

# **ROČNÍKOVÁ PRÁCE**

**Gymnázium Zikmunda Wintra Rakovník, příspěvková organizace**

## **Metody aproximace Ludolfova čísla**

## **Methods of approximation of Archimedes' constant**

**Autor:** Jiří Zelenka

**Ročník a školní rok:** C3A 2018/2019

**Vedoucí práce:** Mgr. Vojtěch Delong

## **Prohlášení**

Prohlašuji, že jsem svou práci vypracoval samostatně a použil jsem pouze literaturu a prameny uvedené v seznamu bibliografických záznamů.

Prohlašuji, že tištěná verze a elektronická verze ročníkové práce jsou shodné.

Nemám důvod protestovat proti zpřístupňování této práce v souladu se zákonem č. 121/2000 Sb., o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon) v platném znění.

V Domoušicích dne datum .....

Jiří Zelenka

## **Poděkování**

Na tomto místě můžete vložit poděkování těm, kteří vám s tvorbou práce pomohli. Poděkování je vaše autorské dílo, nemá předepsanou podobu a není povinnou součástí práce. Záleží jen na vás, zda, komu a jakým způsobem poděkujete.

## **Anotace**

Cílem mé ročníkové práce je informovat o základních metodách aproximace Ludolfova čísla (dále jen „ $\pi$ “). V práci jsem popsal historický vývoj a metody jeho výpočtu. Každou metodu zmíněnou v textu jsem otestoval v počítačové simulaci, popřípadě jsem provedl experiment vedoucí k přibližné hodnotě  $\pi$ . Posledním tématem, kterým jsem se zabýval, bylo využití počítačových technologií k přiblížení se skutečné hodnotě  $\pi$ .

## **Klíčová slova**

Ludolfovo číslo, pí, konstanta, algoritmy, počítače

## **Annotation**

A purpose of my work is information of basic methods of approximation of Archimedes' constant (hereinafter " $\pi$ "). In work I described a historical development and methods of its calculation. Every method which I inform in the text I tested by computing simulation or I made an experiment which led to an approximate value of  $\pi$ . Eventually I occupy with using of computer technology for calculation  $\pi$ .

## **Keywords**

Archimedes' constant, pi, constant, algorithms, computers

# OBSAH

<b>1</b>	<b>Úvod</b>	<b>7</b>
1.1	Důkaz transcendentnosti $\pi$	8
<b>2</b>	<b>Historický vývoj odhadu <math>\pi</math></b>	<b>8</b>
2.1	Starověk	8
2.1.1	První numerické aproximace	8
2.1.2	Archimédův algoritmus	11
2.2	Středověk	15
2.2.1	Leonard Fibonacci	15
2.2.2	Mikuláš Kusánský	15
2.3	Novověk	18
2.3.1	François Viète	18
2.3.2	Descartesův algoritmus	21
2.3.3	Gregoryho algoritmus	22
2.3.4	Willebrord Snell	22
2.3.5	Wallisův nekonečný součin	23
2.3.6	Brounckerův řetězový zlomek	23
2.3.7	Gregoryho-Leibnizova řada	24
2.3.8	Kochaňského geometrická aproximace	25
2.3.9	Newtonova řada	25
2.3.10	Legendreho algoritmus	26
2.3.11	Leonhard Euler	26
2.4	Moderní algoritmy s využití počítačů	27

<b>3</b>	<b>Metoda Monte Carlo</b>	<b>27</b>
<b>4</b>	<b>Srovnání metod</b>	<b>27</b>
4.1	Míra konvergence . . . . .	27
4.2	Složitost algoritmu . . . . .	27
<b>5</b>	<b>Závěr</b>	<b>27</b>
<b>6</b>	<b>Reference</b>	<b>28</b>
<b>7</b>	<b>Seznam obrázků</b>	<b>30</b>
<b>8</b>	<b>Seznam tabulek</b>	<b>30</b>
	<b>Přílohy</b>	<b>31</b>
<b>A</b>	<b>První příloha</b>	<b>31</b>

# 1 ÚVOD

Člověk již od dob, když si začal uvědomovat tvary a velikosti, si musel být vědom, že existuje jistá závislost mezi průměrem a obvodem kruhu. Nejspíš okolo 2000 př. n. l. [1] lidé ve vyspělých civilizacích začali užívat konstantu, kterou, když vynásobili průměr kruhu, dostali obvod kruhu.

Zprvu užívali hodnoty experimentálně změřené. Až ve starověku přišel Archimédes ze Syrakus s prvním algoritmem, pomocí něhož lze nalézt hodnotu konstanty s libovolnou přesností.

Vzhledem k tomu, že ve středověku nebyl téměř žádný zájem o tuto oblast matematiky, další přínosy pocházejí až z novověku. Velký posun kupředu byl objev nekonečného součtu a součinu a řetězových zlomků. Následkem toho vzniklo nespočet algoritmů, nicméně většina měla pomalou konvergenci<sup>1</sup>.

Zdokonalování a vymýšlení nových algoritmů bylo podmíněno mírou poznatků matematiky, hlavně z oblasti teorie čísel a rovnic. Asi nejceněnější příspěvek z konce raného novověku je objev integrálů Sirem Isaacem Newtonem. Do 18. století neměla konstanta jednotné označení, až Leonhard Euler začal používat námi již známé řecké písmeno  $\pi$ .

Další velký rozkvět zažilo  $\pi$  až s příchodem počítačů v polovině 20. století. Doté doby bylo  $\pi$  spočítáno jen na 808 desetinných míst. Během několika let bylo vytvořeno mnoho rekordů. Ze začátku to bylo několik desítek tisíc desetinných míst. V roce 2016 bylo ve Švýcarsku  $\pi$  spočítáno na 22,4 biliónů desetinných míst [2].

V první části si ukážeme pomocí Lindenmannova důkazu, že  $\pi$  je iracionální, resp. transcendentní<sup>2</sup>. Tím si objasníme, proč se nikomu v historii nepovedlo a ani nepovede konečnou metodou vyjádřit celý desetinný rozvoj.

Od další části vše už bude poskládáno chronologicky. Ukážeme si, jakou hodnotu používaly jednotlivé civilizace v Evropě a na Blízkém východě. Ve starověku ještě zůstaneme a rozebereme si Archimédův algoritmus.

Ze středověku si představíme pouze Leonarda Fibonacciho, který tento algoritmus studoval.

Čtvrtá kapitola se bude zabírat novověkem, kde si představíme Vièteův a Wallisův nekonečný součin. Jedním z témat budou i řetězové zlomky, hlavně Brounckerův řetězový zlomek. Dále bude následovat Gregoryho-Leibnizova a Newtonova řada. U Newtonovy řady si podrobně popíšeme odvození, protože je to první řada, která byla odvozena pomocí integrálů. Leonharda Eulera si zmíníme nejen kvůli tomu, že dal světu symbol  $\pi$ , ale i on představil veřejnosti několik řad.

V předposlední části bude simulace Monte Carlo<sup>3</sup> a s tím spojená Buffonova jehla, kterou jsem i experimentálně ověřil.

V poslední části se podíváme výpočty  $\pi$  na počítači a nejzajímavější rekordy.

---

<sup>1</sup>Konvergence je rychlost algoritmu. Vyjadřuje, jak moc se přiblížíme skutečné hodnotě s každou další iterací (provedeným krokem).

<sup>2</sup>Transcendentní iracionální čísla nejdou vyjádřit zlomkem. Nemají totiž ukončený desetinný rozvoj a zároveň nemají periodu. Od algebraických iracionálních čísel se liší tím, že nemůže být kořenem žádné algebraické rovnice s racionálními koeficienty.

<sup>3</sup>Monte Carlo je libovolná numerická simulace využívající náhodnost. V tomto případě půjde o numerickou integraci.

## 1.1 Důkaz transcendentnosti $\pi$

Historicky první důkaz přinesl roku 1761 Johann Heinrich Lambert. Ten potvrdil, že  $\pi$  je iracionální, ale nevyvrátil, že  $\pi$  je algebraické. V roce 1794 Adrien-Marie Legendre dokázal, že  $\pi^2$  je iracionální, a byl přesvědčen, že není algebraické iracionální číslo, ale že to půjde těžce dokázat. Až Carl Louis Ferdinand von Lindemann v roce 1882 přišel s důkazem, že  $\pi$  je transcendentní iracionální číslo.

