Universidad Europea del Atlántico

www.uneatlantico.es

Funciones

Sumario

1. Funciones sobre conjuntos generales
2. Funciones booleanas
3. Inyectividad, sobreyectividad e inversa
4. Funciones compuestas
5. Cardinalidad

Funciones

• Definición

Una **función** f **de un conjunto** X **a un conjunto** Y, se denota por $f: X \to Y$ y es una relación del **dominio** X, al **codominio** Y, que satisface dos propiedades: 1) cada elemento en X está relacionado con algún elemento en Y y 2) ningún elemento en X está relacionado con más de un elemento en Y. Por lo que, dado cualquier elemento x en X, hay un único elemento en Y que está relacionado con x por f. Si llamamos a este elemento y, entonces decimos que "f envía x a y" o "f mapea x a y" y se escribe $x \xrightarrow{f} y$ o $f: x \to y$. El único elemento con el que f envía a x se denota

$f(x)$ y se llama **f de x** o
la salida de f para la entrada x, o
el valor de f en x, o
la imagen de x bajo f.

El conjunto de todos los valores de f se llama el *rango de f* o la *imagen de X bajo f*. Simbólicamente.

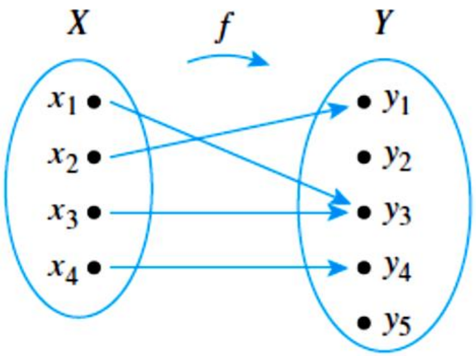
$$\textbf{rango de } f = \textbf{imagen de } X \textbf{ bajo } f = \{y \in Y \mid y = f(x), \text{ para alguna } x \text{ en } X\}.$$

1. Funciones sobre Conjuntos

Diagramas de Flechas. Ejemplo

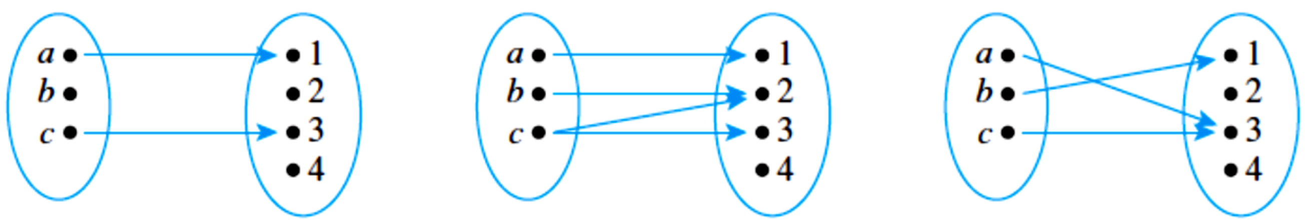
Este diagrama de flechas define una función ya que

1. Cada elemento de X tiene una flecha que sale de éste.
2. Ningún elemento de X tiene dos flechas que salen de éste y que apuntan a dos diferentes elementos de Y.



Funciones y no funciones

¿Cuál de los diagramas de flechas de la figura 7.1.2 definen funciones de $X = \{a, b, c\}$ a $Y = \{1, 2, 3, 4\}$?



a) *b*) *c*)

Solución Sólo *c*) define una función. En *a*) hay un elemento de X, a saber, b, que no se envía a ningún elemento de Y; es decir, no hay flecha que salga de b. Y en *b*) el elemento c no envía a un *único* elemento de Y; es decir, hay dos flechas que salen de c, una apunta a 2 y la otra a 3. ■

Igualdad de Funciones. Ejemplo

Teorema 7.1.1 Una prueba para la igualdad de funciones

Si $F\colon X \to Y$ y $G\colon X \to Y$ son funciones, entonces $F = G$ si y sólo si, $F(x) = G(x)$ para toda $x \in X$.

