

ROČNÍKOVÁ PRÁCE

Gymnázium Zikmunda Wintra Rakovník, příspěvková organizace

Metody aproximace Ludolfova čísla

Methods of approximation of Archimedes' constant

Autor: Jiří Zelenka

Ročník a školní rok: C3A 2018/2019

Vedoucí práce: Mgr. Vojtěch Delong

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svou práci vypracoval samostatně a použil jsem pouze literaturu a prameny uvedené v seznamu bibliografických záznamů.

Prohlašuji, že tištěná verze a elektronická verze ročníkové práce jsou shodné.

Nemám důvod protestovat proti zpřístupňování této práce v souladu se zákonem č. 121/2000 Sb., o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon) v platném znění.

V Domoušicích dne datum

Jiří Zelenka

Poděkování

Na tomto místě můžete vložit poděkování těm, kteří vám s tvorbou práce pomohli. Poděkování je vaše autorské dílo, nemá předepsanou podobu a není povinnou součástí práce. Záleží jen na vás, zda, komu a jakým způsobem poděkujete.

Anotace

Cílem mé ročníkové práce je informovat o základních metodách aproximace Ludolfova čísla (dále jen „ π “). V práci jsem popsal historický vývoj a metody jeho výpočtu. Každou metodu zmíněnou v textu jsem otestoval v počítačové simulaci, popřípadě jsem provedl experiment vedoucí k přibližné hodnotě π . Posledním tématem, kterým jsem se zabýval, bylo využití počítačových technologií k přiblížení se skutečné hodnotě π .

Klíčová slova

Ludolfovo číslo, pí, historie, algoritmy, účinnost výpočtu

Annotation

A purpose of my work is information of basic methods of approximation of Archimedes' constant (hereinafter " π "). In work I described a historical development and methods of its calculation. Every method which I inform in the text I tested by computing simulation or I made an experiment which led to an approximate value of π . Eventually I occupy with using of computer technology for calculation π .

Keywords

Archimedes' constant, pi, history, algorithms, efficiency of calculation

OBSAH

1	Úvod	7
1.1	Důkaz transcendentnosti π	8
2	Historický vývoj odhadu π	8
2.1	Starověk	8
2.1.1	První numerické aproximace	8
2.1.2	Archimédův algoritmus	11
2.2	Středověk	15
2.2.1	Leonard Fibonacci	15
2.2.2	Mikuláš Kusánský	15
2.3	Novověk	18
2.3.1	François Viète	18
2.3.2	Descartesův algoritmus	21
2.3.3	Willebrord Snell	22
2.3.4	Wallisův nekonečný součin	23
2.3.5	Gregoryho algoritmus	23
2.3.6	Brounckerův řetězový zlomek	23
2.3.7	Gregoryho-Leibnizova řada	24
2.3.8	Kochaňského geometrická aproximace	25
2.3.9	Newtonovy řady	25
2.3.10	Sharpova řada	27
2.3.11	Leonhard Euler	27
2.3.12	Legendreho algoritmus	28

2.4	Moderní algoritmy s využití počítačů	29
3	Metoda Monte Carlo	29
4	Srovnání metod	29
4.1	Míra konvergence	29
4.2	Závislost počtu operací	30
5	Závěr	32
6	Reference	33
7	Seznam obrázků	35
8	Seznam tabulek	35
	Přílohy	37
A	První příloha	37

1 ÚVOD

Člověk již od dob, když si začal uvědomovat tvary a velikosti, si musel být vědom, že existuje jistá závislost mezi průměrem a obvodem kruhu. Nejspíš okolo 2000 př. n. l. [1] lidé ve vyspělých civilizacích začali užívat konstantu, kterou, když vynásobili průměr kruhu, dostali obvod kruhu.

Zprvu užívali hodnoty experimentálně změřené. Až ve starověku přišel Archimédes ze Syrakus s prvním algoritmem, pomocí něhož lze nalézt hodnotu konstanty s libovolnou přesností.

Vzhledem k tomu, že ve středověku nebyl téměř žádný zájem o tuto oblast matematiky, další přínosy pocházejí až z novověku. Velký posun kupředu byl objev nekonečného součtu a součinu a řetězových zlomků. Následkem toho vzniklo nespočet algoritmů, nicméně většina měla pomalou konvergenci¹.

Zdokonalování a vymýšlení nových algoritmů bylo podmíněno mírou poznatků matematiky, hlavně z oblasti teorie čísel a rovnic. Asi nejceněnější příspěvek z konce raného novověku je objev integrálů Sirem Isaacem Newtonem. Do 18. století neměla konstanta jednotné označení, až Leonhard Euler začal používat námi již známé řecké písmeno π .

Další velký rozkvět zažilo π až s příchodem počítačů v polovině 20. století. Doté doby bylo π spočítáno jen na 808 desetinných míst. Během několika let bylo vytvořeno mnoho rekordů. Ze začátku to bylo několik desítek tisíc desetinných míst. V roce 2016 bylo ve Švýcarsku π spočítáno na 22,4 biliónů desetinných míst [2].

V první části si ukážeme pomocí Lindenmannova důkazu, že π je iracionální, resp. transcendentní². Tím si objasníme, proč se nikomu v historii nepovedlo a ani nepovede konečnou metodou vyjádřit celý desetinný rozvoj.

Od další části vše už bude poskládáno chronologicky. Ukážeme si, jakou hodnotu používaly jednotlivé civilizace v Evropě a na Blízkém východě. Ve starověku ještě zůstaneme a rozebereme si Archimédův algoritmus.

Ze středověku si představíme pouze Leonarda Fibonacciho, který tento algoritmus studoval.

Čtvrtá kapitola se bude zabírat novověkem, kde si představíme Viětův a Wallisův nekonečný součin. Jedním z témat budou i řetězové zlomky, hlavně Brounckerův řetězový zlomek. Dále bude následovat Gregoryho-Leibnizova a Newtonova řada. U Newtonovy řady si podrobně popíšeme odvození, protože je to první řada, která byla odvozena pomocí integrálů. Leonharda Eulera si zmíníme nejen kvůli tomu, že dal světu symbol π , ale i on představil veřejnosti několik řad.

V předposlední části bude simulace Monte Carlo³ a s tím spojená Buffonova jehla, kterou jsem i experimentálně ověřil.

V poslední části se podíváme výpočty π na počítači a nejzajímavější rekordy.

¹Konvergence je rychlost algoritmu. Vyjadřuje, jak moc se přiblížíme skutečné hodnotě s každou další iterací (provedeným krokem).

²Transcendentní iracionální čísla nejdou vyjádřit zlomkem. Nemají totiž ukončený desetinný rozvoj a zároveň nemají periodu. Od algebraických iracionálních čísel se liší tím, že nemůže být kořenem žádné algebraické rovnice s racionálními koeficienty.

³Monte Carlo je libovolná numerická simulace využívající náhodnost. V tomto případě půjde o numerickou integraci.

1.1 Důkaz transcendentnosti π

Historicky první důkaz přinesl roku 1761 Johann Heinrich Lambert. Ten potvrdil, že π je iracionální, ale nevyvrátil, že π je algebraické. V roce 1794 Adrien-Marie Legendre dokázal, že π^2 je iracionální, a byl přesvědčen, že není algebraické iracionální číslo, ale že to půjde těžce dokázat. Až Carl Louis Ferdinand von Lindemann v roce 1882 přišel s důkazem, že π je transcendentní iracionální číslo.

Lindemannův důkaz vychází z Eulerovy identity:

$$e^{i\pi} + e^0 = 0.$$

Jestliže exponenty 0 a $i\pi$ jsou různá čísla, tak musí být navzájem lineárně nezávislá³. Podle Lindemannova–Weierstrassova teorému musí být i čísla $e^{i\pi}$ a e^0 algebraicky nezávislá. Z toho také vyplývá, že alespoň 1 exponent číslo transcendentní. Již na první pohled je jasné že 0 není transcendentní, protože může vyjít jako kořen algebraické rovnice ($x = 0$). V tom případě musí být $i\pi$ transcendentní. Aby z součinu čísel vyšlo transcendentní číslo, musí alespoň jeden činitel být také transcendentní číslo. A když lze zapsal, že:

$$i = \sqrt{-1} \Rightarrow i^2 = -1 \Rightarrow i^2 + 1 = 0,$$

musí nutně být π transcendentní [1].

2 HISTORICKÝ VÝVOJ ODHADU π

2.1 Starověk

Již před 1 000 000 let si člověk začal uvědomovat tvary, velikosti (čísla) a vztahy mezi veličinami, např.: větší kámen je těžší, starší strom je větší. Někdy v době kamenné lidé začali počítat, o čemž svědčí řezy na kostech (obr. 1). V této době člověk začal vnímat monotonní funkce⁴, např.: 2krát větší pole znamená 2krát víc úrody. Jenže to u kruh, jednoho z nepřírozenějších tvarů, neplatilo. Věděli jen, že čím větší průměr, tím větší obvod. Až někdy kolem roku 2000 př. n. l. přišli na to, že, aby tato úměra platila pro výpočet, musí průměr vynásobit konstantou, a tak začaly vznikat první aproximace π [1].

2.1.1 První numerické aproximace

Blízký východ Mezi prvními oblastmi, kde se doloženě rozvíjela matematika, bylo území Blízkého východu. Hlavně u velkých řek, jako je Eufrat a Tigris, se začaly vyvíjet první civilizace. Již od 3. tisíciletí př. n. l. se začínají objevovat první písemné prameny včetně matematiky. V roce 1936 byla nalezena přibližně 200 mil od Babylonu ve městě Susa hliněná destička, která tvrdí, že podíl obvodu pravidelného šestiúhelníku a obvodu kruhu o stejném průměru je [1]:

$$\frac{57}{60} + \frac{36}{60^2} = \frac{96}{100}$$

³Dvě čísla jsou lineárně závislá právě tehdy, když jedno jde vyjádřit jako součin druhého čísla s libovolným reálným nenulovým číslem.

⁴ $f(x) : y = x$



Obrázek 1: Záznamy na kostech [3]

Pokud víme, že obvod pravidelného šestiúhelníku o_s je šestnásobek poloměru r a že obvod kruhu o_k je poloměr krát dvojnásobek π , můžeme si vyjádřit hodnotu π .

$$\frac{o_s}{o_k} = \frac{96}{100} \Rightarrow \frac{6r}{2\pi r} = \frac{96}{100} \Rightarrow \frac{3}{\pi} = \frac{96}{100} \Rightarrow \pi = 3\frac{1}{8} \quad (1)$$

Z této destičky je jasné že v Babylonii používali za hodnotu π 3,125.