Lindemannův důkaz vychází z Eulerovy identity:

$$e^{i\pi} + e^0 = 0.$$

Jestliže exponenty 0 a  $i\pi$  jsou různá čísla, tak musí být navzájem lineárně nezávislá<sup>3</sup>. Podle Lindemannova–Weierstrassova teorému musí být i čísla  $e^{i\pi}$  a  $e^0$  algebraicky nezávislá. Z toho také vyplývá, že alespoň 1 exponent číslo transcendentní. Již na první pohled je jasné že 0 není transcendentní, protože může vyjít jako kořen algebraické rovnice ( $x = 0$ ). V tom případě musí být  $i\pi$  transcendentní. Aby z součinu čísel vyšlo transcendentní číslo, musí alespoň jeden činitel být také transcendentní číslo. A když lze zapsal, že:

$$i = \sqrt{-1} \Rightarrow i^2 = -1 \Rightarrow i^2 + 1 = 0,$$

musí nutně být  $\pi$  transcendentní [1].

## 2 HISTORICKÝ VÝVOJ ODHADU $\pi$

### 2.1 Starověk

Již před 1 000 000 let si člověk začal uvědomovat tvary, velikosti (čísla) a vztahy mezi veličinami, např.: větší kámen je těžší, starší strom je větší. Někdy v době kamenné lidé začali počítat, o čemž svědčí řezy na kostech (obr. 1). V této době člověk začal vnímat monotonní funkce<sup>4</sup>, např.: 2krát větší pole znamená 2krát víc úrody. Jenže to u kruh, jednoho z nepřírozenějších tvarů, neplatilo. Věděli jen, že čím větší průměr, tím větší obvod. Až někdy kolem roku 2000 př. n. l. přišli na to, že, aby tato úměra platila pro výpočet, musí průměr vynásobit konstantou, a tak začaly vznikat první aproximace  $\pi$  [1].

#### 2.1.1 První numerické aproximace

**Blízký východ** Mezi prvními oblastmi, kde se doloženě rozvíjela matematika, bylo území Blízkého východu. Hlavně u velkých řek, jako je Eufrat a Tigris, se začaly vyvíjet první civilizace. Již od 3. tisíciletí př. n. l. se začínají objevovat první písemné prameny včetně matematiky. V roce 1936 byla nalezena přibližně 200 mil od Babylonu ve městě Susa hliněná destička, která tvrdí, že podíl obvodu pravidelného šestiúhelníku a obvodu kruhu o stejném průměru je [1]:

$$\frac{57}{60} + \frac{36}{60^2} = \frac{96}{100}$$

<sup>3</sup>Dvě čísla jsou lineárně závislá právě tehdy, když jedno jde vyjádřit jako součin druhého čísla s libovolným reálným nenulovým číslem.

<sup>4</sup> $f(x) : y = x$





Obrázek 1: Záznamy na kostech [3]

Pokud víme, že obvod pravidelného šestiúhelníku  $o_s$  je šestinásobek poloměru  $r$  a že obvod kruhu  $o_k$  je poloměr krát dvojnásobek  $\pi$ , můžeme si vyjádřit hodnotu  $\pi$ .

$$\frac{o_s}{o_k} = \frac{96}{100} \Rightarrow \frac{6r}{2\pi r} = \frac{96}{100} \Rightarrow \frac{3}{\pi} = \frac{96}{100} \Rightarrow \pi = 3\frac{1}{8} \quad (1)$$

Z této destičky je jasné že v Babylonii používali za hodnotu  $\pi$  3,125.

Na většině území zpravidla používali hodnotu 3 [3]. Na to poukazují památky Židů, například "První kniha královská" praví o Šalomounově paláci (kapitola 7, verš 23): "Udělal také moře slité, desíti loket od jednoho kraje k druhému, okrouhlé vůkol, a pět loket byla vysokost jeho, a okolek jeho třicíti loket vůkol." [4] nebo i samotných Babyloňanů. Na tabulce YBC 7302 ve tvaru kruhu jsou napsána čísla 3, 9 a 45, z nich jde usuzovat, že obvod je dán 3, 9 je druhá mocnina obvodu a 45 je její obsah. Tyto hodnoty se dají použít ve vzorci:

$$S = \frac{1}{12}o^2, \quad (2)$$

kde  $S$  je obsah a  $o$  je obvod [5]. Pokud si vzorec 2 rozepíšeme, dostaneme, že  $\pi$  je v této aproximaci 3.

$$S = \frac{1}{12}o^2 \Rightarrow \pi r^2 = \frac{1}{12}4\pi^2 r^2 \Rightarrow 1 = \frac{1}{3}\pi \Rightarrow \pi = 3$$

**Egypt** Matematika v Egyptě musela existovat již v 3. tisíciletí př. n. l., protože v přibližně té době probíhaly stavby pyramid a kanálů, na které byly potřeba pokročilé znalosti matematiky [3].

Roku 1858 poblíž Nilu byl nalezen Rhindův papyrus [1], který obsahuje návod na výpočet obsahu kruhu. V příkladu R50 se tvrdí, že obsah trojúhelníka  $S$  je roven  $\frac{64}{81}$  druhé mocniny průměru  $d$ .

$$S = \frac{64}{81}d^2 \quad (3)$$

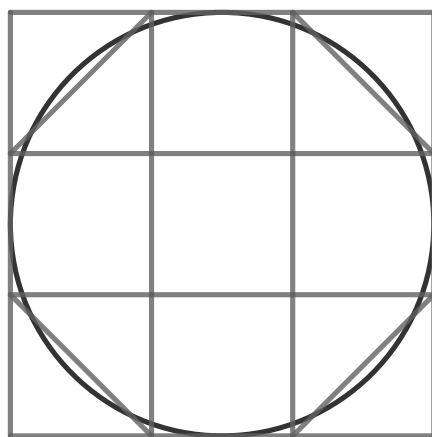


Obrázek 2: Tabulka YBC 7302 [5]

Když si vztah upravíme, dostaneme hodnotu  $\pi$ .

$$S = \frac{64}{81}d^2 \Rightarrow \frac{1}{4}\pi d^2 = \frac{64}{81}d^2 \Rightarrow \pi = 3\frac{13}{81}$$

Pomocí našeho vzorce pro obsah kruhu je jasné, že pro Egypťany byla hodnota  $\pi$  3,16. Jak ke vzorci 3 došli, zůstává záhadou, ale mnoho historiků matematiky se přiklání, že na násobek  $\frac{64}{81}$  přišli pomocí čtvercové sítě, kterou používali při projektování staveb. Když na čtvercové síti složené z 9 čtverců jako na obrázku 3 aproximujeme kruh osmiúhelníkem dostaneme, že obsah kruhu je  $\frac{7}{9}$  druhé mocniny průměru kruhu. Protože  $\frac{64}{81}$  snadno zapisovatelné pomocí kamenných zlomků, které se v té době hojně používaly, je možné, že  $\frac{63}{81}$  nahradili  $\frac{64}{81}$  [5].



Obrázek 3: Síť pro aproximaci kruhu

**Řecko** Na úplném vrcholu byla starověká matematika v Řecku a to hlavně díky velkému množství vědců z celé řady oborů. Do dnešní doby se v matematice používá mnoho jejich poznatků, např.: Archimédovy geometrické řady, Pythagorova věta, Euklidovy věty a Archimédův algoritmus na výpočet  $\pi$ , který je rozebrán v kapitole 2.2.2.

**Řím** Klaudios Ptolemaios, vědec žijící v Alexandrii 85-165 n. l. [12], ve své 1. knize „Almagestu“ sestavil tabulku tětiv (sinů). Funkci sinus značí jako  $\text{chrd } \alpha$ . K určení základních hodnot užívá do té doby již známých znalostí z matematiky. Pro získání malých úhlů odvodil vzorec pro  $\text{chrd}$  polovičního úhlu:

$$\text{chrd}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \text{chrd}(180^\circ - \alpha)}{2},$$

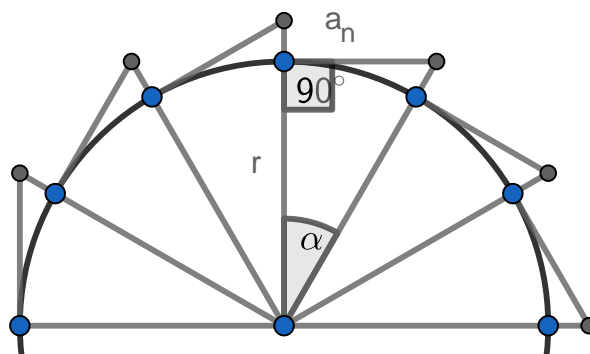
který lze zapsat dnešním zápisem jako:

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}. \quad (4)$$

Po úpravě lze dostat algoritmus pro poloviční úhel:

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \sqrt{1 - \sin \alpha}}{2}}.$$

Když se dostal až na  $1^\circ$  využil novou goniometrickou funkci aproximaci obvodu kruhu  $o$ , kterou lze vidět na obrázku 4. Tato aproximace by šla zapsat dnešním moderním zápisem takto:



Obrázek 4: Ptolemaiova aproximace kruhu

$$o = \lim_{n \rightarrow \infty} nr \sin \left( \frac{360^\circ}{n} \right),$$

když to vložíme do vzorce pro  $\pi$ :

$$\pi = \frac{o}{2r},$$

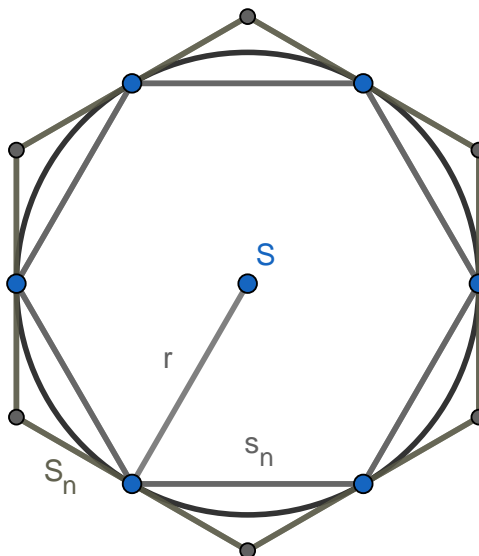
dostaneme, že:

$$\pi = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \sin \left( \frac{360^\circ}{n} \right)}{2}. \quad (5)$$

Ptolemaios pro  $\alpha = 1^\circ$  ( $n = 360$ ) dostal hodnotu  $\pi$  3,14166. Důvod, proč nedostal hodnotu 3,14143, je, že během svého výpočtu  $\text{chrd } 1^\circ$  pomocí vzorce 4 zaokrouhloval [3].

## 2.1.2 Archimédův algoritmus

Archimédes (287-212 př. n. l.[3]) použil k výpočtu  $\pi$  úvahu, že obvod vepsaného pravidelného  $n$ -úhelníku  $o_n$  je menší než obvod kruhu  $o_k$  a že obvod opsaného pravidelného  $n$ -úhelníku  $O_n$  je menší než obvod kruhu:



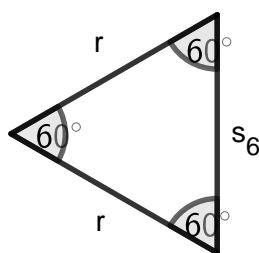
Obrázek 5: Kruh s opsaným a vepsaným  $n$ -úhelníkem

$$\begin{aligned} o_n &< o_k < O_n \\ ns_n &< 2\pi r < nS_n \\ \frac{ns_n}{2r} &< \pi < \frac{nS_n}{2r}, \end{aligned} \quad (6)$$

kde  $n$  je počet vrcholů/stran,  $r$  je poloměr kružnice,  $s_n$  je délka strany vepsaného  $n$ -úhelníku a  $S_n$  je délka strany opsaného  $n$ -úhelníku [1].

Princip tohoto algoritmu je ten, že čím více bude mít  $n$ -úhelník vrcholů, tím více bude opisovat kruh a tím bude menší interval.

Archimédes začal výpočet na snadno spočítatelném šestiúhelníku, kde délka strany vepsaného šestiúhelníka je poloměr kružnice<sup>5</sup>, pro jednoduchost výpočtu zavedeme jednotkový poloměr ( $r = 1$ ).



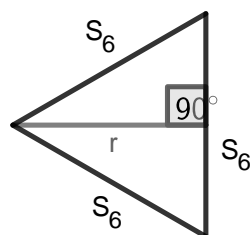
Obrázek 6: Jeden trojúhelník z vepsaného šestiúhelníka

$$s_6 = r \Rightarrow s_6 = 1 \quad (7)$$

Délka stany opsaného šestiúhelníka jde vypočítat pomocí Pythagorovy věty.

$$S_6^2 = r^2 + \left(\frac{S_6}{2}\right)^2 \Rightarrow 4S_6^2 = 4r^2 + S_6^2 \Rightarrow S_6^2 = \frac{4}{3}r^2 \Rightarrow S_6 = \frac{2\sqrt{3}}{3}r$$

<sup>5</sup>Pravidelný šestiúhelník se skládá z šesti rovnostranných trojúhelníků. To znali již Babyloňané[1].

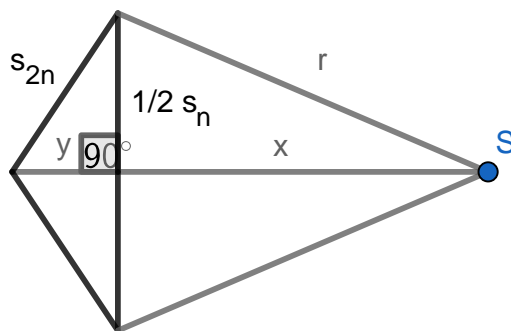


Obrázek 7: Jeden trojúhelník z opsaného šestiúhelníka

$$\Rightarrow S_6 = \frac{2\sqrt{3}}{3} \quad (8)$$

Když se hodnoty  $s_6$  a  $S_6$  vloží do vztahu 4, vyjde, že  $3 < \pi < 2\sqrt{3}$ . Archimédes u této hodnoty nevydržel, a tak počítal dál, ale, protože pro víceúhelníky není výpočet tak jednoduchý<sup>6</sup>, odvodil si vztah pro  $2n$ -úhelníky.

Z obrázku 8 můžu sestavit soustavu 3 rovnic, ze kterých se dá vyjádřit  $s_{2n}$ :



Obrázek 8: 1 trojúhelník z vepsaného šestiúhelníka a 2 trojúhelníky z vepsaného dvanáctiúhelníka

1. Protože se jedná o mnohoúhelník vepsaný, vrcholy budou ležet vždy n kružnici ve vzdálenosti  $r$  od středu  $S$ .

$$r = x + y$$

2. Pro pravý trojúhelník z obrázku 9 podle Pythagorovy věty platí, že:

$$r^2 = x^2 + \left(\frac{1}{2}s_n\right)^2 = x^2 + \frac{1}{4}s_n^2.$$

3. Pro levý trojúhelník z obrázku 8 podle Pythagorovy věty platí, že:

$$s_{2n}^2 = y^2 + \left(\frac{1}{2}s_n\right)^2 = y^2 + \frac{1}{4}s_n^2.$$

Celá soustava se dá upravit a dá se z ní vyjádřit  $s_{2n}$ . (Jednotlivé rovnice soustavy rovnic jsou zapsány ve sloupcích pod sebou a jednotlivé kroky úprav jsou vždy mezi sloupci doprava.)

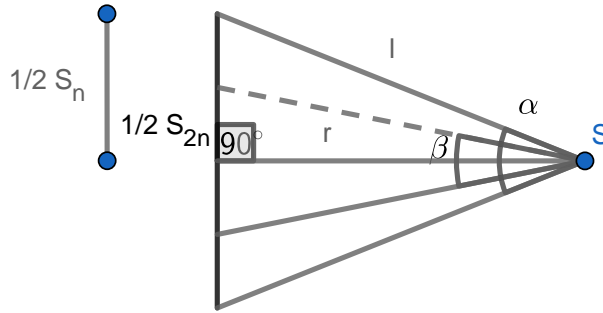
<sup>6</sup>Za Archyméda nebyly známy goniometrické funkce. První, kdo určil jejich hodnoty, byl Ptolemaios. [3]

$$\begin{array}{lll}
x + y = r & x + y = 1 & y = 1 - x \\
x^2 + \frac{s_n^2}{4} = r^2 & x^2 + \frac{s_n^2}{4} = 1 & x = \sqrt{1 - \frac{s_n^2}{4}} \\
y^2 + \frac{s_n^2}{4} = s_{2n}^2 & y^2 + \frac{s_n^2}{4} = s_{2n}^2 & y^2 + \frac{s_n^2}{4} = s_{2n}^2
\end{array}$$

$$(1-x)^2 + \frac{s_n^2}{4} = s_{2n}^2 \Rightarrow 1 - 2x + x^2 + \frac{s_n^2}{4} = s_{2n}^2 \Rightarrow 1 - 2\sqrt{1 - \frac{s_n^2}{4}} + 1 - \frac{s_n^2}{4} + \frac{s_n^2}{4} = s_{2n}^2$$

$$\Rightarrow s_{2n}^2 = 2 - 2\sqrt{1 - \frac{s_n^2}{4}} \Rightarrow s_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - s_n^2}} \quad (9)$$

Z obrázku 6 je patrné, že když se zpoloviční úhel  $\alpha$  na úhel  $\beta$  (zdvojnásobení počtu vrcholů)



Obrázek 9: 1 trojúhelník z opsaného šestiúhelníka a 1 trojúhelník z opsaného dvanáctiúhelníka

musí platit:

$$\frac{\frac{1}{2}S_{2n}}{\frac{1}{2}(S_n - S_{2n})} = \frac{r}{l},$$

protože v libovolném trojúhelníku je poměr libovolných dvou stran svírající úhel  $\varphi$  stejný jako poměr úseček ve zbývajících straně osou úhlu  $\varphi$  dělící. Pomocí Pythagorovy věty lze spočítat stranu  $l$ .

