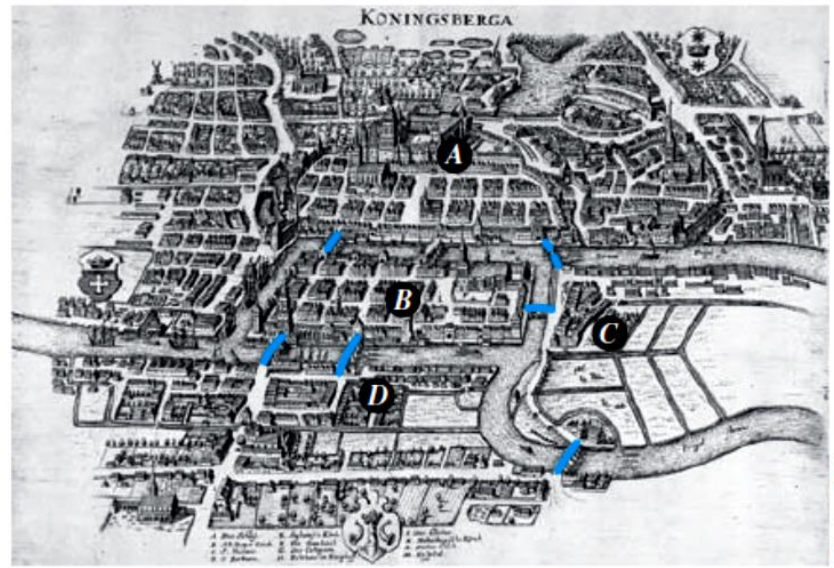
Se dice que un grafo H es un **subgrafo** de un grafo G si y sólo si, cada vértice en H es también un vértice en G, cada arista en H es también una arista en G y cada arista en H tiene los mismos puntos extremos de G.



Senderos, Rutas y Circuitos

Puentes de Königsberg





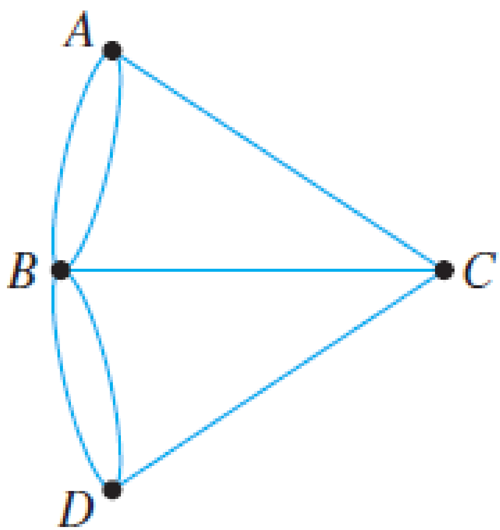
Merian-Erben

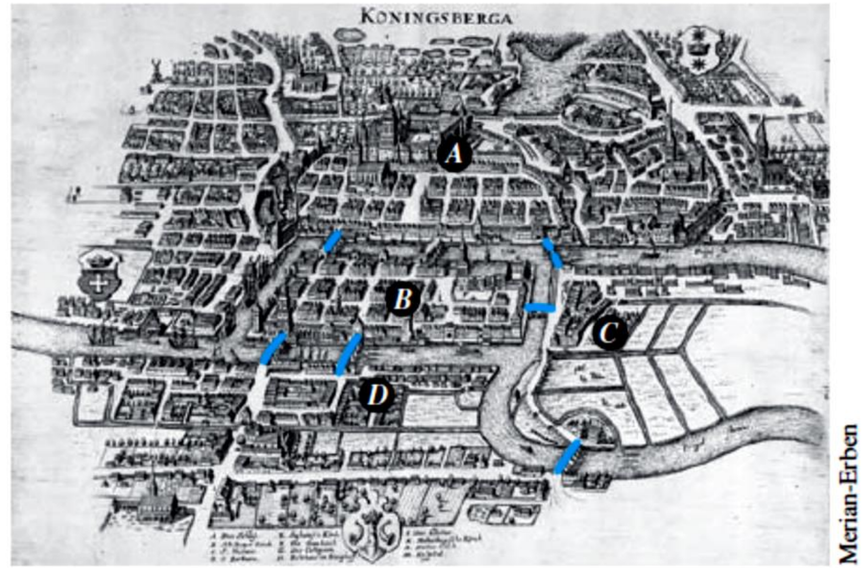
El tema de la teoría de grafos comenzó en el año 1736 cuando el gran matemático Leonhard Euler publicó un documento presentando la solución del siguiente rompecabezas:

> La ciudad de Königsberg en Prusia (ahora Kaliningrado en Rusia) fue construida en un punto donde dos ramas del río Pregel vienen juntas. Consistía en una isla y algunas tierras a lo largo de las orillas del río. Estas se conectaron por siete puentes, como se muestra en la figura 10.2.1.
>
> La pregunta es: ¿es posible que una persona dé un recorrido por la ciudad, comenzando y terminando en la misma ubicación y cruzando cada uno de los siete puentes exactamente una vez?*

Senderos, Rutas y Circuitos

Puentes de Königsberg





¿Es posible trazar este grafo, comenzando y terminando en el mismo punto, sin jamás levantar el lápiz del papel?

Os doy 500€ de Recompensa

Pago mediante Bizum

Senderos, Rutas y Circuitos

Definiciones

• Definición

Sea G un grafo y sean v y w vértices en G.

Un **camino de v a w** es una sucesión finita alternada de vértices adyacentes y aristas de G. Por tanto un camino tiene la forma

$$v_0 e_1 v_1 e_2 \cdots v_{n-1} e_n v_n,$$

donde las v representan vértices, las e representan aristas, $v_0 = v$, $v_n = w$ y para toda $i = 1, 2, \ldots n$, v_{i-1} y v_i son los puntos extremos de e_i. **El camino trivial de v a v** consiste del único vértice v.

Un **sendero de v a w** es un camino de v a w que no contiene una arista repetida.

Una **trayectoria de v a w** es un sendero que no contienen un vértice repetido.

Un **camino cerrado** es un camino que comienza y termina en el mismo vértice.

Un **circuito** es un camino cerrado que contiene al menos una arista y no contiene una arista repetida.

Un **circuito simple** es un circuito que no tiene cualquier otro vértice repetido excepto el primero y el último.

Senderos, Rutas y Circuitos

Definiciones

Para referencia fácil, estas definiciones se resumen en la tabla siguiente:

	¿Arista repetida?	¿Vértice repetido?	¿Inicia y finaliza en el mismo punto?	¿Debe contener al menos una arista?
Camino	permitido	permitido	permitido	no
Sendero	no	permitido	permitido	no
Trayectoria	no	no	no	no
Camino cerrado	permitido	permitido	sí	no
Circuito	no	permitido	sí	sí
Circuito simple	no	sólo primero y último	sí	sí

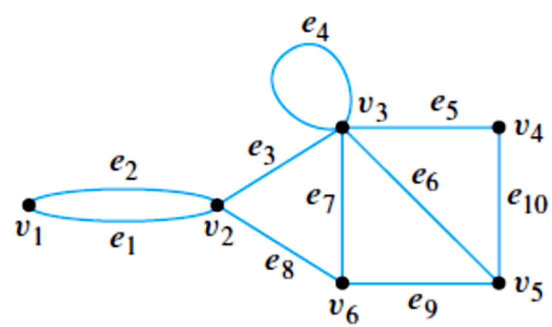
Senderos, Rutas y Circuitos

Definiciones. Ejemplo

Caminos, senderos, trayectorias y circuitos

En el grafo siguiente, determine cuáles de los siguientes caminos son senderos, trayectorias, circuitos o circuitos simples.

a. $v_1e_1v_2e_3v_3e_4v_3e_5v_4$ b. $e_1e_3e_5e_5e_6$ c. $v_2v_3v_4v_5v_3v_6v_2$
d. $v_2v_3v_4v_5v_6v_2$ e. $v_1e_1v_2e_1v_1$ f. v_1



Solución

a. Este camino tiene un vértice repetido, pero no tiene una arista repetida, así que es un sendero de v_1 a v_4, pero no una trayectoria.

b. Esto es sólo un camino de v_1 a v_5. No es un sendero porque tiene una arista repetida.

c. Este camino comienza y termina en v_2, contiene al menos una arista y no tiene una arista repetida, así que es un circuito. Ya que el vértice v_3 se repite en medio, no es un circuito simple.

