1 Løsninger og mindste kvadraters løsninger af lineære ligningssystemer

1.1 Disposition

- **Definition af Lineære ligningssystemer**
- **RREF/Rækkeækvivalens (Korollar 2.5)**
- **Lemma 4.3**
- **Proposition 10.33, m. bevis**
- **Lemma 10.35, m. bevis**
- **Proposition 10.36, m. bevis**

1.2 Udspecificering

Definition. Lineære Ligningssystemer
Når vi siger vi har et lineært ligningssystem af m ligninger med n ubekendte $x_1, \cdots, x_n$ menes følgende ordnede samling

$$\begin{array}{rccccccccc} l_1: & a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ l_2: & a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{12n}x_n & = & b_2 \\ & \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ l_m: & a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

Vi skynder os at definere ***koefficientmatricen***

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in Mat_{m,n}(\mathbb{F})$$

samt

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^m$$

det ovenstående lineære ligningssystem kan nu skrives om til

$$A \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

Definition. Elementære Rækkeoperationer (ERO)
En ERO er en af følgende

(I) *For $i \neq j$, ombyt den i'te og den j'te række i A*

(II) *Multiplicer alle elementer i den i'te række i A med den samme skalar $\alpha \in \mathbb{F} \backslash \{0\}$*

(III) *Multiplicer alle elementer i den i'te række i A med den samme skalar $\alpha \in \mathbb{F}$ og adder resultatet til de tilsvarende elementer i den j'te række $(i \neq j)$*

Definition. 2.2 (Række-echelongform (REF))
En matrix $A \in Mat_{m,n}(\mathbb{F})$ siges at være på række-echelonform (REF) såfremt der findes en voksende følge af naturlige tal

$$1 \leq d_1 < d_2 < \cdots < d_r \leq n$$

hvor

- $a_{ij} = 0$ *for* $i \leq r$ *og* $j < d_i$
- $a_{id_i} \neq 0$ *for* $i \leq r$
- $a_{ij} = 0$ *for* $i > r$

Definition. 2.3 (Reduceret række-echelonform (RREF))
Som ved REF har vi en matrix $A \in Mat_{m,n}(\mathbb{F})$ som siges at være på RREF hvis vi har en følge af voksende naturlige tal

$$1 \leq d_1 < d_2 < \cdots < d_r \leq n$$

hvor

- $a_{ij} = 0$ *for* $i \leq r$ *og* $j < d_i$
- $a_{id_i} = 1$ *for* $i \leq r$
- $a_{jd_i} = 0$ *for* $i \leq r$ *og* $j \neq i$
- $a_{ij} = 0$ *for* $i > r$

En vigtig følge af de ovenstående definitioner er følgende definition

Definition. 2.4 (Rækkeækvivalente matricer) *To matricer $A, B \in Mat_{m,n}(\mathbb{F})$ siges at være rækkeækvivalente, hvis man kan opnå B fra A vha. en successive følge af elementære rækkeoperationer. I givet fald skriver vi $A \sim B$.*

Hvoraf det følger at

Korollar. 2.5
Enhver matrix $A \in Mat_{m,n}(\mathbb{F})$ er rækkeækvivalent til en matrix H på RREF

Udfra alt dette kan vi nu snakke om løsninger til lineære ligningssystemer igen

Lemma. 4.3
$A \in Mat_n(\mathbb{F})$ og lad H betegne en matrix på RREF der er rækkeækvivalent til A. Så har vi følgende ækvivalenser

(1) *For ethvert $b \in \mathbb{F}^n$ der har det lineære ligningssystem $A \cdot x = b$ præcis én løsning*

(2) *Det homogene lineære lignigssystem $A \cdot x = 0$ har alene løsningen* 0

(3) *Antallet af frie ubekendte for det homogene fuldstændigt reducerede ligningssystem $H \cdot x = 0$ 0*

(4) $H = I_n$

En vigtig pointe for lineære ligningssystemer er at hvis vi for et ligningssystem $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ ikke kan finde en entydig løsning i $R(A)$ taler vi om at $\mathbf{z}$ er en mindste kvadraters løsning (MKL) til det lineære ligningssystem ovenfor såfremt vi har at $A \cdot \mathbf{z} \in R(A)$ er tættest på $\mathbf{b}$. Vi forstår tættest som at $||\mathbf{b} - A \cdot \mathbf{z}||$ skal være minimal.

Proposition. 10.33
Det lineære ligningsysstem $A \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ har (mindst) en MKL. MKL bestemmes som løsningsmængden til det lineære ligningssystem

$$A \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{p}$$

hvor $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^m$ betegner den ortogonale projektion af $\boldsymbol{b}$ på søjlerummet $R(A)$ og lighedstegn når $A \cdot \boldsymbol{z} = \boldsymbol{p}$.

Bevis: $\mathbf{p} \in R(A)$ pr. definition. $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n \Rightarrow A \cdot \mathbf{z} \in R(A)$

$$\Rightarrow ||\boldsymbol{b} - A \cdot \boldsymbol{z}|| \geq ||\boldsymbol{b} - \boldsymbol{p}|| \qquad \text{(Prop. 10.32)}$$

□

Lemma. 10.35
$R(A)^{\perp} \in$ indre produktrum $\mathbb{R}^m$ er identisk med $N(A)^T$

Bevis: $R(A) = \{v \in \mathbb{R}^n \mid A \cdot \mathbf{v}\}$

$z \in R(A)^{\perp}$ er ækvivalent med

$$\langle \boldsymbol{z}, A \cdot \boldsymbol{v} \rangle = 0, \forall \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n \tag{10.29}$$

$$\langle \boldsymbol{z}, A \cdot \boldsymbol{v} \rangle = (A \cdot \boldsymbol{v})^T \cdot \boldsymbol{z} = \boldsymbol{v}^T \cdot (A^T \cdot \boldsymbol{z}) = \langle A^T \cdot \boldsymbol{z}, \boldsymbol{v} \rangle \tag{10.30}$$

(10.29) er da ækvivalent med

$$\langle A^T \cdot \boldsymbol{z}, \boldsymbol{v} \rangle, \forall \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$$

(10.30) er da ækvivalent med at $A^T \cdot \boldsymbol{z} \in (\mathbb{R}^n)^{\perp}$, dvs. $A^T \cdot \boldsymbol{z} = 0 \Rightarrow \boldsymbol{z} \in N(A^T)$

□

Proposition. 10.36 *MKL'er til $A \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ bestemmes som løsningerne til*

$$(A^T A) \cdot \boldsymbol{x} = A^T \cdot \boldsymbol{b}$$

Bevis: Lad $\boldsymbol{p}$ betegne den ortogonale projektion af $\boldsymbol{b}$ på $R(A)$. Pr. def. af $\boldsymbol{p}$ dermed det entydige element i $R(A)$ der opfylder

$$\mathbf{b} - \mathbf{p} \in R(A)^{\perp} = N(A^T) \tag{10.31}$$

hvor det sidste lighedstegn netop følger af **Lemma 10.35**. For $\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^n$ vil $A \cdot \boldsymbol{z} \in R(A)$, og $A \cdot \boldsymbol{z} = \boldsymbol{p}$ præcist når

$$A^T(\mathbf{b} - A \cdot \mathbf{z}) = \mathbf{0} \tag{10.32}$$

Men at $\boldsymbol{z}$ opfylder (10.32), er oplagt ækvivalent til at $\boldsymbol{z}$ er en løsning til (10.31)

$\square$

2 Vektorrum og underrum

2.1 Disposition

- **Def. 5.1**
- **Proposition 5.2, m. bevis**
- **Korollar 5.3, m. bevis**
- **Def. 5.7**
- **Def. 5.9 (Linear kombination)**
- **Def. 5.11**
- **Lemma 5.12, m. bevis**

2.2 Udspecificering

Def. 5.1 $\mathbb{F}$-vektorrum består af en mængde V, samt to afbildninger af addition(+) og skalarmultilplikation ($*$), der opfylder:

	$\forall u, v, w \in V$ og $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$	
Kommutative lov:	$u + v = v + u$	(1)
Associative lov:	$(u + v) + w = u + (v + w)$	(2)
Neutral element:	$\exists \mathbf{0} \in V, u + \mathbf{0} = u$ og $1 * v = v$	(3)
Inverse element:	$\exists -u \in V, u - u = \mathbf{0}$	(4)
Distributiv lov:	$\alpha * (u + v) = (\alpha * u) + (\alpha * v)$	(5)
Distributiv lov:	$(\alpha * \beta) * v = (\alpha * v) + (\beta * v)$	(6)
Associative lov:	$\alpha * (\beta * v) = (\alpha\beta) * v$	(7)
Neutral element:	$1 * v = v$	(8)

Proposition 5.2 Lad V betegne et vektorrum, $\forall v \in V$ glæder:

Hvis 0 betegner nulelementet i $\mathbb{F}$ så:	$0 * u = 0,$	(1)
$\forall \alpha \in \mathbb{F}$ så:	$\alpha * 0 = 0$	(2)
	$(-1) * u = -u$	(3)

Bevis for Prop 5.2(1.

