



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Búsquedas de oscilaciones de neutrinos en el
experimento MiniBooNE:
análisis de aparición de neutrinos y
antineutrinos del electrón

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

FÍSICO

PRESENTA:

IKER LOIC DE ICAZA ASTIZ

DIRECTOR DE TESIS:

DR. ALEXIS ARMANDO AGUILAR ARÉVALO



2013

Esta página ha sido intencionalmente dejada en blanco.

Hoja de Datos del Jurado

Datos del alumno: De Icaza
Astiz
Iker Loic
56 05 59 09
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Física
408023917

Datos del tutor: Dr.
Alexis Armando
Aguilar
Arévalo

Datos del sinodal 1: Dr.
Juan Carlos
D'Olivo
Saez

Datos del sinodal 2: Dra.
Myriam
Mondragón
Ceballos

Datos del sinodal 3: Dra.
Gabriela
Murguía
Romero

Datos del sinodal 4: Dr.
Víctor Manuel
Romero
Rochín

Trabajo escrito: Búsquedas de oscilaciones de neutrinos en el experimento MiniBooNE:
análisis de aparición de neutrinos y antineutrinos del electrón
194 pp.
2013

Esta página ha sido intencionalmente dejada en blanco.

Agradecimientos

Antes que nada quiero agradecer a mi asesor el Dr. Alexis Aguilar Arévalo, con quien he estado trabajando desde mi servicio social, hace varios años ya. Con él he aprendido una gran variedad de temas: mis primeros programas serios fueron con su guía; principalmente de él adapté mi estilo de redacción de código, me enseñó más física experimental y estadística que lo que aprendí en toda la carrera; formando en mi lo que significa ser un buen experimentalista, mi perspectiva de la física de partículas elementales no podría ser tan amplia como lo es si no fuera por él; enseñándome la historia de los descubrimientos, así como las técnicas experimentales para hacerlos y la teoría que los explica. Mucho trabajo me costó, pero el conocimiento tan amplio que tengo sobre los neutrinos, experimental y teórico, se debe a la enorme paciencia de mi asesor. Mucho le agradezco haberme mandado a Fermilab, en donde fui parte de un activo y amable grupo de trabajo, en donde aprendí una forma distinta de hacer ciencia: mucho más colaborativa. Le agradezco su perfeccionismo y apoyo constante en todos estos años, sin los cuales no hubiera logrado enorgullecerme de esta tesis tanto como lo estoy ahora. Para mi es un rol a seguir, mostrándome la clase de físico en que me quiero convertir. Sobre todo le agradezco su amistad, gracias Alexis.

A mis sinodales les agradezco su expedita respuesta y asistencia.

Si vas a hacer una carrera en física más te vale hacerte de amigos como los míos; Citlali, Luigi, David, Corro, MaFer, Javier, Corinto, Laura, Susana, Ana Lucía y Martha. Amigos con los que he trasnochado haciendo tareas, recorrido la ciudad de noche saltando entre fiestas, con quienes he viajado, con quienes se me han pasado los tragos, agradezco que mi carrera haya sido junto con ellos. A ellos hace falta agregar a mis cuates activistas de *conCiencias*; Manuel, Carlos, Lalo y especialmente a mis amigas del *Cotorreo Científico* Cintli y Zitlali. Por si no fueran suficientes todavía hace falta agregar a más, en la facultad se conoce a mucha gente: Ely, Diana, Eulogio, Marce, Abryl, Ollin, Xitzel, Adela, Bermúdez, Bruno y otros tantos de los que no me acuerdo. También están mis amigos de antaño, los del pueblo o de otros pueblos; Andrea, Merlín, Raúl, Fidel, Bryan, Saraí y Villeda.

Definitivamente no hubiera decidido tomar el camino de partículas elementales si no fuera por el apoyo del Dr. Guy Paic para que hiciera mi estancia en DESY, Alemania. Así como a todos los amigos que hice allá: Bonnie, Gedas, Matteo, Benjamin, Francesco, Raquel y Castellar. Amigos que seguiré encontrando.

