AARHUS UNIVERSITY, SCIENCE, COMPUTER SCIENCE

Compulsary assignment 2 - optimization

Peter Burgaard - 201209175

Lavet i samarbejde med Kresten Maigaard Axelsen, 201303529, og Niels Bross, 201304189

March 2, 2016

1 PROBLEM C

Alice and Bob plays the following game, micro-Meyer: Alice flips a fair coin. Bob cannot see the result (heads or tails) but Alice can. Tails is also called micro-Meyer. Now Alice has two options: She can declare micro-Meyer or concede. If she concedes, she has to pay Bob 1 DKK. If she declares micro-Meyer, Bob now has two options. He can either concede or challenge. If he concedes, he has to pay Alice 1 DKK. If he challenges, then Alice's coin is revealed. If it is tails (i.e., micro-Meyer), Bob pays Alice 2 DKK. If it is heads, Alice pays Bob 2 DKK

- Show how to model this game as a matrix game with Alice being the maximizer and Bob being the minimizer.

Vi vælger Alice som row player, og Bob som column play

$$
\begin{aligned}
A &= \text{Alice}\\
B &= \text{Bob}\\
\text{ch} &= \text{challenge}\\
\text{co} &= \text{conside}\\
H &= \text{heads}\\
T &= \text{tails}\\
\text{mM} &= \text{micro-Meyer}
\end{aligned}
$$

B har 2 strategier:

1. ch
2. co

Mens A har 4 strategier:

1. deklarer mM lige meget om H eller T
2. co lige meget om H eller T
3. deklarer mM hvis T, og co hvis H
4. deklarer mM hvis H, og co hvis T

Vi skaber et overblik og ser, at nogle af strategier kan ikke fungere i et spil, fx kan B ikke ch hvis A co, og nogle er ulogiske som, A co på T, så disse kan sorteres fra

A	B	Mønt	A og B's udfald	Betaling fra A til B
(1)	(1)	T	A mM, B ch	-2
(1)(4)	(1)	H	A mM, B ch	+2
(3)	(1)	T	A mM, B ch	-2
(1)	(2)	T	A mM, B co	-1
(1)(4)	(2)	H	A mM, B co	-1
(3)	(2)	T	A mM, B co	-1
(3)	(1)(2)	H	A co	+1

Vi ser at strategi 4 smelter sammen med strategi 1 for A. Vi redefinere A's strategier så, 1 og 4 bliver til 1, og 3 bliver til 2. I det nederste tilfælde er det underordnet hvad B gør da A har co. Udfra d

$$\begin{aligned}
&\text{A(1),B(1): } \frac{2-2}{2} = 0 \\
&\text{A(1),B(2): } \frac{-1-1}{2} = -1 \\
&\text{A(2),B(1): } \frac{2-1}{2} = -0.5 \\
&\text{A(2),B(2): } \frac{1-1}{2} = 0
\end{aligned}$$

og får følgende payoff matrix

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} B(1) & B(2) \end{array} \\ \begin{array}{c} A(1) \\ A(2) \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -0.5 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

- What is the value of the game?

For at løse matrix gamet, skal det opstilles som et lineært program i standard form. Vi starte med, at arbejde videre med vores matrix overfor og indsætter vores v variable.

$$
\begin{aligned}
&\text{maximize } v \\
&\text{s.t.} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -0.5 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ v \end{bmatrix} \begin{matrix} \leq \\ \leq \\ = \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&x_1, x_2 \geq 0 \\
&v \text{ free}
\end{aligned}
$$

Dette kan sættes på en ikke matrix form

$$
\begin{aligned}
&\text{maximize } v \\
&\text{s.t.} \\
&-x_2 + v \leq 0 \\
&-\frac{1}{2}x_1 + v \leq 0 \\
&x_1 + x_2 = 1 \\
&x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Vi ser her, at vi har en lighed i vores constraints, som skal ændres til en ulighed. Vælger blot, at løse det efter x_1, altså

$$x_1 = 1 - x_2$$

og fjerne den fra vores lineære program, hvormed vi har følgende

$$
\begin{aligned}
&\text{maximize } v \\
&\text{s.t.} \\
&-x_2 + v \leq 0 \\
&\frac{1}{2}x_2 + v \leq \frac{1}{2} \\
&x_2 \leq 1 \\
&x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Dette giver os følgende starting dictionary

$$
\begin{aligned}
\zeta &= v \\
x_3 &= x_2 - v \\
x_4 &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x_2 - v \\
x_5 &= 1 - x_2
\end{aligned}
$$

ved at udføre (v, x_3), får vi

$$
\begin{aligned}
\zeta &= x_2 - x_3 \\
v &= x_2 - x_3 \\
x_4 &= \frac{1}{2} - \frac{3}{2}x_2 + x_3 \\
x_5 &= 1 - x_2
\end{aligned}
$$

Her ser vi, at v er præcis defineret som vores ζ, og kan derfor fjernes, hvilket giver

$$
\begin{aligned}
\zeta &= x_2 - x_3 \\
x_4 &= \frac{1}{2} - \frac{3}{2}x_2 + x_3 \\
x_5 &= 1 - x_2
\end{aligned}
$$

Ved at løse denne, med det udleverede software, altså ved brug af simplex method, har vi den optimale dictionary

$$
\begin{aligned}
\zeta &= \frac{1}{3} - \frac{2}{3}x_4 - \frac{1}{3}x_3 \\
x_2 &= \frac{1}{3} - \frac{2}{3}x_4 + \frac{2}{3}x_3 \\
x_5 &= \frac{2}{3} + \frac{2}{3}x_4 - \frac{2}{3}x_3
\end{aligned}
$$

Hvormed vi har

$$
y^* = \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]^T
$$

$$
x^* = \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]^T
$$

og ser, at vores game value er $\frac{1}{3}$, hvilket betyder en indtægt for A på $\frac{1}{3}$ DKK.

- What is an optimal randomized strategy for Alice?

En fordeling mellem strategi 1 og 2 i en propotition 2 til 1.

- What is an optimal randomized strategy for Bob?

En fordeling mellem strategi 1 og 2 i en propotition 1 til 2.