Igualdad de funciones

a. Sea $J_3 = \{0, 1, 2,\}$ y se definen las funciones f y g, de J_3 a J_3 como sigue: Para toda x en J_3,

$$f(x) = (x^2 + x + 1) \textit{ mod } 3 \quad \text{y} \quad g(x) = (x + 2)^2 \textit{ mod } 3.$$

¿Es $f = g$?

b. Sean $F\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ y $G\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ funciones. Se definen las nuevas funciones $F + G\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ y $G + F\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ de la siguiente manera: para toda $x \in \mathbf{R}$,

$$(F + G)(x) = F(x) + G(x) \quad \text{y} \quad (G + F)(x) = G(x) + F(x).$$

¿Es $F + G = G + F$?

Igualdad de Funciones. Ejemplo

Teorema 7.1.1 Una prueba para la igualdad de funciones

Si $F: X \to Y$ y $G: X \to Y$ son funciones, entonces $F = G$ si y sólo si, $F(x) = G(x)$ para toda $x \in X$.

Solución

a. Sí, la tabla de valores muestra que $f(x) = g(x)$ para toda x en J_3.

x	x^2+x+1	$f(x) = (x^2+x+1)\ mod\ 3$	$(x+2)^2$	$g(x) = (x+2)^2\ mod\ 3$
0	1	$1\ mod\ 3 = 1$	4	$4\ mod\ 3 = 1$
1	3	$3\ mod\ 3 = 0$	9	$9\ mod\ 3 = 0$
2	7	$7\ mod\ 3 = 1$	16	$16\ mod\ 3 = 1$

b. Una vez más, la respuesta es sí. Para todos los números reales x,

$$\begin{aligned}(F+G)(x) &= F(x) + G(x) && \text{por definición de } F+G \\ &= G(x) + F(x) && \text{por la ley conmutativa para la suma de números reales} \\ &= (G+F)(x) && \text{por definición de } G+F\end{aligned}$$

Por tanto, $F + G = G + F$. ■

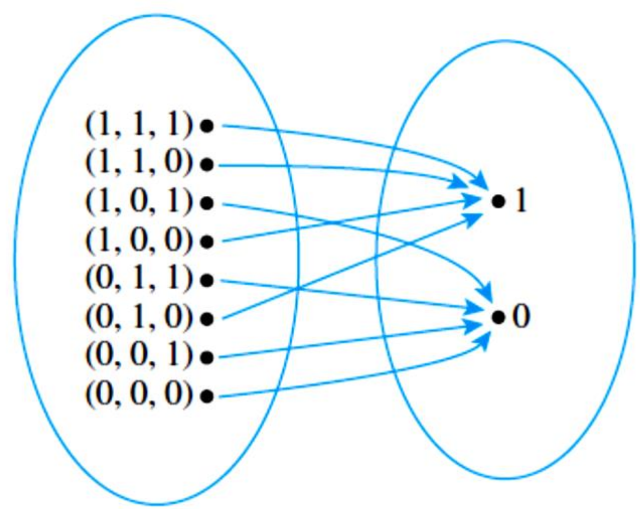
Funciones booleanas

• Definición

Una **función booleana (n-lugares)** f es una función cuyo dominio es el conjunto de todas las n-tuplas ordenadas de 0 y 1 y cuyo codominio es el conjunto $\{0, 1\}$. Más formalmente, el dominio de una función booleana se puede describir como el producto cartesiano de n copias del conjunto $\{0, 1\}$, que se denota por $\{0, 1\}^n$. Por tanto, $f: \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$.

Entrada			Salida
P	Q	R	S
1	1	1	1
1	1	0	1
1	0	1	0
1	0	0	1
0	1	1	0
0	1	0	1
0	0	1	0
0	0	0	0

a)



b)

Funciones booleanas. Ejemplo

Una función booleana

Considere la función booleana de tres lugares definida a partir del conjunto de todas las 3-tuplas de 0 y 1 a {0, 1} como sigue: Para cada tripleta (x_1, x_2, x_3) de 0 y 1.