Lad $v = 0 * u$. grundet distributiv lov så: $v = (0 + 0)u = 0 * u + 0 * u = v + v$

Dermed	$\mathbf{0} = v + (-v) = (v + v) + (-v)$	via, valg af v
	$= v + (v + (-v))$	associative lov
	$= v + \mathbf{0}$	inverse element
	$= v$	neutrale element

Der ud over har vi

KOROLLAR 5.3 Elementerne $\mathbf{0}$ og $-v$ i def. 5.1 er entydige bestemte.
Bevis for $\mathbf{0}$ er entydig bestemt:

$$\text{Antag at } \mathbf{0}_1, \mathbf{0}_2 \in V \text{ opfylder krav for at være neutrale elementer:}$$
$$\mathbf{0}_1 = 0 * \mathbf{0}_1 = \mathbf{0_2}$$

DEF 5.7 Et underrum af et $\mathbb{F}$-vektorrum V er $S \subseteq V$, der indeholder $\mathbf{0}$ og som er stabil overfor addition og skalarmultiplikation. Dette betyder at:

$$\mathbf{0} \in S \tag{1}$$
$$\forall u, v \in S \text{ så} \qquad u + v \in S \tag{2}$$
$$\forall v \in S \wedge \forall \alpha \in \mathbb{F} \text{ så} \qquad \alpha * u \in S \tag{3}$$

et eksempel på et underrum er $N(A) = \{x | Ax = 0\}$, dette vises ved:

$$\text{For } \alpha, \beta \in \mathbb{F}, \text{ og } x \in N(A) \iff Ax = 0 \wedge y \in N(A) \iff Ay = 0$$
$$A(\alpha * x + \beta * y) = A(\alpha * x) + A(\beta * y) = \alpha * Ax + \beta * Ay = \alpha * 0 + \beta * 0 = 0 \in N(A)$$

DEF 5.9 Et element v i vektorrummet V kaldes en **linearkombination** af $v_1, v_2, ..., v_n$ hvis der eksistere skalarer $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \mathbb{F}$, så

$$v = \alpha_1 * v_1 + \alpha_2 * v_2 + ... + \alpha_n * v_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i * v_i \in V$$

Mængden af alle sådanne kombinationer kaldes for spannet

DEF. 5.11 mængden af alle linearkombination af $v_1, v_2, ..., v_n$ kaldes for spannet af elementerne $v_1, v_2, ..., v_n$:

$$Span(v_1, v_2, ..., v_n)$$

Det minimale antal v_i der skal til for at udspænde V udgøre dimensionen

LEMMA 5.12 Mængden $Span(v_1, v_2, \cdots, v_n)$ idgør et underrum i V indeholdende alle elementerne $v_i, i = 1, 2, \cdots, n$. Ethvert underrum af V indeholdende $v_i, i = 1, 2, \cdots, n$ vil indeholde $Span(v_1, v_2, \cdots, v_n)$ som delmængde.

Bevis: Jf. **Proposition 5.2(1)**, så er

$$0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \cdots + 0 \cdot v_n$$

neutralelementet $\mathbf{0} \in V$. Specielt $\mathbf{0} \in Span(v_1, v_2, \cdots, v_n)$. Desuden gælder

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i + \sum_{i=1}^{n} \beta_i v_i = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i + \beta_i) v_i \in Span(v_1, v_2, \cdots, v_n)$$

og

$$\alpha \cdot \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = \sum_{i=1}^{n} (\alpha \alpha_i) v_i \in Span(v_1, v_2, \cdots, v_n)$$

jf. regnereglerne i **Def. 5.1**. Der konkluderes hermed jf. **Def. 5.7**, at $Span(v_1, v_2, \cdots, v_n)$ er et underrum i V. At $v_i \in Span(v_1, v_2, \cdots, v_n), i = 1, 2, \cdots, n$ følger af

$$v_i = 0 \cdot v_1 + \cdots + 0 \cdot v_{i-1} + 1 \cdot v_i + 0 \cdot v_{i+1} + \cdots + 0 \cdot v_n$$

Vi lader nu S betegne et underrum af V, som indeholder alle $v_i, i = 1, 2, \cdots, n$. S indeholder ethvert element på formen $\alpha_i v_i$ for $\alpha_i \in \mathbb{F}$, og specielt indeholder S da alle endelige summer af elementer af denne form. Alle linearkombinationer af v_i'erne er dermed indeholdt i S, og $Span(v_1, v_2, \cdots, v_n) \subseteq S$.

□

Ekstra Note

Def 5.14 Lad V betegne et $\mathbb{F}$-vektorrum. Vi definere da:

- Hvis $V = \{0\}$, så siger vi at V har dimension 0.
- Hvis V er forskellige fra $\{0\}$ og kan udspændes af n elementer, men ikke færre end n elementer, så siger vi, at dimensionen af v er lig n.
- Hvis v ikke kan udspændes af en endelig mængde, så siges V at have uendelig dimension.

3 Basis for Vektorrum

3.1 Disposition

- **Def. 7.1**
- **Proposition 7.4**
- **Lemma 7.6, m. bevis**
- **Sætninger 7.9, m. bevis**

3.2 Udspecificering

Def 7.1 For en samling $\mathcal{V} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n)$ af elementer i et $\mathbb{F}$-vektorrum V defineres:

1. Sanlingen af elementer $\mathbb{V}$ siges at **udspænde** V, hvis den lineære afbildning $L_{\mathcal{V}}$ er surjektiv; dvs. hvis ethvert element i V er lig en linearkombination af $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n$
2. Samlingen af elementer $\mathcal{V}$ kaldes **lineært uafhængig**, hvis den lienære afbildning $L_{\mathcal{V}}$ er injektiv; dvs. hvis ethvert element i V maksimalt kan skrives på én måde som en linearkombination af $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n$. I modsat fald kaldes samlingen af elementer i $\mathbb{V}$ for **lineært afhængig**.
3. Samlingen af elementer $\mathcal{V}$ kaldes en **basis**, hvis den lineære afbildning $L_{\mathcal{V}}$ er invertibel; dvs. hvis ethvert element i V på netop én måde kan skrives som en linearkombination af $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n$

Vi ligger mærke til den egenskab at

Proposition 7.4 Lad $\mathcal{V} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n)$ betegne en basis for et vektorrum V. Så er

$$dim(V) = n$$

Hvis $\mathcal{W} = (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, ..., \mathbf{w}_n)$ betegner yderligere en basis for V, så er $n = m$.

Nu hvor vi har defineret en basis for et vektorrum, vil vi bevise

Lemma 7.6 Lad $\mathcal{W} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_m)$ betegne en samling af elementer der udspænder et vektorrum $V \neq \{0\}$. Så kan $\mathcal{W}$ udtyndes til en basis for V; dvs. der eksisterer et heltal $k > 0$ og en følge af tal

$$1 \leq i_1 < 1_2 < ... < i_k \leq m,$$

så $\mathcal{V} = (\mathbf{v}_{i_1}, \mathbf{v}_{i_2}, ..., \mathbf{v}_{i_k})$ er en basis for V.

Bevis: Udsagnet vises via induktion i m. I tilfælder hvor $m = 1$, så er lineært afhænging hvis $v_1 = 0$, gundet at så vil $1 * \mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$ være en ikke-triviel lineær relation, og $\mathcal{V} = (\mathbf{v}_1)$ er derfor lineært afhængig. Specielt vil $V = Span(\mathcal{W}) = \{\mathbf{0}\}$, hvilket er en modstrid. Derfor er $\mathcal{W}$ lineært uafhængig og dermed en basis. Dette viser udsagnet i tilfæld $m = 1$.

Antag at $m > 1$, og at udsagnet er vist i tilfældet, hvor $\mathcal{W}$ består af $m-1$ elementer. Hvis $\mathcal{W}$ er lineært uafhængig, så er $\mathcal{W}$ selv en basis, og udsagnet er vist. Antag derfor at $\mathcal{W}$ er lineært afhængig. Så findes der, grundet lemma 7.5(1) et i, så $V = Span(\mathcal{W}')$ hvor

$$\mathcal{W}' = (\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{v}_{i+1}, ..., \mathbf{v}_m).$$

Vektorummet V er dermed udspændt af $\mathcal{W}'$, dvs. af m-1 elementer. Anvendes IH opnås det, at $\mathcal{W}'$, kan udtyndes til en basis. Men en udtynding af $\mathcal{W}'$ er også en udtynding af $\mathcal{W}$. □

Men vi kan ikke blot udtynde os til en basis, vi kan også udvide os til en basis

Sætning 7.9 Lad V betegne et vektorrum af endelig dimension $n > 0$, og lad $\mathcal{W} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_m)$ betegne en samling af m elementer i V.

1. Hvis $\mathcal{W}$ udspænder V, så er $n \leq m$ og $\mathcal{W}$ kan **udtyndes** til en basis for V; dvs. at der eksisterer en følge af helt

   $$1 \leq i_1 < i_2 < ... < i_n \leq m,$$

   så $\mathcal{V} = (\mathbf{v}_{i_1}, \mathbf{v}_{i_2}, ..., \mathbf{v}_{i_n})$ er en basis for V.

   - Vi lægge mærke til at dette blot er en omformulering af lemma 7.6 som vi har bevist. Den eneste forskel er at proposition 7.4 bruges at vise at $dim(v) = n$ hvilket blot er det antal elementer der er i basen.

2. Hvis $\mathcal{W}$ er lineært uafhængig, så er $m \leq n$ og $\mathcal{W}$ kan **udvides** til en bassis for V; dvs der eksisterer elementer

   $$\mathbf{v}_{m+1}, \mathbf{v}_{m+2}, ..., \mathbf{v}_n \in V$$

   så $\mathcal{V} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n)$ er en base for V.

Bevis: At $m \leq n$ følger af lemma 7.8, som vi ikke vil bevise. Vi observer at hvis $Span(\mathcal{W}) = V$, så er $\mathcal{W}$ en basis for V. Modsat, hvis $Span(\mathcal{W}) \neq V$, så eksisterer der et $\mathbf{v}_{m+1} \in V$, som ikke er indeholdt i $Span(\mathcal{W})$. Ifølge Lemma 7.5(2) er $\mathcal{W}' = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_{m+1})$ da lineært uafhængig, og derfor vil $m + 1 \leq n$ i dette tilfælde.

