

ROČNÍKOVÁ PRÁCE

Gymnázium Zikmunda Wintra Rakovník, příspěvková organizace

Metody aproximace Ludolfova čísla

Methods of approximation of Archimedes' constant

Autor: Jiří Zelenka

Ročník a školní rok: C3A 2018/2019

Vedoucí práce: Mgr. Vojtěch Delong

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svou práci vypracoval samostatně a použil jsem pouze literaturu a prameny uvedené v seznamu bibliografických záznamů.

Prohlašuji, že tištěná verze a elektronická verze ročníkové práce jsou shodné.

Nemám důvod protestovat proti zpřístupňování této práce v souladu se zákonem č. 121/2000 Sb., o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon) v platném znění.

V Domoušicích dne datum

Jiří Zelenka

Poděkování

Na tomto místě můžete vložit poděkování těm, kteří vám s tvorbou práce pomohli. Poděkování je vaše autorské dílo, nemá předepsanou podobu a není povinnou součástí práce. Záleží jen na vás, zda, komu a jakým způsobem poděkujete.

Anotace

Cílem mé ročníkové práce je informovat o základních metodách aproximace Ludolfova čísla (dále jen „ π “). V práci jsem popsal historický vývoj a metody jeho výpočtu. Každou metodu zmíněnou v textu jsem otestoval v počítačové simulaci, popřípadě jsem provedl experiment vedoucí k přibližné hodnotě π . Posledním tématem, kterým jsem se zabýval, bylo využití počítačových technologií k přiblížení se skutečné hodnotě π .

Klíčová slova

Ludolfovo číslo, pí, konstanta, algoritmy, počítače

Annotation

A purpose of my work is information of basic methods of approximation of Archimedes' constant (hereinafter " π "). In work I described a historical development and methods of its calculation. Every method which I inform in the text I tested by computing simulation or I made an experiment which led to an approximate value of π . Eventually I occupy with using of computer technology for calculation π .

Keywords

Archimedes' constant, pi, constant, algorithms, computers

OBSAH

1	Úvod	7
1.1	Důkaz transcendentnosti π	8
2	Historický vývoj odhadu π	8
2.1	Starověk	8
2.1.1	První numerické aproximace	8
2.1.2	Archimédův algoritmus	11
2.2	Středověk	14
2.2.1	Leonard Fibonacci	15
2.2.2	Mikuláš Kusánský	15
2.3	Novověk	17
2.3.1	François Viète	18
2.3.2	Descartesův algoritmus	20
2.3.3	Gregoryho algoritmus	21
2.3.4	Willebrord Snell	21
2.3.5	Wallisův nekonečný součin	22
2.3.6	Brounckerův řetězový zlomek	22
2.3.7	Gregoryho-Leibnizova řada	23
2.3.8	Kochaňského geometrická aproximace	24
2.3.9	Newtonova řada	24
2.3.10	Legendreho algoritmus	24
2.3.11	Leonhard Euler	25
2.4	Moderní algoritmy s využití počítačů	25

3	Metoda Monte Carlo	25
4	Srovnání metod	25
5	Závěr	25
6	Reference	26
7	Seznam obrázků	28
8	Seznam tabulek	28
	Přílohy	29
A	První příloha	29

1 ÚVOD

Člověk již od dob, když si začal uvědomovat tvary a velikosti, si musel být vědom, že existuje jistá závislost mezi průměrem a obvodem kruhu. Nejspíš okolo 2000 př. n. l. [1] lidé ve vyspělých civilizacích začali užívat konstantu, kterou, když vynásobili průměr kruhu, dostali obvod kruhu.

Zprvu užívali hodnoty experimentálně změřené. Až ve starověku přišel Archimédes ze Syrakus s prvním algoritmem, pomocí něhož lze nalézt hodnotu konstanty s libovolnou přesností.

Vzhledem k tomu, že ve středověku nebyl téměř žádný zájem o tuto oblast matematiky, další přínosy pocházejí až z novověku. Velký posun kupředu byl objev nekonečného součtu a součinu a řetězových zlomků. Následkem toho vzniklo nespočet algoritmů, nicméně většina měla pomalou konvergenci¹.

Zdokonalování a vymýšlení nových algoritmů bylo podmíněno mírou poznatků matematiky, hlavně z oblasti teorie čísel a rovnic. Asi nejceněnější příspěvek z konce raného novověku je objev integrálů Sirem Isaacem Newtonem. Do 18. století neměla konstanta jednotné označení, až Leonhard Euler začal používat námi již známé řecké písmeno π .

Další velký rozkvět zažilo π až s příchodem počítačů v polovině 20. století. Doté doby bylo π spočítáno jen na 808 desetinných míst. Během několika let bylo vytvořeno mnoho rekordů. Ze začátku to bylo několik desítek tisíc desetinných míst. V roce 2016 bylo ve Švýcarsku π spočítáno na 22,4 biliónů desetinných míst [2].

V první části si ukážeme pomocí Lindenmannova důkazu, že π je iracionální, resp. transcendentní². Tím si objasníme, proč se nikomu v historii nepovedlo a ani nepovede konečnou metodou vyjádřit celý desetinný rozvoj.

Od další části vše už bude poskládáno chronologicky. Ukážeme si, jakou hodnotu používaly jednotlivé civilizace v Evropě a na Blízkém východě. Ve starověku ještě zůstaneme a rozebereme si Archimédův algoritmus.

Ze středověku si představíme pouze Leonarda Fibonacciho, který tento algoritmus studoval.

Čtvrtá kapitola se bude zabírat novověkem, kde si představíme Viětův a Wallisův nekonečný součin. Jedním z témat budou i řetězové zlomky, hlavně Brounckerův řetězový zlomek. Dále bude následovat Gregoryho-Leibnizova a Newtonova řada. U Newtonovy řady si podrobně popíšeme odvození, protože je to první řada, která byla odvozena pomocí integrálů. Leonharda Eulera si zmíníme nejen kvůli tomu, že dal světu symbol π , ale i on představil veřejnosti několik řad.

V předposlední části bude simulace Monte Carlo³ a s tím spojená Buffonova jehla, kterou jsem i experimentálně ověřil.

V poslední části se podíváme výpočty π na počítači a nejzajímavější rekordy.

¹Konvergence je rychlost algoritmu. Vyjadřuje, jak moc se přiblížíme skutečné hodnotě s každou další iterací (provedeným krokem).

²Transcendentní iracionální čísla nejdou vyjádřit zlomkem. Nemají totiž ukončený desetinný rozvoj a zároveň nemají periodu. Od algebraických iracionálních čísel se liší tím, že nemůže být kořenem žádné algebraické rovnice s racionálními koeficienty.

³Monte Carlo je libovolná numerická simulace využívající náhodnost. V tomto případě půjde o numerickou integraci.

1.1 Důkaz transcendentnosti π

Historicky první důkaz přinesl roku 1761 Johann Heinrich Lambert. Ten potvrdil, že π je iracionální, ale nevyvrátil, že π je algebraické. V roce 1794 Adrien-Marie Legendre dokázal, že π^2 je iracionální, a byl přesvědčen, že není algebraické iracionální číslo, ale že to půjde těžce dokázat. Až Carl Louis Ferdinand von Lindemann v roce 1882 přišel s důkazem, že π je transcendentní iracionální číslo.

