Aarhus Universitet, Datalogi

Kombinatorisk Søgning - Genaflevering 2

Peter Burgaard - 201209175

May 24, 2016

1 Aflevering 2

1.1 Vis 3-coloring er NP

Givet en graf $G(V,E)$ er sproget L_{3C} de x som er encoded grafer G, som er wellformed, og hvor der findes en proper coloring af x. For at vise $L_{3C} \in \mathbf{NP}$, verificer vi x med en coloring(vidne) c i $O(n^2)$ om hvorvidt c er en korrekt coloring. Dette sker ved at checke om alle edge E har forskellige colors for hver af deres to indgang(hver note de er sat sammen med). Lad x være en encoded matrix over de edges som er i vores graf, og lad y være en vector som inderholder coloring af de forskellige edges, så har vi

$$x \in L_{3C} \iff \left[\exists c \in \{0,1\}^* : |c| \leq |x|^2 \wedge \langle x, c\rangle \in L'\right]$$

hvor L' er sproget over coloring af grafer som G.

1.2 Konstrueer en polynomiel reduction fra 3-coloring til SAT uden brug af Cooks Theorem

SAT er the satisfiability problem, hvor man givet en CNF ligning, kan afgører om der findes en assignment således at ligning er sand. Hvis vi derfor kan lave en reduction fra en graf til en CNF har vi vist reductionen.
Måden vi checker på i polynomieltid, om et x har en coloring c, er ved at løbe dets edges igennem, og checke for deres colors, at de ikke har samme color i hver af deres indgange. Vores CNF ligning f har altså en variable for hver edge e i G. Altså må vi have for edge e_n med $n = 1,2,..,|E|$ som har indgange u_i og w_i med index $i = 1,2,3$ for hver farve vi arbejder med;

$$\forall (u_i, w_i) \in E : (\neg u_1 \vee \neg w_1) \wedge (\neg u_2 \vee \neg w_2) \wedge (\neg u_3 \vee \neg w_3)$$

Udover dette må vi også sørge for, at hver vertex v i G, har i hvert fald bliver farvet:

$$\forall v \in G : \bigvee_{1 \le i \le 3} v_i$$

samt at de kun har én farve, da hvis dette ikke var tilfældet ville vi have med en malformed graph, hvilket ikke er i sproget;

$$\forall v \in G : (\neg v_1 \vee \neg v_2) \wedge (\neg v_1 \vee \neg v_3) \wedge (\neg v_2 \vee \neg v_3)$$

Vores f er en conjugering af alle disse clauses. Reductionen kan højst udføres over $\frac{n(n-1)}{2}$ edges, hvor er $n = |V|$ altså har det en kørselstid på $O(n^2)$, da omskrivningen sker i $O(1)$. Atlså har vi en reduction i polynomiel tid, fra 3-coloring til SAT, og $3 - coloring \le SAT$.

1.3 Genafleverings spørgsmål

Hvordan man kan givet en SAT løsning finde farvningen og omvendt? For at aflæse en SAT løsning til en farvet graf, ses det at for hver variable v i G, er der én v_i for $i = 1, 2, 3$ som er sand i SAT løsningen. Sæt v til denne farve, og gentag for alle v i G.

Den anden vej, er at følge metoden beskrevet i afsnit 1.2 hvor der netop construeres en løsning f.