Senderos, Rutas y Circuitos

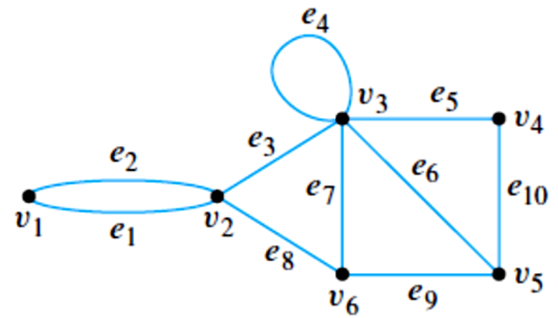
Definiciones. Ejemplo

Caminos, senderos, trayectorias y circuitos

En el grafo siguiente, determine cuáles de los siguientes caminos son senderos, trayectorias, circuitos o circuitos simples.

a. $v_1e_1v_2e_3v_3e_4v_3e_5v_4$ b. $e_1e_3e_5e_5e_6$ c. $v_2v_3v_4v_5v_3v_6v_2$

d. $v_2v_3v_4v_5v_6v_2$ e. $v_1e_1v_2e_1v_1$ f. v_1



d. Este camino empieza y termina en v_2, contiene al menos una arista, no tiene una arista repetida y no tiene un vértice repetido. Por tanto es un circuito simple.

e. Esto es sólo un camino cerrado comenzando y terminando en v_1. No es un circuito porque se repite la arista e_1.

f. El primer vértice de este camino es el mismo que su último vértice, pero no contiene una arista y así no es un circuito. Es un camino cerrado de v_1 a v_1. (También es un sendero de v_1 a v_1).

Senderos, Rutas y Circuitos

Conectividad

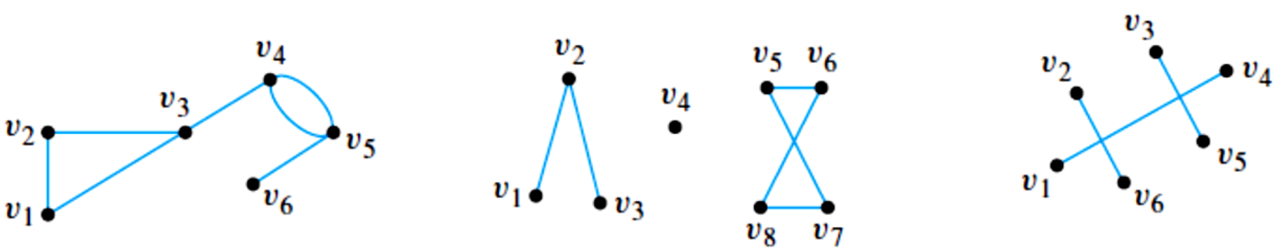
• Definición

Sea G un grafo. Dos vértices ***v* y *w* de *G* son conexos** si y sólo si, existe un camino de v a w. El **grafo *G* es conexo** si y sólo si, dados *cualesquiera* dos vértices v y w en G, hay que un camino de v a w. Simbólicamente,

$$G \text{ es conexo} \quad \Leftrightarrow \quad \forall \text{ vértices } u, w \in V(G), \exists \text{ un camino de } v \text{ a } w.$$

¿Grafos conexos y no conexos?

¿Cuáles de los siguientes grafos son conexos?



a) *b)* *c)*

Senderos, Rutas y Circuitos

Conectividad

Lema 10.2.1

Sea G un grafo.

a. Si G es conexa, entonces cualesquiera dos vértices distintos de G pueden conectarse con una trayectoria.

b. Si los vértices v y w forman parte de un circuito en G y se quita una arista del circuito, entonces aún existe un sendero de v a w en G.

c. Si G es conexa y G contiene un circuito, entonces se puede eliminar una arista del circuito sin desconectar a G.

• Definición

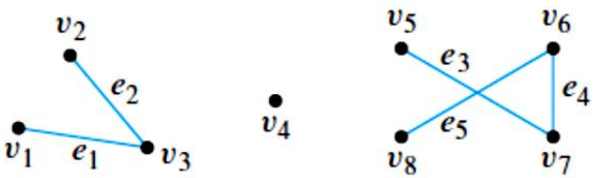
Un grafo H es un **componente conexo** de una gráfica G si y sólo si,

1. H es subgráfica de G;
2. H es conexo; y
3. Un subgrafo no conexo de G tiene a H como un subgrafo y contiene vértices o aristas que no están en H.

Conectividad. Ejemplo

Componentes conexos

Encuentre todos los componentes conexos de la gráfica siguiente G.