Lindemannův důkaz vychází z Eulerovy identity:

$$e^{i\pi} + e^0 = 0.$$

Jestliže exponenty 0 a $i\pi$ jsou různá čísla, tak musí být navzájem lineárně nezávislá³. Podle Lindemannova–Weierstrassova teorému musí být i čísla $e^{i\pi}$ a e^0 algebraicky nezávislá. Z toho také vyplývá, že alespoň 1 exponent číslo transcendentní. Již na první pohled je jasné že 0 není transcendentní, protože může vyjít jako kořen algebraické rovnice ($x = 0$). V tom případě musí být $i\pi$ transcendentní. Aby z součinu čísel vyšlo transcendentní číslo, musí alespoň jeden činitel být také transcendentní číslo. A když lze zapsal, že:

$$i = \sqrt{-1} \Rightarrow i^2 = -1 \Rightarrow i^2 + 1 = 0,$$

musí nutně být π transcendentní [1].

2 HISTORICKÝ VÝVOJ ODHADU π

2.1 Starověk

Již před 1 000 000 let si člověk začal uvědomovat tvary, velikosti (čísla) a vztahy mezi veličinami, např.: větší kámen je těžší, starší strom je větší. Někdy v době kamenné lidé začali počítat, o čemž svědčí řezy na kostech (obr. 1). V této době člověk začal vnímat monotonní funkce⁴, např.: 2krát větší pole znamená 2krát víc úrody. Jenže to u kruh, jednoho z nepřírozenějších tvarů, neplatilo. Věděli jen, že čím větší průměr, tím větší obvod. Až někdy kolem roku 2000 př. n. l. přišli na to, že, aby tato úměra platila pro výpočet, musí průměr vynásobit konstantou, a tak začaly vznikat první aproximace π [1].

2.1.1 První numerické aproximace

Blízký východ Mezi prvními oblastmi, kde se doloženě rozvíjela matematika, bylo území Blízkého východu. Hlavně u velkých řek, jako je Eufrat a Tigris, se začaly vyvíjet první civilizace. Již od 3. tisíciletí př. n. l. se začínají objevovat první písemné prameny včetně matematiky. V roce 1936 byla nalezena přibližně 200 mil od Babylonu ve městě Susa hliněná destička, která tvrdí, že podíl obvodu pravidelného šestiúhelníku a obvodu kruhu o stejném průměru je [1]:

$$\frac{57}{60} + \frac{36}{60^2} = \frac{96}{100}$$

³Dvě čísla jsou lineárně závislá právě tehdy, když jedno jde vyjádřit jako součin druhého čísla s libovolným reálným nenulovým číslem.

⁴ $f(x) : y = x$



Obrázek 1: Záznamy na kostech [3]

Pokud víme, že obvod pravidelného šestiúhelníku o_s je šestnásobek poloměru r a že obvod kruhu o_k je poloměr krát dvojnásobek π , můžeme si vyjádřit hodnotu π .

$$\frac{o_s}{o_k} = \frac{96}{100} \Rightarrow \frac{6r}{2\pi r} = \frac{96}{100} \Rightarrow \frac{3}{\pi} = \frac{96}{100} \Rightarrow \pi = 3\frac{1}{8} \quad (1)$$

Z této destičky je jasné že v Babylonii používali za hodnotu π 3,125.

Na většině území zpravidla používali hodnotu 3 [3]. Na to poukazují památky Židů, například "První kniha královská" praví o Šalomounově paláci (kapitola 7, verš 23): "Udělal také moře slité, desíti loket od jednoho kraje k druhému, okrouhlé vúkol, a pět loket byla vysokost jeho, a okolek jeho třicíti loket vúkol." [4] nebo i samotných Babyloňanů. Na tabulce YBC 7302 ve tvaru kruhu jsou napsána čísla 3, 9 a 45, z nich jde usuzovat, že obvod je dán 3, 9 je druhá mocnina obvodu a 45 je její obsah. Tyto hodnoty se dají použít ve vzorci:

$$S = \frac{1}{12}o^2, \quad (2)$$

kde S je obsah a o je obvod [5]. Pokud si vzorec 2 rozepíšeme, dostaneme, že π je v této aproximaci 3.

$$S = \frac{1}{12}o^2 \Rightarrow \pi r^2 = \frac{1}{12}4\pi^2 r^2 \Rightarrow 1 = \frac{1}{3}\pi \Rightarrow \pi = 3$$

Egypt Matematika v Egyptě musela existovat již v 3. tisíciletí př. n. l., protože v přibližně té době probíhaly stavby pyramid a kanálů, na které byly potřeba pokročilé znalosti matematiky [3].

Roku 1858 poblíž Nilu byl nalezen Rhindův papyrus [1], který obsahuje návod na výpočet obsahu kruhu. V příkladu R50 se tvrdí, že obsah trojúhelníka S je roven $\frac{64}{81}$ druhé mocniny průměru d .

$$S = \frac{64}{81}d^2 \quad (3)$$

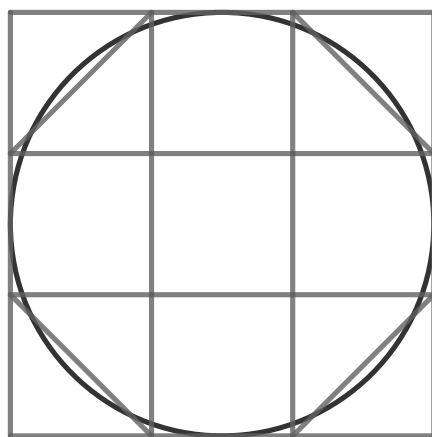


Obrázek 2: Tabulka YBC 7302 [5]

Když si vztah upravíme, dostaneme hodnotu π .

$$S = \frac{64}{81}d^2 \Rightarrow \frac{1}{4}\pi d^2 = \frac{64}{81}d^2 \Rightarrow \pi = 3\frac{13}{81}$$

Pomocí našeho vzorce pro obsah kruhu je jasné, že pro Egypťany byla hodnota π 3,16. Jak ke vzorci 3 došli, zůstává záhadou, ale mnoho historiků matematiky se přiklání, že na násobek $\frac{64}{81}$ přišli pomocí čtvercové sítě, kterou používali při projektování staveb. Když na čtvercové síti složené z 9 čtverců jako na obrázku 3 aproximujeme kruh osmiúhelníkem dostaneme, že obsah kruhu je $\frac{7}{9}$ druhé mocniny průměru kruhu. Protože $\frac{64}{81}$ snadno zapisovatelné pomocí kamenných zlomků, které se v té době hojně používaly, je možné, že $\frac{63}{81}$ nahradili $\frac{64}{81}$ [5].



Obrázek 3: Síť pro aproximaci kruhu

Řecko Na úplném vrcholu byla starověká matematika v Řecku a to hlavně díky velkému množství vědců z celé řady oborů. Do dnešní doby se v matematice používá mnoho jejich poznatků, např.: Archimédovy geometrické řady, Pythagorova věta, Euklidovy věty a Archimédův algoritmus na výpočet π , který je rozebrán v kapitole 2.2.2.