Ved induktion i tallet $n - m \geq 0$ kan vi vise at $\mathcal{W}$ kan udvides til en basis for V. Hvis $n - m = 0$, så er $\mathcal{W}$ allerede en basis for V, og udsagnet er vist. Vi betragter tilfældet for $n - m > 0$, og antager det er vist for alle tal mindre end det. Hvis $Span(\mathcal{W}) = V$, så er $\mathcal{W}$ en basis for V, og vi er færdige. Hvis ikke, kan vi tilføje et passende $\mathbf{v}_{m+1}$ til $\mathcal{W}$ og opnå en lineært uafhængig samling af $m + 1$ elementer $\mathcal{W}' = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_{m+1}$. Pr induktion, så kan $\mathcal{W}'$ nu udvides til en basis fir V, og en sådan udvidelse er samtidig en udvidelse af $\mathcal{W}$ □

4 Matrixrepræsentationer

4.1 Disposition

- **Def. 8.2 (KV)**
- **Def. 8.5 (KTM)**
- **Prop. 8.6**
- **Def. 8.9 (MR)**
- **Prop. 8.11**
- **Lemma 8.21, m. bevis**
- **Lemma 8.22, m. bevis for (1)**

4.2 Udspecificering

Indledning For et generelt $\mathbb{F}$ vektorrum giver det mening at snakke om koordinatsystemet i form af en basis $\mathcal{V}$ for netop et $\mathbb{F}$-vektorrum, hvilket giver anledning til en bijektiv afbildning

$$L_{\mathcal{V}} : \mathbb{F}^n \to V$$

Vi ser at $L_{\mathcal{V}}$ er en isomorfi (idet bijektiv) og punkterne i V svarer derfor 1-1 til punkterne i $\mathbb{F}$. Vi ser også at $L_{\mathcal{V}}$ er lineær og derfor er addition og skalarmultiplikation også defineret mellem V og $\mathbb{F}$. Dette betyder at vi kan arbejde med V som om det blot var $\mathbb{F}$. Konsekvensen af dette er at oversættelsen afhænger af valget af basis $\mathcal{V}$ for $\mathbb{F}$.

Def. 8.2 (Koordinatvektorer) *Lad $\mathcal{V} = (v_1, \cdots, v_n)$ betegne en basis for et $\mathbb{F}$-vektorrum V. Med* ***koordinatvektoren*** *for et element $v \in V$ mht. basen $\mathcal{V}$ menes elementet $L_{\mathcal{V}}^{-1}(v) \in \mathbb{F}^n$. Koordinatvektoren betegnes også med $[v]_{\mathcal{V}}$*
Med andre ord kan vi beskrive koordinatvektoren $[v]_{\mathcal{V}}$ for $v \in V$ som den vektor

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^n \tag{8.8}$$

som opfylder relationen

$$v = \alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2 + \cdots + \alpha_n \cdot v_n \tag{8.9}$$

Da afbildningen

$$\begin{aligned} [\,\cdot\,]_{\mathcal{V}} :& V \to \mathbb{F}^n \\ & v \mapsto [\,v\,]_{\mathcal{V}} \end{aligned}$$

er en lineær transformation har vi at skalarmultiplikation og addition gælder for koordinatvektoren.

Def 8.5 (Koordinattransformationsmatrix) *Standardmatrixrepræsentationen* $\mathcal{M}(L_{\mathcal{V}}^{-1} \circ L_{\mathcal{W}} \in Mat_n(\mathbb{F})$ *for den lineære afbildning* $L_{\mathcal{V}}^{-1} \circ L_{\mathcal{W}}$ *kaldes for* ***koordinattransformationsmatricen*** *for overgangen fra* $\mathcal{W}$*-basen tuk* $\mathcal{V}$*-basen. Koordinattransformationsmatricen betegnes også med* ${}_{\mathcal{V}}[\square]_{\mathcal{W}}$
Umiddelbart følger

Proposition 8.6 *Lad* $\mathcal{V}, \mathcal{U}$ *og* $\mathcal{W}$ *betegne baser for et* $\mathbb{F}$*-vektorrum* V*. Så*

(1) $[\,v\,]_{\mathcal{V}} ={}_{\mathcal{V}} [\square]_{\mathcal{W}} \cdot [\,v\,]_{\mathcal{W}}$ for $v \in V$
(2) Hvis $A \in Mat_{n,n}(\mathbb{F})$ opfylder relationen
$$[v]_{\mathcal{V}} = A \cdot [\,v\,]_{\mathcal{W}}$$
for alle $v \in V$, så er $A ={}_{\mathcal{V}} [\square]_{\mathcal{W}}$
(3) ${}_{\mathcal{V}}[\square]_{\mathcal{V}}$ er identitetsmatricen
(4) ${}_{\mathcal{W}}[\square]_{\mathcal{V}} \cdot{}_{\mathcal{V}} [\square]_{\mathcal{U}} ={}_{\mathcal{W}} [\square]_{\mathcal{U}}$
(5) ${}_{\mathcal{W}}[\square]_{\mathcal{V}}$ er invertibel med inverse ${}_{\mathcal{V}}[\square]_{\mathcal{W}}$

Def. 8.9 (Matrixrepræsentation) *Standardmatrixrepræsentationen* $\mathcal{M}(L_{\mathcal{W}}^{-1} \circ L \circ L_{\mathcal{V}}) \in Mat_{m,n}(\mathbb{F})$ *kaldes for* ***Matrixrepræsentationen*** *for* L *mht. baserne* $\mathcal{V}$ *og* $\mathcal{W}$*. Matrixrepræsentationen betegnes også med notationen* ${}_{\mathcal{W}}[L]_{\mathcal{V}}$ Eller:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\quad \text{L} \quad} & W \\ L_{\mathcal{V}} \uparrow & & \downarrow L_{\mathcal{W}}^{-1} \\ \mathbb{F}^n & \xrightarrow{L_{\mathcal{W}}^{-1} \circ L \circ L_{\mathcal{V}}} & \mathbb{F}^m \end{array}$$

Proposition. 8.11
Lad $L : V \to W$ *betegne en lineær afbildning mellem* $\mathbb{F}$*-vektorrum* V *og* W *med baser hhv.* $\mathcal{V}$ *og* $\mathcal{W}$*. Så:*

(1) $[L(v)]_{\mathcal{W}} ={}_{\mathcal{W}} [L]_{\mathcal{V}} \cdot [v]_{\mathcal{V}}, \forall v \in V$
(2) *Hvis* $A \in Mat_{m,n}(\mathbb{F})$ *opfylder relationen*
$[L(v)]_{\mathcal{W}} = A \cdot [v]_{\mathcal{V}}$
$\forall v \in V$*, så er* $A ={}_{\mathcal{W}} [L]_{\mathcal{V}}$

Bevis: udsagn (1) følger via

$$
\begin{aligned}
{}_{\mathcal{W}}[L]_{\mathcal{V}} \cdot [v]_{\mathcal{V}} &= \mathcal{M}(L_{\mathcal{W}}^{-1} \circ L \circ L_{\mathcal{V}}) \cdot [v]_{\mathcal{V}} \\
&= (L_{\mathcal{W}}^{-1} \circ L \circ L_{\mathcal{V}})([v]_{\mathcal{V}}) \\
&= (L_{\mathcal{W}}^{-1} \circ L)(v) \\
&= L_{\mathcal{W}}^{-1}(L(v)) \\
&= [L(v)]_{\mathcal{W}}
\end{aligned}
$$

For herefter at indse udsagn (2) sætter vi $B =_{\mathcal{W}} [L]_{\mathcal{V}}$. Det implicerer da

$$L_A([v]_{\mathcal{V}}) = A \cdot [v]_{\mathcal{V}} = [L(v)]_{\mathcal{W}} = B \cdot [v]_{\mathcal{V}} = L_B([v]_{\mathcal{V}}), \forall v \in V$$

Men vi ved at ethvert element i $\mathbb{F}^n$ er på formen $[v]_{\mathcal{V}}$, for et passende $v \in V$, og dermed er $L_A = L_B$, specielt (iflg. **Korollar 6.7**) og udsagn 2 følger derfor.

$\square$

BEMÆRK:

$${}_{\mathcal{W}}[\mathrm{Id}]_{\mathcal{V}} = \mathcal{M}(L_{\mathcal{W}}^{-1} \circ \mathrm{Id} \circ L_{\mathcal{V}}) = \mathcal{M}(L_{\mathcal{W}}^{-1} \circ L_{\mathcal{V}}) =_{\mathcal{W}} [\square]_{\mathcal{V}}$$

LEMMA 8.21 *Lad $L : V \to W$ betegne en lineær afbildnings, og lad $\mathcal{V}$ og $\mathcal{W}$ betegne baser for hhv V og W. Så gælder:*

$$
\begin{aligned}
&(1)\ v \in ker(L) \Leftrightarrow [\,v\,]_{\mathcal{V}} \in N({}_{\mathcal{W}}[L]_{\mathcal{V}}), v \in V \\
&(2)\ w \in L(V) \Leftrightarrow [\,w\,]_{\mathcal{W}} \in R({}_{\mathcal{W}}[L]_{\mathcal{V}}, w\ inW
\end{aligned}
$$

Bevis: Først vil vi bevise påstand (1)
Idet $L_{\mathcal{W}}$ er en isomorfi, så er $v \in V$ et element i $ker(L)$

$$\Leftrightarrow L_{\mathcal{W}}^{-1}(L(v)) = 0 \tag{1}$$

Men

$$L_{\mathcal{W}}^{-1}(L(v)) = [L(v)]_{\mathcal{W}}]$$

som ifølge **Prop. 8.11** var lig

$$[L(v)]_{\mathcal{W}} =_{\mathcal{W}} [L]_{\mathcal{V}} \cdot [v]_{\mathcal{V}}$$

Hvoraf udsagn (1) følger umiddelbart i og med

$$[{}_{\mathcal{W}}[L]_{\mathcal{V}} \cdot [v]_{\mathcal{V}} = [L(v)]_{\mathcal{W}} = L_{\mathcal{W}}^{-1}(L(v)) = 0$$

Vi beviser udsagn (2).