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3)\ mod\ 2.$$

Describa f utilizando una tabla de entrada y salida.

Solución

$$f(1, 1, 1) = (1 + 1 + 1)\ mod\ 2 = 3\ mod\ 2 = 1$$
$$f(1, 1, 0) = (1 + 1 + 0)\ mod\ 2 = 2\ mod\ 2 = 0$$

Entrada			Salida
x_1	x_2	x_3	$(x_1 + x_2 + x_3)\ mod\ 2$
1	1	1	1
1	1	0	0
1	0	1	0
1	0	0	1
0	1	1	0
0	1	0	1
0	0	1	1
0	0	0	0

1. Funciones sobre Conjuntos

Funciones Inyectivas

• Definición

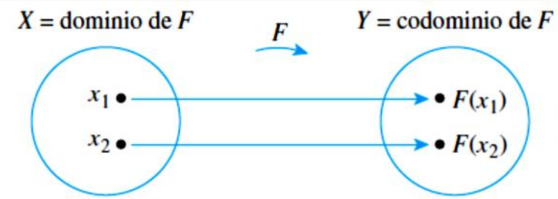
Sea F una función de un conjunto X a un conjunto Y. F es **inyectiva** (o **uno a uno**) si y sólo si, para todos los elementos x_1 y x_2 en X.

$$\text{si } F(x_1) = F(x_2), \text{ entonces } x_1 = x_2,$$

o, de forma equivalente, si $x_1 \neq x_2$, entonces $F(x_1) \neq F(x_2)$.

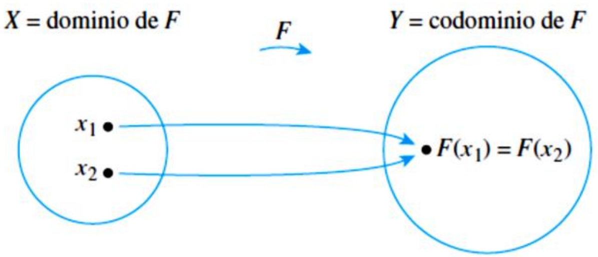
Simbólicamente,

$$F\colon X \to Y \text{ es inyectiva} \quad \Leftrightarrow \quad \forall x_1, x_2 \in X, \text{ si } F(x_1) = F(x_2) \text{ entonces } x_1 = x_2.$$



Cualesquiera dos elementos distintos de X se envían a dos elementos de Y distintos.

Figura 7.2.1*a*) Una función inyectiva separa puntos



Dos elementos distintos de X se envían al mismo elemento de Y.

Figura 7.2.1*b*) Una función que no es inyectiva colapsa puntos juntos

Funciones Inyectivas. Ejemplo

Identificación de funciones inyectivas definidas sobre conjuntos finitos

a. ¿Cualquiera de los diagramas de flechas en la figura 7.2.2 define funciones inyectivas?

