Universidad Europea del Atlántico

www.uneatlantico.es

Relaciones

Sumario

www.uneatlantico.es

Relaciones sobre Conjunto. Ejemplo

• Definición

Sean A y B conjuntos. Una **relación R de A a B** es un subconjunto de $A \times B$. Dando un par ordenado (x, y) en $A \times B$, **x está relacionada con y por R**, que se escribe $x\ R\ y$, si y sólo si (x, y), está en R. El conjunto A se llama el dominio de R y el conjunto B se llama su codominio.

La relación menor que para números reales

Se define una relación L de $\mathbf{R}$ a $\mathbf{R}$ como sigue: Para todos los números reales x y y,

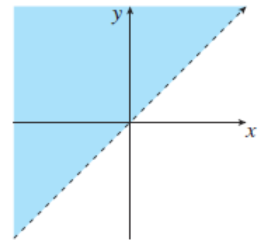
$$x\ L\ y \Leftrightarrow x < y.$$

a. ¿Es $57\ L\ 53$? b. ¿Es $(-17)\ L\ (-14)$? c. ¿Es $143\ L\ 143$? d. ¿Es $(-35)\ L\ 1$?

e. Dibuje la gráfica de L como un subconjunto del plano cartesiano $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$

Solución

a. No, $57 > 53$ b. Sí, $-17 < -14$ c. No, $143 = 143$ d. Sí, $-35 < 1$



www.uneatlantico.es

Relaciones sobre Conjunto. Ejemplo

Una relación sobre el conjunto potencia

Sea $X = \{a, b, c\}$. Entonces $\mathscr{P}(X) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$. Se define una relación **S** de $\mathscr{P}(X)$ a **Z** como sigue: Para todos los conjuntos A y B en $\mathscr{P}(X)$ (es decir, para todos los subconjuntos A y B de X),

$$A \mathbf{S} B \Leftrightarrow A \text{ tiene al menos los mismos elementos que } B.$$

a. ¿Es $\{a, b\}$ **S** $\{b, c\}$? b. ¿Es $\{a\}$ **S** $\emptyset$? c. ¿Es $\{b, c\}$ **S** $\{a, b, c\}$? d. ¿Es $\{c\}$ **S** $\{a\}$?

Solución

a. Sí, ambos conjuntos tienen dos elementos.

b. Sí, $\{a\}$ tiene un elemento y $\emptyset$ tiene cero elementos y $1 \geq 0$.

c. No, $\{b, c\}$ tiene dos elementos y $\{a, b, c\}$ tiene tres elementos y $2 < 3$.

d. Sí, ambos conjuntos tienen un elemento. ■

www.uneatlantico.es

Inversa de una Relación. Ejemplo

- **Definición**

Sea R una relación de A a B. Se define la relación inversa R^{-1} de B a A como sigue:

$$R^{-1} = \{(y, x) \in B \times A \mid (x, y) \in R\}.$$

La inversa de una relación finita

Sea $A = \{2, 3, 4)$ y $B = \{2, 6, 8\}$ y sea R la relación "divide" de A a B: Para toda $(x, y) \in A \times B$,

$$x \, R \, y \quad \Leftrightarrow \quad x \mid y \qquad\qquad x \text{ divide } y.$$

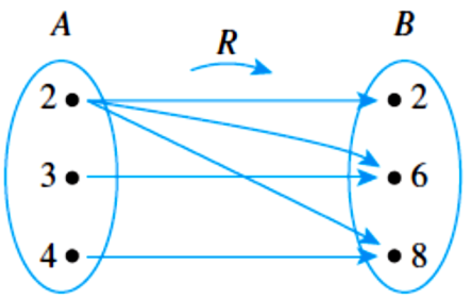
a. Establezca explícitamente qué pares ordenados están en R y R^{-1} y dibuje diagramas de flechas para R y R^{-1}.

Inversa de una Relación. Ejemplo

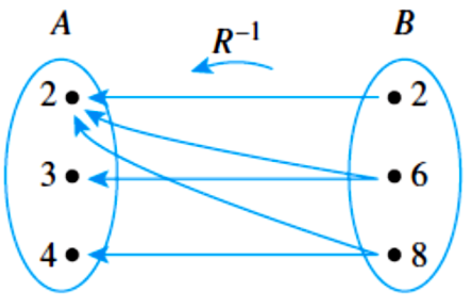
Solución

a. $R \quad = \{(2, 2), (2, 6), (2, 8), (3, 6), (4, 8)\}$

$R^{-1} = \{(2, 2), (6, 2), (8,2), (6,3), (8,4)\}$



Para dibujar el diagrama de flechas para R^{-1}, puede copiar el diagrama de flechas para R, pero invierta la dirección de las flechas.



www.uneatlantico.es

Grafo Dirigido de una Relación

• Definición

Una **relación sobre un conjunto** A es una relación de A a A.

Cuando una relación R se define *sobre* un conjunto A, el diagrama de flechas de la relación se puede modificar para que se convierta en un **grafo dirigido**. En lugar de representar a A como dos conjuntos separados de puntos, A se representa una sola vez y se dibuja una flecha desde cada punto A a cada punto relacionado. Como un diagrama de flechas ordinario,

> Para todos los puntos x y y en A,
>
> hay una flecha de x a $y \quad \Leftrightarrow \quad x\,R\,y \quad \Leftrightarrow \quad (x, y) \in R$.

Si un punto está relacionado consigo mismo, se dibuja un bucle que sale del punto y regresa a éste.