Hvis $w \in L(V), w \in W \Rightarrow \exists v \in V \Rightarrow w = L(v)$

$$\Rightarrow [\,w\,]_{\mathcal{W}} = [L(v)]_{\mathcal{W}} = _{\mathcal{W}}[L]_{\mathcal{V}} \cdot [\,v\,]_{\mathcal{V}} \Rightarrow [\,w\,]_{\mathcal{W}} \in R(_{\mathcal{W}}[L]_{\mathcal{V}})$$

Omvendt $w \in R(_{\mathcal{W}}[L]_{\mathcal{V}}), \exists a \in \mathbb{F}^n (dim(V) = n)$

$$[\,w\,]_{\mathcal{W}} = _{\mathcal{W}}[L]_{\mathcal{V}} \cdot a$$

Sæt $v = L_{\mathcal{V}}(a)$

$$\begin{aligned} [L(v)]_{\mathcal{W}} &= _{\mathcal{W}}[L]_{\mathcal{V}} \cdot [\,v\,]_{\mathcal{V}} \\ &= _{\mathcal{W}}[L]_{\mathcal{V}} \cdot a \\ &= [\,w\,]_{\mathcal{W}} \end{aligned}$$

$L_{\mathcal{W}}$ isomorfi $\Rightarrow w = L(v) \Rightarrow w \in L(V)$ □

Hvilket vi kan bruge til at vise

Lemma 8.22 *Lad $L : V \to W$ betegne en lineær afbildning og lad $\mathcal{V}$ og $\mathcal{W}$ betegne baser for hhv. V og W. Lad r betegne rangen af matrixrepræsentationen $_{\mathcal{W}}[L]_{\mathcal{V}}$ så gælder:*

$$\begin{aligned} &(1)\ L_{\mathcal{V}}(N(_{\mathcal{W}}[L]_{\mathcal{V}})) = ker(L). \text{ Specielt inducerer } L_{\mathcal{V}} \text{ en isomorfi for} \\ &\quad N(_{\mathcal{W}}[L]_{\mathcal{V}}) \to ker(L) \\ &\Rightarrow \dim(ker(L)) = \dim(V) - r \\ &(2)\ L_{\mathcal{W}}(R(_{\mathcal{W}}[L]_{\mathcal{V}}) = L(V). \text{ Specielt inducerer } L_{\mathcal{W}} \text{ en isomorfi for} \\ &\quad R(_{\mathcal{W}}[L]_{\mathcal{V}} \to L(V) \\ &\Rightarrow \dim(L(V)) = r \end{aligned}$$

Bevis: Ifølge **Lemma 8.21** er elementerne i $N(_{\mathcal{W}}[L]_{\mathcal{V}})$ på formen $[\,v\,]_{\mathcal{V}}, v \in ker(L)$

$$L_{\mathcal{V}}([\,v\,]_{\mathcal{V}}) = v$$

Hvilket afslutter beviset af første del af (1). Dimensionsidentiten følger af 6.22, 7.29(2) og

$$dim(ker(L)) = dim(N(_{\mathcal{W}}[L]_{\mathcal{V}})) = dim(V) - r$$

Udsagn (2) vises på lignende vis. □

5 Indre Produkt

Vi har for et legeme $\mathbb{K}$ enten $\mathbb{C}$ eller $\mathbb{R}$ med vektorrum V over $\mathbb{K}$. Vi kan dermed definere vinkler og længder vha. det indre produkt med afbildningen

$$\langle \cdot, \cdot \rangle \;\; V \times V \to \mathbb{K}$$

Vi betegner da $(v, w) \in V \times V$ under $\langle \cdot, \cdot \rangle$ med $\langle v, w \rangle$.

Definition. 9.1 (Indre produkt)

5.1 Disposition

- ***Def. 9.1 (Indre produkt)***
- ***Def. 9.5 (Norm)***
- ***Def. 9.7 (Ortogonalitet)***
- ***Prop. 9.9 (Pythagoras' Sætning), m. bevis***
- ***Def. 9.11 (Projektion på vektor)***
- ***Prop. 9.12 (Cauchy-Schwarz' ulighed)***

5.2 Udspecificering

Afbildningen ovenfor kaldes for et indre produkt på et vektorrum V såfremt der gælder for $u, v, w \in V, \alpha, \beta \in \mathbb{K}$

$$\begin{aligned}
&(a)\ \textit{Skalaren } \langle v, v \rangle \textit{ er et reelt tal og } \langle v, v \rangle \geq 0 \\
&(b)\ \langle v, v \rangle = 0 \Rightarrow v = 0 \\
&(c)\ \langle v, w \rangle = \overline{\langle w, v \rangle} \\
&(d)\ \langle \alpha \cdot u + \beta \cdot v, w \rangle = \alpha \cdot \langle u, w \rangle + \beta \cdot \langle v, w \rangle
\end{aligned}$$

V er dermed et indre produkt rum

Definition. 9.5 (Norm)
Lad V betegne et indre produkt rum. Vi siger da at normen af $v \in V$ defineres som

$$||v|| = \sqrt{\langle v, v \rangle} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$$

Definition. 9.7 (Ortogonalitet)
Elementer v, w i et indre produkt rum kaldes ortogonale hvis $\langle v, w \rangle = 0$. I givet fald skriver vi $v \perp w$

Proposition. 9.9 (Pythagoras' sætning)
Lad v, w betegne ortogonale vektorer i et indre produkt rum V

$$||v + w||^2 = ||v||^2 + ||w||^2$$

Bevis: Det følger ved anvendelse af **Def. 9.1(d)** og at $\langle w, \alpha \cdot u + \beta \cdot v\rangle = \overline{\alpha} \cdot \langle w, u\rangle + \overline{\beta} \cdot \langle w, v\rangle$ ifølge **Bemærkning 9.2(ii)**

$$\begin{aligned}
||v + w||^2 &= \langle v + w, v + w\rangle \\
&= \langle v, v\rangle + \langle v, w\rangle + \langle w, v\rangle + \langle w, w\rangle \\
&= \langle v, v\rangle + \langle w, w\rangle \\
&= ||v||^2 + ||w||^2
\end{aligned}$$

Hvor tredje lighedstegn netop følger af elementernes ortogonalitet.

□

Definition. 9.11 (Projektion på vektor)
Lad $v, w \in V, w \neq 0$ Så kaldes

$$p = \frac{\langle v, w\rangle}{\langle w, w\rangle} w$$

den ortogonale projektion af v på w.

Proposition. 9.12 (Cauchy-Schwarz' ulighed)
For vektorer v, w i et I.P.-rum V har vi uligheden

$$|\langle v, w\rangle| \leq ||v|| \cdot ||w||$$

hvor venstresiden betegner modulus værdien af tallet $\langle v, w\rangle$

Bevis: Uligheden er opfyldt, hvis $w = 0$ ifølge **Lemma 9.6(3)**. Vi antager derfor at $w \neq 0$ og lad p betegne den ortogonale projektion af v på w. Så er

$$v = p + (v - p)$$

og $p \perp v - p$. Ifølge Pythagoras er $||v||$ derfor

$$||v||^2 = ||p||^2 + ||v - p||^2 \geq ||p||^2$$

Specielt $||v|| \geq ||p||$. Men definitionen af projektionen sammen med at $||\alpha v|| = |\alpha| \cdot ||v||$ i **Lemma 9.6(2)** betyder at

$$||p|| = \frac{|\langle v, w\rangle|}{||w||^2} \cdot ||w|| = \frac{|\langle v, w\rangle|}{||w||}$$

$$\Rightarrow ||v|| \geq \frac{|\langle v, w\rangle|}{||w||}$$

Som netop er ækvivalent til det vi vil bevise.

$\square$

6 Ortogonalt komplement og projektion

6.1 Disposition

- **Def. 10.1 (Ortogonale og ortonormale mængder)**
- **Def. 10.5 (Ortogonalt komplemet)**
- **Def. 10.11 (Ortogonalt projektion på underrum)**
- **Lemma 10.12**
- **Lemma 10.13**

6.2 Udspecificering

Definition. 10.1 (Ortogonale og ortonormale mængder) $v_1, v_2, \cdots, v_n \in V$ *kaldes en ortogonal mængde, hvis*

$$\begin{aligned}&(a)\ v_i \neq 0, i = 1, 2, \cdots, n\\&(b)\ v_i \perp v, i \neq j\\&\textit{Hvis også}\\&(c)\ ||v_i|| = 1, i = 1, 2, \cdots, n\\&\textit{kaldes mængden ortonormal}\end{aligned}$$

Definition. 10.5 (Ortogonalt komplemt) *Lad W betegne et underrumi et indre produktrum V. Det* ***ortogonale komplement*** *til W i V defineres som mængden*

$$W^\perp = \{\mathbf{v} \in V | \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = 0 \textit{ for alle } w\ \mathbf{w} \in W$$

Definition. 10.11 (Ortogonal projektion på underrum *Lad W betegne et underrum i et indre produkt rum V, og lad* $\mathbf{v} \in V$ *betegne et element i V. Et element* $\mathbf{p} \in W$ *kaldes for en* ***ortogonal projektion*** *af* $\mathbf{v}$ *på W, hvis* $\mathbf{v} - \mathbf{p}$ *er et element i* $W^\perp$

Lemma. 10.12 *Lad W betegne et underrum i et indre produktrum V, og lad* $\mathbf{v} \in V$ *betegne et element i V. Hvis* $\mathbf{p}$ *og* $\mathbf{p}'$ *betegner ortogonale projektioner af* $\mathbf{v}$ *på W, så er* $\mathbf{p} = \mathbf{p}'$.