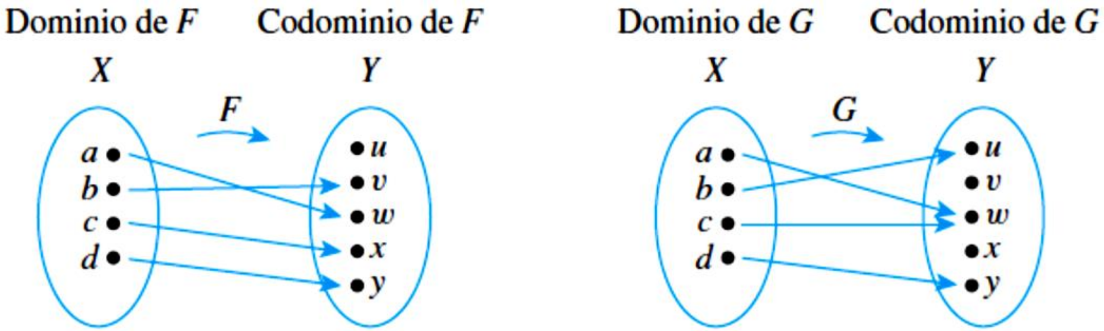


Figura 7.2.2

b. Sea $X = \{1, 2, 3\}$ y $Y = \{a, b, c, d\}$. Se define $H: X \to Y$ como sigue: $H(1) = c$, $H(2) = a$ y $H(3) = d$. Se define $K: X \to Y$ como sigue: $K(1) = d$, $K(2) = b$ y $K(3) = d$. ¿Es H o K inyectiva?

Funciones Inyectivas. Ejemplo

Solución

a. F es inyectiva, pero G no. F es inyectiva, ya que no hay dos elementos diferentes de X que se envían con F al mismo elemento de Y. G no es inyectiva ya que los elementos a y c son ambos enviados con G al mismo elemento de Y: $G(a) = G(c) = w$, pero $a \neq c$.

b. H es inyectiva, pero K no lo es. H es inyectiva, ya que cada uno de los tres elementos del dominio de H se envía con H a un elemento diferente del codominio: $H(1) \neq H(2)$, $H(1) \neq H(3)$ y $H(2) \neq H(3)$. Sin embargo, K, no es inyectiva porque $K(1) = K(3) = d$, pero $1 \neq 3$. ■

1. Funciones sobre Conjuntos

www.uneatlantico.es

Funciones Sobreyectivas

• Definición

Sea F una función de un conjunto X a un conjunto Y. F es **sobreyectiva** si y sólo si, dado cualquier elemento y en Y, es posible encontrar un elemento x en X con la propiedad de que $y = F(x)$.

Simbólicamente:

$$F: X \to Y \text{ es sobreyectiva} \quad \Leftrightarrow \quad \forall y \in Y, \exists x \in X \text{ tal que } F(x) = y.$$

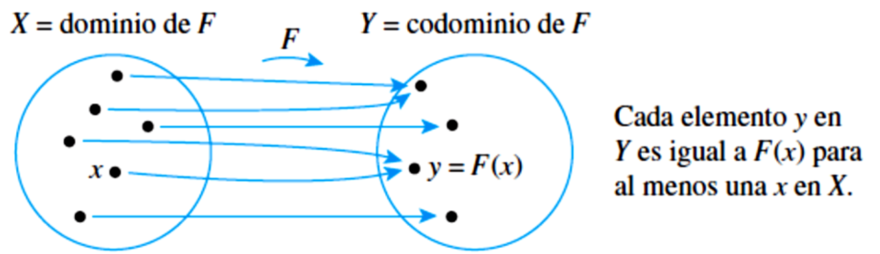


Figura 7.2.3*a*) Una función que es sobreyectiva

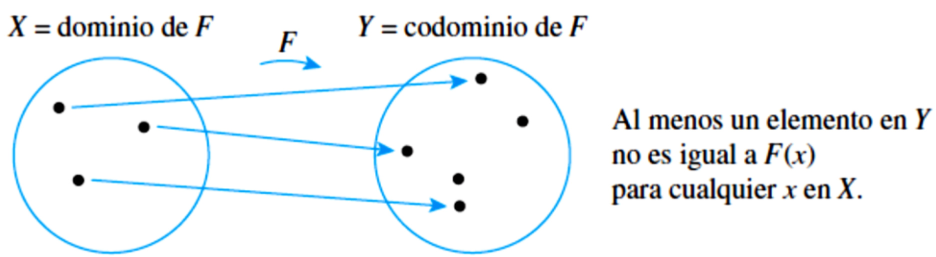


Figura 7.2.3*b*) Una función que no es sobreyectiva

Funciones Sobreyectivas. Ejemplo

Identificación de funciones sobreyectivas definidas sobre conjuntos finitos

a. ¿Alguno de los diagramas de flechas de la figura 7.2.4 define funciones sobreyectivas?