Grafo Dirigido de una Relación. Ejemplo

Grafo dirigido de una relación

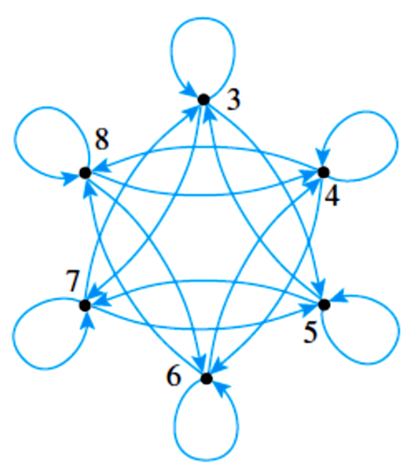
Sea $A = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ y se define una relación R sobre A como sigue: Para toda $x, y \in A$,

$$x\ R\ y \quad \Leftrightarrow \quad 2 \mid (x - y).$$

Dibuje el grafo dirigido de R.

Solución Observe que $3\ R\ 3$ porque $3 - 3 = 0$ y $2 \mid 0$ ya que $0 = 2 \cdot 0$. Por tanto hay un bucle de 3 a sí mismo. Del mismo modo, hay un bucle de 4 a sí mismo, de 5 a sí mismo y así sucesivamente, ya que la diferencia de cada entero consigo mismo es 0 y $2 \mid 0$.

Observe también que $3\ R\ 5$ porque $3 - 5 = -2 = 2 \cdot (-1)$. Y $5\ R\ 3$ porque $5 - 3 = 2 = 2 \cdot 1$. Por tanto hay una flecha de 3 a 5 y también a una flecha de 5 a 3. Las otras flechas en el grafo dirigido, se muestran a continuación, se obtienen por razonamiento similar.



■

www.uneatlantico.es

Relaciones n-arias. BBDD Relacionales

• Definición

Dados los conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$, una **relación *n*-aria** R sobre $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ es un subconjunto de $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$. Los casos especiales de 2-arias, 3-arias y 4-arias se denominan relaciones **binarias**, **ternarias** y **cuaternarias,** respectivamente.

Una base de datos simple

La siguiente es una versión radicalmente simplificada de una base de datos que podría utilizarse en un hospital. Sea A_1 un conjunto de enteros positivos, A_2, un conjunto de cadenas de caracteres alfabéticos, A_3 un conjunto de cadenas de caracteres numéricos y A_4 un conjunto de cadenas de caracteres alfabéticos. Se define una relación cuaternaria R sobre $A_1 \times A_2 \times A_3 \times A_4$ como sigue:

$(a_1, a_2, a_3, a_4) \in R \quad \Leftrightarrow$ un paciente con número de identificación de paciente a_1 y nombre a_2, que fue admitido en la fecha a_3, con diagnóstico primario a_4.

En un hospital particular, esta relación puede contener las siguientes 4-tuplas:

(011985, John Schmidt, 020710, asma)

(574329, Tak Kurosawa, 0114910, neumonía)

(466581, Mary Lazars, 0103910, apendicitis)

www.uneatlantico.es

Reflexividad, Simetría y Transitividad

- **Definición**

Sea R una relación sobre un conjunto A.

1. R es **reflexiva** si y sólo si, para toda $x \in A$, $x\, R\, x$.
2. R es **simétrica** si y sólo si, para toda $x, y \in A$, ***si*** $x\, R\, y$ entonces $y\, R\, x$.
3. R es **transitiva** si y sólo si, para toda $x, y, z \in A$, ***si*** $x\, R\, y$ y $y\, R\, z$ entonces $x\, R\, z$.

En términos informales, las propiedades de la (1) a la (3) dicen lo siguiente:

1. **Reflexiva:** Cada elemento está relacionado consigo mismo.
2. **Simétrica:** Si cualquier elemento está relacionado con cualquier otro elemento entonces, el segundo elemento está relacionado con el primero.
3. **Transitiva:** Si cualquier elemento está relacionado con el segundo y el segundo elemento está relacionado con el tercero entonces, el primer elemento está relacionado con el tercero.

Reflexividad, Simetría y Transitividad

Reflexividad, Simetría y Transitividad. Ejemplo

Propiedades de las relaciones sobre conjuntos finitos

Sea $A = \{0, 1, 2, 3\}$ y se definen las relaciones R, S y T sobre A como sigue:

$$R = \{(0, 0), (0, 1), (0, 3), (1, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 0), (3, 3)\},$$
$$S = \{(0, 0), (0, 2), (0, 3), (2, 3)\},$$
$$T = \{(0, 1), (2, 3)\}.$$

a. ¿Es R reflexiva?, ¿simétrica?, ¿transitiva?

b. ¿Es S reflexiva?, ¿simétrica?, ¿transitiva?

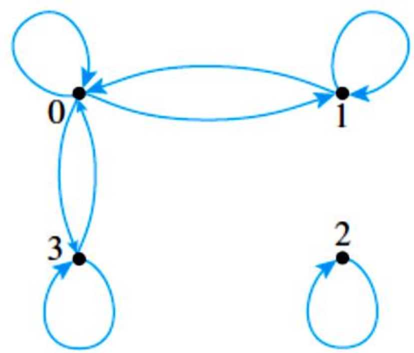
c. ¿Es T reflexiva?, ¿simétrica?, ¿transitiva?

www.uneatlantico.es

Reflexividad, Simetría y Transitividad. Ejemplo

Solución

a. El grafo dirigido de R tiene el aspecto que se muestra a continuación.



***R* es reflexiva:** Hay un bucle en cada punto del grafo dirigido. Esto significa que cada elemento de A está relacionado consigo mismo, por lo que R es reflexiva.

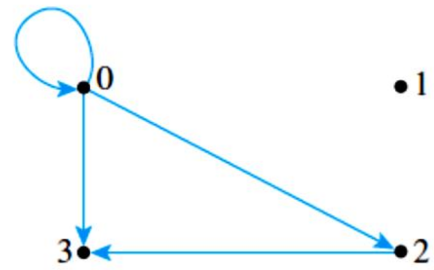
***R* es simétrica:** En cada caso donde hay una flecha que va de un punto del grafo a un segundo punto, hay una flecha que va del segundo punto hacia el primero. Esto significa que cada vez que uno de los elementos de A está relacionado con R con un segundo, entonces el segundo está relacionado con el primero. Por tanto, R es simétrica.