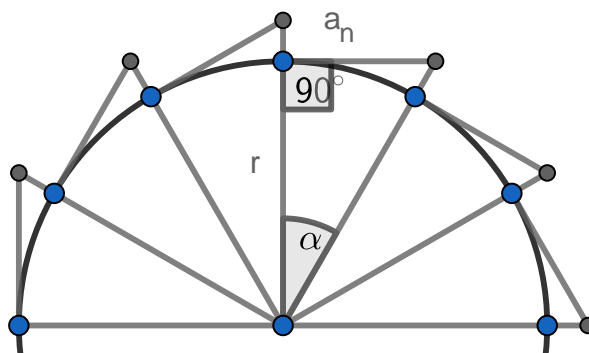
Řím Klaudios Ptolemaios, vědec žijící v Alexandrii 85-165 n. l. [12], ve své 1. knize „Almagestu“ sestavil tabulku tětiv (sinů). Funkci sinus značí jako $\text{chrd } \alpha$. K určení základních hodnot užívá do té doby již známých znalostí z matematiky. Pro získání malých úhlů odvodil vzorec pro chrd polovičního úhlu:

$$\text{chrd}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \text{chrd}(180^\circ - \alpha)}{2},$$

který lze zapsat dnešním zápisem jako:

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}. \quad (4)$$

Když se dostal až na 1° využil novou goniometrickou funkci aproximaci obvodu kruhu o , kterou lze vidět na obrázku 4. Tato aproximace by šla zapsat dnešním moderním zápisem takto:



Obrázek 4: Ptolemaiova aproximace kruhu

$$o = \lim_{n \rightarrow \infty} nr \sin \left(\frac{360^\circ}{n} \right),$$

když to vložíme do vzorce pro π :

$$\pi = \frac{o}{2r},$$

dostaneme, že:

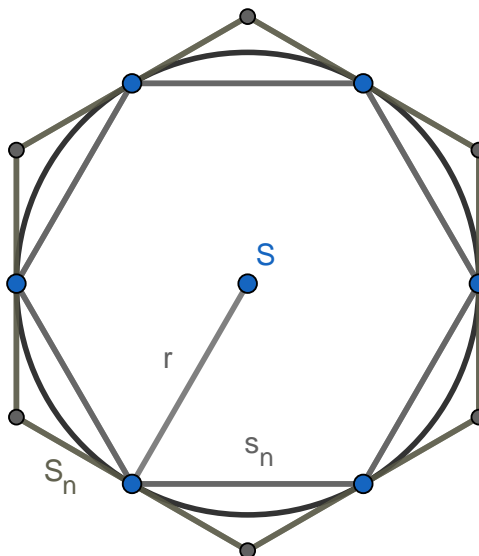
$$\pi = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \sin \left(\frac{360^\circ}{n} \right)}{2}. \quad (5)$$

Ptolemaios pro $\alpha = 1^\circ$ ($n = 360$) dostal hodnotu π 3,14166. Důvod, proč nedostal hodnotu 3,14143, je, že během svého výpočtu $\text{chrd } 1^\circ$ pomocí vzorce 4 zaokrouhloval [3].

2.1.2 Archimédův algoritmus

Archimédes (287-212 př. n. l.[3]) použil k výpočtu π úvahu, že obvod vepsaného pravidelného n -úhelníku o_n je menší než obvod kruhu o_k a že obvod opsaného pravidelného n -úhelníku O_n je menší než obvod kruhu:

$$\begin{aligned} o_n &< o_k < O_n \\ ns_n &< 2\pi r < nS_n \\ \frac{ns_n}{2r} &< \pi < \frac{nS_n}{2r}, \end{aligned} \quad (6)$$

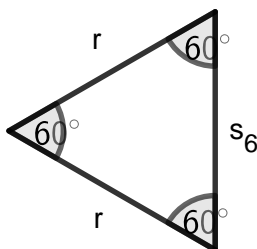


Obrázek 5: Kruh s opsaným a vepsaným n -úhelníkem

kde n je počet vrcholů/stran, r je poloměr kružnice, s_n je délka strany vepsaného n -úhelníku a S_n je délka strany opsaného n -úhelníku [1].

Princip tohoto algoritmu je ten, že čím více bude mít n -úhelník vrcholů, tím více bude opisovat kruh a tím bude menší interval.

Archimédes začal výpočet na snadno spočítatelném šestiúhelníku, kde délka strany vepsaného šestiúhelníka je poloměr kružnice⁵, pro jednoduchost výpočtu zavedeme jednotkový poloměr ($r = 1$).



Obrázek 6: Jeden trojúhelník z vepsaného šestiúhelníka

$$s_6 = r \Rightarrow s_6 = 1 \quad (7)$$

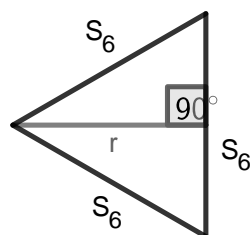
Délka stany opsaného šestiúhelníka jde vypočítat pomocí Pythagorovy věty.

$$\begin{aligned} S_6^2 &= r^2 + \left(\frac{S_6}{2}\right)^2 \Rightarrow 4S_6^2 = 4r^2 + S_6^2 \Rightarrow S_6^2 = \frac{4}{3}r^2 \Rightarrow S_6 = \frac{2\sqrt{3}}{3}r \\ &\Rightarrow S_6 = \frac{2\sqrt{3}}{3} \end{aligned} \quad (8)$$

Když se hodnoty s_6 a S_6 vloží do vztahu 4, vyjde, že $3 < \pi < 2\sqrt{3}$. Archimédes u této hodnoty nevydržel, a tak počítal dál, ale, protože pro víceúhelníky není výpočet tak jednoduchý⁶, odvodil

⁵Pravidelný šestiúhelník se skládá z šesti rovnostranných trojúhelníků. To znali již Babyloňané[1].

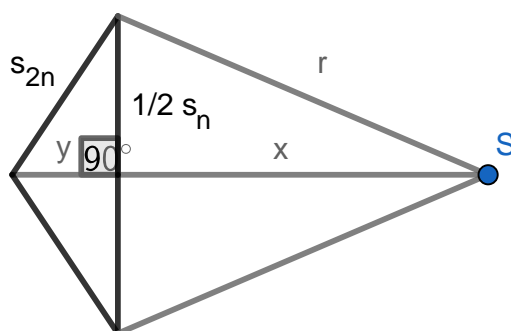
⁶Za Archyméda nebyly známe goniometrické funkce. První, kdo určil jejich hodnoty, byl Ptolemaios. [3]



Obrázek 7: Jeden trojúhelník z opsaného šestiúhelníka

si vztah pro $2n$ -úhelníky.