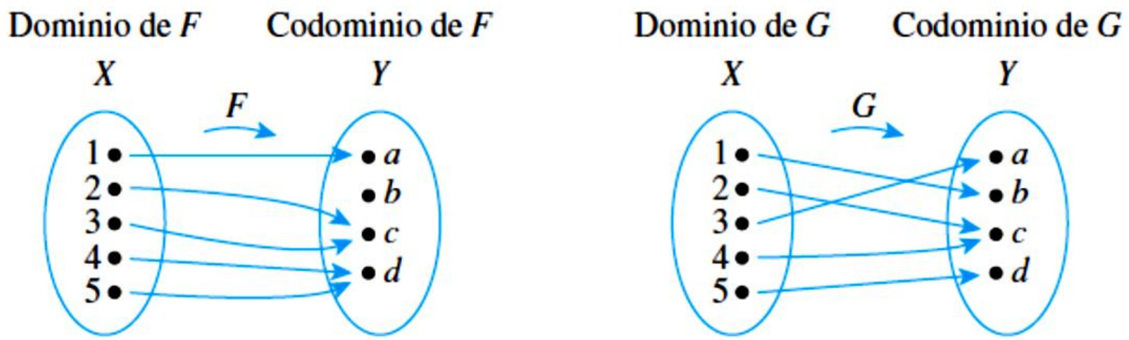


Figura 7.2.4

b. Sea $X = \{1, 2, 3, 4\}$ y $Y = \{a, b, c\}$. Se define $H: X \to Y$ como sigue: $H(1) = c$, $H(2) = a$, $H(3) = c$, $H(4) = b$. Se define $K: X \to Y$ como sigue: $K(1) = c$, $K(2) = b$, $K(3) = b$ y $K(4) = c$. ¿Es ya sea H o K sobreyectiva?

Funciones Sobreyectivas. Ejemplo

Solución

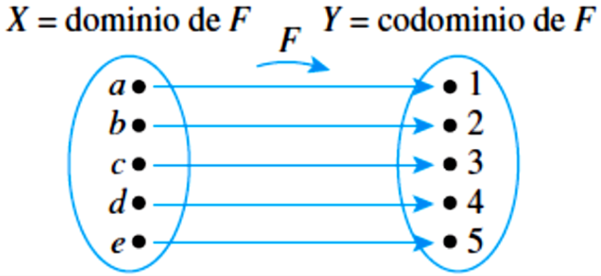
a. F no es sobreyectiva porque $b \neq F(x)$ para cualquier x en X. G es sobreyectiva porque cada elemento de Y es igual a $G(x)$ para alguna x en X: $a = G(3)$, $b = G(1)$, $c = G(2) = G(4)$ y $d = G(5)$.

b. H es sobreyectiva pero K no lo es. H es sobreyectiva porque cada uno de los tres elementos del codominio de H es la imagen de algún elemento del dominio de H: $a = H(2)$, $b = H(4)$ y $c = H(1) = H(3)$. Sin embargo, K, no es sobreyectiva porque $a \neq K(x)$ para cualquier x en $\{1, 2, 3, 4\}$. ■

Funciones Biyectivas

• Definición

Una **correspondencia uno a uno** (o **biyección**) de un conjunto X a un conjunto Y es una función $F: X \to Y$ que es a la vez inyectiva y sobreyectiva.