***R* no es transitiva:** Hay una flecha que va de 1 a 0 y una flecha que va de 0 a 3, pero no hay ninguna flecha que vaya de 1 a 3. Esto significa que hay elementos de A — 0, 1 y 3, tales que $1\,R\,0$ y $0\,R\,3$, pero $1 \not R\, 3$. Por tanto, R no es transitiva.

www.uneatlantico.es

Reflexividad, Simetría y Transitividad. Ejemplo

b. El grafo dirigido de S tiene el aspecto que se muestra a continuación.



S no es reflexiva: Por ejemplo, no existe ningún bucle en 1. Por tanto $(1, 1) \notin S$ y por tanto S no es reflexiva.

S no es simétrica: Hay una flecha de 0 a 2, pero no de 2 a 0. Por tanto $(0, 2) \in S$, pero $(2, 0) \notin S$, por lo que S no es simétrica.

S es transitiva: Hay tres casos para los cuales hay una flecha que va de un punto del grafo a un segundo y del segundo punto a un tercero: a saber, hay flechas que van de 0 a 2 y de 2 a 3; hay flechas que van de 0 a 0 y de 0 a 2; y hay flechas que van de 0 a 0 y de 0 a 3. En cada caso hay una flecha que va del primer punto al tercero. (Note de nuevo una vez más que el "primer", "segundo" y "tercer" puntos no necesitan ser distintos). Esto significa que cada vez que $(x, y) \in S$ y $(y, z) \in S$, entonces $(x, z) \in S$, para todas $x, y, z \in \{0, 1, 2, 3\}$, por lo que S es transitiva.

www.uneatlantico.es

Reflexividad, Simetría y Transitividad. Ejemplo

c. El grafo dirigido de T tiene el aspecto que se muestra a continuación.

T no es reflexiva: No hay ningún bucle en 0, por ejemplo. Por tanto $(0, 0) \notin T$, así T no es reflexivo.

T no es simétrica: Hay una flecha de 0 a 1, pero no de 1 a 0. Por tanto $(0, 1) \in T$, pero $(1, 0) \notin T$ y así T no es simétrica.

T es transitiva: La condición de transitividad es vacuamente verdadera para T. Para ver esto, observe que la condición de transitividad dice que

$$\text{Para todas } x, y, z \in A, \quad \text{si } (x, y) \in T \text{ y } (y, z) \in T \quad \text{entonces } (x, z) \in T.$$

La única manera de que esto sea falso sería que existen elementos de A que hacen verdadera la hipótesis y la conclusión sea falsa. Es decir, tendría que haber elementos x, y y z tales que

www.uneatlantico.es

Cerradura Transitiva de una Relación. Ejemplo

• Definición

Sea A un conjunto y R una relación sobre A. La **cerradura transitiva** de R es la relación R^t sobre A que satisface las tres siguientes propiedades:

1. R^t es transitiva.
2. $R \subseteq R^t$.
3. Si S es cualquier otra relación transitiva que contiene a R, entonces $R^t \subseteq S$.

Cerradura transitiva de una relación

Sea $A = \{0, 1, 2, 3\}$ y considere la relación R definida sobre A como sigue:

$$R = \{(0, 1), (1, 2), (2, 3)\}.$$

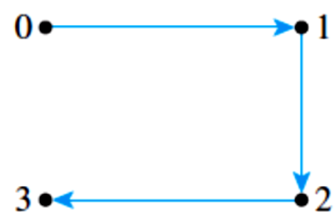
Encuentre la cerradura transitiva de R.

Cerradura Transitiva de una Relación. Ejemplo

Solución Cada par ordenado en R está en R^t, por lo que

$$\{(0,1),(1,2),(2,3)\} \subseteq R^t.$$

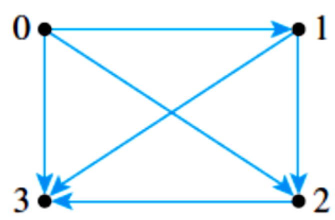
Por lo que el grafo dirigido de R contiene las flechas que se muestran a continuación.



Puesto que hay flechas que van de 0 a 1 y de 1 a 2, R^t debe tener una flecha que va de 0 a 2. Por tanto $(0, 2) \in R^t$. Entonces $(0, 2) \in R^t$ y $(2, 3) \in R^t$, por lo que puesto que R^t es transitiva $(0, 3) \in R^t$. También, puesto que $(1, 2) \in R^t$ y $(2, 3) \in R^t$, entonces $(1, 3) \in R^t$. Por tanto R^t contiene, al menos, los siguientes pares ordenados:

$$\{(0,1),(0,2),(0,3),(1,2),(1,3),(2,3)\}.$$

Pero esta relación *es* transitiva; por tanto es igual a R^t. Observe que el grafo dirigido de R^t es como se muestra a continuación.



Relación Inducida por una Partición

De su estudio de fracciones sabe que cada fracción tiene muchas formas equivalentes. Por ejemplo,

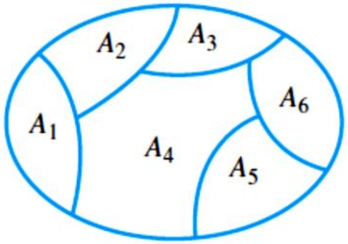
$$\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{-1}{-2}, \frac{-3}{-6}, \frac{15}{30}, \ldots, \text{ y así sucesivamente}$$

son todas diferentes formas de representar el mismo número. Pueden verse diferentes; se les puede llamar con nombres diferentes; pero son todos iguales. La idea de agrupación de cosas que "un aspecto diferente, pero realmente son los mismos" es la idea central de las relaciones de equivalencia.