Na většině území zpravidla používali hodnotu 3 [3]. Na to poukazují památky Židů, například "První kniha královská" praví o Šalomounově paláci (kapitola 7, verš 23): "Udělal také moře slité, desíti loket od jednoho kraje k druhému, okrouhlé vůkol, a pět loket byla vysokost jeho, a okolek jeho třicíti loket vůkol." [4] nebo i samotných Babyloňanů. Na tabulce YBC 7302 ve tvaru kruhu jsou napsána čísla 3, 9 a 45, z nich jde usuzovat, že obvod je dán 3, 9 je druhá mocnina obvodu a 45 je její obsah. Tyto hodnoty se dají použít ve vzorci:

$$S = \frac{1}{12}o^2, \quad (2)$$

kde S je obsah a o je obvod [5]. Pokud si vzorec 2 rozepíšeme, dostaneme, že π je v této aproximaci 3.

$$S = \frac{1}{12}o^2 \Rightarrow \pi r^2 = \frac{1}{12}4\pi^2 r^2 \Rightarrow 1 = \frac{1}{3}\pi \Rightarrow \pi = 3$$

Egypt Matematika v Egyptě musela existovat již v 3. tisíciletí př. n. l., protože v přibližně té době probíhaly stavby pyramid a kanálů, na které byly potřeba pokročilé znalosti matematiky [3].

Roku 1858 poblíž Nilu byl nalezen Rhindův papyrus [1], který obsahuje návod na výpočet obsahu kruhu. V příkladu R50 se tvrdí, že obsah trojúhelníka S je roven $\frac{64}{81}$ druhé mocniny průměru d .

$$S = \frac{64}{81}d^2 \quad (3)$$

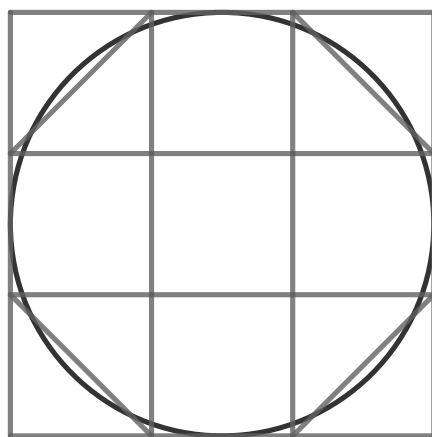


Obrázek 2: Tabulka YBC 7302 [5]

Když si vztah upravíme, dostaneme hodnotu π .

$$S = \frac{64}{81}d^2 \Rightarrow \frac{1}{4}\pi d^2 = \frac{64}{81}d^2 \Rightarrow \pi = 3\frac{13}{81}$$

Pomocí našeho vzorce pro obsah kruhu je jasné, že pro Egypťany byla hodnota π 3,16. Jak ke vzorci 3 došli, zůstává záhadou, ale mnoho historiků matematiky se přiklání, že na násobek $\frac{64}{81}$ přišli pomocí čtvercové sítě, kterou používali při projektování staveb. Když na čtvercové síti složené z 9 čtverců jako na obrázku 3 aproximujeme kruh osmiúhelníkem dostaneme, že obsah kruhu je $\frac{7}{9}$ druhé mocniny průměru kruhu. Protože $\frac{64}{81}$ snadno zapisovatelné pomocí kamenných zlomků, které se v té době hojně používaly, je možné, že $\frac{63}{81}$ nahradili $\frac{64}{81}$ [5].



Obrázek 3: Síť pro aproximaci kruhu

Řecko Na úplném vrcholu byla starověká matematika v Řecku a to hlavně díky velkému množství vědců z celé řady oborů. Do dnešní doby se v matematice používá mnoho jejich poznatků, např.: Archimédovy geometrické řady, Pythagorova věta, Euklidovy věty a Archimédův algoritmus na výpočet π , který je rozebrán v kapitole 2.2.2.

Řím Klaudios Ptolemaios, vědec žijící v Alexandrii 85-165 n. l. [12], ve své 1. knize „Almagestu“ sestavil tabulku tětiv (sinů). Funkci sinus značí jako $\text{chrd } \alpha$. K určení základních hodnot užívá do té doby již známých znalostí z matematiky. Pro získání malých úhlů odvodil vzorec pro chrd polovičního úhlu:

$$\text{chrd}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \text{chrd } (180^\circ - \alpha)}{2},$$

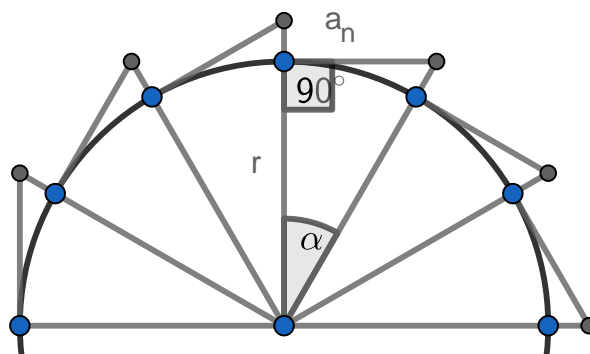
který lze zapsat dnešním zápisem jako:

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}.$$

Po úpravě lze dostat algoritmus pro poloviční úhel:

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \sqrt{1 - \sin \alpha}}{2}}. \quad (4)$$

Když se dostal až na 1° využil novou goniometrickou funkci aproximaci obvodu kruhu o , kterou lze vidět na obrázku 4. Tato aproximace by šla zapsat dnešním moderním zápisem takto:



Obrázek 4: Ptolemaiova aproximace kruhu

$$o = \lim_{n \rightarrow \infty} nr \sin \left(\frac{360^\circ}{n} \right),$$

když to vložíme do vzorce pro π :

$$\pi = \frac{o}{2r},$$

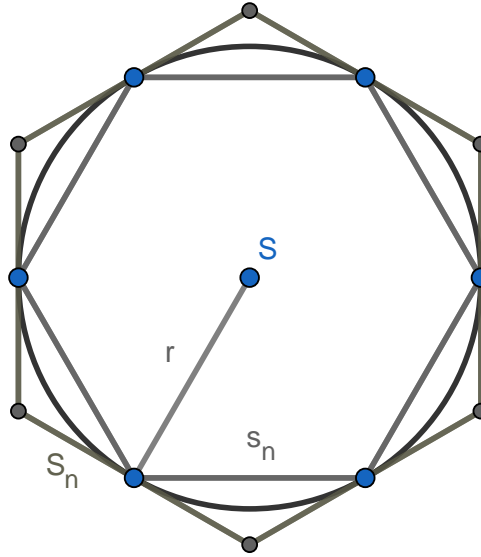
dostaneme, že:

$$\pi = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \sin \left(\frac{360^\circ}{n} \right)}{2}. \quad (5)$$

Ptolemaios pro $\alpha = 1^\circ$ ($n = 360$) dostal hodnotu π 3,14166. Důvod, proč nedostal hodnotu 3,14143, je, že během svého výpočtu $\text{chrd } 1^\circ$ pomocí vzorce 4 zaokrouhloval [3].

2.1.2 Archimédův algoritmus

Archimédes (287-212 př. n. l.[3]) použil k výpočtu π úvahu, že obvod vepsaného pravidelného n -úhelníku o_n je menší než obvod kruhu o_k a že obvod opsaného pravidelného n -úhelníku O_n je menší než obvod kruhu:



Obrázek 5: Kruh s opsaným a vepsaným n-úhelníkem

$$o_n < o_k < O_n$$

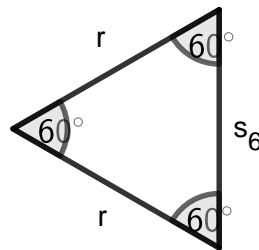
$$ns_n < 2\pi r < nS_n$$

$$\frac{ns_n}{2r} < \pi < \frac{nS_n}{2r}, \quad (6)$$

kde n je počet vrcholů/stran, r je poloměr kružnice, s_n je délka strany vepsaného n -úhelníku a S_n je délka strany opsaného n -úhelníku [1].

Princip tohoto algoritmu je ten, že čím více bude mít n -úhelník vrcholů, tím více bude opisovat kruh a tím bude menší interval.

Archimédes začal výpočet na snadno spočítatelném šestiúhelníku, kde délka strany vepsaného šestiúhelníka je poloměr kružnice⁵, pro jednoduchost výpočtu zavedeme jednotkový poloměr ($r = 1$).



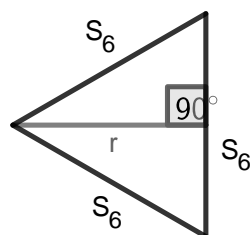
Obrázek 6: Jeden trojúhelník z vepsaného šestiúhelníka

$$s_6 = r \Rightarrow s_6 = 1$$

Délka stany opsaného šestiúhelníka jde vypočítat pomocí Pythagorovy věty.

$$S_6^2 = r^2 + \left(\frac{S_6}{2}\right)^2 \Rightarrow 4S_6^2 = 4r^2 + S_6^2 \Rightarrow S_6^2 = \frac{4}{3}r^2 \Rightarrow S_6 = \frac{2\sqrt{3}}{3}r$$

⁵Pravidelný šestiúhelník se skládá z šesti rovnostranných trojúhelníků. To znali již Babyloňané[1].

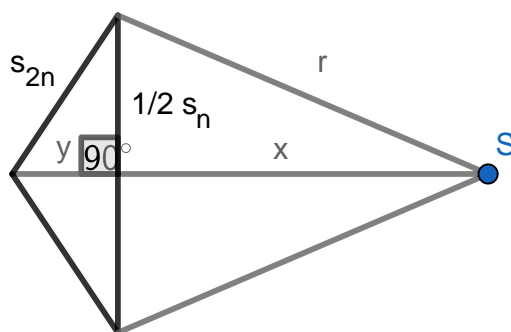


Obrázek 7: Jeden trojúhelník z opsaného šestiúhelníka

$$\Rightarrow s_6 = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Když se hodnoty s_6 a S_6 vloží do vztahu 4, vyjde, že $3 < \pi < 2\sqrt{3}$. Archimédes u této hodnoty nevydržel, a tak počítal dál, ale, protože pro víceúhelníky není výpočet tak jednoduchý⁶, odvodil si vztah pro $2n$ -úhelníky.