Funciones Inversas

Teorema 7.2.2

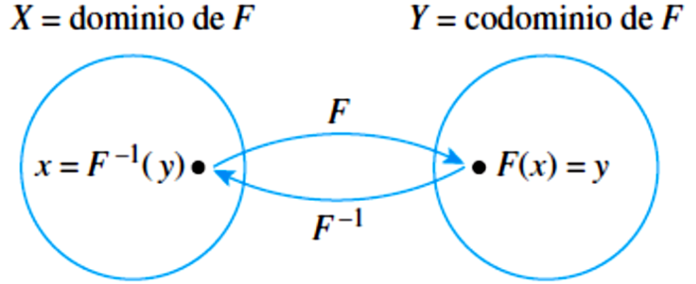
Suponga que $F: X \to Y$ es una correspondencia inyectiva; es decir, suponga que F es uno a uno y sobreyectiva. Entonces, hay una función $\boldsymbol{F^{-1}: Y \to X}$ que se define como sigue:

Dado cualquier elemento y en Y,

$$F^{-1}(y) = \text{al único elemento } x \text{ en } X \text{ tal que } F(x) \text{ es igual a } y.$$

En otras palabras,

$$F^{-1}(y) = x \quad \Leftrightarrow \quad y = F(x).$$

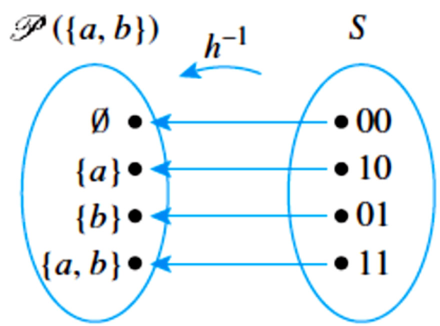


Funciones Inversas. Ejemplo

Determinación de una función inversa de una función dada por un diagrama de flechas

Defina la función inversa para la correspondencia inyectiva h dada en el ejemplo 7.2.8.

Solución El diagrama de flechas para h^{-1} se obtiene trazando las flechas de h de regreso de S a $\mathscr{P}(\{a, b\})$ como se muestra a continuación.



$h^{-1}(00) = \emptyset \quad h^{-1}(10) = \{a\}$

$h^{-1}(01) = \{b\} \quad h^{-1}(11) = \{a, b\}$

Funciones Compuestas

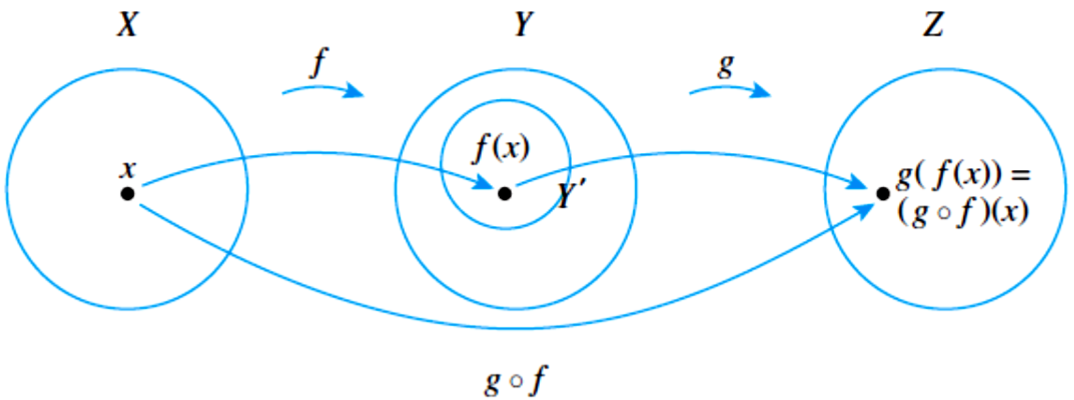
• Definición

Sea $f: X \to Y'$ y $g: Y \to Z$ funciones con la propiedad de que el rango de f es un subconjunto del dominio de g. Se define una nueva función $g \circ f: X \to Z$ de la siguiente manera:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \quad \text{para toda } x \in X,$$

donde $g \circ f$ se lee "g círculo f" y $g(f(x))$ se lee "g de f de x". La función $g \circ f$ se llama la **composición de f y g**.