$$l = \sqrt{r^2 + \left(\frac{1}{2}S_n\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{1}{4}S_n^2}$$

Nyní stačí dosadit a vyjádřit  $S_{2n}$ [6].

$$\begin{aligned}
\frac{\frac{1}{2}S_{2n}}{\frac{1}{2}(S_n - S_{2n})} &= \frac{r}{\sqrt{r^2 + \frac{1}{4}S_n^2}} \Rightarrow \frac{S_{2n}}{S_n - S_{2n}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{4}S_n^2}} \\
\Rightarrow \frac{S_{2n}}{S_{2n}(\frac{S_n}{S_{2n}} - 1)} &= \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{4}S_n^2}} \Rightarrow \frac{S_n}{S_{2n}} - 1 = \sqrt{1 + \frac{1}{4}S_n^2} \\
\Rightarrow S_{2n} &= \frac{S_n}{1 + \sqrt{1 + \frac{1}{4}S_n^2}} \Rightarrow S_{2n} = \frac{2S_n}{2 + \sqrt{4 + S_n^2}} \quad (10)
\end{aligned}$$

Tímto postupem došel až k 96-úhelníku a vypočítal, že  $3\frac{10}{71} < \pi < \frac{1}{7}$ , neboli  $3.1408 < \pi < 3.1429$ . Ve výpočtu musel odmocňovat, např:  $\sqrt{3} \approx \frac{265}{153}$ , ale dodnes se neví jak to udělal.

Je možné, že Archimédes šel později ještě dál, protože v roce 1896 v Istanbulu byla nalezena Metrika z roku 60 př. n. l. od Herona z Alexandrie (10-70 n. l. [7]), kde se Heron odvolává na Archiméda s tím, že  $3.1416 < \pi < 3.1738$ . Chyba v horním intervalu vznikla asi opisem originálu. [1]

## 2.2 Středověk

Vzhledem k tomu, že během středověku probíhal souboj vědy a náboženství a starověké poznatky stačily, došlo v řadě vědeckých disciplín, včetně matematiky, k útlumu. Jediný, kdo se v této době zabýval  $\pi$  byl Leonardo Fibonacci a Mikuláš Kusánský. [1] [12]

### 2.2.1 Leonard Fibonacci

Leonardo z Pizy/Fibonacci (1180-1250) použil ke svému výpočtu  $\pi$  Archimédovu metodu. Pomocí decimální aritmetiky, která ještě za Archiméda nebyla známá, došel u 96-úhelníku k nerovnosti  $\frac{1440}{458\frac{4}{9}} < \pi < \frac{1440}{458\frac{1}{5}}$ . Když se z mezních hodnot udělá průměr:

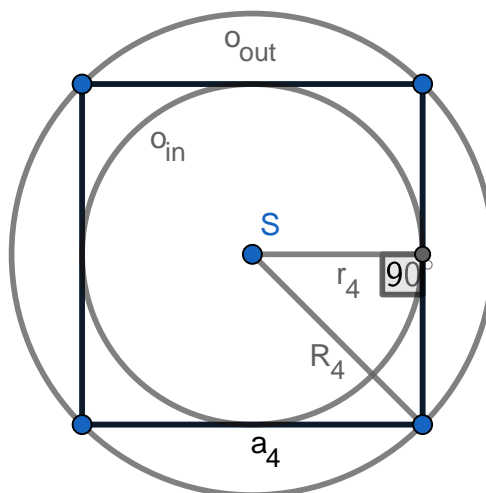
$$\frac{\frac{4}{9} + \frac{1}{5}}{2} = \frac{29}{90} \doteq \frac{1}{3},$$

vyjde Fibonacciho hodnota  $\pi \frac{864}{275} \approx 3,141818$ . [1] [10]

### 2.2.2 Mikuláš Kusánský

Mikuláš Kusánský (1401-1464) byl německý filosof, teolog, diplomat, matematik a kardinál v Římě. Objevil novou „sendvičovou“ metodu pro výpočet  $\pi$ . Vzal si pravidelný  $n$ -úhelník s obvodem 2, který byl vepsán a opsán kružnicemi (obr. XX), a zdvojnásobováním úhlů v mnohoúhelník o stejném obvodu zpřesňoval krajní intervaly výpočtů  $\pi$ .

Začal na čtverci o straně  $a_4$ , která se rovnala  $\frac{1}{2}$  a která je v vidění na obrázku X. Poloměr



Obrázek 10: Kusánského algoritmus

vepsané kružnice  $r_n$  je polovina strany čtverce, tj.  $\frac{1}{4}$ . Poloměr opsané kružnice  $R_n$  lze spočítat

pomocí Pythagorovy věty.

$$R_4 = \sqrt{r_4^2 + \left(\frac{a_4}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{1}{16}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

Když znal poloměr vepsané a opsané kružnice, začal iterovat pomocí jeho nalezených vzorců pro obvody kružnic v  $2n$ -úhelníku.

$$r_{2n} = \frac{R_n + r_n}{2} \quad (11)$$

$$R_{2n} = \sqrt{R_n r_{2n}} \quad (12)$$

Jak již bylo zmíněno, obvod opsané  $o_{in}$  a vepsané  $o_{out}$  kružnice tvoří meze intervalu, ve kterém se nachází obvod  $n$ -úhelníka  $o$ . Interval lze rozepsat do dvou nerovností.

$$\begin{aligned} o_{in} < o &\Rightarrow 2\pi r_n < o \Rightarrow \pi < \frac{2}{2r_n} \Rightarrow \pi < \frac{1}{r_n} \\ o < o_{out} &\Rightarrow o < 2\pi R_n \Rightarrow \frac{2}{2R_n} < \pi \Rightarrow \frac{1}{R_n} < \pi \end{aligned}$$

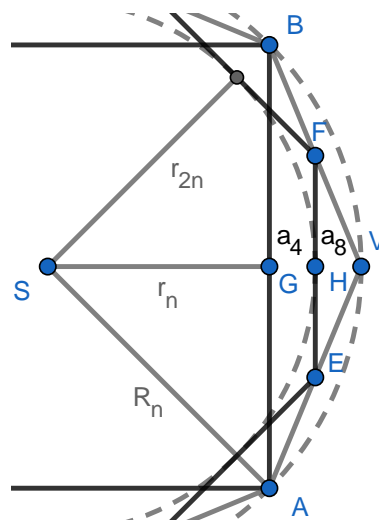
Z nerovností v rovnicích 13 a 14 lze udělat jednu nerovnost.

$$\frac{1}{R_n} < \pi < \frac{1}{r_n} \quad (13)$$

Kdyby nezvolil obvod  $n$ -úhelníku 2 ale libovolný jiný  $o$ , dostal by nerovnost pro výpočet  $\pi$ :

$$\frac{o}{2R_n} < \pi < \frac{o}{2r_n}$$

Kusánský přišel ke vzorci 11 tak, že sestrojil konstrukci, v které je čtyř a osmiúhelník o stejné obvodu, takže platí, že:



Obrázek 11: Výpočet poloměru vepsané kružnice osmiúhelníka

$$|AB| = 2|EF| \Rightarrow a_4 = 2a_8.$$



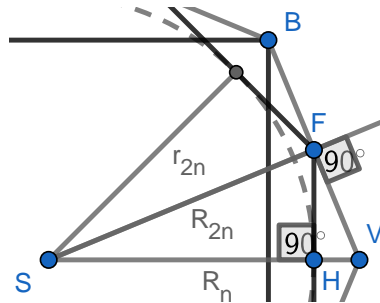
Z tohoto tvrzení, pak vyplývá, že bod  $H$ , který je od středu  $S$  vzdálen jako poloměr vepsané kružnice  $2n$ -úhelníku<sup>7</sup>, je přesně uprostřed mezi  $G$  a  $V$ , což jde si ověřit tak, že vezmeme pravoúhlý trojúhelník  $GVH$ , který bude mít úhel  $\alpha$  při vrcholu  $V$ , a pomocí funkce tangens zapíšeme rovnici:

$$\begin{aligned}\tan\left(\frac{|BG|}{|GV|}\right) &= \tan\left(\frac{|FH|}{|HV|}\right) \Rightarrow \frac{|BG|}{|GV|} = \frac{|FH|}{|HV|} \Rightarrow \frac{\frac{1}{2}a_4}{|GV|} = \frac{\frac{1}{2}a_8}{|HV|} \\ &\Rightarrow \frac{2}{|GV|} = \frac{1}{|HV|} \Rightarrow |GV| = 2|HV|.\end{aligned}$$

Tedy stačí délky poloměrů zprůměrovat.

$$|SH| = \frac{|SG| + |SV|}{2} \Rightarrow r_{2n} = \frac{R_n + r_n}{2}$$

Vzorec 12 vychází z Eukleidovy věty o odvěsně [9], kde:



Obrázek 12: Výpočet poloměru opsané kružnice osmiúhelníka

$$|SF|^2 = |SV||SH| \Rightarrow |SF| = \sqrt{|SV||SH|} \Rightarrow R_{2n} = \sqrt{R_n r_{2n}}.$$

Kusánský se ještě před přobjevením tohoto algoritmu zabýval geometrickým přiblížením k obvodu kruhu. Vymyslel hned několik přiblížení. Pravděpodobně nejpřesnější se nachází v knize „Dialogus de circuli quadratura“ z roku 1457, která je na obrázku XX. V konstrukci na obrázku hledá přiblížení obvodu  $o_k$  kružnice  $k$  se středem v bodě  $S$  a poloměrem  $r$ . Kružnice protínají kolmé přímky v bodech  $A, B, C$  a  $D$  se společným bodem  $S$ . Dále narýsoval kružnici  $l$  s poloměrem  $R$ , který se rovná:

$$R = \frac{r + |AB|}{2} = \frac{r + \sqrt{r^2 + r^2}}{2} = \frac{r + \sqrt{2}r}{2} = \frac{r(1 + \sqrt{2})}{2}$$

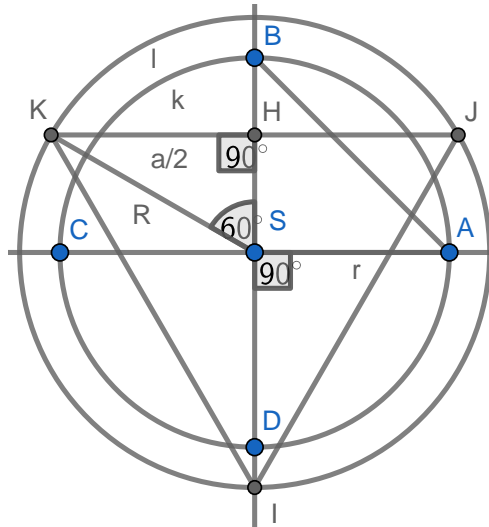
Na kružnici  $l$  umístil bod  $K$  tak, aby platilo, že úhel  $BSK$  je  $60^\circ$ . Nakonec vepsal do kružnice  $l$  rovnostranný trojúhelník  $IKK$  se stranou  $a$ . Strana  $a$  se rovná:

$$\sin 60^\circ = \frac{\frac{a}{2}}{R} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a}{2R} \Rightarrow a = \frac{2R\sqrt{3}}{2} \Rightarrow a = \frac{r(\sqrt{3} + \sqrt{6})}{2}$$

Když oba obvody porovnáme, zjistíme přibližnou hodnotu  $\pi$  [13].

$$\begin{aligned}o_k = o_{\triangle IJK} &\Rightarrow 2\pi r = 3a \Rightarrow 2\pi r = \frac{3r(\sqrt{3} + \sqrt{6})}{2} \Rightarrow \pi = \frac{3(\sqrt{3} + \sqrt{6})}{4} \\ &\pi \approx 3,136\end{aligned}$$

<sup>7</sup> v tomto případě osmiúhelníku



Obrázek 13: Výpočet poloměru vepsané kružnice osmiúhelníka

## 2.3 Novověk

Konec 15. století a začátek 16. století byl ve znamení zámořských cest. Z tohoto důvodu byl požadavek na přesnější měřicí přístroje, což mělo za následek rozvoj přírodních věd včetně matematiky. [1]

### 2.3.1 François Viète

François Viète (1540–1603) jako vymysle algoritmus na výpočet  $\pi$  založený na nekonečném součinu (vzorec 15).

$$\frac{2}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}{2} \cdot \dots \quad (14)$$

Vydal ho v knize „Variorum de rebus mathematicis responsorum, liber VIII“ v roce 1593. [1] Tento lze snadno odvodit pomocí goniometrický funkcí. Pomocí vzorce:

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

můžeme libovolně mnohokrát rozložit sinus.

$$\begin{aligned} \sin x &= 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = 2 \left( 2 \sin \frac{x}{2 \cdot 2} \cos \frac{x}{2 \cdot 2} \right) \cos \frac{x}{2} = \\ &= 2^3 \sin \frac{x}{2^3} \cos \frac{x}{2^3} \cos \frac{x}{2^2} \cos \frac{x}{2} \end{aligned} \quad (15)$$

Již ve 3. rozkladu je vidět obecný vzorec pro rozklad (rovnice 11).

$$\sin x = 2^n \sin \frac{x}{2^n} \prod_{i=1}^n \cos \frac{x}{2^i} \Rightarrow \prod_{i=1}^n \cos \frac{x}{2^i} = \frac{\sin x}{2^n \sin \frac{x}{2^n}} \quad (16)$$

Pravou stranu nově vzniklé rovnice rozšíříme o  $\frac{x}{x}$ .

$$\prod_{i=1}^n \cos \frac{x}{2^i} = \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\frac{x}{2^n}}{\sin \frac{x}{2^n}} \quad (17)$$

Další úpravy budou za podmínky, že  $n$  se bude limitně blížit nekonečnu. A protože

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{x}{2^n}}{\sin \frac{x}{2^n}} = 1,$$

$$\frac{\sin x}{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^n \cos \frac{x}{2^i}. \quad (18)$$

Když za  $x$  dosadíme  $\frac{\pi}{2}$ , vyjde nám:

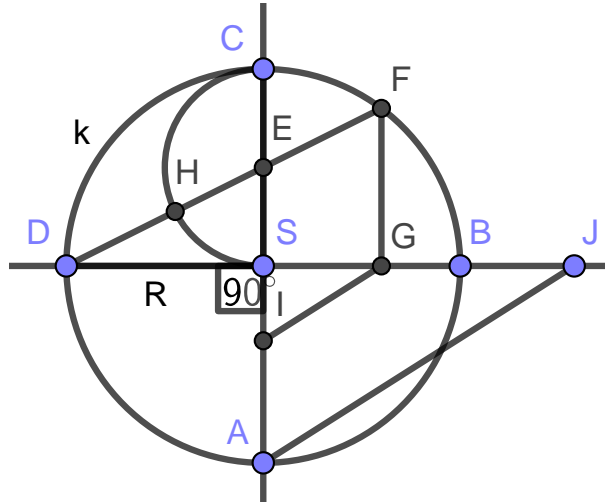
$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}} \cdot \dots, \quad (19)$$

což lze upravit na rovnici 10. Z té samé rovnice lze vyjádřit i samotné  $\pi$ .

$$\pi = 2 \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2 + \sqrt{2}}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}} \cdot \dots$$

François Viète během svého života spočítal  $\pi$  na 9 desetinných míst, ale použil k tomu Archimédův algoritmus [11].

Kromě toho to algoritmu publikoval v tomtéž díle také geometrickou aproximaci  $\pi$  (obrázek



Obrázek 14: Viètova geometrická aproximace

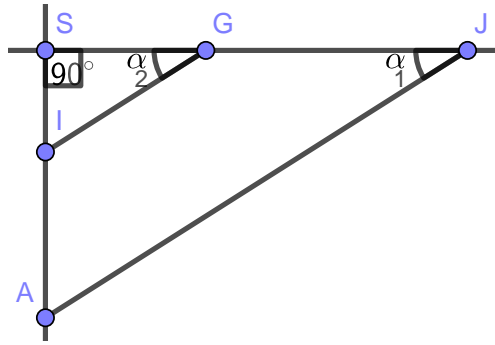
X). Na obrázku je kružnice  $o_k$  se středem  $S$  a poloměrem  $R$  nebo-li  $SA$ , úsečka  $AI$ , která je stejně dlouhá jako úsečka  $DH$  a dvě rovnoběžné přímky:  $IG$  a  $AJ$ . Obvod kružnice  $o_k$  je přibližně  $4SJ$ . Pomocí zmíněné aproximací můžeme dopočítat přibližnou hodnotu  $\pi$ .