Z obrázku 8 můžu sestavit soustavu 3 rovnic, ze kterých se dá vyjádřit s_{2n} :



Obrázek 8: 1 trojúhelník z vepsaného šestiúhelníka a 2 trojúhelníky z vepsaného dvanáctiúhelníka

1. Protože se jedná o mnohoúhelník vepsaný, vrcholy budou ležet vždy n kružnici ve vzdálenosti r od středu S .

$$r = x + y$$

2. Pro pravý trojúhelník z obrázku 8 podle Pythagorovy věty platí, že:

$$r^2 = x^2 + \left(\frac{1}{2}s_n\right)^2 = x^2 + \frac{1}{4}s_n^2.$$

3. Pro levý trojúhelník z obrázku 8 podle Pythagorovy věty platí, že:

$$s_{2n}^2 = y^2 + \left(\frac{1}{2}s_n\right)^2 = y^2 + \frac{1}{4}s_n^2.$$

Celá soustava se dá upravit a dá se z ní vyjádřit s_{2n} . (Jednotlivé rovnice soustavy rovnic jsou zapsány ve sloupcích pod sebou a jednotlivé kroky úprav jsou vždy mezi sloupci doprava.)

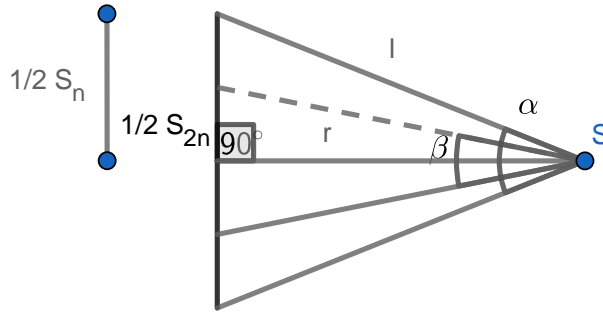
⁶Za Archyméda nebyly známy goniometrické funkce. První, kdo určil jejich hodnoty, byl Ptolemaios. [3]

$$\begin{array}{lll}
x + y = r & x + y = 1 & y = 1 - x \\
x^2 + \frac{s_n^2}{4} = r^2 & x^2 + \frac{s_n^2}{4} = 1 & x = \sqrt{1 - \frac{s_n^2}{4}} \\
y^2 + \frac{s_n^2}{4} = s_{2n}^2 & y^2 + \frac{s_n^2}{4} = s_{2n}^2 & y^2 + \frac{s_n^2}{4} = s_{2n}^2
\end{array}$$

$$(1-x)^2 + \frac{s_n^2}{4} = s_{2n}^2 \Rightarrow 1 - 2x + x^2 + \frac{s_n^2}{4} = s_{2n}^2 \Rightarrow 1 - 2\sqrt{1 - \frac{s_n^2}{4}} + 1 - \frac{s_n^2}{4} + \frac{s_n^2}{4} = s_{2n}^2$$

$$\Rightarrow s_{2n}^2 = 2 - 2\sqrt{1 - \frac{s_n^2}{4}} \Rightarrow s_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - s_n^2}} \quad (7)$$

Z obrázku 9 je patrné, že když se zpoloviční úhel α na úhel β (zdvojnásobení počtu vrcholů)



Obrázek 9: 1 trojúhelník z opsaného šestiúhelníka a 1 trojúhelník z opsaného dvanáctiúhelníka

musí platit:

$$\frac{\frac{1}{2}S_{2n}}{\frac{1}{2}(S_n - S_{2n})} = \frac{r}{l},$$

protože v libovolném trojúhelníku je poměr libovolných dvou stran svírající úhel φ stejný jako poměr úseček ve zbývajících straně osou úhlu φ dělic. Pomocí Pythagorovy věty lze spočítat stranu l .

$$l = \sqrt{r^2 + \left(\frac{1}{2}S_n\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{1}{4}S_n^2}$$

Nyní stačí dosadit a vyjádřit S_{2n} [6].

$$\begin{aligned}
\frac{\frac{1}{2}S_{2n}}{\frac{1}{2}(S_n - S_{2n})} &= \frac{r}{\sqrt{r^2 + \frac{1}{4}S_n^2}} \Rightarrow \frac{S_{2n}}{S_n - S_{2n}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{4}S_n^2}} \\
\Rightarrow \frac{S_{2n}}{S_{2n}(\frac{S_n}{S_{2n}} - 1)} &= \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{4}S_n^2}} \Rightarrow \frac{S_n}{S_{2n}} - 1 = \sqrt{1 + \frac{1}{4}S_n^2} \\
\Rightarrow S_{2n} &= \frac{S_n}{1 + \sqrt{1 + \frac{1}{4}S_n^2}} \Rightarrow S_{2n} = \frac{2S_n}{2 + \sqrt{4 + S_n^2}} \quad (8)
\end{aligned}$$

Tímto postupem došel až k 96-úhelníku a vypočítal, že $3\frac{10}{71} < \pi < \frac{1}{7}$, neboli $3.1408 < \pi < 3.1429$. Ve výpočtu musel odmocňovat, např: $\sqrt{3} \approx \frac{265}{153}$, ale dodnes se neví jak to udělal.

Je možné, že Archimédes šel později ještě dál, protože v roce 1896 v Istanbulu byla nalezena Metrika z roku 60 př. n. l. od Herona z Alexandrie (10-70 n. l. [7]), kde se Heron odvolává na Archiméda s tím, že $3.1416 < \pi < 3.1738$. Chyba v horním intervalu vznikla asi opisem originálu. [1]

2.2 Středověk

Vzhledem k tomu, že během středověku probíhal souboj vědy a náboženství a starověké poznatky stačily, došlo v řadě vědeckých disciplín, včetně matematiky, k útlumu. Jediný, kdo se v této době zabýval π byl Leonardo Fibonacci a Mikuláš Kusánský. [1] [12]

2.2.1 Leonard Fibonacci

Leonardo z Pizy/Fibonacci (1180-1250) použil ke svému výpočtu π Archimédovu metodu. Pomocí decimální aritmetiky, která ještě za Archiméda nebyla známá, došel u 96-úhelníku k nerovnosti $\frac{1440}{458\frac{4}{9}} < \pi < \frac{1440}{458\frac{1}{5}}$. Když se z mezních hodnot udělá průměr:

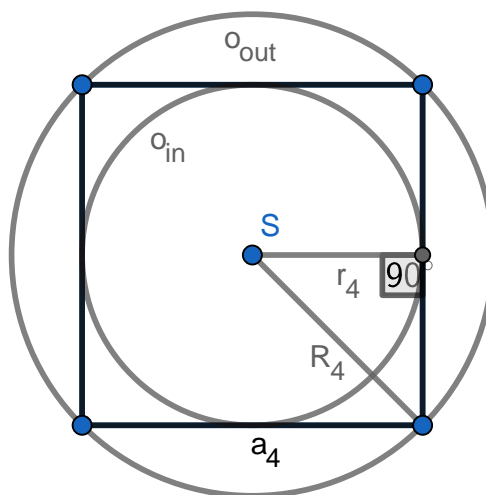
$$\frac{\frac{4}{9} + \frac{1}{5}}{2} = \frac{29}{90} \doteq \frac{1}{3},$$

vyjde Fibonacciho hodnota $\pi \frac{864}{275} \approx 3,141818$. [1] [10]

2.2.2 Mikuláš Kusánský

Mikuláš Kusánský (1401-1464) byl německý filosof, teolog, diplomat, matematik a kardinál v Římě. Objevil novou „sendvičovou“ metodu pro výpočet π . Vzal si pravidelný n-úhelník s obvodem 2, který byl vepsán a opsán kružnicemi (obr. 10), a zdvojnásobováním úhlů v mnohoúhelník o stejném obvodu zpřesňoval krajní intervaly výpočtů π .

Začal na čtverci o straně a_4 , která se rovnala $\frac{1}{2}$. Poloměr vepsané kružnice r_n je polovina strany



Obrázek 10: Kusánského algoritmus

čtverce, tj. $\frac{1}{4}$. Poloměr opsané kružnice R_n lze spočítat pomocí Pythagorovy věty.

$$R_4 = \sqrt{r_4^2 + \left(\frac{a_4}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{1}{16}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

Když znal poloměr vepsané a opsané kružnice, začal iterovat pomocí jeho nalezených vzorců pro obvody kružnic v $2n$ -úhelníku.

$$r_{2n} = \frac{R_n + r_n}{2} \quad (9)$$

$$R_{2n} = \sqrt{R_n r_{2n}} \quad (10)$$

Jak již bylo zmíněno, obvod opsané o_{in} a vepsané o_{out} kružnice tvoří meze intervalu, ve kterém se nachází obvod n -úhelníka o . Interval lze rozepsat do dvou nerovností.

$$\begin{aligned} o_{in} < o &\Rightarrow 2\pi r_n < o \Rightarrow \pi < \frac{2}{2r_n} \Rightarrow \pi < \frac{1}{r_n} \\ o < o_{out} &\Rightarrow o < 2\pi R_n \Rightarrow \frac{2}{2R_n} < \pi \Rightarrow \frac{1}{R_n} < \pi \end{aligned}$$

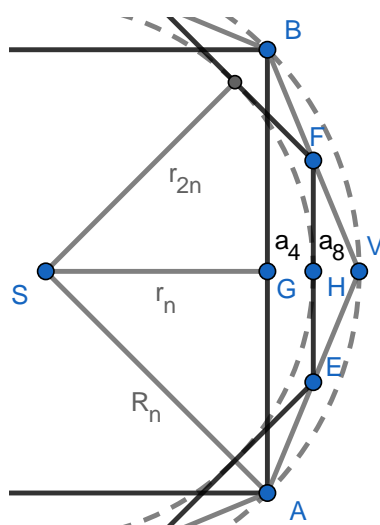
Z předchozích dvou nerovností lze udělat jednu nerovnost.

$$\frac{1}{R_n} < \pi < \frac{1}{r_n} \quad (11)$$

Kdyby nezvolil obvod n -úhelníku 2 ale libovolný jiný o , dostal by nerovnost pro výpočet π :

$$\frac{o}{2R_n} < \pi < \frac{o}{2r_n}$$

Kusánský přišel ke vzorci 9 tak, že sestrojil konstrukci, v které je čtyř a osmiúhelník o stejné obvodu (obr. 11), takže platí, že:



Obrázek 11: Výpočet poloměru vepsané kružnice osmiúhelníka

$$|AB| = 2|EF| \Rightarrow a_4 = 2a_8.$$

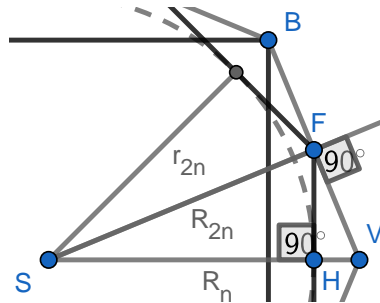
Z tohoto tvrzení, pak vyplývá, že bod H , který je od středu S vzdálen jako poloměr vepsané kružnice $2n$ -úhelníku⁷, je přesně uprostřed mezi G a V , což jde si ověřit tak, že vezmeme pravoúhlý trojúhelník GVH , který bude mít úhel α při vrcholu V , a pomocí funkce tangens zapíšeme rovnici:

$$\begin{aligned}\tan\left(\frac{|BG|}{|GV|}\right) &= \tan\left(\frac{|FH|}{|HV|}\right) \Rightarrow \frac{|BG|}{|GV|} = \frac{|FH|}{|HV|} \Rightarrow \frac{\frac{1}{2}a_4}{|GV|} = \frac{\frac{1}{2}a_8}{|HV|} \\ &\Rightarrow \frac{2}{|GV|} = \frac{1}{|HV|} \Rightarrow |GV| = 2|HV|.\end{aligned}$$

Tedy stačí délky poloměrů zprůměrovat.

$$|SH| = \frac{|SG| + |SV|}{2} \Rightarrow r_{2n} = \frac{R_n + r_n}{2}$$

Vzorec 10 vychází z Eukleidovy věty o odvěsně (obráz. 12) [9], kde:



Obrázek 12: Výpočet poloměru opsané kružnice osmiúhelníka

$$|SF|^2 = |SV||SH| \Rightarrow |SF| = \sqrt{|SV||SH|} \Rightarrow R_{2n} = \sqrt{R_n r_{2n}}.$$

Kusánský se ještě před objevením tohoto algoritmu zabýval geometrickým přiblížením k obvodu kruhu. Vymyslel hned několik přiblížení. Pravděpodobně nejpresnější se nachází v knize „Dialogus de circuli quadratura“ z roku 1457, která je na obrázku 13. V konstrukci na obrázku hledá přiblížení obvodu o_k kružnice k se středem v bodě S a poloměrem r . Kružnice protínají kolmé přímky v bodech A, B, C a D se společným bodem S . Dále narýsoval kružnici l s poloměrem R , který se rovná:

$$R = \frac{r + |AB|}{2} = \frac{r + \sqrt{r^2 + r^2}}{2} = \frac{r + \sqrt{2}r}{2} = \frac{r(1 + \sqrt{2})}{2}$$

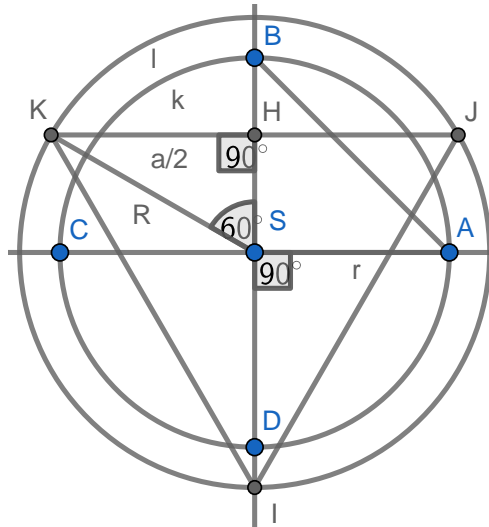
Na kružnici l umístil bod K tak, aby platilo, že úhel BSK je 60° . Nakonec vepsal do kružnice l rovnostranný trojúhelník IJK se stranou a . Strana a se rovná:

$$\sin 60^\circ = \frac{\frac{a}{2}}{R} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a}{2R} \Rightarrow a = \frac{2R\sqrt{3}}{2} \Rightarrow a = \frac{r(\sqrt{3} + \sqrt{6})}{2}$$

Když oba obvody porovnáme, zjistíme přibližnou hodnotu π [13].

$$\begin{aligned}o_k = o_{\triangle IJK} &\Rightarrow 2\pi r = 3a \Rightarrow 2\pi r = \frac{3r(\sqrt{3} + \sqrt{6})}{2} \Rightarrow \pi = \frac{3(\sqrt{3} + \sqrt{6})}{4} \\ &\pi \approx 3,136\end{aligned}$$

⁷ v tomto případě osmiúhelníku



Obrázek 13: Výpočet poloměru vepsané kružnice osmiúhelníka

2.3 Novověk

Konec 15. století a začátek 16. století byl ve znamení zámořských cest. Z tohoto důvodu byl požadavek na přesnější měřicí přístroje, což mělo za následek rozvoj přírodních věd včetně matematiky. [1]

2.3.1 François Viète

François Viète (1540–1603) jako vymysle algoritmus na výpočet π založený na nekonečném součinu (vzorec 12).

$$\frac{2}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2} \cdot \dots \quad (12)$$

Vydal ho v knize „Variorum de rebus mathematicis responsorum, liber VIII“ v roce 1593. [1] Tento lze snadno odvodit pomocí goniometrický funkcí. Pomocí vzorce:

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

můžeme libovolně mnohokrát rozložit sinus.

$$\begin{aligned} \sin x &= 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = 2 \left(2 \sin \frac{x}{2 \cdot 2} \cos \frac{x}{2 \cdot 2} \right) \cos \frac{x}{2} = \\ &= 2^3 \sin \frac{x}{2^3} \cos \frac{x}{2^3} \cos \frac{x}{2^2} \cos \frac{x}{2} \end{aligned}$$

Již ve 3. rozkladu je vidět obecný vzorec pro rozklad.

$$\sin x = 2^n \sin \frac{x}{2^n} \prod_{i=1}^n \cos \frac{x}{2^i} \Rightarrow \prod_{i=1}^n \cos \frac{x}{2^i} = \frac{\sin x}{2^n \sin \frac{x}{2^n}}$$

Pravou stranu nově vzniklé rovnice rozšíříme o $\frac{x}{x}$.

$$\prod_{i=1}^n \cos \frac{x}{2^i} = \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\frac{x}{2^n}}{\sin \frac{x}{2^n}} \quad (13)$$

Další úpravy budou za podmínky, že n se bude limitně blížit nekonečnu. A protože

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{x}{2^n}}{\sin \frac{x}{2^n}} = 1,$$

$$\frac{\sin x}{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^n \cos \frac{x}{2^i}. \quad (14)$$

Když za x dosadíme $\frac{\pi}{9}$, vyjde nám:

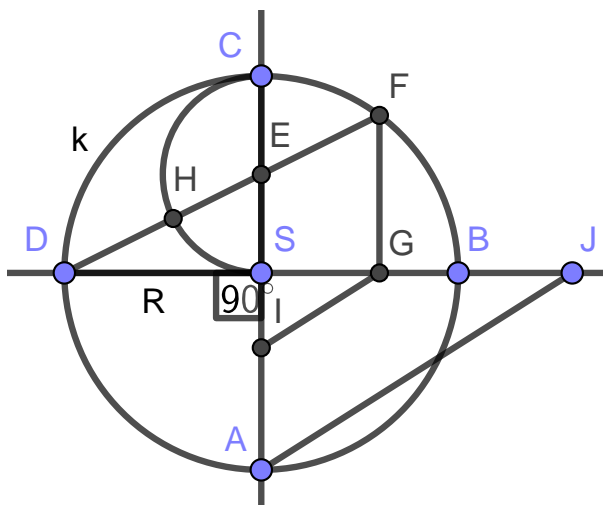
$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}} \cdot \dots, \quad (15)$$

čož lze upraviť na rovnici 12. Z té samé rovnice lze vyjádřit i samotné π .

$$\pi = 2 \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2 + \sqrt{2}}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}} \cdot \dots$$

François Viète během svého života spočítal π na 9 desetinných míst, ale použil k tomu Archimédův algoritmus [11].

Kromě toho to algoritmu publikoval v tomtéž díle také geometrickou aproximaci π (obrázek



Obrázek 14: Viètova geometrická aproximace

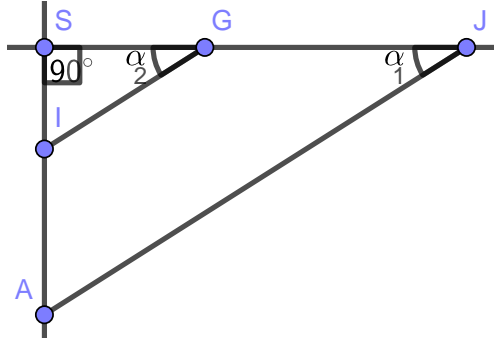
14). Na obrázku je kružnice o_k se středem S a poloměrem R nebo-li SA , úsečka AI , která je stejně dlouhá jako úsečka DH a dvě rovnoběžné přímky: IG a AJ . Obvod kružnice o_k je přibližně $4SJ$. Pomocí zmíněné aproximací můžeme dopočítat přibližnou hodnotu π .