- **Definición**

Dada una partición de un conjunto A, la **relación inducida por la partición,** R, se define en A como sigue: Para toda $x, y \in A$,

$$x\ R\ y \quad \Leftrightarrow \quad \text{hay un subconjunto } A_i \text{ de la partición tal que tanto } x \text{ como } y \text{ están en } A_i.$$



$A_i \cap A_j = \emptyset$, siempre que $i \neq j$
$A_i \cup A_2 \cup \cdots \cup A_6 = A$

www.uneatlantico.es

Relación Inducida por una Partición. Ejemplo

Relación inducida por una partición

Sea $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ y considere la siguiente partición de A:

$$\{0, 3, 4\}, \{1\}, \{2\}$$

Determine la relación inducida R por esta partición

Solución Puesto que $\{0, 3, 4\}$ es un subconjunto de la partición,

$0 \, R \, 3$ ya que tanto 0 como 3 están en $\{0, 3, 4\}$,
$3 \, R \, 0$ ya que tanto 3 como 0 están en $\{0, 3, 4\}$,
$0 \, R \, 4$ ya que tanto 0 como 4 están en $\{0, 3, 4\}$,
$4 \, R \, 0$ ya que tanto 4 como 0 están en $\{0, 3, 4\}$,
$3 \, R \, 4$ ya que tanto 3 como 4 están en $\{0, 3, 4\}$ y
$4 \, R \, 3$ ya que tanto 4 como 3 están en $\{0, 3, 4\}$.

También, $0 \, R \, 0$ ya que tanto 0 como 0 están en $\{0, 3, 4\}$,
$3 \, R \, 3$ ya que tanto 3 como 3 están en $\{0, 3, 4\}$ y
$4 \, R \, 4$ ya que tanto 4 como 4 están en $\{0, 3, 4\}$.

Relaciones de Equivalencia

Relación Inducida por una Partición. Ejemplo

Relación inducida por una partición

Sea $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ y considere la siguiente partición de A:

$$\{0, 3, 4\}, \{1\}, \{2\}$$

Determine la relación inducida R por esta partición

Ya que $\{1\}$ es un subconjunto de la partición,

$$1\ R\ 1 \quad \text{ya que tanto 1 como 1 están en } \{1\},$$

y puesto que $\{2\}$ es un subconjunto de la partición,

$$2\ R\ 2 \quad \text{ya que tanto 2 como 2 están en } \{2\}.$$

Por tanto

$$R = \{(0, 0), (0, 3), (0, 4), (1, 1), (2, 2), (3, 0), (3, 3), (3, 4), (4, 0), (4, 3), (4, 4)\}.$$ ■

Teorema 8.3.1

Sea A un conjunto con una partición y sea R la relación inducida por la partición. Entonces R es reflexiva, simétrica y transitiva.

www.uneatlantico.es

Relación de Equivalencia. Ejemplio

• Definición

Sea A un conjunto y R una relación sobre A. R es una **relación de equivalencia** si y sólo si, R es reflexiva, simétrica y transitiva.

Una relación de equivalencia sobre un conjunto de subconjuntos

Sea X el conjunto de todos los subconjuntos no vacíos de $\{1, 2, 3\}$. Entonces

$$X = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$$

Se define una relación $\mathbf{R}$ en X como sigue: Para todos A y B en X,

$$A \mathbf{R} B \Leftrightarrow \text{el elemento mínimo de } A \text{ es igual al elemento mínimo de } B.$$

Demuestre que $\mathbf{R}$ es una relación de equivalencia en X.

www.uneatlantico.es

Relación de Equivalencia. Ejemplo

• Definición

Sea A un conjunto y R una relación sobre A. R es una **relación de equivalencia** si y sólo si, R es reflexiva, simétrica y transitiva.

Solución

R ***es reflexiva:*** Suponga que A es un subconjunto no vacío de $\{1, 2, 3\}$. *[Debemos demostrar que A **R** A.]* Es verdadero decir que el menor elemento de A es igual al menor elemento de A. Por tanto, por definición de R, A **R** A.

R ***es simétrica:*** Suponga que A y B son subconjuntos no vacíos de $\{1, 2, 3\}$ y A **R** B. *[Debemos demostrar que B **R** A.]* Ya que A **R** B, el elemento mínimo de A es igual al elemento mínimo de B. Pero esto implica que el elemento mínimo de B es igual a la del elemento mínimo de A y así, por definición de **R**, B **R** A.

R ***es transitiva:*** Suponga que A, B y C son subconjuntos no vacíos de $\{1, 2, 3\}$, A **R** B y B R C. *[Debemos demostrar que A **R** C.]* Ya que A **R** B, el elemento mínimo de A es igual a la del elemento mínimo de B y puesto B **R** C, el elemento mínimo de B es igual a la del elemento mínimo de C. Por tanto, el elemento mínimo de A es igual al elemento mínimo de C y así, por definición de **R**, A **R** C. ■

www.uneatlantico.es

Clases de Equivalencia de una Relación

• Definición

Supongamos que A es un conjunto y R es una relación de equivalencia de A. Para cada elemento a en A, la **clase de equivalencia de a**, que se denota $[a]$ y se llama la clase de a, es el conjunto de todos los elementos x en A tales que x está relacionado con a por R.

En símbolos:

$$[a] = \{x \in A \mid x\, R\, a\}$$

Cuando varias relaciones de equivalencia en un conjunto están bajo análisis, la notación $[a]_R$ a menudo se utiliza para denotar la clase de equivalencia de a bajo R.