Protože podle věty uuu je trojúhelník  $SIG$  podobný trojúhelníku  $SAJ$ , můžeme napsat, že

$$\frac{|SI|}{|SA|} = \frac{|SG|}{|SJ|} \Rightarrow |SJ| = \frac{|SA| \cdot |SG|}{|SI|}$$

To lze dokázat pomocí obrázku XX, kde platí:

$$|SI| = |SG| \tan \alpha$$



Obrázek 15: Pravoúhlý trojúhelník SIG a SAJ

$$|SA| = |SJ| \tan \alpha$$

První rovnici můžeme vydělit tou druhou a dostaneme:

$$\frac{|SI|}{|SA|} = \frac{|SG|}{|SJ|}$$

$\pi$  se dá pak vyjádřit:

$$\pi = \frac{o_k}{2R} = \frac{4|SJ|}{2R} = \frac{2 \frac{|SA| \cdot |SG|}{|SI|}}{R} = \frac{2 \frac{R \cdot |SG|}{|SI|}}{R} = 2 \frac{|SG|}{|SI|}$$

K výpočtu  $SI$  použijeme délku úsečky  $DE$  z trojúhelníku  $DSE$ . Podle Pythagorovy věty

$$|DE|^2 = |DS|^2 + |SE|^2 = R^2 + \left(\frac{1}{2}R\right)^2 = R^2 + \frac{1}{4}R^2 = \frac{5}{4}R^2 \Rightarrow |DE| = \frac{\sqrt{5}}{2}R$$

Dále potřebujeme délku úsečky  $DH$ .

$$|DH| = |DE| - |HE| = \frac{\sqrt{5}}{2}R - \frac{1}{2}R = \left(\frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2}\right)R$$

Nyní můžeme spočítat  $SI$ .

$$|SI| = |SA| - |AI| = |SA| - |DH| = R - \left(\frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2}\right)R = \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2}\right)R = \left(\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right)R = \frac{1}{2}\left(3 - \sqrt{5}\right)R$$

Podle věty uu je trojúhelník  $DSE$  podobný s trojúhelníkem  $DGF$ , proto

$$\frac{|DG|}{|DS|} = \frac{|GF|}{|SE|} \Rightarrow \frac{|DG|}{|GF|} = \frac{|DS|}{|SE|} = \frac{R}{\frac{1}{2}R} = 2 \Rightarrow |DG| = 2|GF|$$

Úsečku  $DG$  můžeme rozdělit na dvě úsečky se společným bodem  $S$ .

$$|DG| = |DS| + |SG| \Rightarrow 2|GF| = R + |SG| \Rightarrow G = \frac{1}{2}(R + |SG|)$$

Podle Pythagorovy věty lze napsat, že

$$|SG|^2 + |GF|^2 = |SF|^2 \Rightarrow |SG|^2 + \left(\frac{1}{2}(R + |SG|)\right)^2 = R^2 \Rightarrow |SG|^2 + \frac{1}{4}(R^2 + 2R \cdot |SG| + |SG|^2) = R^2$$

Protože v tomto případě nemůže být délka záporná použijeme znaménko +.

$$|SG| = \frac{-R + 4R}{5} = \frac{3}{5}R$$

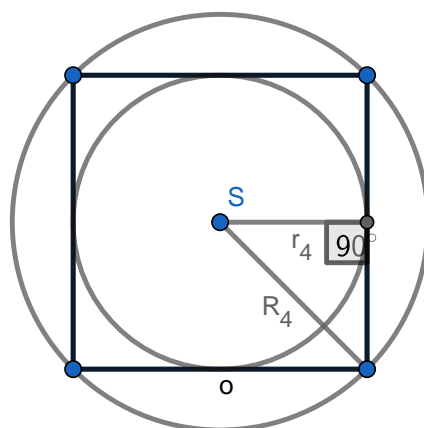
Nyní stačí dosadit do vzorce pro výpočet  $\pi$ .

$$\pi = 2 \frac{|SG|}{|SI|} = 2 \frac{\frac{3}{5}R}{\frac{1}{2}(3 - \sqrt{5})R} = \frac{12}{5(3 - \sqrt{5})} = \frac{9 + 3\sqrt{5}}{5} = \frac{3}{5}(3 + \sqrt{5})$$

Podle Vièteho geometrické aproximace přibližně vychází  $\pi$  3,14164. [14]

### 2.3.2 Descartesův algoritmus

René Descartes (1596-1650), francouzský matematik a filosof, který dal světu kartézskou soustavu souřadnic a racionalistickou filosofii, která dala základ klasicismu, vymyslel nový algoritmus, který byl publikován až posmrtně v roce 1701. Spočíval v tom, že  $n$ -úhelník o poloměru  $o$  je obehán vepsanou a opsanou kružnicí o poloměrech  $r_n$  a  $R_n$  (obrázek 16), a pomocí vzorců lze spočítat poloměry pro  $2n$ -úhelníky o stejném obvodu [11] [17].



Obrázek 16: Descartesův algoritmus

$$r_{2n} = \frac{r_n + R_n}{2} \quad (20)$$

$$R_{2n} = \sqrt{\frac{R_n(r_n + R_n)}{2}} \quad (21)$$

Když použijeme vzorec pro obvod kruhu

$$o = 2\pi r \quad \Rightarrow \quad \pi = \frac{o}{2r},$$

můžeme  $\pi$  vyjádřit nerovností:

$$\frac{o}{2R_n} < \pi < \frac{o}{2r_n} \quad (22)$$

### 2.3.3 Gregoryho algoritmus

James Gregory (1638-1675) představil v roce 1667 veřejnosti nový algoritmu založený na kružnici o poloměru  $r$  opsané a vepsané  $n$ -úhelníkem (obrázek 5). Algoritmus počítá obsah vepsaného  $s$  a opsaného  $S$   $2n$ -úhelníka pomocí vzorců [11]:

$$s_{2n} = \sqrt{s_n S_n} \quad (23)$$

$$S_{2n} = \frac{2s_n S_n}{s_n + s_{2n}}. \quad (24)$$

Když upravíme vzorec pro výpočet obsahu kruhu, dostaneme:

$$S = \pi r^2 \quad \Rightarrow \quad \pi = \frac{S}{r^2},$$

proto můžeme napsat, že

$$\frac{s_n}{r^2} < \pi < \frac{S_n}{r^2}.$$

### 2.3.4 Willebrord Snell

Roku 1654 Christiaan Huygens (1629-1695) použil nerovnici od Willebrorda Snella (1580-1626) z roku 1621 k výpočtu přibližné hodnoty  $\pi$ . Nerovnice vypadala takto:

$$\frac{3 \sin \varphi}{2 + \cos \varphi} < \varphi < \tan \frac{\varphi}{3} + 2 \sin \frac{\varphi}{3}, \quad (25)$$

a když do ní dosadil, že  $\varphi = \frac{\pi}{30}$ , dostal, že  $\pi$  je 3,141 592 653 .... Přesnost byla na 9 desetinných míst [11].

Snell v roce, kdy vydal předchozí nerovnost, vydal v knize „Cyclometrius“ 2 nerovnice zvyšující účinnost Archimédovy metody. Zjistil totiž to, že v jakékoliv fázi iterování pro  $n \geq 3$  je  $\pi$  blíže spodní hranici intervalu  $q_n$  než spodní hranici intervalu  $p_n$  (obrázek 17).



Obrázek 17: Interval z Archimédovy metody

$$\pi - p_n < q_n - \pi$$

Pro jednotlivé  $n \geq 3$  pak mu vyšli 2 stálé nerovnosti.

$$\frac{q_n - \pi}{\pi - p_n} > 2, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q_n - \pi}{\pi - p_n} = 2 \quad (26)$$

$$\frac{\pi - p_n}{\pi - p_{2n}} < 4, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi - p_n}{\pi - p_{2n}} = 4 \quad (27)$$

Když tyto nerovnosti upravíme:

$$\frac{q_n - \pi}{\pi - p_n} > 2 \Rightarrow q_n - \pi > 2\pi - 2p_n \Rightarrow -3\pi > -2p_n - q_n \Rightarrow \pi < \frac{2}{3}p_n + \frac{1}{3}q_n$$

$$\frac{\pi - p_n}{\pi - p_{2n}} < 4 \Rightarrow \pi - p_n < 4\pi - 4p_{2n} \Rightarrow -3\pi < -4p_{2n} + p_n \Rightarrow \pi > \frac{4}{3}p_{2n} - \frac{1}{3}p_n,$$

získáme nerovnice pro výrazné zúžení intervalu z Archimédova algoritmu.

Snell sice tyto nerovnosti objevil, ale dokázal je až „Huygens v De circuli magnitudine inventa“ v roce 1654 [15].

### 2.3.5 Wallisův nekonečný součin

John Wallis (1616 – 1703 [11]) v roce 1655 v knize „Arithmetica Infinitorum“ vydává po Viètem 2. nekonečný součin a zároveň historicky 1. algoritmus pro výpočet  $\pi$  obsahující pouze racionální operace [1].