Protože podle věty uuu je trojúhelník SIG podobný trojúhelníku SAJ, můžeme napsat, že

$$\frac{|SI|}{|SA|} = \frac{|SG|}{|SJ|} \Rightarrow |SJ| = \frac{|SA| \cdot |SG|}{|SI|}$$

To lze dokázat pomocí obrázku 15, kde platí:

$$|SI| = |SG| \tan \alpha$$



Obrázek 15: Pravoúhlý trojúhelník SIG a SAJ

$$|SA| = |SJ| \tan \alpha$$

První rovnici můžeme vydělit tou druhou a dostaneme:

$$\frac{|SI|}{|SA|} = \frac{|SG|}{|SJ|}$$

π se dá pak vyjádřit:

$$\pi = \frac{o_k}{2R} = \frac{4|SJ|}{2R} = \frac{2 \frac{|SA| \cdot |SG|}{|SI|}}{R} = \frac{2 \frac{R \cdot |SG|}{|SI|}}{R} = 2 \frac{|SG|}{|SI|}$$

K výpočtu SI použijeme délku úsečky DE z trojúhelníku DSE . Podle Pythagorovy věty

$$|DE|^2 = |DS|^2 + |SE|^2 = R^2 + \left(\frac{1}{2}R\right)^2 = R^2 + \frac{1}{4}R^2 = \frac{5}{4}R^2 \Rightarrow |DE| = \frac{\sqrt{5}}{2}R$$

Dále potřebujeme délku úsečky DH .

$$|DH| = |DE| - |HE| = \frac{\sqrt{5}}{2}R - \frac{1}{2}R = \left(\frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2}\right)R$$

Nyní můžeme spočítat SI .

$$\begin{aligned} |SI| &= |SA| - |AI| = |SA| - |DH| = R - \left(\frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2}\right)R = \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2}\right)R = \\ &= \left(\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right)R = \frac{1}{2}(3 - \sqrt{5})R \end{aligned}$$

Podle věty uuu je trojúhelník DSE podobný s trojúhelníkem DGF , proto

$$\frac{|DG|}{|DS|} = \frac{|GF|}{|SE|} \Rightarrow \frac{|DG|}{|GF|} = \frac{|DS|}{|SE|} = \frac{R}{\frac{1}{2}R} = 2 \Rightarrow |DG| = 2|GF|$$

Úsečku DG můžeme rozdělit na dvě úsečky se společným bodem S .

$$|DG| = |DS| + |SG| \Rightarrow 2|GF| = R + |SG| \Rightarrow G = \frac{1}{2}(R + |SG|)$$

Podle Pythagorovy věty lze napsat, že

$$\begin{aligned}
 |SG|^2 + |GF|^2 &= |SF|^2 \Rightarrow |SG|^2 + \left(\frac{1}{2}(R + |SG|)\right)^2 = R^2 \\
 \Rightarrow |SG|^2 + \frac{1}{4}(R^2 + 2R \cdot |SG| + |SG|^2) - R^2 &= 0 \\
 \Rightarrow 4|SG|^2 + R^2 + 2R \cdot |SG| + |SG|^2 - 4R^2 &= 0 \Rightarrow 5|SG|^2 + 2R \cdot |SG| - 3R^2 = 0 \\
 \Rightarrow |SG| &= \frac{-2R \pm \sqrt{4R^4 + 60R^2}}{10} = \frac{-2R \pm 8R}{10} = \frac{-R \pm 4R}{5}
 \end{aligned}$$

Protože v tomto případě nemůže být délka záporná použijeme znaménko +.

$$|SG| = \frac{-R + 4R}{5} = \frac{3}{5}R$$

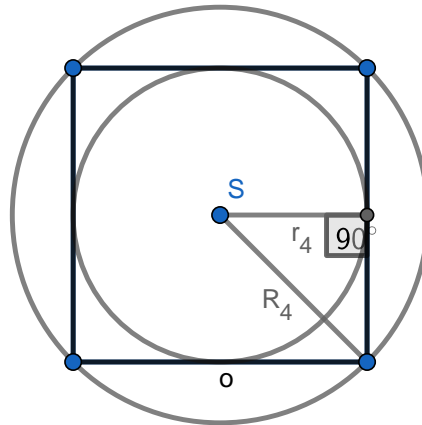
Nyní stačí dosadit do vzorce pro výpočet π .

$$\pi = 2 \frac{|SG|}{|SI|} = 2 \frac{\frac{3}{5}R}{\frac{1}{2}(3 - \sqrt{5})R} = \frac{12}{5(3 - \sqrt{5})} = \frac{9 + 3\sqrt{5}}{5} = \frac{3}{5}(3 + \sqrt{5})$$

Podle Vièteho geometrické aproximace přibližně vychází π 3,14164. [14]

2.3.2 Descartesův algoritmus

René Descartes (1596-1650), francouzský matematik a filosof, který dal světu kartézskou soustavu souřadnic a racionalistickou filosofii, která dala základ klasicismu, vymyslel nový algoritmus, který byl publikován až posmrtně v roce 1701. Spočíval v tom, že n -úhelník o poloměru o je obehán vepsanou a opsanou kružnicí o poloměrech r_n a R_n (obrázek 16), a pomocí vzorců lze spočítat poloměry pro $2n$ -úhelníky o stejném obvodu [11] [17].



Obrázek 16: Descartesův algoritmus

$$r_{2n} = \frac{r_n + R_n}{2} \quad (16)$$

$$R_{2n} = \sqrt{\frac{R_n(r_n + R_n)}{2}} \quad (17)$$

Když použijeme vzorec pro obvod kruhu

$$o = 2\pi r \quad \Rightarrow \quad \pi = \frac{o}{2r},$$

můžeme π vyjádřit nerovností:

$$\frac{o}{2R_n} < \pi < \frac{o}{2r_n} \quad (18)$$

2.3.3 Willebrord Snell

Roku 1654 Christiaan Huygens (1629-1695) použil nerovnici od Willebrorda Snella (1580-1626) z roku 1621 k výpočtu přibližné hodnoty π . Nerovnice vypadala takto:

$$\frac{3 \sin \varphi}{2 + \cos \varphi} < \varphi < \tan \frac{\varphi}{3} + 2 \sin \frac{\varphi}{3}, \quad (19)$$

a když do ní dosadil, že $\varphi = \frac{\pi}{30}$, dostal, že π je 3,141 592 653 Přesnost byla na 9 desetinných míst [11].

Snell v roce, kdy vydal předchozí nerovnost, vydal v knize „Cyclometrius“ 2 nerovnice zvyšující účinnost Archimédovy metody. Zjistil totiž to, že v jakékoliv fázi iterování pro $n \geq 3$ je π blíže spodní hranici intervalu q_n než spodní hranici intervalu p_n (obrázek 17).



Obrázek 17: Interval z Archimédovy metody

$$\pi - p_n < q_n - \pi$$

Pro jednotlivé $n \geq 3$ pak mu vyšli 2 stálé nerovnosti.

$$\frac{q_n - \pi}{\pi - p_n} > 2, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q_n - \pi}{\pi - p_n} = 2 \quad (20)$$

$$\frac{\pi - p_n}{\pi - p_{2n}} < 4, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi - p_n}{\pi - p_{2n}} = 4 \quad (21)$$

Když tyto nerovnosti upravíme:

$$\frac{q_n - \pi}{\pi - p_n} > 2 \quad \Rightarrow \quad q_n - \pi > 2\pi - 2p_n \quad \Rightarrow \quad -3\pi > -2p_n - q_n \quad \Rightarrow \quad \pi < \frac{2}{3}p_n + \frac{1}{3}q_n$$

$$\frac{\pi - p_n}{\pi - p_{2n}} < 4 \quad \Rightarrow \quad \pi - p_n < 4\pi - 4p_{2n} \quad \Rightarrow \quad -3\pi < -4p_{2n} + p_n \quad \Rightarrow \quad \pi > \frac{4}{3}p_{2n} - \frac{1}{3}p_n,$$

získáme nerovnice pro výrazné zúžení intervalu z Archimédova algoritmu.

Snell sice tyto nerovnosti objevil, ale dokázal je až „Huygens v De circuli magnitudine inventa“ v roce 1654 [15].

2.3.4 Wallisův nekonečný součin

John Wallis (1616 – 1703 [11]) v roce 1655 v knize „Arithmetica Infinitorum“ vydává po Viètem 2. nekonečný součin a zároveň historicky 1. algoritmus pro výpočet π obsahující pouze racionální operace [1].

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot \dots}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots} \quad (22)$$

Ten lze přepsat do moderní obecnější podoby pro π .

$$\pi = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \prod_{i=1}^n \left(\frac{2i}{2i-1} \cdot \frac{2i}{2i+1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \prod_{i=1}^n \frac{4i^2}{4i^2-1} \quad (23)$$

2.3.5 Gregoryho algoritmus

James Gregory (1638-1675) představil v roce 1667 veřejnosti nový algoritmu založený na kružnici o poloměru r opsané a vepsané n -úhelníkem (obrázek 5). Algoritmus počítá obsah vepsaného s a opsaného S $2n$ -úhelníka pomocí vzorců [11]:

$$s_{2n} = \sqrt{s_n S_n} \quad (24)$$

$$S_{2n} = \frac{2s_n S_n}{s_n + s_{2n}}. \quad (25)$$

Když upravíme vzorec pro výpočet obsahu kruhu, dostaneme:

$$S = \pi r^2 \quad \Rightarrow \quad \pi = \frac{S}{r^2},$$

proto můžeme napsat, že obsah vepsaného s a opsaného S $2n$ -úhelníka pomocí vzorců [11]:

$$\frac{s_n}{r^2} < \pi < \frac{S_n}{r^2}. \quad (26)$$

2.3.6 Brounckerův řetězový zlomek

William Brouncker (1620-1684) objevil nový řetězový zlomek na výpočet π .

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \frac{1^2}{2 + \frac{3^2}{2 + \frac{5^2}{2 + \dots}}} \quad (27)$$

Neznáme jeho odvození, ale dochvalo se nám odvození od Leonharda Eulera z roku 1775. Jednotlivé členy Gregoryho-Leibnizovy řady rozložil:

$$\frac{\pi}{4} = 1 + 1 \left(-\frac{1}{3} \right) + 1 \left(-\frac{1}{3} \right) \left(-\frac{1}{5} \right) + 1 \left(-\frac{1}{3} \right) \left(-\frac{3}{5} \right) \left(-\frac{5}{7} \right) + \dots$$

a pomocí vzorce:

$$a_1 + a_1 a_2 + a_1 a_2 a_3 + \dots = \frac{a_1}{1 - \frac{a_2}{1 + a_2 - \frac{a_3}{1 + a_3 - \dots}}}$$

přepsal na [1]:

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1 - \frac{-\frac{1}{3}}{1 + (-\frac{1}{3}) - \frac{-\frac{3}{5}}{1 + (-\frac{3}{5}) - \dots}}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{3^2}{2 + \dots}}} \Rightarrow \frac{4}{\pi} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{3^2}{2 + \dots}}$$

Můžeme místo poslední úpravy rovnici vynásobit 4 a dostat rovnici pro samotné π :

$$\pi = \frac{4}{1 + \frac{1^2}{2 + \frac{3^2}{2 + \frac{5^2}{2 + \dots}}}} \quad (28)$$

2.3.7 Gregoryho-Leibnizova řada

Tato nekonečná řada byla objevena nezávisle 2 matematiky: v roce 1671 James Gregory a v roce 1674 Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716).