Solución G tiene tres componentes conexos: H_1, H_2 y H_3 con conjuntos de vértices V_1, V_2 y V_3 y conjuntos de aristas E_1, E_2 y E_3, donde

$$\begin{aligned} V_1 &= \{v_1, v_2, v_3\}, & E_1 &= \{e_1, e_2\}, \\ V_2 &= \{v_4\}, & E_2 &= \emptyset, \\ V_3 &= \{v_5, v_6, v_7, v_8\}, & E_3 &= \{e_3, e_4, e_5\}. \end{aligned}$$

■

Senderos, Rutas y Circuitos

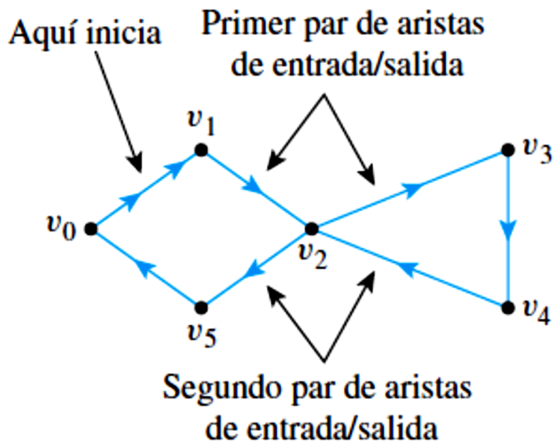
Circuito de Euler

• Definición

Sea G un grafo. Un **circuito de Euler** para G es un circuito que contiene cada vértice y cada arista de G. Es decir, un circuito de Euler para G es una sucesión de vértices adyacentes y aristas en G que tiene al menos una arista, que comienza y termina en el mismo vértice, utiliza cada vértice de G por lo menos una vez y cada arista de G exactamente una vez.

Teorema 10.2.2

Si un grafo tiene un circuito de Euler, entonces todos los vértices del grafo tienen grado positivo par.



En este ejemplo, el circuito de Euler es $v_0v_1v_2v_3v_4v_5v_0$ y v es v_2. Cada vez se introduce v_2 por una arista y se sale por otra arista.

Senderos, Rutas y Circuitos

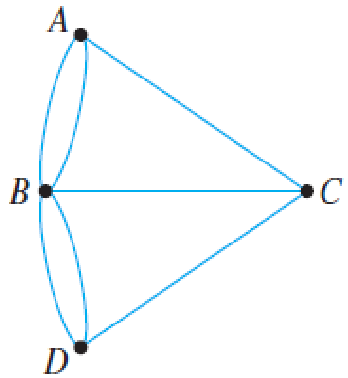
Circuito de Euler

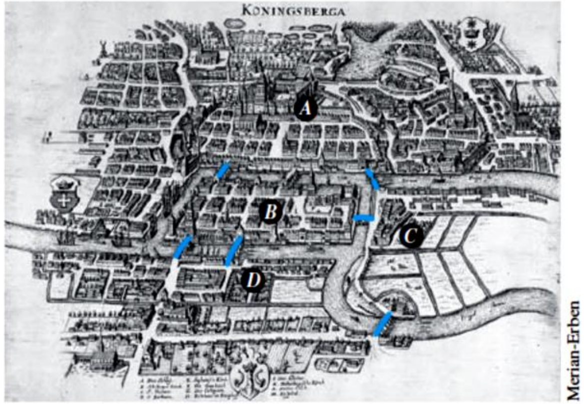
• Definición

Sea G un grafo. Un **circuito de Euler** para G es un circuito que contiene cada vértice y cada arista de G. Es decir, un circuito de Euler para G es una sucesión de vértices adyacentes y aristas en G que tiene al menos una arista, que comienza y termina en el mismo vértice, utiliza cada vértice de G por lo menos una vez y cada arista de G exactamente una vez.

Versión contrapositiva del teorema 10.2.2

Si algún vértice de un grafo tiene grado impar, entonces el grafo no tiene un circuito de Euler.