Z obrázku 8 můžu sestavit soustavu 3 rovnic, ze kterých se dá vyjádřit s_{2n} :



Obrázek 8: 1 trojúhelník z vepsaného šestiúhelníka a 2 trojúhelníky z vepsaného dvanáctiúhelníka

1. Protože se jedná o mnohoúhelník vepsaný, vrcholy budou ležet vždy n kružnici ve vzdálenosti r od středu S .

$$r = x + y$$

2. Pro pravý trojúhelník z obrázku 9 podle Pythagorovy věty platí, že:

$$r^2 = x^2 + \left(\frac{1}{2}s_n\right)^2 = x^2 + \frac{1}{4}s_n^2.$$

3. Pro levý trojúhelník z obrázku 8 podle Pythagorovy věty platí, že:

$$s_{2n}^2 = y^2 + \left(\frac{1}{2}s_n\right)^2 = y^2 + \frac{1}{4}s_n^2.$$

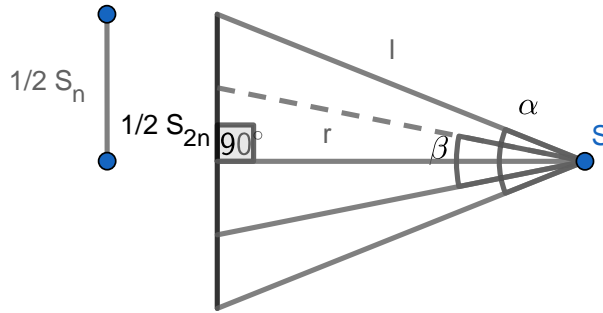
Celá soustava se dá upravit a dá se z ní vyjádřit s_{2n} . (Jednotlivé rovnice soustavy rovnic jsou zapsány ve sloupcích pod sebou a jednotlivé kroky úprav jsou vždy mezi sloupci doprava.)

$$\begin{array}{lll}
 x + y & = & r \\
 x^2 + \frac{s_n^2}{4} & = & r^2 \\
 y^2 + \frac{s_n^2}{4} & = & s_{2n}^2
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{lll}
 x + y & = & 1 \\
 x^2 + \frac{s_n^2}{4} & = & 1 \\
 y^2 + \frac{s_n^2}{4} & = & s_{2n}^2
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{lll}
 y & = & 1 - x \\
 x & = & \sqrt{1 - \frac{s_n^2}{4}} \\
 y^2 + \frac{s_n^2}{4} & = & s_{2n}^2
 \end{array}$$

$$(1-x)^2 + \frac{s_n^2}{4} = s_{2n}^2 \Rightarrow 1 - 2x + x^2 + \frac{s_n^2}{4} = s_{2n}^2 \Rightarrow 1 - 2\sqrt{1 - \frac{s_n^2}{4}} + 1 - \frac{s_n^2}{4} + \frac{s_n^2}{4} = s_{2n}^2$$

$$\Rightarrow s_{2n}^2 = 2 - 2\sqrt{1 - \frac{s_n^2}{4}} \Rightarrow s_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - s_n^2}} \quad (9)$$

Z obrázku 6 je patrné, že když se zpoloviční úhel α na úhel β (zdvojnásobení počtu vrcholů)



Obrázek 9: 1 trojúhelník z opsaného šestiúhelníka a 1 trojúhelník z opsaného dvanáctiúhelníka

musí platit:

$$\frac{\frac{1}{2}S_{2n}}{\frac{1}{2}(S_n - S_{2n})} = \frac{r}{l},$$

protože v libovolném trojúhelníku je poměr libovolných dvou stran svírající úhel φ stejný jako poměr úseček ve zbývajících straně osou úhlu φ dělící. Pomocí Pythagorovy věty lze spočítat stranu l .

$$l = \sqrt{r^2 + \left(\frac{1}{2}S_n\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{1}{4}S_n^2}$$

Nyní stačí dosadit a vyjádřit S_{2n} [6].

$$\begin{aligned} \frac{\frac{1}{2}S_{2n}}{\frac{1}{2}(S_n - S_{2n})} &= \frac{r}{\sqrt{r^2 + \frac{1}{4}S_n^2}} \Rightarrow \frac{S_{2n}}{S_n - S_{2n}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{4}S_n^2}} \\ \Rightarrow \frac{S_{2n}}{S_{2n}(\frac{S_n}{S_{2n}} - 1)} &= \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{4}S_n^2}} \Rightarrow \frac{S_n}{S_{2n}} - 1 = \sqrt{1 + \frac{1}{4}S_n^2} \\ \Rightarrow S_{2n} &= \frac{S_n}{1 + \sqrt{1 + \frac{1}{4}S_n^2}} \Rightarrow S_{2n} = \frac{2S_n}{2 + \sqrt{4 + S_n^2}} \end{aligned} \quad (10)$$

Tímto postupem došel až k 96-úhelníku a vypočítal, že $3\frac{10}{71} < \pi < \frac{1}{7}$, neboli $3.1408 < \pi < 3.1429$. Ve výpočtu musel odmocňovat, např: $\sqrt{3} \approx \frac{265}{153}$, ale dodnes se neví jak to udělal.

Je možné, že Archimédes šel později ještě dál, protože v roce 1896 v Istanbulu byla nalezena Metrika z roku 60 př. n. l. od Herona z Alexandrie (10-70 n. l. [7]), kde se Heron odvolává na Archiméda s tím, že $3.1416 < \pi < 3.1738$. Chyba v horním intervalu vznikla asi opisem originálu. [1]

2.2 Středověk

Vzhledem k tomu, že během středověku probíhal souboj vědy a náboženství a starověké poznatky stačily, došlo v řadě vědeckých disciplín, včetně matematiky, k útlumu. Jediný, kdo se v této době zabýval π byl Leonardo Fibonacci a Mikuláš Kusánský. [1] [12]

2.2.1 Leonard Fibonacci

Leonardo z Pizy/Fibonacci (1180-1250) použil ke svému výpočtu π Archimédovu metodu. Pomocí decimální aritmetiky, která ještě za Archiméda nebyla známá, došel u 96-úhelníku k nerovnosti $\frac{1440}{458\frac{4}{9}} < \pi < \frac{1440}{458\frac{1}{5}}$. Když se z mezních hodnot udělá průměr:

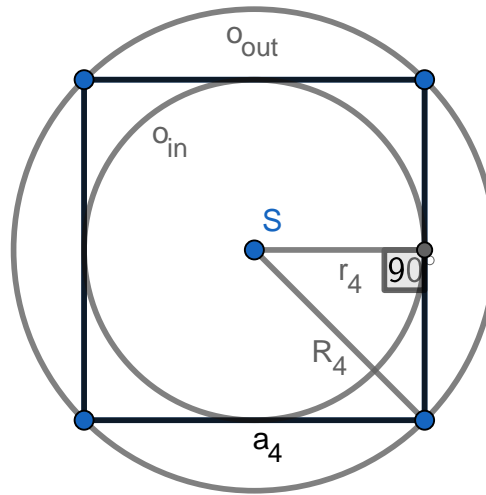
$$\frac{\frac{4}{9} + \frac{1}{5}}{2} = \frac{29}{90} \doteq \frac{1}{3},$$

vyjde Fibonacciho hodnota $\pi \frac{864}{275} \approx 3,141818$. [1] [10]

2.2.2 Mikuláš Kusánský

Mikuláš Kusánský (1401-1464) byl německý filosof, teolog, diplomat, matematik a kardinál v Římě. Objevil novou „sendvičovou“ metodu pro výpočet π . Vzal si pravidelný n -úhelník s obvodem 2, který byl vepsán a opsán kružnicemi (obr. XX), a zdvojnásobováním úhlů v mnohoúhelníku o stejném obvodu zpřesňoval krajní intervaly výpočtů π .

Začal na čtverci o straně a_4 , která se rovnala $\frac{1}{2}$ a která je v vidění na obrázku X. Poloměr



Obrázek 10: Kusánského algoritmus

vepsané kružnice r_n je polovina strany čtverce, tj. $\frac{1}{4}$. Poloměr opsané kružnice R_n lze spočítat pomocí Pythagorovy věty.

$$R_4 = \sqrt{r_4^2 + \left(\frac{a_4}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{1}{16}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

Když znal poloměr vepsané a opsané kružnice, začal iterovat pomocí jeho nalezených vzorců pro obvody kružnic v $2n$ -úhelníku.

$$r_{2n} = \frac{R_n + r_n}{2} \quad (11)$$

$$R_{2n} = \sqrt{R_n r_{2n}} \quad (12)$$

Jak již bylo zmíněno, obvod opsané o_{in} a vepsané o_{out} kružnice tvoří meze intervalu, ve kterém se nachází obvod n -úhelníka o . Interval lze rozepsat do dvou nerovností.