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \quad (29)$$

Gregory pomocí Cavalieriho vzorec a dlouhého dělení v integrandu dosáhl Taylorůva rozvoje pro funkci arkus tangens. Taylorův rozvoj lze dnešním zápisem zapsat takto:

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n \frac{f^{(i)}(a)}{i!} (x-a)^i$$

Protože známe hodnotu arkus tangens v bodě 0 ($\arctan(0) = 0$), můžeme tuto hodnotu dosadit za a :

$$\begin{aligned} \arctan(x) &= \frac{\arctan(a)}{1} (x-a)^0 + \frac{\frac{1}{a^2+1}}{1} (x-a)^1 + \frac{\frac{0(a^2+1)-1(2a+0)}{(a^2+1)^2}}{2} (x-a)^2 + \\ &\quad + \frac{\frac{-2(a^2+1)^2 - (-2a)2(a^2+1)2a}{(a^2+1)^4}}{6} (x-a)^3 + \dots \\ \Rightarrow \arctan(x) &= \arctan(a) + \frac{1}{a^2+1} (x-a) + \frac{-2a}{2(a^2+1)^2} (x-a)^2 + \\ &\quad + \frac{-2(a^2+1)^2 + 8a^2(a^2+1)}{6(a^2+1)^4} (x-a)^3 + \dots \\ \Rightarrow \arctan(x) &= \arctan(0) + \frac{1}{0^2+1} (x-0) + \frac{-2 \cdot 0}{2(0^2+1)^2} (x-0)^2 + \\ &\quad + \frac{-2(0^2+1)^2 + 8 \cdot 0^2(0^2+1)}{6(0^2+1)^4} (x-0)^3 + \dots \\ \Rightarrow \arctan(x) &= x + \frac{-2}{6} x^3 + \dots \Rightarrow \arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \dots \end{aligned}$$

Kdybychom hned ze začátku pracovali s 8 členy namísto 4, řada by vypadala takto:

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$$

Nakonec Gregory dosadil $x = 1$ a dostal řadu v rovnici 29. Po vynásobení 4 dostaneme řadu pro samotné π , která lze zapsat modernějším způsobem [11][1]:

$$\pi = \lim_{n \rightarrow \infty} 4 \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i}{2i+1} \quad (30)$$

2.3.8 Kochaňského geometrická aproximace

Roku 1685 Adam Adamandý Kochaňski (1631 Dobrzyniu n. Wisłą-1700 Teplice v Čechách [11][8]), převážně polský matematik, který působil jako jezuita v Čechách, vypočítal přibližnou hodnotu π pomocí své vlastní konstrukce, která je na obrázku 18, kde platí, že $\vartheta = 30^\circ$ a úsečka CD je přibližně polovina obvodu kruhu o poloměru r .

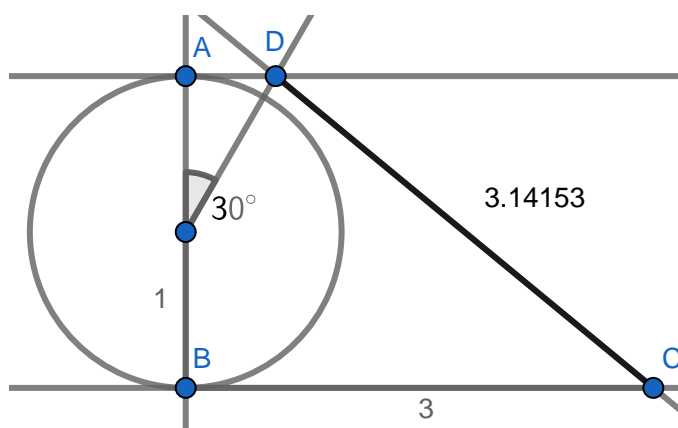
Úsečku CD lze spočítat pomocí Pythagorovi věty.

$$\begin{aligned} |CD| &= \sqrt{|AB|^2 + (|AD| - |BC|)^2} = \sqrt{(2r)^2 + (3r - r \operatorname{tg} 30^\circ)^2} = \sqrt{4r^2 + \left(3r - \frac{r}{\sqrt{3}}\right)^2} = \\ &= \sqrt{4r^2 + \frac{(3\sqrt{3} - 1)^2}{3} r^2} = r \sqrt{\frac{40 - 6\sqrt{3}}{3}} \end{aligned} \quad (31)$$

Nakonec úsečku stačí tát do vzorce pro π .

$$\pi = \frac{2r \sqrt{\frac{40 - 6\sqrt{3}}{3}}}{2r} = \sqrt{\frac{40 - 6\sqrt{3}}{3}} \quad (32)$$

Ze vzorce 32 je jasné, že Kochanski došel k hodnotě π 3,141533. [1]



Obrázek 18: Kochaňského konstrukce přibližné poloviny obvodu kruhu s daným poloměrem

2.3.9 Newtonovy řady

Sir Issac Newton (1642-1727 [11]), zakladatel integrálního a diferenciálního počtu, objevil hned několik řad. Nejznámější vychází z jím objeveného vzorce:

$$\arcsin x = \int \frac{dx}{\sqrt{1+x}},$$

který jde s použitím jeho objevu binomické věty upravit na:

$$\begin{aligned} \arcsin x &= \int \frac{dx}{\sqrt{1+x}} = \int \left(1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^6 + \dots\right) dx = \\ &= x + \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{x^7}{7} + \dots \end{aligned}$$

Po dosazení $x = \frac{1}{2}$, dostaneme vzorec pro výpočet π [1]:

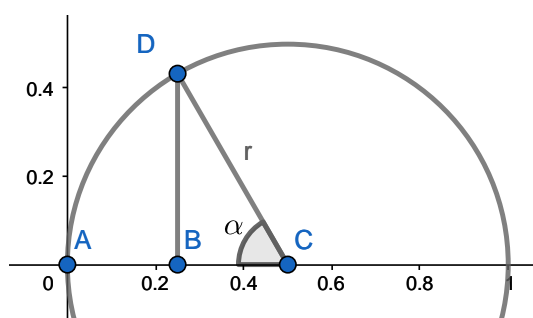
$$\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \pi = 6 \arcsin \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \pi = 6 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{1}{5 \cdot 2^5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{1}{7 \cdot 2^7} + \dots \right), \quad (33)$$

který jde moderním způsobem zapsat jako [17]:

$$\pi = \lim_{n \rightarrow \infty} 6 \sum_{i=0}^n \frac{(2i)!}{2^{4i+1} (i!)^2 (2i+1)} \quad (34)$$

Další známou řadu publikoval 1737 v „Treatise on the Method of Fluxions and Infinite Series“.



Obrázek 19: Kružnice $y = \sqrt{x - x^2}$ s výsečí

Vychází z rovnice kružnice:

$$y = \sqrt{x - x^2},$$

kterou lze vidět na obrázku 19. Pomocí binomické věty vyřešil obsah a poloviční úseče ABD :

$$a = \int_0^{\frac{1}{4}} \sqrt{x - x^2} dx = \int_0^{\frac{1}{4}} \sqrt{x} \sqrt{1 - x} dx = \left[\frac{2}{3} \sqrt{x^3} - \frac{1}{5} \sqrt{x^5} - \frac{1}{28} \sqrt{x^7} - \frac{1}{72} \sqrt{x^9} - \dots \right]_0^{\frac{1}{4}} =$$

$$= \frac{2}{3 \cdot 2^3} - \frac{1}{5 \cdot 2^5} - \frac{1}{28 \cdot 2^7} - \frac{1}{72 \cdot 2^9} - \dots \quad (35)$$

Plocha poloviční úseče je obsah S_v výseče ACD bez obsahu S_t trojúhelníku BCD

$$a = S_v - S_t \quad (36)$$

Nejdříve spočítal úsečku $|BD|$:

$$|BD| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{4-1}{16}} = \frac{\sqrt{3}}{4},$$

a pak úhel α :

$$\alpha = \arctg \left(\frac{|BD|}{|BC|} \right) = \arctg \left(\frac{\frac{\sqrt{3}}{4}}{\frac{1}{4}} \right) = \arctg \sqrt{3} = 60^\circ.$$

Z úhlu α je jasné, že a je $\frac{1}{6}$ obsahu kruhu. S těmito znalosti lze spočítat vzorec 36.

$$a = S_v - S_t = \frac{\pi r^2}{6} - \frac{|BD| \cdot |BC|}{2} = \frac{\pi \frac{1}{4}}{6} - \frac{\frac{1}{4} \frac{\sqrt{3}}{4}}{2} = \frac{\pi}{24} - \frac{\sqrt{3}}{32} \Rightarrow \pi = 24 \left(\frac{\sqrt{3}}{32} + a \right) \quad (37)$$

Do vzorce 37 dosadil za a vzorec 35 [1].

$$\pi = \frac{3\sqrt{3}}{4} + 24 \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{5 \cdot 2^5} - \frac{1}{28 \cdot 2^7} - \frac{1}{72 \cdot 2^9} - \dots \right) \quad (38)$$

Vzorec 38 lze zapsat moderním způsobem jako [17]:

$$\pi = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3\sqrt{3}}{4} + 24 \sum_{i=0}^n \frac{(2i)!}{2^{4i+2} (i!)^2 (2i-1)(2i+3)} \quad (39)$$

2.3.10 Sharpova řada

Abraham Sharp (1651-1742) zrychlil Gregoryho-Leibnizovu řadu tím, že do Teylorova rozvoje pro $\arctg(x)$ dosadil za x $\frac{1}{\sqrt{3}}$ [1].

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \Rightarrow \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(1 - \frac{1}{3^1 \cdot 3} + \frac{1}{3^2 \cdot 5} - \frac{1}{3^3 \cdot 7} + \dots \right)$$

$$\Rightarrow \pi = 2\sqrt{3} \left(1 - \frac{1}{3^1 \cdot 3} + \frac{1}{3^2 \cdot 5} - \frac{1}{3^3 \cdot 7} + \dots \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} 2\sqrt{3} \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i}{3^i (2i+1)} \quad (40)$$

2.3.11 Leonhard Euler

Leonhard Euler (1707-1783) sjednotil matematický zápis a symboliku do dnešní podoby, např.: $f(x)$, $\int dx$, i , e , \sum . Od jeho doby se řeckým písmenem π odznačuje konstanta, o které je tato práce.