La versión procedimental de esta definición es

$$\boxed{\text{para toda } x \in A, \quad x \in [a] \quad \Leftrightarrow \quad x\, R\, a.}$$

www.uneatlantico.es

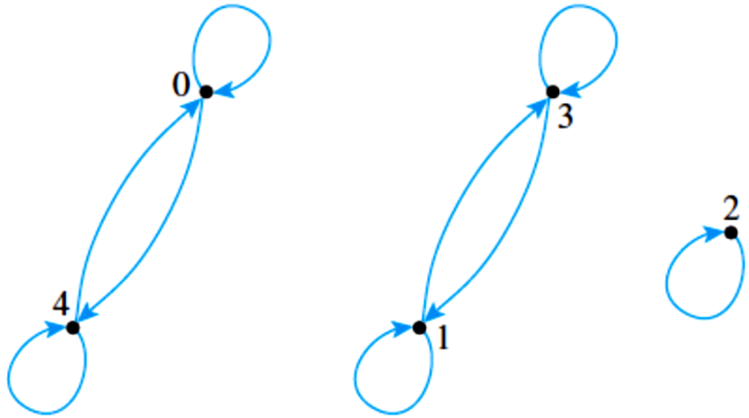
Clases de Equivalencia de una Relación. Ejemplo

Clases de equivalencia de una relación dada como un conjunto de pares ordenados

Sea $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ y se define una relación R sobre A como sigue:

$$R = \{(0, 0), (0, 4), (1,1), (1, 3), (2, 2), (3, 1), (3, 3), (4, 0), (4, 4)\}.$$

El grafo dirigido para R es como se muestra a continuación. Como puede verse por inspección, R es una relación de equivalencia sobre A. Determine las clases de equivalencia distintas de R.



www.uneatlantico.es

Clases de Equivalencia de una Relación. Ejemplo

Solución Primero encuentre la clase de equivalencia de cada elemento de A.

$$[0] = \{x \in A \mid x\,R\,0\} = \{0,4\}$$
$$[1] = \{x \in A \mid x\,R\,1\} = \{1,3\}$$
$$[2] = \{x \in A \mid x\,R\,2\} = \{2\}$$
$$[3] = \{x \in A \mid x\,R\,3\} = \{1, 3\}$$
$$[4] = \{x \in A \mid x\,R\,4\} = \{0, 4\}$$

Observe que $[0] = [4]$ y $[1] = [3]$, Por tanto las *distintas* clases de equivalencia de la relación

$$\{0, 4\}, \{1, 3\} \text{ y } \{2\}.$$

www.uneatlantico.es

Antisimetría. Ejemplo

• Definición

Sea R una relación sobre un conjunto A. R es **antisimétrica** si y sólo si,

$$\text{para todos } a \text{ y } b \text{ en } A, \quad \text{si } a\,R\,b \text{ y } b\,R\,a \text{ entonces } a = b.$$

Tomando la negación de la definición, puede ver que una relación R ***no*** es **antisimétrica** si y sólo si,

$$\text{existen los elementos } a \text{ y } b \text{ en } A \text{ tales que } a\,R\,b \text{ y } b\,R\,a \text{ pero } a \neq b.$$

Demostración de antisimetría de relaciones finitas

Sean R_1 y R_2 las relaciones sobre $\{0, 1, 2\}$ que se definen como sigue: Dibuje los grafos dirigidos para R_1 y R_2 e indique qué relaciones son antisimétricas.

a. $R_1 = \{(0, 2), (1, 2), (2, 0)\}$

b. $R_2 = \{(0, 0), (0, 1), (0, 2), (1, 1), (1, 2)\}$

Antisimetría. Ejemplo

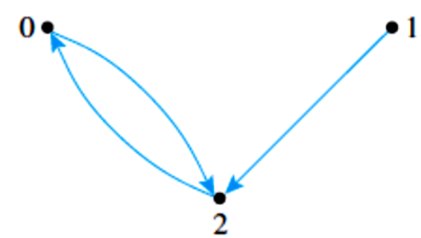
Sean R_1 y R_2 las relaciones sobre $\{0, 1, 2\}$ que se definen como sigue: Dibuje los grafos dirigidos para R_1 y R_2 e indique qué relaciones son antisimétricas.

a. $R_1 = \{(0, 2), (1, 2), (2, 0)\}$

b. $R_2 = \{(0, 0), (0, 1), (0, 2), (1, 1), (1, 2)\}$

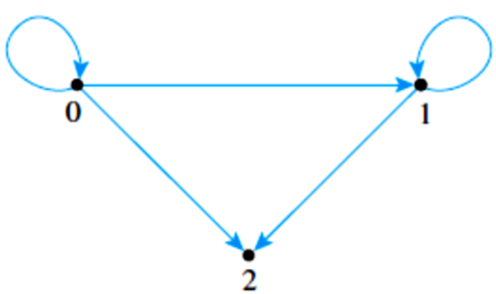
Solución

a. R_1 no es antisimétrica.



Puesto que $0\ R_1\ 2$ y $2\ R_1\ 0$ pero $0 \neq 2$, R_1 no es antisimétrica.

b. R_2 es antisimétrica.



Para que R_2 no sea antisimétrica, tendrían que existir un par de elementos distintos de A tal que cada uno está relacionado con el otro por R_2. Pero se puede ver por inspección que no existe ningún tal par.

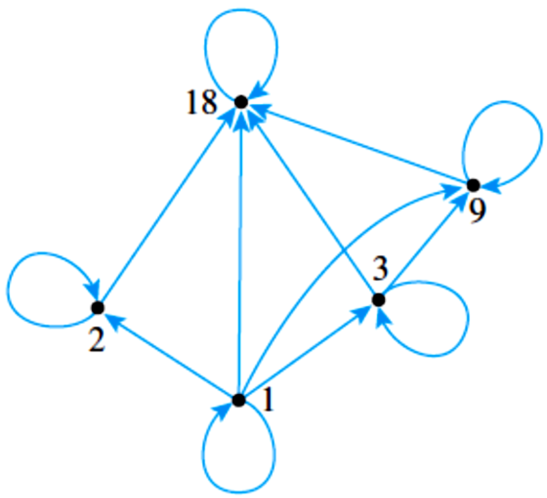
www.uneatlantico.es

Diagrama de Hasse

Sea $A = \{1, 2, 3, 9, 18\}$ y considere la relación "divide" sobre A: Para todos $a, b \in$ A,

$$\boxed{a \mid b \quad \Leftrightarrow \quad b = ka \text{ para algún entero } k.}$$

El grafo dirigido de esta relación tiene la siguiente apariencia:

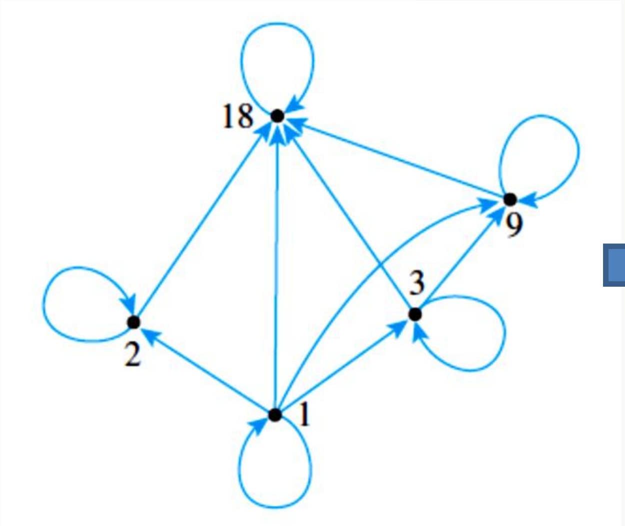


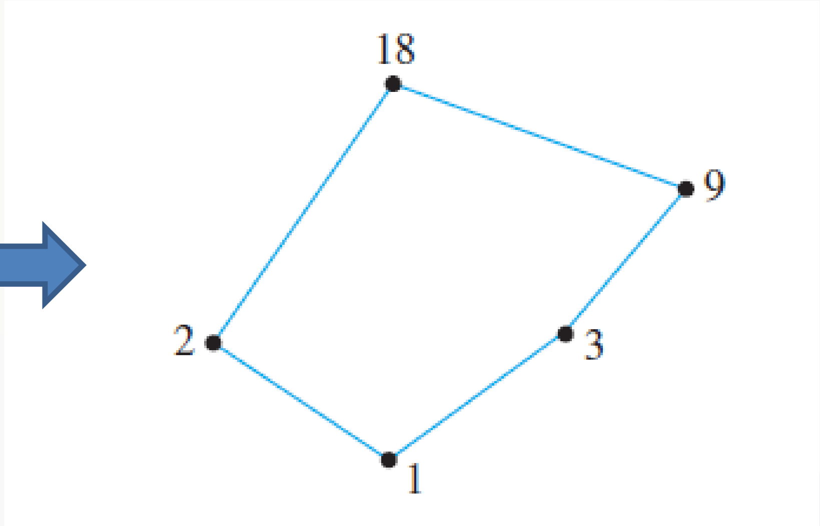
www.uneatlantico.es

Diagrama de Hasse

Iniciando con un grafo dirigido de la relación, colocando los vértices en la página así todas las flechas apuntan hacia arriba. Entonces eliminando

1. los bucles en todos los vértices,
2. todas las flechas cuya existencia es implícita por la propiedad transitiva,
3. los indicadores de dirección de las flechas.

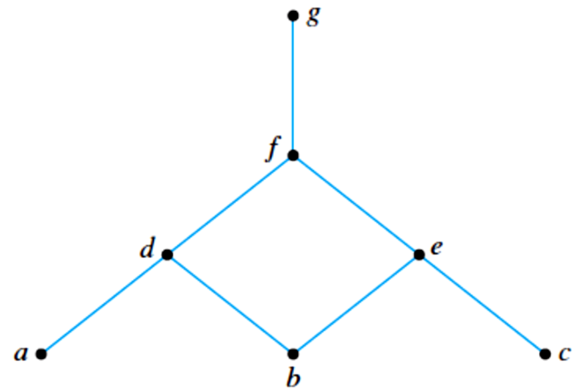




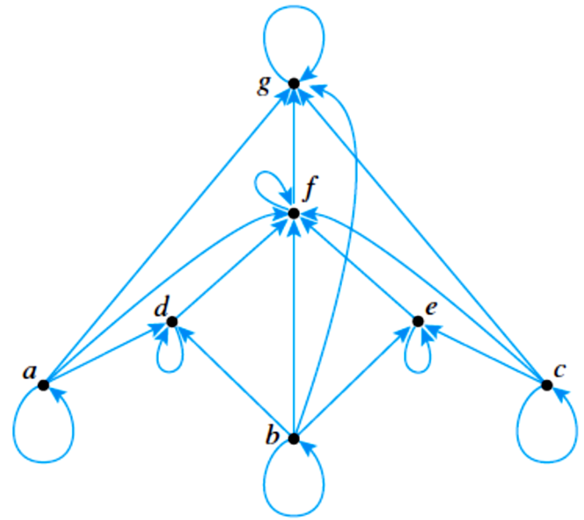
www.uneatlantico.es

Diagrama de Hasse

Una relación de orden parcial R tiene el siguiente diagrama de Hasse. Determine el grafo dirigido de R.



Solución



www.uneatlantico.es

Relación de Orden Parcial

- **Definición**

Sea R una relación definida sobre un conjunto A. R es una **relación de orden parcial** si y sólo si, R es reflexiva, antisimétrica y transitiva.

- **Notación**

Debido al papel paradigmático especial que juega la relación $\leq$ en el estudio de las relaciones de orden parcial, el símbolo $\preceq$ se utiliza a menudo para hacer referencia a una relación parcial de orden general y la notación $x \preceq y$ se lee "x es menor que o igual a y" o "y es mayor que o igual a x".

www.uneatlantico.es

Relación de Orden Parcial. Ejemplo

La relación "menor que o igual a"

Sea S un conjunto de números reales y se define la relación "menor que o igual a", $\leq$, sobre S como sigue: Para todos los números reales x y y en S,

$$\boxed{x \leq y \quad \Leftrightarrow \quad x < y \text{ o } x = y.}$$

Demuestre que $\leq$ es una relación de orden parcial.

Solución

$\leq$ *es reflexiva:* Que $\leq$ sea reflexiva significa que $x \leq x$ para todos los números reales x en S. Pero $x \leq x$ significa que $x < x$ o $x = x$ y $x = x$ siempre es verdadero.