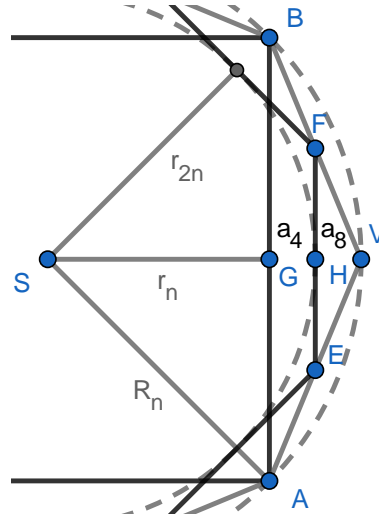
$$o_{in} < o \Rightarrow 2\pi r_n < o \Rightarrow \pi < \frac{2}{2r_n} \Rightarrow \pi < \frac{1}{r_n} \quad (13)$$

$$o < o_{out} \Rightarrow o < 2\pi R_n \Rightarrow \frac{2}{2R_n} < \pi \Rightarrow \frac{1}{R_n} < \pi \quad (14)$$

Z nerovností v rovnicích 13 a 14 lze udělat jednu nerovnost.

$$\frac{1}{R_n} < \pi < \frac{1}{r_n} \quad (15)$$

Kusánský přišel ke vzorci 11 tak, že sestrojil konstrukci, v které je čtyř a osmiúhelník o stejné obvodu, takže platí, že:



Obrázek 11: Výpočet poloměru vepsané kružnice osmiúhelníka

$$|AB| = 2|EF| \Rightarrow a_4 = 2a_8.$$

Z tohoto tvrzení, pak vyplývá, že bod H , který je od středu S vzdálen jako poloměr vepsané kružnice $2n$ -úhelníku⁷, je přesně uprostřed mezi G a V , což jde si ověřit tak, že vezmeme pravoúhlý trojúhelník $GV B$, který bude mít úhel α při vrcholu V , a pomocí funkce tangens zapíšeme rovnici:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \left(\frac{|BG|}{|GV|} \right) &= \operatorname{tg} \left(\frac{|FH|}{|HV|} \right) \Rightarrow \frac{|BG|}{|GV|} = \frac{|FH|}{|HV|} \Rightarrow \frac{\frac{1}{2}a_4}{|GV|} = \frac{\frac{1}{2}a_8}{|HV|} \\ &\Rightarrow \frac{2}{|GV|} = \frac{1}{|HV|} \Rightarrow |GV| = 2|HV|. \end{aligned}$$

Ted' stačí délky poloměrů zprůměrovat.

$$|SH| = \frac{|SG| + |SV|}{2} \Rightarrow r_{2n} = \frac{R_n + r_n}{2}$$

Vzorec 12 vychází z Eukleidovy věty o odvěsně [9], kde:

$$|SF|^2 = |SV||SH| \Rightarrow |SF| = \sqrt{|SV||SH|} \Rightarrow R_{2n} = \sqrt{R_n r_{2n}}.$$

Kusánský se ještě před objevem tohoto algoritmu zabýval geometrickým přiblížením k obvodu kruhu. Vymyslel hned několik přiblížení. Pravděpodobně nejpresnější se nachází v knize „Dialogus de circuli quadratura“ z roku 1457, která je na obrázku XX. V konstrukci na obrázku

⁷v tomto případě osmiúhelníku

2.3.1 François Viète

François Viète (1540–1603) jako vymysle algoritmus na výpočet π založený na nekonečném součinu (vzorec 15).

$$\frac{2}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2} \cdot \dots \quad (16)$$

Vydal ho v knize „Variorum de rebus mathematicis responsorum, liber VIII“ v roce 1593. [1] Tento lze snadno odvodit pomocí goniometrických funkcí. Pomocí vzorce:

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

můžeme libovolně mnohokrát rozložit sinus.

$$\begin{aligned} \sin x &= 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = 2 \left(2 \sin \frac{x}{2 \cdot 2} \cos \frac{x}{2 \cdot 2} \right) \cos \frac{x}{2} = \\ &= 2^3 \sin \frac{x}{2^3} \cos \frac{x}{2^3} \cos \frac{x}{2^2} \cos \frac{x}{2} \end{aligned} \quad (17)$$

Již ve 3. rozkladu je vidět obecný vzorec pro rozklad (rovnice 11).

$$\sin x = 2^n \sin \frac{x}{2^n} \prod_{i=1}^n \cos \frac{x}{2^i} \Rightarrow \prod_{i=1}^n \cos \frac{x}{2^i} = \frac{\sin x}{2^n \sin \frac{x}{2^n}} \quad (18)$$

Pravou stranu nově vzniklé rovnice rozšíříme o $\frac{x}{x}$.

$$\prod_{i=1}^n \cos \frac{x}{2^i} = \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\frac{x}{2^n}}{\sin \frac{x}{2^n}} \quad (19)$$

Další úpravy budou za podmínky, že n se bude limitně blížit nekonečnu. A protože

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{x}{2^n}}{\sin \frac{x}{2^n}} = 1,$$

$$\frac{\sin x}{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^n \cos \frac{x}{2^i}. \quad (20)$$

Když za x dosadíme $\frac{\pi}{2}$, vyjde nám:

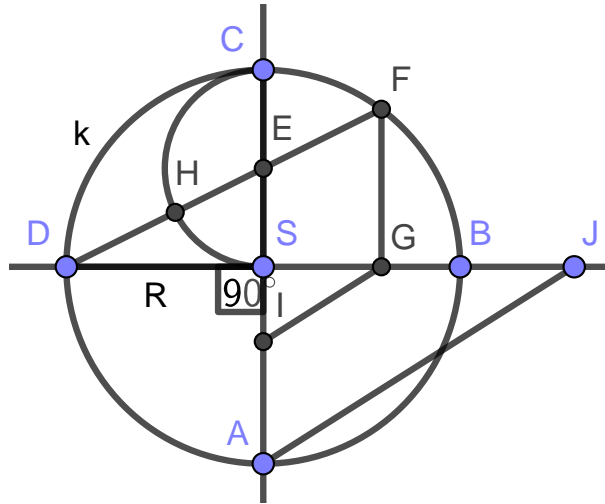
$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}} \cdot \dots, \quad (21)$$

což lze upravit na rovnici 10. Z té samé rovnice lze vyjádřit i samotné π .

$$\pi = 2 \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} \cdot \dots$$

François Viète během svého života spočítal π na 9 desetinných míst, ale použil k tomu Archimédův algoritmus [11].