Dalším výsledkem jeho celoživotní práce je objev několika nekonečných řad vedoucích k π , z nichž je neznámější vyřešení v roce 1736 řady převrácených dvojmocí, kterou před tím se marně snažilo vyřešit celá desetiletí spousta matematiků, např. G. W. Leibnitz nebo J. Bernaulli I. Použil k tomu řadu pro $\sin x$ (Taylorův rozvoj), která byla známa už za Newtona.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

Řadu řešil pro $\sin x = 0$, vydělil ji x ($x \neq 0$) a následně substituoval $y = x^2$.

$$0 = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \Rightarrow 0 = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots \Rightarrow 0 = 1 - \frac{y}{3!} + \frac{y^2}{5!} - \frac{y^3}{7!} + \dots \quad (41)$$

Jestliže rovnice 41 měla před úpravou dělením kořeny: $x = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, tak po substituci má kořeny: $y = (n\pi)^2$, $n \in \mathbb{N}$. Pomocí teorie rovnic vymyslel upravu rovnice, dnes známou jako

Vietovy vztahy, která zní: součet převrácených hodnot kořenů ($\frac{1}{(n\pi)^2}$, $n \in \mathbb{N}$) je roven záporně vzatému podílu lineárního a absolutního členu ($\frac{1}{3!}$) [1].

$$\frac{1}{3!} = \frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{(2\pi)^2} + \frac{1}{(3\pi)^2} + \dots \Rightarrow \frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots \quad (42)$$

Vzorec 42 lze přepsat pro samotné π

$$\pi = \sqrt{6} \sqrt{\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{6 \sum_{i=1}^n \frac{1}{i^2}} \quad (43)$$

Stejným způsobem odvodil řadu pomocí funkce $\cos x$.

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \Rightarrow 0 = 1 - \frac{y}{2!} + \frac{y^2}{4!} - \frac{y^3}{6!} + \dots$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2!} = \frac{1}{(0,5\pi)^2} + \frac{1}{(1,5\pi)^2} + \frac{1}{(2,5\pi)^2} + \dots \Rightarrow \frac{\pi^2}{8} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots \quad (44)$$

Odečtením rovnice 42 od dvojnásobku 44 dostal další řadu:

$$\frac{\pi^2}{12} = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \dots \quad (45)$$

2.3.12 Legendreho algoritmus

Adrien Legendry (1752-1833) v roce 1794 publikoval dílo „Éléments de géométrie“ podobným algoritmem jako M. Kusánský jen s rozdíle, že kromě poloměru opsané a vepsané kružnice R a r k $2n$ -úhelníku počítá ještě koeficient s .

$$R_{n+1} = \frac{r_n + R_n}{2} \quad (46)$$

$$r_{n+1} = \sqrt{r_n R_n} \quad (47)$$

$$s_{n+1} = s_n - 2^n (R_n - R_{n+1})^2 \quad (48)$$

Za počáteční hodnoty zvolíme $R_0 = 1$, $r_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ a $s_0 = \frac{1}{4}$.

Nyní stačí pro výpočet π použít následující vzorec [11][16]:

$$\frac{R_{2n}^2}{s_n} < \pi < \frac{R_n^2}{s_n}. \quad (49)$$

2.4 Moderní algoritmy s využití počítačů

3 METODA MONTE CARLO

4 SROVNÁNÍ METOD

V této kapitole budu srovnávat efektivitu algoritmy zmíněné v předchozích kapitolách podle mnou definované veličiny \mathfrak{N} [mem]. Protože \mathfrak{N} závisí na rychlosti konvergence algoritmu $\beta(n)$, která je nespojitá funkce závislá na počtu iterací n , kde n náleží přirozeným číslům, použiji sumaci v intervalu všech iterací, a tím dostanu hodnotu veličiny nezávislou na aktuální iteraci.

$$\mathfrak{N} = \lim_{a \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^a \beta(n)$$

Vzhledem k tomu, že chci, aby platilo, čím vyšší hodnota, tím lepší algoritmus, definuji rychlosti konvergence algoritmu jako podíl záporné difference míry konvergence p a čísla 2 umocněného na diferenci počtu operací O :

$$\beta(n) = \frac{-\frac{\Delta p}{\Delta n}}{2^{\frac{\Delta O}{\Delta n}}} = \frac{-\frac{p_{n+1}-p_n}{n+1-n}}{2^{\frac{O_{n+1}-O_n}{n+1-n}}} = \frac{p_n - p_{n+1}}{2^{O_{n+1}-O_n}}$$

Čitatel vyjadřuje čím větší skoky v konvergenci, tím je vyšší hodnota čitatele a tím je vyšší hodnoty rychlosti konvergence algoritmu v dané iteraci. Vynásobení -1 je abych dodržel pravidlo zmíněné v předchozím souvětí, protože u konvergujícího algoritmu vždy platí, že $p_{n+1} < p_n$.

U jmenovatele platí, že čím větší skoky v počtu operací, tím je vyšší hodnota jmenovatele a tím je menší celková hodnota rychlosti konvergence algoritmu v dané iteraci. Aby veličina byla matematicky robustní, např: vůči algoritmům, který mají iterace neobsahující žádné operace. Dám podíl složitosti algoritmu a čísla iterace do jmenovatele hlavního zlomku jako mocninu dvou, čím se zachová pravidlo u jmenovatele čím vyšší tím horší. Funkce je 2^x je často používaná aproximace exponenciální funkce e^x , kterou lze považovat za elementární funkci. Zlomek nenásobím -1, protože na rozdíl od míry konvergence u algoritmů, který něco dělají platí, že $O_{n+1} > O_n$.

$$\mathfrak{N} = \lim_{a \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^a \frac{p_n - p_{n+1}}{2^{O_{n+1}-O_n}} \quad (50)$$

4.1 Míra konvergence

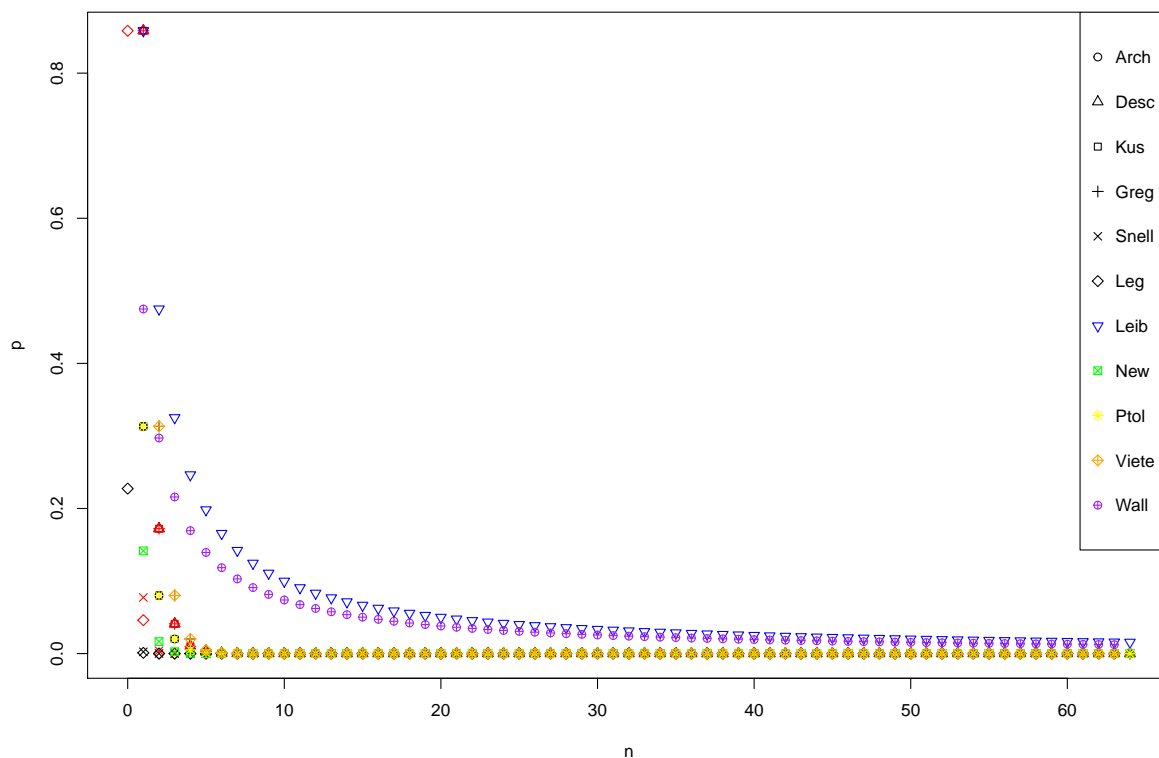
Míru konvergence p_n zavádím jako matematikou veličinu vyjadřující vzdálenost odhadu čísla x_n v n -té iteraci od nějaké hodnoty čísla x , kterou považuji za skutečnou hodnotu limitu dané posloupnost, v tomto případě π .

$$p_n = |x_n - x|, \quad x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$$

číslo iterace	Archimedes		Descartes	
hr. intervalu	spodní	horní	spodní	horní
1	0.31316	0.85840	0.31316	0.85840

Tabulka 1: Míra konvergence

Míra konvergence jednotlivých algoritmu



Obrázek 20: Graf míry konvergence všech algoritmu popsáných v této práci

4.2 Závislost počtu operací

Počet operací O_n zavádím jako matematikou veličinu vyjadřující počet operací (sčítání, odčítání, násobení, dělení, umocňování a odmocňování) od počátku výpočtu až do n -té iterace. Faktoriál z x , pokud x nebude 0, budu počítat za x operací, protože pro nenulové x platí, že:

$$x! = \prod_{i=1}^x i,$$

v opačné případě budu $x!$ ($0!$) počítat za 1 operaci.