$\leq$ *es antisimétrica:* Que $\leq$ sea antisimétrica significa que para todos los números reales x y y en S, si $x \leq y$ y $y \leq x$ entonces $x = y$. Se deduce inmediatamente de la definición de $\leq$ y de la propiedad de tricotomía (vea el apéndice A, T17), que dice que dados cualesquiera números reales, x y y, exactamente se cumple uno de los siguientes enunciados: $x < y$ o $x = y$ o $x > y$.

$\leq$ *es transitiva:* Que $\leq$ sea transitiva significa que para todos los números reales x, y y z en S si $x \leq y$ y $y \leq z$ entonces $x \leq z$. Se deduce de la definición de $\leq$ y de la transitividad de la propiedad de orden (vea el apéndice A, TI8), que dice que dados cualesquiera números reales x, y y z, si $x < y$ y $y < z$ entonces $x < z$.

Ya que $\leq$ es reflexiva, antisimétrica y transitiva, ésta es una relación de orden parcial. ■

Relación de Orden Total

• Definición

Suponga que $\preceq$ es una relación de orden parcial sobre un conjunto A. Se dice que los elementos a y b de A son **comparables** si y sólo si, ya sea $a \preceq b$ o $b \preceq a$. De otra manera, a y b son llamados **no comparables.**

• Definición

Si R es una relación de orden parcial sobre un conjunto A y para cualesquiera dos elementos a y b en A ya sea $a\,R\,b$ o $b\,R\,a$, entonces R es una **relación de orden total** sobre A.

www.uneatlantico.es

Relación de Orden Total

- **Definición**

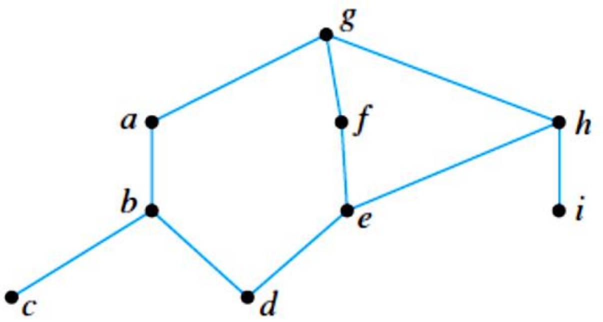
Sea un conjunto A parcialmente ordenado con respecto a una relación $\preceq$.

1. Un elemento a en A se llama un **elemento máximo de A** si y sólo si, para todo b en A, ya sea $b \preceq a$ o b y a son no comparables.
2. Un elemento a en A se llama un **elemento mayor de A** si y sólo si, para todo b en A, $b \preceq a$.
3. Un elemento a en A se llama un **elemento mínimo de A** si y sólo si, para todo b en A, ya sea $a \preceq b$ o b y a son no comparables.
4. Un elemento a en A se llama un **elemento menor de A** si y sólo si, para todo b en A, $a \preceq b$.

Relación de Orden Total. Ejemplo

Elementos máximo, mínimo, mayor y menor

Sea que $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$ tenga el ordenamiento parcial $\preceq$ definido por el siguiente diagrama de Hasse. Determine todos los elementos máximo, mínimo, mayor y menor de A.



Solución Hay exactamente un elemento máximo, g, que es también el elemento mayor. Los elementos mínimos son c, d e i y no hay elemento menor. ■

Ordenamiento Topológico

• Definición

Dadas las relaciones de orden parcial $\preceq$ y $\preceq'$ sobre un conjunto A, $\preceq'$ es un **ordenamiento topológico** para $\preceq$ si y sólo si, $\preceq'$ es un orden total que es compatible con $\preceq$.

Construcción de un ordenamiento topológico

Sea $\preceq$ una relación de orden parcial sobre un conjunto finito no vacío A. Para construir un ordenamiento topológico,

1. Elija cualquier elemento mínimo x en A. *[Dicho elemento existe puesto que A es no vacío.]*
2. Sea $A' := A - \{x\}$.
3. Repita los pasos *a-c* en tanto $A' \neq \emptyset$.
   a. Elija cualquier elemento mínimo y en A'.
   b. Defina $x \preceq' y$.
   c. Sea $A' := A' - \{y\}$ y $x := y$.

[La terminación de los pasos 1-3 de este algoritmo proporciona suficiente información para construir el diagrama de Hasse para el ordenamiento total; $\preceq'$. Ya hemos demostrado cómo utilizar el diagrama de Hasse para obtener una gráfica dirigida completa para la relación.]

www.uneatlantico.es

Ordenamiento Topológico. Aplicación

PERT y CPM

Dos aplicaciones importantes y ampliamente usadas en las relaciones de orden parcial son **PERT** (Programa de evaluación y revisión técnica) y **CPM** (Método de trayectoria crítica). Estas técnicas surgieron en la década de 1950 y provienen de planificadores que se enfrentan con las complejidades de programación de las actividades individuales necesarias para completar proyectos muy grandes y aunque son muy similares, sus desarrollos fueron independientes. PERT fue desarrollado por la Armada de Estados Unidos para ayudar a organizar la construcción del submarino Polaris y el CPM fue desarrollado por la compañía E. I. Du Pont de Nemours para la programación de mantenimiento de la planta química. A continuación se presenta un ejemplo simplificado de la forma en que funcionan las técnicas.