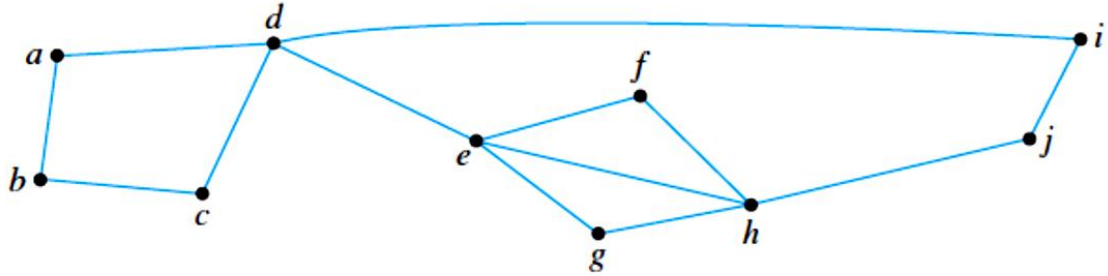
Circuito de Euler. Ejemplo

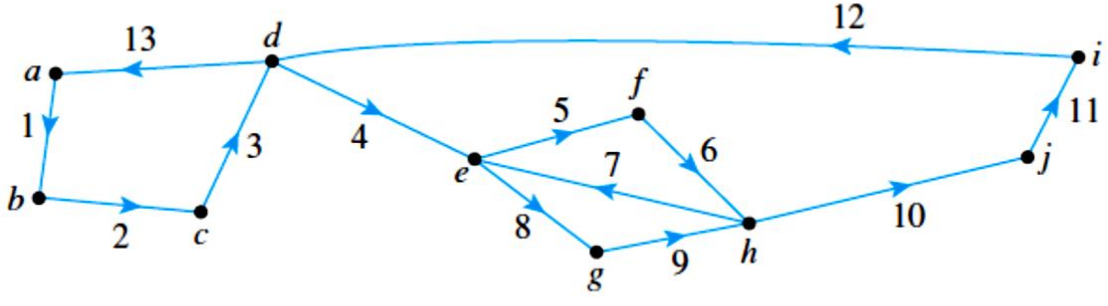
Teorema 10.23

Si un grafo G es conexo y el grado de cada vértice de G es un entero positivo par, G tiene un circuito de Euler.

Determinación de un circuito de Euler

Utilice el teorema 10.2.3 para comprobar que el grafo que se presenta a continuación tiene un circuito de Euler. Después utilice el algoritmo de demostración del teorema para encontrar un circuito de Euler para el grafo.





Senderos, Rutas y Circuitos

Sendero de Euler

• Definición

Sea G un grafo y sean v y w dos vértices distintos de G. Un **sendero de Euler de v a w** es una sucesión de aristas adyacentes y vértices que comienza en v, termina en w, pasa a través de cada vértice de G por lo menos una vez y atraviesa cada arista de G exactamente una vez.

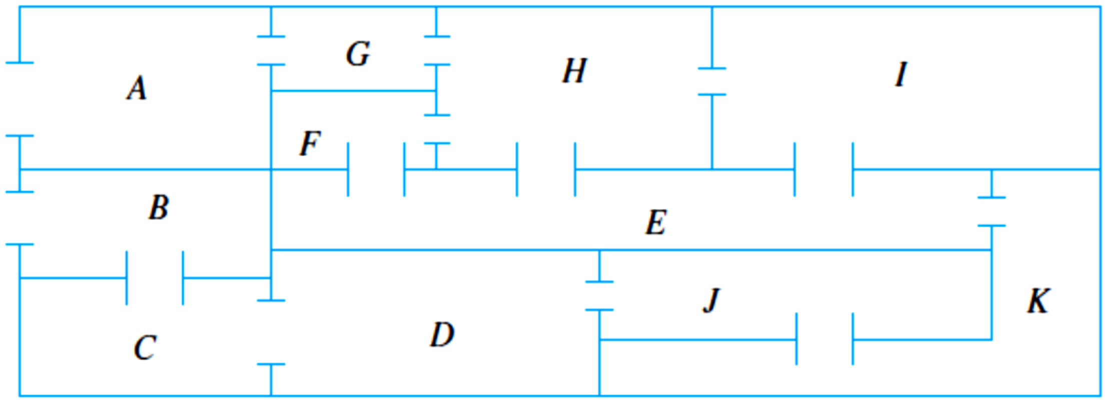
Corolario 10.2.5

Sea G un grafo y sea v y w dos vértices distintos de G. Existe una trayectoria de Euler de v a w si y sólo si G es conexo, u y w tienen grado impar y todos los otros vértices de G tienen grado par positivo.