n	1	2	3
$O_{sh}(n)$	5+3	10+3	15+3
$O_{hh}(n)$	6+3	12+3	18+3

Tabulka 2: Složitost Archimédova algoritmu podle vzorce 6, 9 a 10

Archimedes Při každé iteraci, viz 2. tabulka, se musí vykonat 5 operací pro výpočet 1 strany vepsaného k -úhelníku a 6 operací pro výpočet 1 strany opsaného k -úhelníku. Pro výpočet spodní

nebo horní hranice (*sh* a *hh*) π je potřeba provést ještě 3 operace. Výsledné vzorce pro složitost Archimédova algoritmu jsou:

$$O_{sh}(n) = 5n + 3$$

$$O_{hh}(n) = 6n + 3$$

Ptolemaios Vzorce algoritmu:

$$x_{n+1} = \sqrt{\frac{1 - \sqrt{1 - x_n}}{2}} \Rightarrow O(n) = 5n + a$$

$$\pi_n = \frac{2^{2+n} x_n}{2} = 2^{1+n} x_n \Rightarrow a = 3$$

Vzorec pro složitost Ptolemaiova algoritmu:

$$O_{sh}(n) = 5n + 3$$

Kusánský Vzorce algoritmu:

$$r_{n+1} = \frac{R_n + r_n}{2}$$

$$R_{n+1} = \sqrt{R_n r_{n+1}}$$

Protože r je závislý i na R a naopak, musím složitost 1 iterace pro r a R počítat z obou vzorců. Z r a R se na hranice intervalu pro π dostanu 2 operacemi. Vzorce pro složitost Kusánského

n	1	2	3
$O_{sh}(n)$	2+2	6+2	10+2
$O_{hh}(n)$	4+2	8+2	12+2

Tabulka 3: Složitost Kusánského algoritmu

algoritmu z tabulky č. 3:

$$O_{sh}(n) = 4(n - 1) + 2 + 2 = 4n$$

$$O_{hh}(n) = 4(n - 1) + 4 + 2 = 4n + 2$$

Viete Jako 1 iteraci beru výpočet zlomku a jeho vynásobení s již vypočítaným odhadem π z předchozí iterace, pokud to není 1. iterace, kdy se ničím nenásobí. Ze 4. tabulky plyne, že

n	1	2	3	4
$O(n)$	1	4	9	16
zpět. difference	-	3	5	7

Tabulka 4: Složitost Vieteho algoritmu

složitost algoritmu tvoří posloupnost:

$$O(n) = n^2.$$

n	1	2	3
$O_{sh}(n)$	2+2	8+2	14+2
$O_{hh}(n)$	4+2	10+2	16+2

Tabulka 5: Složitost Descartova algoritmu podle vzorce 20, 21 a 22

Descartes Stejný systém výpočtu složitosti jako u Kusánského algoritmu. Vzorce pro složitost algoritmu z tabulky č. 5:

$$O_{sh}(n) = 6(n - 1) + 2 + 2 = 6n - 2$$

$$O_{hh}(n) = 6(n - 1) + 4 + 2 = 6n$$

Gregory Opět stejný systém výpočtu složitosti jako u Descartova a Kusánského algoritmu. Vzorce pro složitost algoritmu z tabulky č. 6:

n	1	2	3
$O_{sh}(n)$	2+2	8+2	14+2
$O_{hh}(n)$	6+2	12+2	18+2

Tabulka 6: Složitost Gregoryho algoritmu podle vzorce 23, 24 a 25

$$O_{sh}(n) = 6(n - 1) + 2 + 2 = 6n - 2$$

$$O_{hh}(n) = 6n$$

algoritmus	zápis posloupnosti $O(n)$	zpětná difference posloupnosti $O(n)$
Archimedes (s. / h.)	$5n + 3 / 6n + 3$	5 / 6
Ptolemaios	$5n + 3$	5
Kusánský (s. / h.)	$4n / 4n + 2$	4 / 4
Viète	n^2	$2n - 1$
Descartes (s. / h.)	$6n - 2 / 6n$	6 / 6
Gregory (s. / h.)	$6n - 2 / 6n + 2$	6 / 6
Snell (s. / h.)	— / —	10 / 11
Wallis	$7n$	7
Brouncker	$3n - 1$	3
Gregory-Leibnitz	$5n$	5
Newton 1	$3n^2 + 11n$?? $6n + 11$??

Tabulka 7: Složitost algoritmu

5 ZÁVĚR

6 REFERENCE

- [1] BECKMANN, Petr. Historie čísla π . Praha: Academia, 1998. ISBN 80-200-0655-9.
- [2] THUMSHIRN, Christian. Der Schweizer, der 22,4 Billionen Dezimalstellen von π berechnet hat. Neue Zürcher Zeitung [online]. Zürich, 2017, 21.3.2017, , 1 [cit. 2018-06-21]. Dostupné z: <https://www.nzz.ch/wissenschaft/video-serie-nerdzz-der-wahrscheinlich-laengste-rekord-der-welt-ld.152445-november-2016/>
- [3] KOLMAN, Arnošt a Marcela HEDRLÍNOVÁ. Dějiny matematiky ve starověku. Praha: Academia, 1968. ISBN 978-80-87287-77-4.
- [4] Bible kralická: Písmo svaté Starého a Nového zákona : podle posledního vydání z roku 1613. 5. vyd. v ČBS. Praha: Česká biblická společnost, 2014. ISBN 978-80-87287-77-4.
- [5] BEČVÁŘ, Jindřich, Martina BEČVÁŘOVÁ a Hana VYMAZALOVÁ. Matematika ve starověku: Egypt a Mezopotámie. Praha: Prometheus, 2003. Dějiny matematiky. ISBN 80-7196-255-4.
- [6] VEJCHODSKÝ, Tomáš. Archimédův výpočet čísla π [přednáška]. Praha: Akademie věd České republiky, 11.11.2016. In: Youtube.com [online]. [vid. 17. 5. 2018]. Záznam dostupný z: <https://www.youtube.com/watch?v=8XaM9ZYxCqU>
- [7] WILLERS, Michael. Algebra bez (m)učení: Od arabských matematiků k tajným šifrám: matematika v každodenním životě : fascinující čísla a rovnice. Praha: Grada, 2012. ISBN 978-80-247-4123-9.
- [8] Adam Adamandy Kochański. In: Wikipedia: the free encyclopedia [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001- [cit. 2018-05-24]. Dostupné z: <https://en.wikipedia.org/wiki/Adam-Adamandy-Kocha%C5%84ski>
- [9] POSAMENTIER, Alfred S. a Ingmar LEHMANN. [Pi]: A Biography of the World's Most Mysterious Number. II.Title. Amherst, N.Y.: Prometheus Books, 2004. ISBN 15-910-2200-2.
- [10] BEČVÁŘ, Jindřich. Matematika ve středověké Evropě. Praha: Prometheus, 2001. Dějiny matematiky. ISBN 80-7196-232-5.
- [11] BEČVÁŘ, Jindřich, FUCHS, Eduard, ed. Matematika v 16. a 17. století: Seminář Historie matematiky III. Praha: Prometheus, 1999. ISBN 80-7196-150-7.
- [12] JÁCHIM, František. Jak viděli vesmír: [po stopách velkých astronomů]. Olomouc: Rubico, 2003. ISBN 80-85839-48-2.
- [13] BEČVÁŘOVÁ, Martina, Jindřich BEČVÁŘ, Magdalena HYKŠOVÁ, Oldřich HYKŠ, Martin MELCER, Martina ŠTĚPÁNOVÁ, Miroslava OTAVOVÁ a Irena SÝKOROVÁ. Matematika ve středověké Evropě: pozdní středověk a renesance. Praha: Česká technika - nakladatelství ČVUT, 2018. Dějiny matematiky. ISBN 978-80-01-06403-0.

- [14] FUCHS, Eduard, ed. Mathematics throughout the ages. Prague: Prometheus, 2001. History of mathematics. ISBN 80-7196-219-8.
- [15] BEČVÁŘ, Jindřich a Eduard FUCHS, ed. Matematika v proměnách věků III. Praha: Výzkumné centrum pro dějiny vědy, 2004. Dějiny matematiky. ISBN 80-728-5040-7.
- [16] BRENT, Richard P. The Borwein Brothers, Pi and the AGM [online]. Mathematical Sciences Institute, Australian National University, Canberra a University of Newcastle, Callaghan, 8. 8. 2018, , 7-8 [cit. 2018-11-03]. Dostupné z: <https://arxiv.org/abs/1802.07558>
- [17] GOURÉVITCH, Boris. Newton's Formula. The world of pi [online]. [cit. 2018-11-03]. Dostupné z: <http://www.pi314.net/eng/newton.php>
- [18] PROKOP, Vladimír. Dějiny literatury od starověku do počátku 19. století: aneb od Mezopotámie po naše národní obrození. Sokolov: O.K.-Soft, 2001.

7 SEZNAM OBRÁZKŮ

1	Zářezy na kostech [3]	9
2	Tabulka YBC 7302 [5]	10
3	Sít' pro aproximaci kruhu	10
4	Ptolemaiova aproximace kruhu	11
5	Kruh s opsaným a vepsaným n-úhelníkem	12
6	Jeden trojúhelník z vepsaného šestiúhelníka	12
7	Jeden trojúhelník z opsaného šestiúhelníka	13
8	1 trojúhelník z vepsaného šestiúhelníka a 2 trojúhelníky z vepsaného dvanácti- úhelníka	13
9	1 trojúhelník z opsaného šestiúhelníka a 1 trojúhelník z opsaného dvanáctiúhel- níka	14
10	Kusánského algoritmus	15
11	Výpočet poloměru vepsané kružnice osmiúhelníka	16
12	Výpočet poloměru opsané kružnice osmiúhelníka	17
13	Výpočet poloměru vepsané kružnice osmiúhelníka	18
14	Viètova geometrická aproximace	19
15	Pravoúhlý trojúhelník SIG a SAJ	20
16	Descartesův algoritmus	21
17	Interval z Archimédovy metody	22
18	Kochanského konstrukce přibližné poloviny obvodu kruhu s daným poloměrem	25
19	Kružnice $y = \sqrt{x - x^2}$ s výsečí	26
20	Graf míry konvergence všech algoritmu popsanych v této práci	30

8 SEZNAM TABULEK

1	Míra konvergence	30
---	----------------------------	----

2	Složitost Archimédova algoritmu podle vzorce 6, 9 a 10	30
3	Složitost Kusánského algoritmu	31
4	Složitost Vieteho algoritmu algoritmu	31
5	Složitost Descartova algoritmu podle vzorce 20, 21 a 22	32
6	Složitost Gregoryho algoritmu podle vzorce 23, 24 a 25	32
7	Složitost algoritmu	32

PŘÍLOHA A: PRVNÍ PŘÍLOHA