Bevis: Idet $W^\perp$ er et vektorrum, så vil differensen

$$\mathbf{p} - \mathbf{p}' = (\mathbf{v} - \mathbf{p}') - (\mathbf{v} - \mathbf{p}) \in W^\perp$$

være et element i$W^\perp$. Men $\mathbf{p} - \mathbf{p}'$ er også et element i W, og dermed

$$\mathbf{p} - \mathbf{p}' \in W^\perp \cap W = \{0\}$$

Jf. Lemma 10.7 ($W \cap W^\perp = \{0\}$). Vi konkluderer, at $\mathbf{p} - \mathbf{p}' = \mathbf{0}$, hvilket er ækvivalent med det ønskede. □

Lemma. 10.13
Lad $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n$ *betegne en ortogonal mængde i et indre produktrum V, og lad W betegne spannet Span*$(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n)$*. Ethvert element i* $\mathbf{v}$ *i V kan da entydig skrives som en sum*

$$\mathbf{v} = \mathbf{p} + \mathbf{h}$$

Hvor $\mathbf{p} \in W$ *og* $\mathbf{h} \in W^{\perp}$*. Faktisk er*

$$\mathbf{p} = \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_1 \rangle}{||\mathbf{v_1}||^2} \cdot \mathbf{v}_1 + \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_2 \rangle}{||\mathbf{v_2}||^2} \cdot \mathbf{v}_2 + ... + \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_n \rangle}{||\mathbf{v_n}||^2} \cdot \mathbf{v}_n$$

Bevis: Ifølge lemma 10.12 så er det tilstrækkeligt at vise eksistensen af en opspaltning af $\mathbf{v}$ på formen $\mathbf{v} = \mathbf{p} + \mathbf{h}$. Lad $\mathbf{p}_i$, for $i = 1, 2, ..., n$, betegne den ortogonale projektion af $\mathbf{v}$ på $\mathbf{v}_i$; dvs

$$\mathbf{p}_i = \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_i \rangle}{||\mathbf{v}_i||^2} \cdots \mathbf{v}_i$$

jf. def 9.11

Definition. 9.11 *Lad* $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$*, med* $\mathbf{w} \neq 0\}$*. Så kaldes elementet*

$$\mathbf{p} = \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle}{\langle \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle} \cdot w$$

kaldes for den ***ortogonale projektion*** *af v på w.*

Sæt herefter

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \cdots + \mathbf{p}_n.$$

Idet $\mathbf{p}_i$ er et skalarmultiplum af $\mathbf{v}_i$, så vil $\mathbf{p}_i \in W$, for $i = 1, 2, ..., n$, og dermed vil $p \in W$. Det resterer derfor kun at vise at $\mathbf{v} - \mathbf{p} \in W^{\perp}$ hvilket, ifølge lemma 10.9,

Lemma. 10.9 *Lad V betegne et indre produktrum, og lad* $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n$ *betegne en samling af elementer i V. Så er*

$$Span(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n)^{\perp} = \{\mathbf{v} \in V | \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_i \rangle = 0 \text{ for } i = 1, 2, ..., n\}$$

er ækvivalent med, at

$$\langle \mathbf{v} - \mathbf{p}, \mathbf{v}_i \rangle = 0 \qquad \textbf{for } i = 1, 2, ..., n$$

Specielt vil $\mathbf{p} - \mathbf{p}_i$ være en sum af elementer, der alle er ortogonale på $\mathbf{_i}$, og dermed må

$$\langle \mathbf{p} - \mathbf{p}_i, \mathbf{v}_i \rangle = 0,$$

jf. Definition 9.1(d) ($\langle \alpha \cdot \mathbf{u} + \beta \cdot \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \alpha \cdot \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle + \beta \cdot \langle, \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$). Yderligere vil

$$\langle \mathbf{v} - \mathbf{p}_i, \mathbf{v} \rangle = 0$$

idet $\mathbf{p}_i$ er den ortogonale projektion af $\mathbf{v}$ på $\mathbf{v}_i$. Vi konkludere derfor, at

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{v} - \mathbf{p}, \mathbf{v}_i \rangle &= \langle (\mathbf{v} - \mathbf{p}) - (\mathbf{p} - \mathbf{p}_i), \mathbf{v}_i \rangle \\
&= \langle \mathbf{v} - \mathbf{p}_i, \mathbf{v}_i \rangle - \langle \mathbf{p} - \mathbf{p}_i, \mathbf{v}_i \rangle \\
&= 0 - 0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

som ønsket $\square$

EVT BEVISE LEMMA 10.9

7 Ortogonale og ortonormale baser

7.1 Disposition

- **Def. 10.1 (Ortogonale og ortonormale mængder)**
- **Prop. 10.4**
- **Def. 10.14**
- **Lemma 10.22 (Gram-Schmidt Ortogonal), m. bevis**
- **Lemma 10.23 (Gram-Schmidt Ortonormal), m. bevis**

7.2 Udspecificering

Vi har kort for ortogonale og ortonormale mængder at

Definition. 10.1 (Ortogonale og ortonormale mængder) *$v_1, v_2, \cdots, v_n \in V$ kaldes en ortogonal mængde, hvis*

(a) $v_i \neq 0, i = 1, 2, \cdots, n$
(b) $v_i \perp v, i \neq j$
Hvis også
(c) $||v_i|| = 1, i = 1, 2, \cdots, n$
kaldes mængden ortonormal

Det bør nævnes at enhver ortogonal mængde kan laves om til en ortonormale mængde ved at gå fra mængden $v_1, v_2, \cdots, v_n \in V$ til

$$\frac{1}{||v_1||}v_1 + \frac{1}{||v_2||}v_2 + \cdots + \frac{1}{||v_n||}v_n$$

Proposition. 10.4 *Lad $v_1, v_2, \cdots, v_n$ betegne en ortogonal mængde i V. Så er $\mathcal{V} = (v_1, v_2, \cdots, v_n)$ lineært uafhængig.*

Hvilket fører os videre til netop ortogonale og ortonormale baser. At hvis vi har et vektorrum W som er udspændt af en ortogonal mængde (jf. prop. 10.4) er ækvivalent til, at W har en basis hvis elementer udgør en ortogonal mængde. Hvilket giver følgende definition:

Definition. 10.14 *En ortogonal basis for et vektorrum V er en basis $\mathcal{V} = (v_1, v_2, \cdots, v_n)$, hvor $v_1, v_2, \cdots, v_n$ er en ortogonal mængde. Hvis mængden er ortonormal kaldes $\mathcal{V}$ en ortonormal basis.*

Vi skynder os hurtigt videre til en konkret algoritme til at finde ortogonale og dermed også ortonormale baser

Lemma. 10.22 (Gram-Schmidt processen)
Lad V betegne et indre produkt rum med basis $\mathcal{V} = (v_1, v_2, \cdots, v_n)$, $p_k, k = 1, 2, \cdots, n-1$ betegner den ortogonale projektion af v_{k+1} på underrummet $Span(v_1, v_2, \cdots, v_k)$ Så

$$\mathcal{W} = (v_1, v_2 - p_1, v_3 - p_2, \cdots, v_n - p_{n-1}) \tag{10.17}$$

er en ortogonal basis for $\mathcal{V}$.

Bevis: Sæt $w_1 = v_1, w_k = v_k - p_{k-1}, k = 2, 3, \cdots, n$. Pga. 10.4 og ækvivalensen i 7.10 er det tilstrækkeligt at vise at $w_1, w_2, \cdots, w_n$ er en ortogonal mængde, da vi har at hvis det netop er en ortogonal mængde er den også lineært uafhængig og dermed (jf. 7.10) en basis. $V_k = Span(v_1, v_2, \cdots, v_k), k = 1, 2, \cdots, n$. Så påstår vi at

$$v_{k+1} - p_k = w_{k+1} \in V_k^{\perp} \cap V_{k+1}, k = 1, 2, \cdots, n-1 \tag{10.18}$$

Vi ser at $p_k, k = 1, 2, \cdots, n-1$ er den ortogonale projektion af v_{k+1} på $V_k \Rightarrow w_{k+1} = v_{k+1} - p_k \in V_k^{\perp}$. Da $w_{k+1} = v_{k+1} - p_k$ er en differens af to elementer i V_{k+1} er det også selv indeholdt i V_{k+1}. Vi vil nu vise at $w_i, w_j, i < j$ er ortogonale. $j > 1$ (10.18) implicerer

$$w_j \in V_{j-1}^{\perp} \qquad\qquad w_i \in V_i \subseteq V_{j-1}$$

Det resterer at vise at $w_1, w_2, \cdots, w_n \neq 0$. Vi ser tydeligt at $w_1 = v_1 \neq 0$ idet v_1 er en del af en basis for V. Vi ser på $w_k, k > 1$. Hvis $w_k = 0 \Rightarrow v_k = p_k - 1 \in V_{k-1}$, men $\Rightarrow (v_1, v_2, \cdots, v_k)$ lineært afhængig, jf. **Lemma 7.5(2)** $\lightning$.

□

Som sagt ovenfor kan dette laves om til en ortonormal basis. Ved beviser følgende lemma

Lemma. 10.23 (Gram-Schmidt fortsat)
Lad V betegne et I.P.-rum med basis $\mathcal{V} = (v_1, v_2, \cdots, v_n)$ og lad $\mathcal{W} = (w_,1, w_2, \cdots, w_n)$ betegne den ortogonale basis som i (10.17) for V bestemt ud fra $\mathcal{V}$.

$$u_i = \frac{1}{||w_i||} w_i, i = 1, 2, \cdots, n$$

Så er

$$u_1 = \frac{1}{||v_1||} v_1$$

mens

$$u_{k+1} = \frac{1}{||v_{k+1} - p_k||}(v_{k+1} - p_k), fork = 1, 2, \cdots, n-1$$

hvor

$$p_k = \langle v_{k+1}, u_1 \rangle u_1 + \langle v_{k+1}, u_2 \rangle u_2 + \cdots + \langle v_{k+1}, u_k \rangle u_k \tag{10.22}$$

Bevis: Vi skal vise at p_k i (10.22) stemmer overens med tilsvarende notation i **Lemma 10.22**. Med andre ord er p_k den ortogonale projektion af v_{k+1} på $V_k = Span(v_1, v_2, \cdots, v_k), k = 1, 2, \cdots, n-1$. Ifølge def. i **Lemma 10.22** vil $w_k \in V_k = Span(v_1, v_2, \cdots, v_n), k = 1, 2, \cdots, n$. Specielt vil elementerne $w_1, w_2, \cdots, w_k$ udgøre en ortogonal mængde i V_k. Heraf følger det at $u_1, u_2, \cdots, u_k$ udgør en ortonormal mængde i $V_k, k = 1, 2, \cdots, n$. Vi kan igen argumentere vha. **Prop. 10.4 og 7.10** at $\mathcal{U}_k = (u_1, u_2, \cdots, u_k)$ derfor er en ortonormal basis for V_k. Specielt definerer (10.22) jf.

$$p = \frac{\langle v, v_1 \rangle}{||v_1||^2} v_1 + \cdots \frac{\langle v, v_n \rangle}{||v_n||^2}$$

den ortogonale projektion af v_{k+1} på V_k.