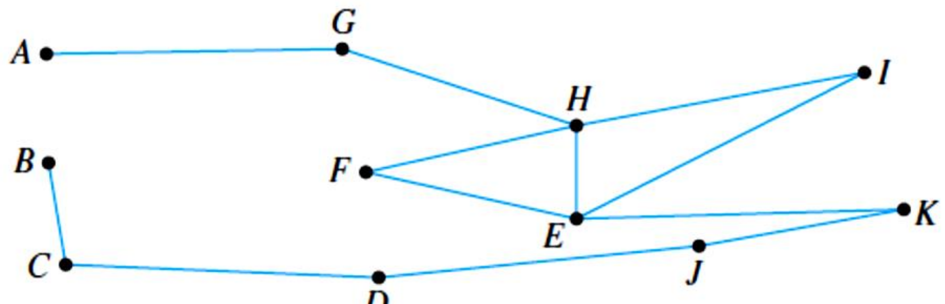
Sendero de Euler. Ejemplo

Determinación de un sendero de Euler

El plano que se muestra a continuación es una casa abierta para vista del público. ¿Es posible encontrar un sendero que inicie en el cuarto A, termina en el cuarto B y pase exactamente una vez por cada puerta interior de la casa? Si es así, determine dicho sendero.



Solución Sea la planta de la casa representada por el grafo que se muestra a continuación.

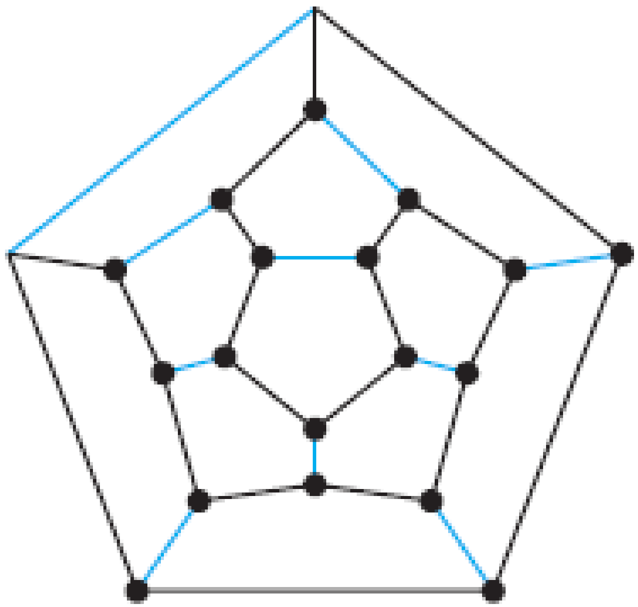


Senderos, Rutas y Circuitos

Circuito Hamiltoniano

• Definición

Dado un grafo G, un **circuito hamiltoniano** para G es un circuito simple que incluye todos los vértices de G. Es decir, un circuito hamiltoniano para G es una sucesión de vértices adyacentes y aristas distintas en las que aparece exactamente una vez cada vértice de G, excepto el primero y el último, que son los mismos.



Senderos, Rutas y Circuitos

Circuito Hamiltoniano

Proposición 10.2.6

Si un grafo G tiene un circuito hamiltoniano, entonces G tiene un subgrafo H con las propiedades siguientes:

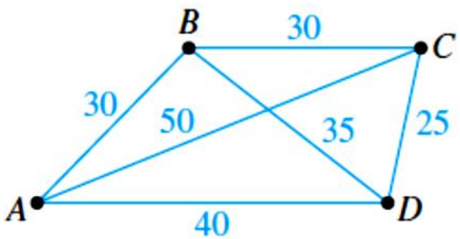
1. H contiene todos los vértices de G.
2. H es conexo.
3. H tiene el mismo número de aristas que de vértices.
4. Cada vértice de H tiene grado 2.

Senderos, Rutas y Circuitos

Circuito Hamiltoniano. Ejemplo

Un problema del agente viajero

Imagine que el dibujo que se muestra a continuación es un mapa que muestra cuatro ciudades y las distancias en kilómetros entre éstas. Supongamos que un vendedor debe viajar a cada ciudad exactamente una vez, comenzando y terminando en la ciudad A. ¿Qué ruta de ciudad a ciudad minimizará la distancia total que debe recorrer?



Ruta	Distancia total (en kilómetros)
$ABCDA$	$30 + 30 + 25 + 40 = 125$
$ABDCA$	$30 + 35 + 25 + 50 = 140$
$ACBDA$	$50 + 30 + 35 + 40 = 155$
$ACDBA$	140 [$ABDCA$ hacia atrás]
$ADBCA$	155 [$ACBDA$ hacia atrás]
$ADCBA$	125 [$ABCDA$ hacia atrás]

Universidad
Europea
del Atlántico

www.uneatlantico.es