Komplexe Zahlen erfüllen

# Körperaxiome

riverply 22.10.2021

Wir wissen schon, dass der Körper der reellen Zahlen die Körperaxiome erfüllt. Die Körperaxiome sind nämlich:

**Additive Eigenschaften:**

K1: Je zwei Elementen $a,b \in K$ ist eindeutig ein Element $a + b \in K$ zugeordnet, das „Summe von a und b" heißt.

K2: Für a, b, c gilt das Assoziativgesetz:

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

K3: Es gibt ein Element $0 \in K$, so dass für alle $a \in K$ gilt:

$a + 0 = a$ (neutrales Element)

K4: Zu $a \in K$ gibt es ein $x \in K$ mit $a + x = 0$ (additives Inverse)

K5: Für $a, b \in K$ gilt das Kommutativgesetz:

$$a + b = b + a$$

**Multiplikative Eigenschaften:**

K6: Für $a, b \in K$ ist eindeutig ein Element $ab \in K$ zugeordnet, das „Produkt von a und b" heißt

K7: Für $a, b, c \in K$ gilt das Assoziativgesetz:

$$(ab)c = a(bc)$$

K8: Es gibt ein Element $1 \in K \setminus \{0\}$, so dass für alle $a \in K$ gilt:

$a1 = a$ (neutrales Element)

K9: Zu $a \in K \setminus \{0\}$ gibt es $x \in K$ mit $ax = 1$ (multiplikatives Inverse)

K10: Für $a,b \in K$ gilt das Kommutativgesetz:

$$ab = ba$$

**Zusammenspiel von additiver und multiplikativer Struktur:**

K11: Für $a, b, c \in K$ gilt das Distributivgesetz:

$$(a + b)c = ac + bc$$

Jetzt wird gezeigt, dass diese Körpereigenschaften auch für die Komplexen Zahlen gelten. Komplexe Zahlen und ihre Interaktionen sind nämlich folgend definiert:

1. Sie sind ein geordnetes Paar (a, b), wo a,b ∈ R. Dies können wir aber auch schreiben als a + bi.
2. Die Menge aller komplexen Zahlen wird durch C bezeichnet
   C = {a + bi: a, b ∈ R}
3. Definition von Addition und Multiplikation in C:
   i. (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i
   ii. (a + bi) (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i

Durch die Definition von 3i ist K1 gegeben, da
a, b ∈ C -> a = e + fi, b = g + hi -> a + b = (e + g) + (f + h)i
Da (e+g) eindeutig ist und (f+h) eindeutig ist, ist das geordnete Paar auch eindeutig.

K2 kann man so nachweisen:
Man rechnet erstmal die Summe in den Klammern der beiden Seiten der Klammern und rechnet zu der komplexen Zahl aus der Klammer die übrige Zahl dazu:
((a + c) + e) + ((b + d) + f)i = (a + (c + e)) + (b + (d + f))i, da dieses Assoziativgesetz bei reelen Zahlen gilt.

K3: Man nehme 0 = 0 + 0i, c = a + bi ∈ C ->
-> (a + bi) + (0 + 0i) = (a+0) + (b+0)i = a + bi

K4: Sei c = a + bi ∈ C, x = (-a) + (-b)i ->
-> c + x = (a + bi) + ((-a) + (-b)i) = (a - a) + (b - b)i = 0 + 0i = 0,
da es immer eine Inverse zu einer reelen Zahl gibt.

K5: $r = a + bi$, $s = c + di \to r + s = (a + bi) + (c + di) =$
$(a + c) + (b + d)i = (c + a) + (d + b)i = s + r$, da die Kommutativität bei reelen Zahlen gilt.

Durch die Definition von 3ii ist K6 gegeben, da
$a, b \in C \to a = e + fi, b = g + hi \to ab = (eg - fh) + (ah + fb)i$
Da $(eg - fh)$ eindeutig ist und $(ah + fb)$ eindeutig ist, ist das geordnete Paar auch eindeutig.

So lässt sich K7 nachweisen:
Nehme man erstmal das Produkt in dern Klammern und bildet danach das Produkt von der komplexen Zahl in der Klammer und der übrigen Zahl. Es ergibt sich beide Male:
$(ace - bde - adf - bcf) + (acf - bdf + ade + bce)i =$
$= ((ac - bd)e - (ad + bc)f) + ((ac - bd)f + (ad + bc)e)i =$
$= ((ce - df)a - (de + cf)b) + ((ce - df)b + (de + cf)a)i$

K8: Man nehme $1 = 1 + 0i \in C$, $c = a + bi \in C \to 1c =$
$= (1 + 0i)(a+ bi) = (1a - 0b) + (0a + 1b)i = (a) + (b)i = a + bi = c$

K9: Sei $c = a + bi$, $x = (a/(a^2 + b^2)) + (-b/(a^2 + b^2))i$
$ax = ((a(a/(a^2 + b^2))) - (-b(b/(a^2 + b^2)))) +$
$((a(-b/(a^2 + b^2))) + b(a/(a^2 + b^2))))i = 1 + 0i = 1$

K10: $r = a + bi$, $s = c + di \to rs = (ac - bd) + (ad + bc)i =$
$= (ca - db) + (da + cb)i = sr$, da das Kommutativgesetz bei reelen Zahlen gilt.

K11: $r = a + bi$, $s = c + di$, $t = e + fi \in C$ ->

-> $(r + s)t = ((a + c) + (b + d)i)(e + fi) =$

$= ((a + c)e - (b + d)f) + ((a + c)f + (b + d)e)i =$

$= (ae + ce - bf - df) + (af + cf + be + de)i =$

$= ((ae - bf) + (af + be)i) + ((ce - df) + (cf + de)i) =$

$= ((a + bi)(e + fi)) + ((c + di)(e + fi)) = rt + st$

Nun sind die Körpereigenschaften von komplexen Zahlen gezeigt.
Die komplexen Zahlen sind also auch ein Körper