En Fermilab me la pasé de maravilla, agradezco muchísimo a Žarko Pavlović por orientarme en mis análisis así como por resolver mis dudas o ayudarme cada vez que me trababa, aún después de haber regresado a México. Richard Van de Water fue un gran tutor, el implacable portavoz del experimento MiniBooNE que mantiene el ánimo de la colaboración y la causa en alto, sin su ayuda mi trabajo

por allá no hubiera llegado muy lejos. Una estancia científica no estaría completa sin las profundas y variadas pláticas (sobre ciencia u otros temas) que sostienes con personas como Ranjan, Christina, Ben, Alexander, Jason, Thomas o Francesco (el mismo del DESY). Estando fuera de los trópicos, mucho conviene la cercanía de un cálido hogar de italianos y un ruso aficionados al buen té y café, tuve ratos memorables en casa de Vito y Evgeny.

A mis hermanos; Miguel, Pilar y sobre todo a los de mi *camada* Yannick, Isaac, Aitor y Aramis. Mis mejores amigos, mis cómplices en tantas aventuras, son el apoyo con el podré contar toda mi vida. A mi tía Luciana que tanto nos ha ayudado y en cuya casa me he sentido tan bienvenido, por tratarme como a uno de sus hijos, siempre alemando a que siga mis sueños. A mi papá y mamá, Miguel y Mariblanca, por todo su cariño y amor, por permitirme ser como soy, distinto a mis hermanos. Por educarme como lo hicieron, tan maravillado de la vida y tan cercano a mis hermanos.

Agradezco a MiniBooNE en Fermiab por permitirme usar su *cluster* administrado por el *software* Condor y al IF-UNAM por permitirme usar las tarjetas Tesla de Nvidia, para ejecutar mis análisis. Quiero expresar mi profundo agradecimiento a la Facultad de Ciencias y la Red FAE por el apoyo que recibí para ir a Fermilab. Al ICN-UNAM, en donde trabajé la mayor parte del tiempo, por todo el café que aportó. A la facultad de Ciencias de la UNAM, el mejor lugar para estudiar física en el país.



Índice general

Agradecimientos	V
Índice general	IX
Índices de figuras, tablas, algoritmos y código	XI
Figuras	XI
Tablas	XIV
Algoritmos y código	XIV
Resumen / Abstract	XV
Introducción	XVII
1. Neutrinos	1
1.1. Acontecimientos históricos experimentales	1
1.2. El modelo estándar de partículas elementales	8
1.2.1. Interacciones fundamentales	10
1.2.2. Propiedades de los neutrinos	12
1.3. Fuentes de neutrinos	15
1.3.1. Reactores nucleares	15
1.3.2. Aceleradores de partículas	16
1.3.3. Manto y núcleo terrestre	17
1.3.4. Atmósfera	17
1.3.5. Sol	18
1.3.6. Supernovas y cataclismos estelares	18
1.3.7. <i>Big Bang</i>	19
1.4. Oscilación de neutrinos	19
1.4.1. Oscilación de 2ν en el vacío	20
1.4.2. Oscilación de 3ν en el vacío	22
1.4.3. Efecto MSW	24
1.4.4. Consideraciones experimentales	24
1.4.5. Mediciones directas de la masa de los neutrinos	28
1.4.6. Decaimiento beta doble sin neutrinos	29
1.4.7. Estatus experimental de oscilaciones de neutrinos	30
1.5. LSND	37