$\square$

8 Determinanter

8.1 Disposition

- **Def. 11.1 (Permutation)**
- **Def. 11.4 (Fortegnet af en permutation)**
- **Lemma 11.9**
- **Def. 11.10 (Determinant)**
- **Lemma 11.20, Lemma 11.16, Prop. 11.17**
- **Sætning 11.18, m. bevis**
- **Prop. 11.22 (Cramers Regel), m. bevis**

8.2 Udspecificering

Under determinanter hører tre essentielle definitioner

Def. 11.1 (Permutation) *En permutation af n elementer er en invertibel afbildning af formen*

$$\sigma : \{1, 2, 3, \cdots, n\} \to \{1, 2, 3, \cdots, n\}$$

Mængden af alle sådanne permutationer af n elementer betegnes med $\mathbb{S}_n$
Som regel anvendes for permutationer følgende notation

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

For permutationer gælder ifølge **Lemma 11.3** at enhver permutation σ af n elementer med $n \geq 2$ er en sammensætning af simple transpositioner, hvor transpositioner er den permutation, hvor

$$\sigma(i) = \begin{cases} i & \text{hvis } i \neq s \text{ og } i \neq t, \\ t & \text{hvis } i = s, \\ s & \text{hvis } i = t. \end{cases}$$

Def. 11.4 (Fortegnet af en permutation) *Lad σ betegne en permutation af n elementer. Definer*

$$M_\sigma = \{(i, j) \in \{1, 2, \cdots, n\} \times \{1, 2, \cdots, n\} \,|\, i < j \wedge \sigma(j) < \sigma(i)\}$$

og lad n_σ betegne antallet af elementer i M_σ. Fortegnet $sgn(\sigma)$ defineres som

$$sgn(\sigma) = (-1)^{n_\sigma}$$

Lemma. 11.9
Afbildningen

$$\begin{aligned}\mathbb{S}_n &\to \mathbb{S}_n \\ \sigma &\mapsto \sigma^{-1}\end{aligned}$$

er en invertibel afbildning.

Definition. 11.10 (Determinant)
Lad $A = (a_{ij}) \in Mat_n(\mathbb{F})$ *betegne en kvadratisk matrix, så definerer*

$$Det(A) = \sum_{\sigma \in \mathbb{S}_n} sgn(\sigma) \cdot a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

Vi har for determinanter

Lemma. 11.20 $Det(A) = Det(A^T)$

Lemma. 11.16 *Lad* $A, B, C, D \in Mat_n(\mathbb{F})$ *og antag* $(A \,|\, B) \sim (C \,|\, D) \Rightarrow \exists \alpha \in \mathbb{F} \backslash \{0\}$.

$$Det(C) = \alpha \cdot Det(A) \text{ og } Det(D) = \alpha \cdot Det(B)$$

Desuden har vi at

Proposition. 11.17 *En kvadratisk matrix* $A \in Mat_n(\mathbb{F})$ *er invertibel* $\Leftrightarrow Det(A) \neq 0$

Vi kan nu vise den næste vigtige sætning

Sætning. *11.18 Lad* $A, B \in Mat_n(\mathbb{F})$

$$Det(A \cdot B) = Det(A) \cdot Det(B) \tag{11.19}$$

Bevis: Vi antager først at A er singulær. Dette betyder nødvendigvis at $A \cdot B$ er singulær. Ellers ville der eksistere en invers $B \cdot (A \cdot B)^{-1}$

$$\Rightarrow A \cdot (B \cdot (A \cdot B)^{-1}) = (A \cdot B) \cdot (A \cdot B)^{-1} = I$$

Hvilket netop er umuligt da A er antaget singulær. Proposition 11.17 giver os dermed

$$Det(A \cdot B) = Det(A) = 0$$

hvilket opfylder (11.19)
Modsat hvis A er invertibel og $A \sim I$ og vi betragter $(A \,|\, A{\cdot}B) \sim (I \,|\, C)$ for $C \in Mat_n(\mathbb{F})$, $\exists \alpha \in \mathbb{F}$

$$Det(A) = \alpha \cdot Det(I) \tag{11.21}$$

og

$$Det(A \cdot B) = \alpha \cdot Det(C) \tag{11.22}$$

(11.21) implicerer $\alpha = Det(A)$

$$Det(A \cdot B) = Det(A) \cdot Det(C)$$

hvis $C = A^{-1} \cdot (A \cdot B) = B$

$\square$

Proposition. 11.22 (Cramers regel) *Lad $A \in Mat_n(\mathbb{F})$ betgne en invertibel matrix, og $b \in \mathbb{F}^n$. Lad $A_i, i = 1, 2, \cdots, n$ betegne matricen der fremkommen ved at udskifte den i'te søjle i A med b. Den entydige løsning $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)^T \in \mathbb{F}^n$ til det lineære ligningsystem $A \cdot x = b$ er da bestemt ved*

$$\alpha_i = \frac{Det(A_i)}{Det(A)}, i = 1, 2, \cdots, n$$

Bevis:

$$(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)^T \in \mathbb{F}^n \text{er bestemt ved}$$
$$b = \alpha_1 \cdot a_1 + \alpha_2 \cdot a_2 + \cdots + \alpha_n \cdot a_n \tag{11.28}$$

Specielt er den i'te søjle i A_i givet ved højresiden af (11.28). For $j \neq i$ er j'te søjle i A_i lig a_j hvilket betyder vi kan udføre ERO Type III på A_i og opnå en matrix B_i hvor den i'te søjle er $\alpha_i \cdot a_i$ mens de øvrige søjler er identiske med dem i A. Ifølge **Proposition 11.21(3)** $Det(B_i) = Det(A_i)$ mens **Proposition 11.21(2)** implicerer $Det(B_i) = \alpha_i \cdot Det(A)$

$$\Rightarrow Det(A_i) = \alpha_i \cdot Det(A)$$

$\square$

9 Egenværdier

9.1 Disposition

- **Def. 12.1 (Egenværdier og egenvektorier)**
- **Prop. 12.3**
- **Prop. 12.10**

9.2 Udspecificering

Def 12.1 Et element $\mathbf{v} \in V \backslash \{\mathbf{0}\}$ siges at være en **egenvektor** for L, såfremt der eksistere en skalar $\lambda \in \mathbb{F}$ så:

$$L(\mathbf{v}) = \lambda * \mathbf{v}$$

Så kaldes skalaren λ for en **egenværdi** hørende til egenvektoren $\mathbf{v}$. Hvis der eksistere en egenvektor for L, og den egenvektor har den egenværdi, så er λ en egenværdi for L.
Hvis $L = L_A$ (en lineær operator $L : V \to V$), for en matrix $A \in Mat_n(\mathbb{F})$, så kaldes egenværdien for L_A også egenværdien for A. Det samme gælder egenvektoren.

Proposition 12.3 Hvis $v_1, v_2, ..., v_n$ er egenvektorer for en operator $L : V \to V$, og de har parvist forskellige egenværdier $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$, så er $\mathcal{V} = (v_1, v_2, ..., v_n)$ lineært uafhængige, og specielt er $n \leq dim(V)$.

Bevises med induktion over n. Hvis $n = 1$ så er $\mathcal{V} = (v_1)$ lineært uafhængig, i det $v_1 \neq 0$, altså kan alle punkter i $\mathcal{V}$ kun opskrives med 1 vektor og derfor kun på en måde.

Bevis: Vi går ud fra at udsagnet er vist for tilfældet n-1, og at n>1. Da kan vi kigge på den lineære relation:

$$\alpha_1 * v_1 + \alpha * v_2 + ... + \alpha_n * v_n = 0 \tag{1}$$

med skalarer $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \mathbb{F}$, anvendes L på begge sider af lighedstegnet får man

$$\begin{aligned}
\mathbf{0} &= L(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i * v_i) && \text{0 er entydig bestemt i lineærtransformationer} && (2)\\
&= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i * L(v_i) && \text{Prop 6.2} && (3)\\
&= \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i * \lambda_i) * v_i && v_i \text{ er en egenvektor} && (4)
\end{aligned}$$

Vi kan nu multiplicere 1 med λ_n og derefter fratrække 2:

$$\begin{aligned}
\mathbf{0} &= \lambda_n * \mathbf{0} - \mathbf{0} \\
&= \lambda_n * \sum_{i=1}^{n} \alpha_i * v_i - \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i * \lambda_i) * v_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i * \lambda_n) * v_i - \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i * \lambda_i) * v_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i * \lambda_n - \alpha_i * \lambda_i) * v_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} \beta_i * v_i
\end{aligned}$$

Dette ser vi betyder at $\beta_i = 0$ når $i = n$:

$$\beta_n = (\alpha_n * \lambda_n - \alpha_n * \lambda_n) = \alpha_n(\lambda_n - \lambda_n) = 0$$

Grundet deres parvis forskellighed. Altså har vi en lineær relation der siger:

$$\sum_{i=1}^{n-1} \beta_i * v_i$$

Men dette har vi ud fra IH er lig 0, altså

$$\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_{n-1} = 0$$

Derfor hvis vi indsætter i 1, får vi:

$$\alpha_n * v_n = 0$$

Hvilket kun er muligt hvis $\alpha_n = 0$ grundet definitionen på egenvektorer. Vurderingen om $n \leq dim(V)$ følger fra lemma 7.8, som vi ikke vil bevise.