Kromě toho to algoritmu publikoval v tomtéž díle také geometrickou aproximaci π (obrázek X). Na obrázku je kružnice o_k se středem S a poloměrem R nebo-li SA , úsečka AI , která je



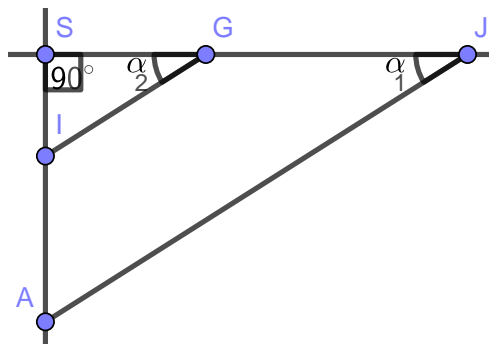
Obrázek 14: Viětova geometrická aproximace

stejně dlouhá jako úsečka DH a dvě rovnoběžné přímky: IG a AJ . Obvod kružnice o_k je přibližně $4SJ$. Pomocí zmíněné aproximací můžeme dopočítat přibližnou hodnotu π .

Protože podle věty uu je trojúhelník SIG podobný trojúhelníku SAJ , můžeme napsat, že

$$\frac{|SI|}{|SA|} = \frac{|SG|}{|SJ|} \Rightarrow |SJ| = \frac{|SA| \cdot |SG|}{|SI|}$$

To lze dokázat pomocí obrázku XX, kde platí:



Obrázek 15: Pravoúhlý trojúhelník SIG a SAJ

$$|SI| = |SG| \operatorname{tg} \alpha$$

$$|SA| = |SJ| \operatorname{tg} \alpha$$

První rovnici můžeme vydělit tou druhou a dostaneme:

$$\frac{|SI|}{|SA|} = \frac{|SG|}{|SJ|}$$

π se dá pak vyjádřit:

$$\pi = \frac{o_k}{2R} = \frac{4|SJ|}{2R} = \frac{2 \frac{|SA| \cdot |SG|}{|SI|}}{R} = \frac{2 \frac{R \cdot |SG|}{|SI|}}{R} = 2 \frac{|SG|}{|SI|}$$

K výpočtu SI použijeme délku úsečky DE z trojúhelníku DSE . Podle Pythagorovy věty

$$|DE|^2 = |DS|^2 + |SE|^2 = R^2 + \left(\frac{1}{2}R\right)^2 = R^2 + \frac{1}{4}R^2 = \frac{5}{4}R^2 \Rightarrow |DE| = \frac{\sqrt{5}}{2}R$$

Dále potřebujeme délku úsečky DH .

$$|DH| = |DE| - |HE| = \frac{\sqrt{5}}{2}R - \frac{1}{2}R = \left(\frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2}\right)R$$

Nyní můžeme spočítat SI .

$$|SI| = |SA| - |AI| = |SA| - |DH| = R - \left(\frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2}\right)R = \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2}\right)R = \left(\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right)R = \frac{1}{2}(3 - \sqrt{5})R$$

Podle věty uu je trojúhelník DSE podobný s trojúhelníkem DGF , proto

$$\frac{|DG|}{|DS|} = \frac{|GF|}{|SE|} \Rightarrow \frac{|DG|}{|GF|} = \frac{|DS|}{|SE|} = \frac{R}{\frac{1}{2}R} = 2 \Rightarrow |DG| = 2|GF|$$

Úsečku DG můžeme rozdělit na dvě úsečky se společným bodem S .

$$|DG| = |DS| + |SG| \Rightarrow 2|GF| = R + |SG| \Rightarrow G = \frac{1}{2}(R + |SG|)$$

Podle Pythagorovy věty lze napsat, že

$$|SG|^2 + |GF|^2 = |SF|^2 \Rightarrow |SG|^2 + \left(\frac{1}{2}(R + |SG|)\right)^2 = R^2 \Rightarrow |SG|^2 + \frac{1}{4}(R^2 + 2R \cdot |SG| + |SG|^2) = R^2$$

Protože v tomto případě nemůže být délka záporná použijeme znaménko $+$.

$$|SG| = \frac{-R + 4R}{5} = \frac{3}{5}R$$

Nyní stačí dosadit do vzorce pro výpočet π .

$$\pi = 2 \frac{|SG|}{|SI|} = 2 \frac{\frac{3}{5}R}{\frac{1}{2}(3 - \sqrt{5})R} = \frac{12}{5(3 - \sqrt{5})} = \frac{9 + 3\sqrt{5}}{5} = \frac{3}{5}(3 + \sqrt{5})$$

Podle Vièteho geometrické aproximace přibližně vychází π 3,14164. [14]

2.3.2 Descartesův algoritmus

René Descartes (1596-1650) vymyslel nový algoritmus, který byl publikován až posmrtně v roce 1701. Spočíval v tom, že n -úhelník o poloměru o je obehán vepsanou a opsanou kružnicí o poloměrech r_n a R_n , a pomocí vzorců lze spočítat poloměry pro $2n$ -úhelníky o stejném obvodu [11].

$$r_{2n} = \frac{r_n + R_n}{2} \quad (22)$$

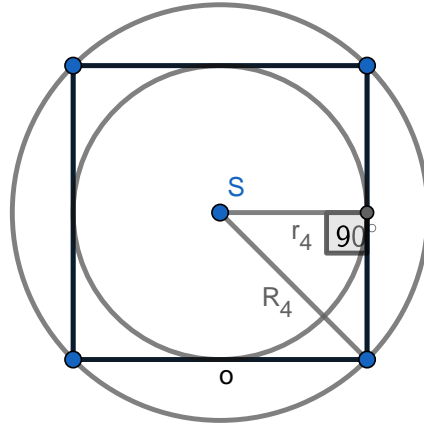
$$R_{2n} = \sqrt{\frac{R_n(r_n + R_n)}{2}} \quad (23)$$

Když použijeme vzorec pro obvod kruhu

$$o = 2\pi r \Rightarrow \pi = \frac{o}{2r},$$

můžeme π vyjádřit nerovností:

$$\frac{o}{2R_n} < \pi < \frac{o}{2r_n} \quad (24)$$



Obrázek 16: Descartesův algoritmus

2.3.3 Gregoryho algoritmus

James Gregory (1638-1675) představil v roce 1667 veřejnosti nový algoritmu založený na jednotkové kružnici opsána nebo vepsána n -úhelníkem. Algoritmus objem V a obvod o pro $2n$ -úhelník pomocí vzorců:

$$V_{2n} = \sqrt{V_n o_n} \quad (25)$$

$$o_{2n} = \frac{2V_n o_n}{V_n + V_{2n}}. \quad (26)$$

Tyto vzorce platí jak pro vepsaný, tak opsaný n -úhelník. Mezi objeme a obvodem platí vztah, že

$$V_n < \pi < o_n [11].$$

2.3.4 Willebrord Snell

Roku 1654 Christiaan Huygens (1629-1695) použil nerovnici od Willebrorda Snella (1580-1626) z roku 1621 k výpočtu přibližné hodnoty π . Nerovnice vypadala takto:

$$\frac{3 \sin \varphi}{2 + \cos \varphi} < \varphi < \operatorname{tg} \frac{\varphi}{3} + 2 \sin \frac{\varphi}{3}, \quad (27)$$

a když do ní dosadil, že $\varphi = \frac{\pi}{30}$, dostal, že π je 3,141 592 653 Přesnost byla na 9 desetinných míst [11].

Snell v roce, kdy vydal předchozí nerovnost, vydal v knize „Cyclometrius“ 2 nerovnice zvyšující účinnost Archimédovy metody. Zjistil totiž to, že v jakékoliv fázi iterování pro $n \geq 3$ je π blíže spodní hranici intervalu q_n než spodní hranici intervalu p_n (obrázek 17).