Ordenamiento Topológico. Aplicación

Un problema de programación de trabajo

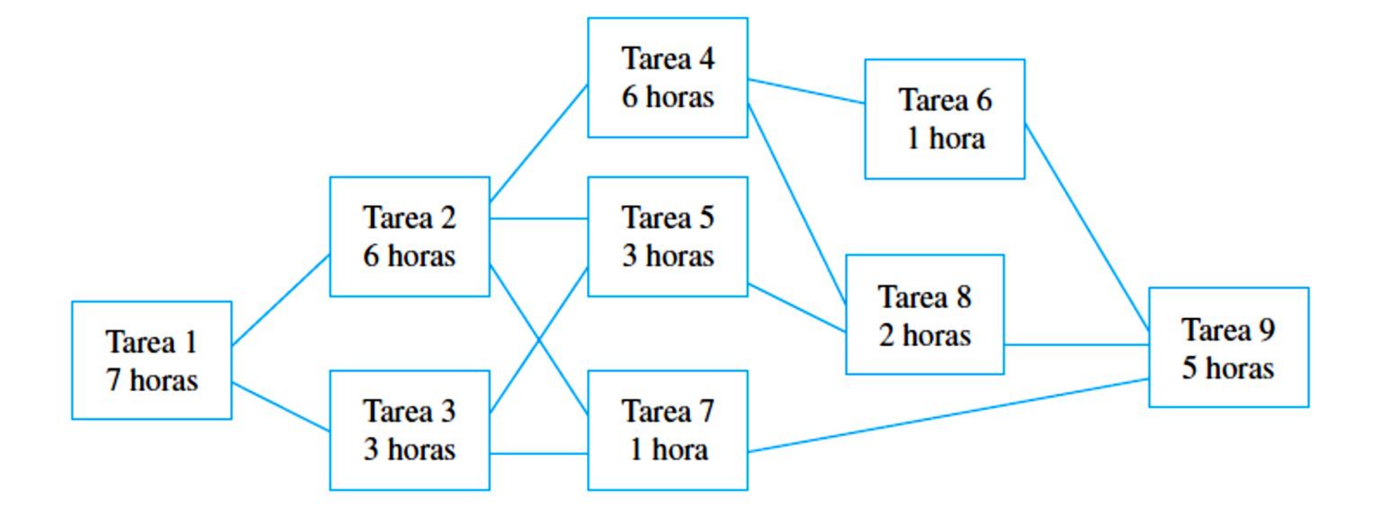
En una planta de ensamblaje de automóviles, el trabajo de montaje de un automóvil puede desglosarse en estas tareas:

1. Construcción del marco.
2. Instalación de motor, componentes de la unidad de energía, tanque de gasolina.
3. Instalación de frenos, llantas, neumáticos.
4. Instalación del tablero de mandos, piso, asientos.
5. Instalación de las líneas eléctricas.
6. Instalación de líneas de gas.
7. Instalación de líneas de freno.
8. Acople del cuerpo a los paneles de la carrocería.
9. Pintado del cuerpo.

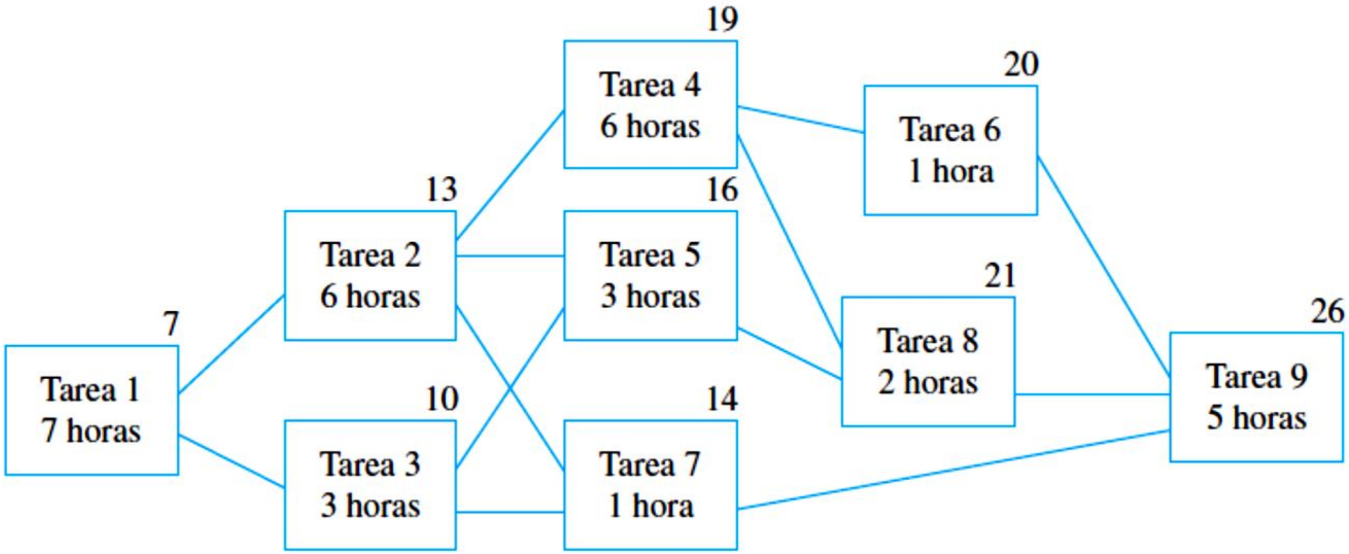
www.uneatlantico.es

Ordenamiento Topológico. Aplicación

Tarea	Tareas inmediatamente precedentes	Tiempo necesario para realizar una tarea
1		7 horas
2	1	6 horas
3	1	3 horas
4	2	6 horas
5	2, 3	3 horas
6	4	1 hora
7	2, 3	1 hora
8	4, 5	2 horas
9	6, 7, 8	5 horas



Ordenamiento Topológico. Aplicación



Este análisis muestra que se requieren al menos de 26 horas para completar la tarea 9 desde el comienzo del proceso de ensamblaje. Una vez finalizada la tarea 9, el ensamblaje es completo, así 26 horas es el tiempo mínimo necesario para realizar todo el proceso.

Observe que el tiempo mínimo necesario para completar las tareas 1, 2, 4, 8 y 9 en secuencia es exactamente 26 horas. Esto significa que un retraso en la realización de cualquiera de estas tareas causa un retraso en el tiempo total requerido para el ensamblaje del auto. Por esta razón, la ruta de acceso a través de las tareas 1, 2, 4, 8 y 9 se llama una **ruta crítica**.

Universidad
Europea
del Atlántico

www.uneatlantico.es