□

Proposition 12.10 Lad $L : V \to V$, betegne en lineær operator på vektorrum V af endelig dimension > 0. Lad $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \mathbb{F}$ betgne de forskellige egenværdier for V, og lad (med $d_i = Heo(\lambda_i)$)

$$\mathcal{V}_i = (v_{i1}, v_{i2}, ..., v_{id_i}),$$

Betegne en bases for egenrummet $E_L(\Lambda_i)$. Samlingen (ordnet i vilkårlig rækkefølge)

$$\mathcal{V} = (v_{ij})_{1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq d_i}$$

er da lienær uafhængig. Specielt er

$$\sum_{\lambda \in \mathbb{F}} Geo_L(\lambda) \leq dim(V)$$

Bevis: Bevist er som følger: Hvis vi ser på den lineære realtion

$$\sum_{i,j} \alpha_{ij} * \mathbf{v_{ij}} = \mathbf{0} \qquad \text{for skalarer } \alpha_{ij} \in \mathbb{F} \tag{1}$$

Så kan vi sætte

$$\mathbf{w}_i = \sum_{i=1}^{d_i} \alpha_{ij} * \mathbf{v}_{ij} \in E_L(\lambda_i) \qquad \text{for } i = 1, ..., k \tag{2}$$

Dette er da ækvivalent med

$$\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 + ... + \mathbf{w}_k = \mathbf{0} \tag{3}$$

Summanden $\mathbf{w}_i$ i (2), kan da enten være nulvektoren eller en egenvektor for L med egenværdi λ_i. Hvis alle $\mathbf{w}_i$ ikke er nulvektorer, vil der da være en lineær relation mellem egenvektorer hørende til forskellige egenværdier, hvilket er umuligt grundet 12.3 fortæller at egenvektorer lineært uafhænginge. Derfor må $\mathbf{w}_i = \mathbf{0}$, for i=1,...,k

Men så er (2) en lineær relation mellem basiselementerne i $\mathcal{V}_i$ for $i = 1, ..., k$, hvilket kun er muligt, hvis $\alpha_{ij} = 0$ for $j = 1, ..., d_i$. Det følger derfor, at $\mathcal{V}$ er lineært uafhængig og dermed en basis for Span($\mathcal{V}$). Specielt er

$$dim(V) \geq dim(Span(\mathcal{V})) = \sum_{i=1}^{k} d_i = \sum_{\lambda \in \mathbb{F}} Geo_L(\lambda)$$

$\square$

10 Diagonalisering

10.1 Disposition

- **Def. 13.1**
- **Prop. 13.2**
- **Lemma 13.3, m. bevis**
- **Prop. 13.5, m. bevis**
- **Korollar 13.6, m. bevis**

10.2 Udspecificering

Vi starter med den centrale definition

Definition. 13.1
Den lineære operator L kaldes diagonaliserbar, såfremt der eksisterer en basis for V, bestående af egenvektorer for L. En matrix $A \in Mat_n(\mathbb{F})$ siges at være diagonaliserbar, hvis det tilsvarende er gældende for den lineære operator $L_A : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n$

Betegnelsen diagonaliserbar bruges pga. resultatet i **Prop. 13.2** og **Lemma 13.3**. Vi vil se på begge to, men kun bevise **13.3**.

Proposition. 13.2 *Lad $\mathcal{V} = (v_1, v_2, \cdots, v_n)$ betegne en basis for V. Så er $\mathcal{V}$ en basis af egenvektorer for $L \Leftrightarrow {}_{\mathcal{V}}[L]_{\mathcal{V}}$ er diagonal. I givet fald er den i'te diagonalindgang i ${}_{\mathcal{V}}[L]_{\mathcal{V}}$ lig egenværdien for v_i*

Lemma. 13.3
Lad $A \in Mat_n(\mathbb{F})$. For en invertibel matrix $S \in Mat_n(\mathbb{F})$ vil

$$D = S^{-1}AS$$

være en diagonalmatrix $\Leftrightarrow$ søjlerne i S udgør en basis for $\mathbb{F}^n$ bestående af egenvektorer for A. I givet fald vil egenværdien for den i'te søjle i S være identisk med den i'te diagonalindgang i D. Specielt er A diagonaliserbar $\Leftrightarrow$ A er similær til en diagonalmatrix.

Bevis: Lad $S \in Mat_n(\mathbb{F})$ betegne en matrix med søjler $v_1, v_2, \cdots, v_n$. Jf. **Prop. 7.32** så udgør $\mathcal{V} = (v_1, v_2, \cdots, v_n)$ en basis for $\mathcal{F}^n$ netop når S er invertibel. Såfremt S er invertibel, så vil vi yderligere have, at

$$S =_{\mathcal{E}} [\Box]_{\mathcal{V}}$$

ifølge et tidligere eksempel, og dermed er

$$S^{-1}AS = {}_{\mathcal{E}}[\Box]_{\mathcal{V}}^{-1} \cdot {}_{\mathcal{E}}[L_A]_{\mathcal{E}} \cdot {}_{\mathcal{E}}[\Box]_{\mathcal{V}} = {}_{\mathcal{V}}[L_A]_{\mathcal{V}}$$

jf. **Korollar 8.15** og **Prop. 8.6**. Udsagnet følger da af **Prop. 13.2**

$\Box$

Proposition. 13.5
Lad $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$ betegne de forskellige egenværdier for L. Så er L diagonaliserbar $\Leftrightarrow$

$$\sum_{i=1}^{k} Geo_L(\lambda_i) = dim(V) \tag{13.2}$$

I givet fald kan man konstruere en basis for V på følgende vis: sæt $d_i = Geo_L(\lambda_i), i = 1, 2, \cdots, k$ og lad

$$\mathcal{V}_i = (v_{i1}, v_{i2}, \cdots, v_{id_i})$$

betegne en basis for $E_L(\lambda_i)$ og ordnet i vilkårlig rækkefølge

$$\mathcal{V} = (v_{ij})_{1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq d_i}$$

er da en basis for V

Bevis: Vi konstruerer $\mathcal{V}$ som angivet ovenfor. Ifølge **Prop 12.10** er $\mathcal{V}$ lineær uafhængig, og derfor en basis for $Span(\mathcal{V})$. Specielt er $Span(\mathcal{V})$ et underrum i V med

$$\sum_{i=1}^{k} d_i = \sum_{i=1}^{k} Geo_L(\lambda_i)$$

Betingelsen (13.2) er derfor ækvivalent til, at

$$dim(Span(\mathcal{V})) = dim(V)$$

hvilket, jf. **Prop. 7.12** er det samme, som at $V = Span(\mathcal{V}$. Vi skal derfor vise at L er diagonaliserbar $\Leftrightarrow V = Span(\mathcal{V})$. Vi antager venstresiden, altså at L er diagonaliserbar. Så har V en basis

$$\mathcal{W} = (w_1, w_2, \cdots, w_n)$$

bestående af egenvektorer for L ifølge **Def. 13.1**. Idet $w_j, j = 1, 2, \cdots, n$ er en egenvektor, så er $w_j \in E_L(\lambda_i)$. Specielt er w_j en linearkombination af elementerne i $\mathcal{V}_i$. Men elementerne i $\mathcal{V}_i$ er en delmængde af elementer i $\mathcal{V}$, og dermed er $w_j \in Span(\mathcal{V})$. Dette gælder for alle basiselementerne i $\mathcal{W}$ så

$$V = Span(\mathcal{W}) \subseteq Span(\mathcal{V}) \subseteq V$$

hvilket betyder at $V = Span(\mathcal{V}$ som ønsket.
Vi kan omvendt sige $V = Span(\mathcal{V})$ så er $\mathcal{V}$ en basis for V, og da $\mathcal{V}$ pr. konstruktion består af egenvektorer, så er L diagonaliserbar.

$\square$

Vi kan nu se på en konsekvens af ovenstående proposition

Korollar. 13.6
Lad L betegne en lineær operator på et vektorrum $V, dim(V) > 0$. Hvis L har n parvis forskellige egenværdier, så er L diagonaliserbar.

Bevis: Lad $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ betegne n parvis forskellige egenværdier for L. Jf. **Proposition 12.3**, så udgør disse egenværdier nødvendigvis alle mulige egenværdier for V. Udover dette er $Geo_L(\lambda_i) \geq 1, i = 1, 2, \cdots, n$. **Prop. 12.10** implicerer da

$$dim(V) = n \leq \sum_{i=1}^{n} Geo_L(\lambda_i) \leq dim(V)$$

og så er L nødvendigvis diagonaliserbar jf. **Prop.13.5**

$\square$

11 Spektralsætningen

11.1 Disposition

- **Sætning 14.20**
- **Sætning 14.18, m. bevis**
- **Bevis spektral for n = 1**
- **Lemma 14.10, m. bevis**
- **Bevis spektral for n**

11.2 Udspecificering

Sætning 14.20 Lad $L : V \to V$ betegne en selvadjungeret operator. Så eksisterer der en ortinormal basis for V bestående af egenvektorer for L med reelle egenværdier. Specielt er L ortonormal diagonaliserbar.

Først vil vi bevise at vores selvadjungeret operator L, kun har reelle egenværdier. Dette er en del af bevises for sætning 14.18.

Sætning 14.18 Lad $L : V \to V$ betegne en selvadjungeret operator. Så gælder der:

1. Alle egenværdier for L er reelle
2. Såfremt $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$ er egenvektorer for L L hørende til forskellige egenværdier, så er $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$ ortogonale.

Vi vil som sagt kun bevise udsagn 1.

Bevis: Lad $\mathbf{v}$ og $\mathbf{u}$ betegne egenvektorer for L med egenværdier hhv. λ og μ. Så gælder der både, at

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{u}, L(\mathbf{v}\rangle &= \langle \mathbf{u}, \lambda \cdot \mathbf{v}\rangle \\ &= \bar{\lambda} \cdot \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle\end{aligned}$$

men også, grundet def 14.4 for en adjungeret operator, at

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{u}, L(\mathbf{v})\rangle &= \langle L^*(\mathbf{u}), \mathbf{v}\rangle \\ &= \langle L(\mathbf{u}), \mathbf{v}\rangle \\ &= \langle \mu \cdot \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle \\ &= \mu \cdot \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle\end{aligned}$$

Dermed har vi, i tilfældet for $\mathbf{u} = \mathbf{v}$(og dermed specielt når $\lambda = \mu$, at

$$\bar{\lambda} \cdot \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = \lambda \cdot \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle$$

□

Ift. Spektralsætningen mangler vi blot nu at vise, at V har en ortonormal basis bestående af egenvektorer for L. Beviset for dette forløber via induktion i $n = dim(V)$.

Bevis: Hvis dim(V)=1, så lader vi $\mathcal{V} = (\mathbf{v}$ betegne en arbitrær prtonormalbasis i V. I givet fald er $L(\mathbf{v}) \in Span(\mathbf{v})$, og $\mathbf{v}$ er dermed også en egenvektor for L.
Antag nu, at $n > 1$, og at resultatet er vist for selvadjungerede operatorer på vektorrum af dimension $n-1$. Vi benytter sætning 14.19,

> SÆTNING 14.19 Lad $L : V \to V$ betegne en selvadjungeret operator. Så har L en reel egenværdi.

uden bevis, til at vælge en egenvektor $\mathbf{v}$ for L. Yderligere sætter vi $W = Span(\mathbf{v})^{\perp}$. For at vise at W er stabil overfor L, vil vi bevise lemma 14.10.