Obrázek 17: Interval z Archimédovy metody

$$\pi - p_n < q_n - \pi$$

Pro jednotlivé $n \geq 3$ pak mu vyšli 2 stálé nerovnosti.

$$\frac{q_n - \pi}{\pi - p_n} > 2, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q_n - \pi}{\pi - p_n} = 2 \quad (28)$$

$$\frac{\pi - p_n}{\pi - p_{2n}} < 4, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi - p_n}{\pi - p_{2n}} = 4 \quad (29)$$

Když tyto nerovnosti upravíme:

$$\frac{q_n - \pi}{\pi - p_n} > 2 \Rightarrow q_n - \pi > 2\pi - 2p_n \Rightarrow -3\pi > -2p_n - q_n \Rightarrow \pi < \frac{2}{3}p_n + \frac{1}{3}q_n$$

$$\frac{\pi - p_n}{\pi - p_{2n}} < 4 \Rightarrow \pi - p_n < 4\pi - 4p_{2n} \Rightarrow -3\pi < -4p_{2n} + p_n \Rightarrow \pi > \frac{4}{3}p_{2n} - \frac{1}{3}p_n,$$

získáme nerovnice pro výrazné zúžení intervalu z Archimédova algoritmu.

Snell sice tyto nerovnosti objevil, ale dokázal je až „Huygens v De circuli magnitudine inventa“ v roce 1654 [15].

2.3.5 Wallisův nekonečný součin

John Wallis (1616 – 1703 [11]) v roce 1655 v knize „Arithmetica Infinitorum“ vydává po Viètem 2. nekonečný součin a zároveň historicky 1. algoritmus pro výpočet π obsahující pouze racionální operace [1].

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot \dots}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots} \quad (30)$$

Ten lze přepsat do moderní obecnější podoby pro π .

$$\pi = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \prod_{i=1}^n \left(\frac{2i}{2i-1} \cdot \frac{2i}{2i+1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \prod_{i=1}^n \frac{4i^2}{4i^2 - 1}$$

2.3.6 Brounckerův řetězový zlomek

William Brouncker (1620-1684)

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \frac{1^2}{2 + \frac{3^2}{2 + \frac{5^2}{2 + \dots}}} \quad (31)$$

Neznáme jeho odvození, ale dochvalo se nám odvození od Leonharda Eulera z roku 1775. Jednotlivé členy Gregoryho-Leibnizovy řady rozložil:

$$\frac{\pi}{4} = 1 + 1 \left(-\frac{1}{3} \right) + 1 \left(-\frac{1}{3} \right) \left(-\frac{1}{3} \right) + 1 \left(-\frac{1}{3} \right) \left(-\frac{3}{5} \right) \left(-\frac{5}{7} \right) + \dots$$

a pomocí vzorce:

$$a_1 + a_1 a_2 + a_1 a_2 a_3 + \dots = \frac{a_1}{1 - \frac{a_2 a_3}{1 + a_2 - \frac{a_3}{1 + a_3 - \dots}}}$$

přepsal na [1]:

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1 - \frac{-\frac{1}{3}}{1 + (-\frac{1}{3}) - \frac{-\frac{3}{5}}{1 + (-\frac{3}{5}) - \dots}}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{3^2}{2 + \dots}}} \Rightarrow \frac{4}{\pi} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{3^2}{2 + \dots}}$$

Můžeme místo poslední úpravy rovnici vynásobit 4 a dostat rovnici pro samotné π :

$$\pi = \frac{4}{1 + \frac{1^2}{2 + \frac{3^2}{2 + 2 + \frac{5^2}{2 + \dots}}}} \quad (32)$$

2.3.7 Gregoryho-Leibnizova řada

Tato nekonečná řada byla objevena nezávisle 2 matematiky: v roce 1671 James Gregory a v roce 1674 Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716).

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \quad (33)$$

Gregory pomocí Cavalieriho vzorec a dlouhého dělení v integrandu dosáhl Taylorůva rozvoje pro funkci arkus tangens. Taylorův rozvoj lze dnešním zápisem zapsat takto:

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n \frac{f^{(i)}(a)}{i!} (x-a)^i$$

Protože známe hodnotu arkus tangens v bodě 0 ($\arctg(0) = 0$), můžeme tuto hodnotu dosadit za a :

$$\begin{aligned} \arctg(x) &= \frac{\arctg(a)}{1} (x-a)^0 + \frac{\frac{1}{a^2+1}}{1} (x-a)^1 + \frac{\frac{0(a^2+1)-1(2a+0)}{(a^2+1)^2}}{2} (x-a)^2 + \\ &\quad + \frac{\frac{-2(a^2+1)^2 - (-2a)2(a^2+1)2a}{(a^2+1)^4}}{6} (x-a)^3 + \dots \\ \Rightarrow \arctg(x) &= \arctg(a) + \frac{1}{a^2+1} (x-a) + \frac{-2a}{2(a^2+1)^2} (x-a)^2 + \\ &\quad + \frac{-2(a^2+1)^2 + 8a^2(a^2+1)}{6(a^2+1)^4} (x-a)^3 + \dots \\ \Rightarrow \arctg(x) &= \arctg(0) + \frac{1}{0^2+1} (x-0) + \frac{-2 \cdot 0}{2(0^2+1)^2} (x-0)^2 + \\ &\quad + \frac{-2(0^2+1)^2 + 8 \cdot 0^2(0^2+1)}{6(0^2+1)^4} (x-0)^3 + \dots \\ \Rightarrow \arctg(x) &= x + \frac{-2}{6} x^3 + \dots \Rightarrow \arctg(x) = x - \frac{x^3}{3} + \dots \end{aligned}$$

Kdybychom hned ze začátku pracovali s 8 členy namísto 4, řada by vypadala takto:

$$\arctg(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$$

Nakonec Gregory dosadil $x = 1$ a dostal řadu v rovnici 30. Po vynásobení 4 dostaneme řadu pro samotné π , která lze zapsat modernějším způsobem:

$$\pi = \lim_{n \rightarrow \infty} 4 \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i}{2i+1} \quad (34)$$

[11][1]

2.3.8 Kochaňského geometrická aproximace

Roku 1685 Adam Adamandy Kochaňski (1631 Dobrzyniu n. Wisła-1700 Teplice v Čechách [11][8]) vypočítal přibližnou hodnotu π pomocí konstrukce, která je na obrázku 7, kde platí, že $\vartheta = 30^\circ$ a úsečka CD je přibližně polovina obvodu kruhu o poloměru r .