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot \dots}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots} \quad (28)$$

Ten lze přepsat do moderní obecnější podoby pro  $\pi$ .

$$\pi = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \prod_{i=1}^n \left( \frac{2i}{2i-1} \cdot \frac{2i}{2i+1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \prod_{i=1}^n \frac{4i^2}{4i^2 - 1}$$

### 2.3.6 Brounckerův řetězový zlomek

William Brouncker (1620-1684)

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \frac{1^2}{2 + \frac{3^2}{2 + \frac{5^2}{2 + \dots}}} \quad (29)$$

Neznáme jeho odvození, ale dochvalo se nám odvození od Leonharda Eulera z roku 1775. Jednotlivé členy Gregoryho-Leibnizovy řady rozložil:

$$\frac{\pi}{4} = 1 + 1 \left( -\frac{1}{3} \right) + 1 \left( -\frac{1}{3} \right) \left( -\frac{1}{5} \right) + 1 \left( -\frac{1}{3} \right) \left( -\frac{3}{5} \right) \left( -\frac{5}{7} \right) + \dots$$

a pomocí vzorce:

$$a_1 + a_1 a_2 + a_1 a_2 a_3 + \dots = \frac{a_1}{1 - \frac{a_2}{1 + a_2 - \frac{a_3}{1 + a_3 - \dots}}}$$

přepsal na [1]:

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1 - \frac{-\frac{1}{3}}{1 + (-\frac{1}{3}) - \frac{-\frac{3}{5}}{1 + (-\frac{3}{5}) - \dots}}} = \frac{1}{1 + \frac{\frac{1}{3^2}}{2 + \frac{3^2}{2 + \dots}}} \Rightarrow \frac{4}{\pi} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{3^2}{2 + \dots}}$$

Můžeme místo poslední úpravy rovnici vynásobit 4 a dostat rovnici pro samotné  $\pi$ :

$$\pi = \frac{4}{1 + \frac{1^2}{2 + \frac{3^2}{2 + \frac{5^2}{2 + \dots}}}} \quad (30)$$

### 2.3.7 Gregoryho-Leibnizova řada

Tato nekonečná řada byla objevena nezávisle 2 matematiky: v roce 1671 James Gregory a v roce 1674 Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716).

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \quad (31)$$

Gregory pomocí Cavalieriho vzorec a dlouhého dělení v integrandu dosáhl Taylorůva rozvoje pro funkci arkus tangens. Taylorův rozvoj lze dnešním zápisem zapsat takto:

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n \frac{f^{(i)}(a)}{i!} (x-a)^i$$

Protože známe hodnotu arkus tangens v bodě 0 ( $\arctan(0) = 0$ ), můžeme tuto hodnotu dosadit za  $a$ :

$$\begin{aligned} \arctan(x) &= \frac{\arctan(a)}{1} (x-a)^0 + \frac{\frac{1}{a^2+1}}{1} (x-a)^1 + \frac{\frac{0(a^2+1)-1(2a+0)}{(a^2+1)^2}}{2} (x-a)^2 + \\ &\quad + \frac{\frac{-2(a^2+1)^2 - (-2a)2(a^2+1)2a}{(a^2+1)^4}}{6} (x-a)^3 + \dots \\ \Rightarrow \arctan(x) &= \arctan(a) + \frac{1}{a^2+1} (x-a) + \frac{-2a}{2(a^2+1)^2} (x-a)^2 + \\ &\quad + \frac{-2(a^2+1)^2 + 8a^2(a^2+1)}{6(a^2+1)^4} (x-a)^3 + \dots \\ \Rightarrow \arctan(x) &= \arctan(0) + \frac{1}{0^2+1} (x-0) + \frac{-2 \cdot 0}{2(0^2+1)^2} (x-0)^2 + \\ &\quad + \frac{-2(0^2+1)^2 + 8 \cdot 0^2(0^2+1)}{6(0^2+1)^4} (x-0)^3 + \dots \\ \Rightarrow \arctan(x) &= x + \frac{-2}{6} x^3 + \dots \Rightarrow \arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \dots \end{aligned}$$

Kdybychom hned ze začátku pracovali s 8 členy namísto 4, řada by vypadala takto:

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$$

Nakonec Gregory dosadil  $x = 1$  a dostal řadu v rovnici 30. Po vynásobení 4 dostaneme řadu pro samotné  $\pi$ , která lze zapsat modernějším způsobem:

$$\pi = \lim_{n \rightarrow \infty} 4 \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i}{2i+1} \quad (32)$$

[11][1]



### 2.3.8 Kochaňského geometrická aproximace

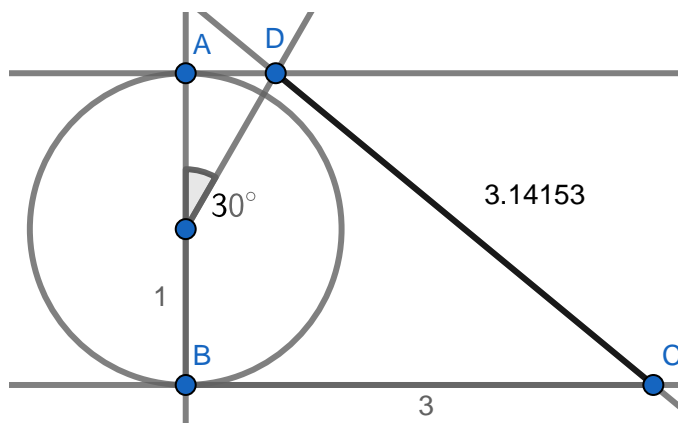
Roku 1685 Adam Adamandý Kochaňski (1631 Dobrzyniu n. Wisła-1700 Teplice v Čechách [11][8]) vypočítal přibližnou hodnotu  $\pi$  pomocí konstrukce, která je na obrázku 7, kde platí, že  $\vartheta = 30^\circ$  a úsečka  $CD$  je přibližně polovina obvodu kruhu o poloměru  $r$ . Úsečku  $CD$  lze spočítat pomocí Pythagorovi věty.

$$\begin{aligned}
 |CD| &= \sqrt{|AB|^2 + (|AD| - |BC|)^2} = \sqrt{(2r)^2 + (3r - r \operatorname{tg} 30^\circ)^2} = \sqrt{4r^2 + \left(3r - \frac{r}{\sqrt{3}}\right)^2} = \\
 &= \sqrt{4r^2 + \frac{(3\sqrt{3} - 1)^2}{3}r^2} = r\sqrt{\frac{40 - 6\sqrt{3}}{3}}
 \end{aligned} \tag{33}$$

Nakonec úsečku stačí dát do vzorce pro  $\pi$ .

$$\pi = \frac{2r\sqrt{\frac{40-6\sqrt{3}}{3}}}{2r} = \sqrt{\frac{40 - 6\sqrt{3}}{3}} \tag{34}$$

Ze vzorce 11 je jasné, že Kochanski došel k hodnotě  $\pi$  3,141533. [1]



Obrázek 18: Kochaňského konstrukce přibližné poloviny obvodu kruhu s daným poloměrem

### 2.3.9 Newtonova řada

Sir Issac Newton (1642-1727 [11]), zakladatel integrálního a diferenciálního počtu, objevil hned několik řad. Nejznámější vychází z jím objeveného vzorce:

$$\arcsin x = \int \frac{dx}{\sqrt{1+x}},$$

který jde s použitím jeho objevu binomické věty upravit na:

$$\begin{aligned}
 \arcsin x &= \int \frac{dx}{\sqrt{1+x}} = \int \left(1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^6 + \dots\right)dx = \\
 &= x + \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{x^7}{7} + \dots
 \end{aligned} \tag{35}$$

Po dosazení  $x = \frac{1}{2}$ , dostaneme vzorec pro výpočet  $\pi$  [1]:

$$\begin{aligned} \arcsin \frac{1}{2} &= \frac{\pi}{6} \Rightarrow \pi = 6 \arcsin \frac{1}{2} \\ \Rightarrow \pi &= 6 \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{1}{5 \cdot 2^5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{1}{7 \cdot 2^7} + \dots \right), \end{aligned} \quad (36)$$

který jde moderním způsobem zapsat jako [17]:

$$\pi = \lim_{n \rightarrow \infty} 6 \sum_{i=0}^n \frac{(2n)!}{2^{4n+1} (n!)^2 (2n+1)} \quad (37)$$

### 2.3.10 Legendreho algoritmus

Adrien Legendry (1752-1833) v roce 1794 publikoval dílo „Éléments de géométrie“ podobným algoritmem jako M. Kusánský jen s rozdíle, že kromě poloměru opsané a vepsané kružnice  $R$  a  $r$  k  $2n$ -úhelníku počítá ještě koeficient  $s$ .

$$R_{n+1} = \frac{r_n + R_n}{2} \quad (38)$$

$$r_{n+1} = \sqrt{r_n R_n} \quad (39)$$

$$s_{n+1} = s_n - 2^n (R_n - R_{n+1})^2 \quad (40)$$

Za počáteční hodnoty zvolíme  $R_0 = 1$ ,  $r_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$  a  $s_0 = \frac{1}{4}$ .

Nyní stačí pro výpočet  $\pi$  použít následující vzorec [11][16]:

$$\frac{R_{2n}^2}{s_n} < \pi < \frac{R_n^2}{s_n}. \quad (41)$$

### 2.3.11 Leonhard Euler

Leonhard Euler sjednotil matematiký zápis a matematice dnešní symboliku, např.:  $f(x)$ ,  $\int dx$ ,  $i$ ,  $e$ ,  $\sum$ . Od jeho doby se řeckým písmenem  $\pi$  odznakuje konstanta, o které je tato práce.