LEMMA 14.10 Lad $L : V \to V$ betegne en lineær operator på et endelig dimensionlet indre produktrum V af dimension > 0 over legemet $\mathbb{K}$. Lad W betegne et underrum af V der er stabilt overfor L^*. Så vil det ortogonale komplement $W^{\perp}$ være stabilt overfor L.

Bevis: Lad $\mathbf{v} \in W^{\perp}$. Vi skal vise, at $L(\mathbf{v})$ er et element i $W^{\perp}$; dvs, vi skal vise

$$\langle \mathbf{w}, L(\mathbf{v}) \rangle = 0 \qquad \text{for alle } \mathbf{w} \in W.$$

men grundet def 14.4 (adjungerede operator) så har vi

$$\langle \mathbf{w}, L(\mathbf{v}) \rangle = \langle L^*(\mathbf{w}), \mathbf{v} \rangle = 0$$

hvor det sidste lighedstegn følger, idet $L^*(\mathbf{w})$, pr. angtagel, er et element i W. □

Nu da vi har bevist lemma 14.10 kan vi med ret antage at W er stabil overfor L, idet $L = L^*$. Vi introducere operatoren $L_W : W \to W$, på W som er selvadjungeret. Dette ses ved at checke

$$\langle \mathbf{w}_1, L_W(\mathbf{w}_2) \rangle = \langle L_W(\mathbf{w}_1), \mathbf{w}_2 \rangle,$$

er opfyldt for alle $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in W$. Men dette er oplagt opfyldet da L er selvadjungeret, og idet $L_W(\mathbf{w}_i = L(\mathbf{w}_i)$ for $i = 1, 2$, pr definition af L_W.

Idet $dim(W) = n - 1$, grundet korollar 10.21 ($dim(V) = dim(W) + dim(W^{\perp})$, så implicerer induktionsantagelsen, at W har en ortonormalbasis $\mathcal{W} = (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, ..., \mathbf{w}_{n-1})$ bestående af egenvektorer for L_W (ogo dermed også for L). Sæt nu

$$\mathbf{w}_n = \frac{1}{||\mathbf{v}||} * \mathbf{v}$$

Så er elementerne i $\mathcal{V} = (\mathbf{w}a_1, \mathbf{w}_2, ..., \mathbf{w}_n)$, en ortonormal mængde: $\mathbf{w}a_1, \mathbf{w}_2, ..., \mathbf{w}_{n-1}$ er ortonormal pr. valg af $\mathcal{W}$, og $\mathbf{v}$ (og dermed $\mathbf{w}_n$ er ortogonal på $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, ..., \mathbf{w}_{n-1}$, idet $W = Span(\mathbf{v})^{\perp}$ Specielt er $\mathcal{V}$ lineært uafhængig og dermed en ortonormalbasis for V. Til sidst bemærkes, at $\mathcal{V}$ består af egenvektorer for L. Dette afslutter beviset for spektralsætningen. $\square$

12 Lineære Differentialligniner

12.1 Disposition

- **Def. 16.2 (Eksponentialfunktion)**
- **Def. Lineære Differentialligninssystemer**
- **Prop. 16.10, m. bevis**
- **Prop. 16.12**
- **Korollar 16.3, m. bevis**

12.2 Udspecificering

Vi kan kort begynde med at notere definitionen for eksponentialfunktioner

Definition. 16.2 (Eksponentialfunktion)
En afbildning $F \in Mat_n^\infty(\mathbb{K})$ kaldes for en eksponentialfunktion hørende til en kvadratisk matrix $A \in Mat_n(\mathbb{K})$, hvis følgende betingelser er opfyldt

$$\begin{aligned} &(a)\ F(0) = I \\ &(b)\ F' = A \cdot F \\ &(c)\ A \cdot F = F \cdot A \end{aligned}$$

og introducerer det egentlige emne herefter, nemlig

Definition. Lineære Differentialligningssystemer
Vi lader $A \in Mat_n\mathbb{K})$ og siger at $z \in Mat_{n,1}^\infty(\mathbb{K})$ er en løsning til det lineære differentialligningssystem hørende til A såfremt

$$z' = A \cdot z$$

z er altså en funktion

$$z : \mathbb{R} \to Mat_{n,1}(\mathbb{K}) = \mathbb{K}^n,$$
$$t \mapsto \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ \vdots \\ z_n(t) \end{pmatrix}$$

hvor $z_i \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}, i = 1, 2, \cdots, n,$ *der opfylder*

$$\begin{array}{lllll} z_1'(t) & = a_{11}z_1(t) & +a_{12}z_2(t) & + \;\cdots & +a_{1n}z_n(t) \\ z_1'(t) & = a_{11}z_1(t) & +a_{12}z_2(t) & + \;\cdots & +a_{1n}z_n(t) \\ \vdots & \quad\vdots & \quad\vdots & & \quad\vdots \\ z_n'(t) & = a_{n1}z_1(t) & +a_{n2}z_2(t) & + \;\cdots & +a_{nn}z_n(t) \end{array} \quad , \forall t \in \mathbb{R}$$

Vi omtaler $z(0)$ *som begyndelsesværdien for løsningen* z*. Det lineære differentialligningssystem hørende til* A *anvender notationen*

$$x' = A \cdot x \tag{16.11}$$

Derudover betegnes mængden af løsninger til (16.11) med $\mathcal{L}^\infty(A)$*, som samtidigt også er et underrum af* $Mat_{n,1}^\infty(\mathbb{K})$*.*

Derudover kan vi snakke om løsninger på forskellige måder. Følgende sætning specificerer dette

Proposition. 16.10
Lad $A \in Mat_n(\mathbb{K}), v \in \mathbb{K}^n$*. Der eksisterer netop én løsning til differentialligningssystemet* $x' = A \cdot x$ *med begyndelsesværdi* v*. Denne løsning er lig* $z = exp(A) \cdot v$*.*

Bevis: Vi sætter $z = exp(A) \cdot v$ og bemærker at

$$z' = exp(A)' \cdot v = (A \cdot exp(A)) \cdot v = A \cdot (exp(A) \cdot v) = A \cdot z$$

z er dermed en løsning til $x' = A \cdot x$ med begyndelsesværdi

$$z(0) = exp(A; 0) \cdot v = 1 \cdot v = v$$

Antag nu at $y \in Mat_{n,1}^\infty(\mathbb{K})$ også er en løsning til $x' = A \cdot x$ med begyndelsesværdi v. Betegn nu $exp(A) = F$ (for notationens skyld). Vi ser så

$$\begin{aligned} H : \mathbb{R} &\to Mat_{n,1}(\mathbb{K}) \\ t &\mapsto F(-t) \cdot y(t) \end{aligned}$$

med

$$\begin{aligned} H'(t) &= -F'(-t) \cdot y(t) + F(-t) \cdot y'(t) \\ &= (-A \cdot F(-t)) \cdot y(t) + F(-t) \cdot (A \cdot y(t)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

hvor der undervejs er blevet brugt regler og egenskaber for differentiation og eksponentialfunktioner. Vi kan konkludere at H er en konstant funktion.

$$H(t) = H(0) = F(-0) \cdot y(0) = I \cdot v = v, \forall t \in \mathbb{R}$$

Hvis vi nu anvender **Lemma 16.4** får vi

$$y(t) = (F(t) \cdot F(-t)) \cdot y(t) = F(t) \cdot H(t) = F(t) \cdot v = z(t), \forall t \in \mathbb{R}$$

og $y = z$, som ønsket.

□

Desuden er

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(A) &\to \mathbb{K}^n \\ z &\mapsto z(0) \end{aligned}$$

en lineær isomorfi med invers

$$v \mapsto exp(A) \cdot v, v \in \mathbb{K}^n, dim(\mathcal{L}^\infty(A) = n$$

Vi kan derudover tale om følgende sætning

Proposition. 16.12
Lad $v \in \mathbb{K}^n$ betegne en egenvektor for en matrix $A \in Mat_n(\mathbb{K})$, så er

$$z(t) = e^{\lambda \cdot t} \cdot v$$

en løsning til $x' = A \cdot x$ med begyndelsesværdi v.

Vi vil nu snakke om og bevise følgende sætning der omhandler entydige løsninger for diagonaliserbare matricer

Korollar. 16.13
Antag at $A \in Mat_n(\mathbb{K})$ er diagonaliserbar, og lad $\mathcal{V} = (v_1, v_2, \cdots, v_n)$ betegne en basis for $\mathbb{K}^n$) bestående af egenvektorer for A. Idet $\lambda_i, i = 1, 2, \cdots, n$ er egenværdien for v_i så definerer $f_i \in Mat^\infty_{n,1}(\mathbb{K})$

$$f_i(t) = e^{\lambda_i \cdot t} \cdot v_i, t \in \mathbb{R}$$

Da er $(f_1, f_2, \cdots, f_n)$ en basis for $\mathcal{L}^\infty(A)$. Specielt definerer

$$f(t) = c_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot t} \cdot v_1 + c_2 \cdot e^{\lambda_2 \cdot t} \cdot v_2 \cdots + c_n \cdot e^{\lambda_n \cdot t} \cdot v_n, t \in \mathbb{R}$$

for $c_1, c_2, \cdots, c_n \in \mathbb{K}$, den entydige løsning til $x' = A \cdot x$ med begyndelsesværdi

$$c_1 \cdot v_1 + c_2 \cdot v_2 + \cdots + c_n \cdot v_n \in \mathbb{K}^n$$

Bevis: Det bemærkes at $f_i \in \mathcal{L}^\infty, i = 1, 2, \cdots, n$ jf. **Prop. 16.12**. Derudover afbilder $f_{1,2}, \cdots, f_n$ via den tidligere lineære isomorfi i basiselementerne $v_1, v_2, \cdots, v_n$ for $\mathbb{K}^n$. At $(f_1, f_2, \cdots, f_n)$ er en basis for $\mathcal{L}^\infty(A)$ følger da af **Prop. 7.13** idet $\mathcal{V}$ er en basis for $\mathcal{K}^n$. Påstanden om f er da oplagt

□