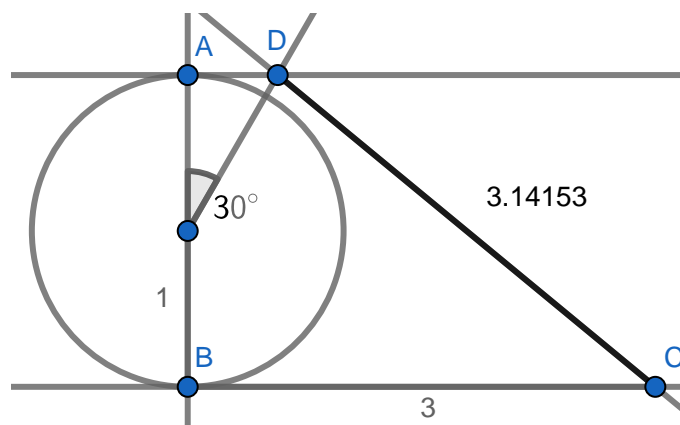
Úsečku CD lze spočítat pomocí Pythagorovi věty.

$$\begin{aligned} |CD| &= \sqrt{|AB|^2 + (|AD| - |BC|)^2} = \sqrt{(2r)^2 + (3r - r \operatorname{tg} 30^\circ)^2} = \sqrt{4r^2 + \left(3r - \frac{r}{\sqrt{3}}\right)^2} = \\ &= \sqrt{4r^2 + \frac{(3\sqrt{3} - 1)^2}{3} r^2} = r \sqrt{\frac{40 - 6\sqrt{3}}{3}} \end{aligned} \quad (35)$$

Nakonec úsečku stačí tát do vzorce pro π .

$$\pi = \frac{2r \sqrt{\frac{40 - 6\sqrt{3}}{3}}}{2r} = \sqrt{\frac{40 - 6\sqrt{3}}{3}} \quad (36)$$

Ze vzorce 11 je jasné, že Kochanski došel k hodnotě π 3,141533. [1]



Obrázek 18: Kochaňského konstrukce přibližné poloviny obvodu kruhu s daným poloměrem

2.3.9 Newtonova řada

1642-1727 [11]

2.3.10 Legendreho algoritmus

Adrien Legendry (1752-1833) v roce 1794 publikoval dílo „Éléments de géométrie“ d podobným algoritmem jako R. Decartes jen s rozdíle, že na poloměr opsaného a vepsaného $2n$ -úhelníku použil jiné vzorce [11].

$$r_{2n} = \sqrt{\frac{r_n(r_n + R_n)}{2}} \quad (37)$$

$$R_{2n} = \sqrt{r_n R_n} \quad (38)$$

Nyní stačí pro výpočet π použít vzorec 19:

$$\frac{o}{2R_n} < \pi < \frac{o}{2r_n} \quad (39)$$

2.3.11 Leonhard Euler

2.4 Moderní algoritmy s využití počítačů

3 METODA MONTE CARLO

4 SROVNÁNÍ METOD

5 ZÁVĚR

6 REFERENCE

- [1] BECKMANN, Petr. Historie čísla π . Praha: Academia, 1998. ISBN 80-200-0655-9.
- [2] THUMSHIRN, Christian. Der Schweizer, der 22,4 Billionen Dezimalstellen von π berechnet hat. Neue Zürcher Zeitung [online]. Zürich, 2017, 21.3.2017, , 1 [cit. 2018-06-21]. Dostupné z: <https://www.nzz.ch/wissenschaft/video-serie-nerdzz-der-wahrscheinlich-laengste-rekord-der-welt-ld.152445-november-2016/>
- [3] KOLMAN, Arnošt a Marcela HEDRLÍNOVÁ. Dějiny matematiky ve starověku. Praha: Academia, 1968. ISBN 978-80-87287-77-4.
- [4] Bible kralická: Písmo svaté Starého a Nového zákona : podle posledního vydání z roku 1613. 5. vyd. v ČBS. Praha: Česká biblická společnost, 2014. ISBN 978-80-87287-77-4.
- [5] BEČVÁŘ, Jindřich, Martina BEČVÁŘOVÁ a Hana VYMAZALOVÁ. Matematika ve starověku: Egypt a Mezopotámie. Praha: Prometheus, 2003. Dějiny matematiky. ISBN 80-7196-255-4.
- [6] VEJCHODSKÝ, Tomáš. Archimédův výpočet čísla π [přednáška]. Praha: Akademie věd České republiky, 11.11.2016. In: Youtube.com [online]. [vid. 17. 5. 2018]. Záznam dostupný z: <https://www.youtube.com/watch?v=8XaM9ZYxCqU>
- [7] WILLERS, Michael. Algebra bez (m)učení: Od arabských matematiků k tajným šifrám: matematika v každodenním životě : fascinující čísla a rovnice. Praha: Grada, 2012. ISBN 978-80-247-4123-9.
- [8] Adam Adamandy Kochański. In: Wikipedia: the free encyclopedia [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001- [cit. 2018-05-24]. Dostupné z: <https://en.wikipedia.org/wiki/Adam-Adamandy-Kocha%C5%84ski>
- [9] POSAMENTIER, Alfred S. a Ingmar LEHMANN. [Pi]: A Biography of the World's Most Mysterious Number. II.Title. Amherst, N.Y.: Prometheus Books, 2004. ISBN 15-910-2200-2.
- [10] BEČVÁŘ, Jindřich. Matematika ve středověké Evropě. Praha: Prometheus, 2001. Dějiny matematiky. ISBN 80-7196-232-5.
- [11] BEČVÁŘ, Jindřich, FUCHS, Eduard, ed. Matematika v 16. a 17. století: Seminář Historie matematiky III. Praha: Prometheus, 1999. ISBN 80-7196-150-7.
- [12] JÁCHIM, František. Jak viděli vesmír: [po stopách velkých astronomů]. Olomouc: Rubico, 2003. ISBN 80-85839-48-2.
- [13] BEČVÁŘOVÁ, Martina, Jindřich BEČVÁŘ, Magdalena HYKŠOVÁ, Oldřich HYKŠ, Martin MELCER, Martina ŠTĚPÁNOVÁ, Miroslava OTAVOVÁ a Irena SÝKOROVÁ. Matematika ve středověké Evropě: pozdní středověk a renesance. Praha: Česká technika - nakladatelství ČVUT, 2018. Dějiny matematiky. ISBN 978-80-01-06403-0.

- [14] FUCHS, Eduard, ed. Mathematics throughout the ages. Prague: Prometheus, 2001. History of mathematics. ISBN 80-7196-219-8.
- [15] BEČVÁŘ, Jindřich a Eduard FUCHS, ed. Matematika v proměnách věků III. Praha: Výzkumné centrum pro dějiny vědy, 2004. Dějiny matematiky. ISBN 80-728-5040-7.

7 SEZNAM OBRÁZKŮ

1	Zářezy na kostech [3]	9
2	Tabulka YBC 7302 [5]	10
3	Sít' pro aproximaci kruhu	10
4	Ptolemaiova aproximace kruhu	11
5	Kruh s opsaným a vepsaným n-úhelníkem	12
6	Jeden trojúhelník z vepsaného šestiúhelníka	12
7	Jeden trojúhelník z opsaného šestiúhelníka	13
8	1 trojúhelník z vepsaného šestiúhelníka a 2 trojúhelníky z vepsaného dvanácti- úhelníka	13
9	1 trojúhelník z opsaného šestiúhelníka a 1 trojúhelník z opsaného dvanáctiúhel- níka	14
10	Kusánského algoritmus	15
11	Výpočet poloměru vepsané kružnice osmiúhelníka	16
12	Výpočet poloměru opsané kružnice osmiúhelníka	17
13	Výpočet poloměru vepsané kružnice osmiúhelníka	17
14	Viètova geometrická aproximace	19
15	Pravoúhlý trojúhelník SIG a SAJ	19
16	Descartesův algoritmus	21
17	Interval z Archimédovy metody	21
18	Kochanského konstrukce přibližné poloviny obvodu kruhu s daným poloměrem	24

8 SEZNAM TABULEK

PŘÍLOHA A: PRVNÍ PŘÍLOHA