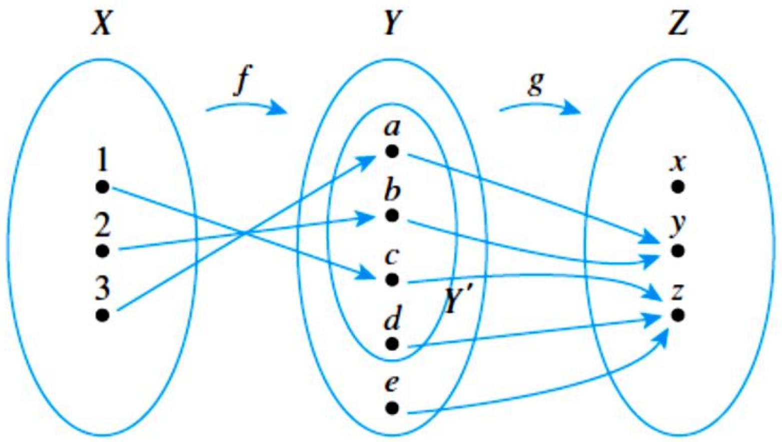
Esta definición se muestra esquemáticamente a continuación.



Funciones Compuestas. Ejemplo

Composición de funciones definidas sobre conjuntos finitos

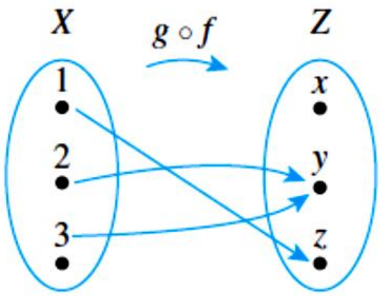
Sea $X = \{1, 2, 3\}$, $Y' = \{a, b, c, d\}$, $Y = \{a, b, c, d, e\}$ y $Z = \{x, y, z\}$. Se definen las funciones $f : X \to Y'$ y $f : Y \to Z$ por los diagramas de flechas que se muestran a continuación.



Dibuje el diagrama de la flecha para $g \circ f$. ¿Cuál es el rango de $g \circ f$?

Funciones Compuestas. Ejemplo

Solución Para encontrar el diagrama de la flecha para $g \circ f$, sólo trace las flechas que vayan de X a Z a través de Y. A continuación se muestra el resultado.



$$(g \circ f)(1) = g(f(1)) = g(c) = z$$
$$(g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(b) = y$$
$$(g \circ f)(3) = g(f(3)) = g(a) = y$$

El rango de $g \circ f$ es $\{y, z\}$. ■

1. Funciones sobre Conjuntos

Cardinalidad

• Definición

Sean A y B conjuntos cualesquiera. **A tiene la misma cardinalidad que B** si y sólo si, hay una correspondencia inyectiva de A a B. En otras palabras, A tiene la misma cardinalidad que B si y sólo si, hay una función f de A a B que sea inyectiva y sobreyectiva.

Teorema 7.4.1 Propiedades de cardinalidad

Para todos los conjuntos A, B y C:

a. **Propiedad reflexiva de cardinalidad:** A tiene la misma cardinalidad que A.

b. **Propiedad simétrica de cardinalidad:** si A tiene la misma cardinalidad que B, entonces B tiene la misma cardinalidad que A.

c. **Propiedad transitiva de cardinalidad:** si A tiene la misma cardinalidad que B y B tiene la misma cardinalidad que C, entonces A tiene la misma cardinalidad que C.

• Definición

A y B **tienen la misma cardinalidad** si y sólo si, A tiene la misma cardinalidad que B o B tiene la misma cardinalidad que A.

Cardinalidad. Ejemplo

Un conjunto infinito y un subconjunto propio pueden tener la misma cardinalidad

Sea $2\mathbf{Z}$ el conjunto de todos los enteros pares. Demuestre que $2\mathbf{Z}$ y $\mathbf{Z}$ tienen la misma cardinalidad.

Solución Considere la función H de $\mathbf{Z}$ a $2\mathbf{Z}$ que se define como sigue:

$$H(n) = 2n \quad \text{para toda } n \in \mathbf{Z}.$$