Dalším výsledkem jeho celoživotní práce je objev několika nekonečných řad vedoucích k  $\pi$ , z nichž je neznámější vyřešení řady převrácených dvojmocí, kterou před tím se marně snažilo vyřešit celá desetiletí spousta matematiků, např. G. W. Leibnitz nebo J. Bernaulli I.

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots = \frac{\pi^2}{12}$$

[1]

## 2.4 Moderní algoritmy s využití počítačů

## 3 METODA MONTE CARLO

## 4 SROVNÁNÍ METOD

V této kapitole budu srovnávat efektivitu algoritmy zmíněné v předchozích kapitolách podle mnou definované veličiny  $\mathfrak{M}$  [mem]. Protože  $\mathfrak{M}$  závisí na rychlosti konvergence algoritmu  $\beta(n)$ , která je nespojitá funkce závislá na počtu iterací  $n$ , kde  $n$  náleží přirozeným číslům, použiji sumaci v intervalu všech iterací, a tím dostanu hodnotu veličiny nezávislou na aktuální iteraci.

$$\mathfrak{M} = \lim_{a \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^a \beta(n)$$

Rychlosti konvergence algoritmu definuji jako podíl záporného podílu rozdílů míry konvergence  $p$  a čísla iterace a podílu složitosti algoritmu  $O$  a čísla iterace:

$$\beta(n) = \frac{-\frac{\Delta p}{\Delta n}}{\frac{\Delta O}{\Delta n}} = \frac{-\frac{p_{n+1}-p_n}{n+1-n}}{\frac{O_{n+1}-O_n}{n+1-n}} = \frac{p_n - p_{n+1}}{O_{n+1} - O_n}$$

..

$$\mathfrak{M} = \lim_{a \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^a \frac{p_n - p_{n+1}}{O_{n+1} - O_n} \quad (42)$$

### 4.1 Míra konvergence

Míra konvergence  $p_n$  je matematická veličina vyjadřující vzdálenost odhadu čísla  $x_n$  od skutečné hodnoty čísla  $x$  v  $n$ -té iteraci v algoritmu pro výpočet čísla  $x$ .

$$p_n = |x_n - x|, \quad x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$$

číslo iterace	Archimedes		Descartes	
hr. intervalu	spodní	horní	spodní	horní
1	0.31316	0.85840	0.31316	0.85840

Tabulka 1: Míra konvergence

### 4.2 Složitost algoritmu

## 5 ZÁVĚR

## 6 REFERENCE

- [1] BECKMANN, Petr. Historie čísla  $\pi$ . Praha: Academia, 1998. ISBN 80-200-0655-9.
- [2] THUMSHIRN, Christian. Der Schweizer, der 22,4 Billionen Dezimalstellen von  $\pi$  berechnet hat. Neue Zürcher Zeitung [online]. Zürich, 2017, 21.3.2017, , 1 [cit. 2018-06-21]. Dostupné z: <https://www.nzz.ch/wissenschaft/video-serie-nerdzz-der-wahrscheinlich-laengste-rekord-der-welt-ld.152445-november-2016/>
- [3] KOLMAN, Arnošt a Marcela HEDRLÍNOVÁ. Dějiny matematiky ve starověku. Praha: Academia, 1968. ISBN 978-80-87287-77-4.
- [4] Bible kralická: Písmo svaté Starého a Nového zákona : podle posledního vydání z roku 1613. 5. vyd. v ČBS. Praha: Česká biblická společnost, 2014. ISBN 978-80-87287-77-4.
- [5] BEČVÁŘ, Jindřich, Martina BEČVÁŘOVÁ a Hana VYMAZALOVÁ. Matematika ve starověku: Egypt a Mezopotámie. Praha: Prometheus, 2003. Dějiny matematiky. ISBN 80-7196-255-4.
- [6] VEJCHODSKÝ, Tomáš. Archimédův výpočet čísla  $\pi$  [přednáška]. Praha: Akademie věd České republiky, 11.11.2016. In: Youtube.com [online]. [vid. 17. 5. 2018]. Záznam dostupný z: <https://www.youtube.com/watch?v=8XaM9ZYxCqU>
- [7] WILLERS, Michael. Algebra bez (m)učení: Od arabských matematiků k tajným šifrám: matematika v každodenním životě : fascinující čísla a rovnice. Praha: Grada, 2012. ISBN 978-80-247-4123-9.
- [8] Adam Adamandy Kochański. In: Wikipedia: the free encyclopedia [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001- [cit. 2018-05-24]. Dostupné z: <https://en.wikipedia.org/wiki/Adam-Adamandy-Kocha%C5%84ski>
- [9] POSAMENTIER, Alfred S. a Ingmar LEHMANN. [Pi]: A Biography of the World's Most Mysterious Number. II. Title. Amherst, N.Y.: Prometheus Books, 2004. ISBN 15-910-2200-2.
- [10] BEČVÁŘ, Jindřich. Matematika ve středověké Evropě. Praha: Prometheus, 2001. Dějiny matematiky. ISBN 80-7196-232-5.
- [11] BEČVÁŘ, Jindřich, FUCHS, Eduard, ed. Matematika v 16. a 17. století: Seminář Historie matematiky III. Praha: Prometheus, 1999. ISBN 80-7196-150-7.
- [12] JÁCHIM, František. Jak viděli vesmír: [po stopách velkých astronomů]. Olomouc: Rubico, 2003. ISBN 80-85839-48-2.
- [13] BEČVÁŘOVÁ, Martina, Jindřich BEČVÁŘ, Magdalena HYKŠOVÁ, Oldřich HYKŠ, Martin MELCER, Martina ŠTĚPÁNOVÁ, Miroslava OTAVOVÁ a Irena SÝKOROVÁ. Matematika ve středověké Evropě: pozdní středověk a renesance. Praha: Česká technika - nakladatelství ČVUT, 2018. Dějiny matematiky. ISBN 978-80-01-06403-0.

- [14] FUCHS, Eduard, ed. Mathematics throughout the ages. Prague: Prometheus, 2001. History of mathematics. ISBN 80-7196-219-8.
- [15] BEČVÁŘ, Jindřich a Eduard FUCHS, ed. Matematika v proměnách věků III. Praha: Výzkumné centrum pro dějiny vědy, 2004. Dějiny matematiky. ISBN 80-728-5040-7.
- [16] BRENT, Richard P. The Borwein Brothers, Pi and the AGM [online]. Mathematical Sciences Institute, Australian National University, Canberra a University of Newcastle, Callaghan, 8. 8. 2018, , 7-8 [cit. 2018-11-03]. Dostupné z: <https://arxiv.org/abs/1802.07558>
- [17] GOURÉVITCH, Boris. Newton's Formula. The world of pi [online]. [cit. 2018-11-03]. Dostupné z: <http://www.pi314.net/eng/newton.php>
- [18] PROKOP, Vladimír. Dějiny literatury od starověku do počátku 19. století: aneb od Mezopotámie po naše národní obrození. Sokolov: O.K.-Soft, 2001.

## 7 SEZNAM OBRÁZKŮ

1	Zářezy na kostech [3] . . . . .	9
2	Tabulka YBC 7302 [5] . . . . .	10
3	Sít' pro aproximaci kruhu . . . . .	10
4	Ptolemaiova aproximace kruhu . . . . .	11
5	Kruh s opsaným a vepsaným $n$ -úhelníkem . . . . .	12
6	Jeden trojúhelník z vepsaného šestiúhelníka . . . . .	12
7	Jeden trojúhelník z opsaného šestiúhelníka . . . . .	13
8	1 trojúhelník z vepsaného šestiúhelníka a 2 trojúhelníky z vepsaného dvanácti- úhelníka . . . . .	13
9	1 trojúhelník z opsaného šestiúhelníka a 1 trojúhelník z opsaného dvanácti- úhelníka . . . . .	14
10	Kusánského algoritmus . . . . .	15
11	Výpočet poloměru vepsané kružnice osmiúhelníka . . . . .	16
12	Výpočet poloměru opsané kružnice osmiúhelníka . . . . .	17
13	Výpočet poloměru vepsané kružnice osmiúhelníka . . . . .	18
14	Viètova geometrická aproximace . . . . .	19
15	Pravoúhlý trojúhelník SIG a SAJ . . . . .	20
16	Descartesův algoritmus . . . . .	21
17	Interval z Archimédovy metody . . . . .	22
18	Kochanského konstrukce přibližné poloviny obvodu kruhu s daným poloměrem . . . . .	25

## 8 SEZNAM TABULEK

1	Míra konvergence . . . . .	27
---	----------------------------	----

## **PŘÍLOHA A: PRVNÍ PŘÍLOHA**