2. Experimento MiniBooNE	39
2.1. El haz de neutrinos del Booster	40
2.1.1. El haz primario de protones	40
2.1.2. El blanco de protones	41
2.1.3. Enfocado de mesones secundarios	42
2.1.4. El conducto de decaimiento de mesones secundarios	43
2.2. El detector	44
2.2.1. Electrónica y sistemas de adquisición	45
2.2.2. Sistema de <i>triggers</i>	47
2.2.3. Sistemas de calibración del detector	48
2.3. Simulación Monte Carlo del haz	50
2.3.1. Predicción del flujo de neutrinos en MiniBooNE	53
2.4. Simulación Monte Carlo del detector	56
2.4.1. Interacción cuasielástica de corriente cargada (CCQE)	57
2.4.2. Producción de π^0 por interacciones de corriente neutra (NC)	58
2.4.3. El modelo óptico de MiniBooNE	60
2.5. Reconstrucción de eventos e identificación de partículas	61
2.5.1. Identificación de partículas	63
2.6. Resultados publicados por MiniBooNE	65
3. Análisis de oscilaciones	69
3.1. Nociones de probabilidad y estadística	69
3.1.1. Estadística a nivel práctico	71
3.2. Formato y procesamiento de datos liberados por MiniBooNE	81
3.2.1. Generalidades de los análisis realizados	85
3.3. Método de búsqueda por barrido unidimensional	86
3.4. Método de búsqueda por barrido bidimensional	89
3.5. Método de máxima verosimilitud	92
3.6. Método frecuentista Feldman–Cousins	94
3.6.1. Implementación del método Feldman–Cousins	96
3.7. Análisis combinado de ν y $\bar{\nu}$	101
4. Resultados	103
4.1. Búsqueda de aparición de ν_e , 2007	105
4.2. Búsqueda de aparición de ν_e , 2009	106
4.3. Búsqueda de aparición de $\bar{\nu}_e$, 2010	107
4.4. Búsqueda de aparición de ν_e , 2012–2013	109
4.5. Búsqueda de aparición de $\bar{\nu}_e$, 2012–2013	110
4.6. Búsqueda combinada de aparición de ν_e y $\bar{\nu}_e$, 2012	112
5. Conclusiones	123
Apéndices	127
A. El código	127
A.1. Código serial en C++	129
A.2. Código heterogéneo en CUDA	137

B. Condor	147
B.1. Uso de Condor en el <i>pool</i> de MiniBooNE	147
C. Implementación en un esquema de procesamiento en paralelo con CUDA	151
C.1. Descripción de la paralelización	152
D. Pruebas misceláneas del método Feldman–Cousins	155
D.1. Posición de los mínimos en los experimentos ficticios	155
D.2. Generación de matrices de covarianza con los vectores de experimentos falsos	156
D.3. Contornos obtenidos con Condor y CUDA	156
D.4. Diferencias con los contornos oficiales	157
D.4.1. PRNG alternativo	157
D.4.2. Baja y alta señal	157
E. Constricción de los errores	159
E.1. Construcción de la restricción de errores	159
F. Fibra óptica en el RWM	163
Bibliografía	167

Índices de figuras, tablas, algoritmos y código

Figuras

1.1.	Sección eficaz como función de \sqrt{s} para la reacción $e^+e^- \rightarrow h$ del experimento ALEPH en el acelerador LEP.	7
1.2.	Modelo estándar de partículas elementales.	8
1.3.	Escala de masas en el modelo estándar.	10
1.4.	Compendio del conocimiento actual de las secciones eficaces de CC $\nu_\mu(\bar{\nu}_\mu)$	13
1.5.	Ejemplo representativo de varias fuentes de neutrinos a lo largo de varios ordenes de magnitud de energía.	16
1.6.	Análogo clásico de la oscilación de neutrinos.	22
a.	Péndulos acoplados con resorte.	22
b.	Evolución temporal de los péndulos.	22
c.	Modo normal de baja frecuencia.	22
d.	Modo normal de alta frecuencia.	22
1.7.	Mezcla de neutrinos.	23
a.	Mezcla de los eigenestados de sabor y masa.	23
b.	Jerarquía de masa para tres neutrinos.	23
1.8.	Gráfica de la probabilidad de oscilación $P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\alpha)$	25
1.9.	Histogramas típicos de los resultados esperados.	26
a.	Experimento de aparición	26
b.	Experimento de desaparición.	26
1.10.	Gráfica estándar log-log de Δm^2 vs. $\sin^2 2\theta$ de contornos de confianza.	28
1.11.	Punto final del espectro beta.	29
1.12.	Resultados de experimentos de neutrinos solares.	31
a.	Proporción de datos observados y esperados por el SSM.	31
b.	Probabilidad de supervivencia de ν_e solares.	31
1.13.	Resultados de experimentos en el régimen atmosférico.	32
a.	Neutrinos atmosféricos de Super-Kamiokande.	32
b.	Eventos de MINOS.	32
1.14.	Resultados de experimentos de reactores.	34
a.	Proporción de L/E observado en KamLAND.	34
b.	Espectro observado en Daya Bay.	34

1.15.	Varios resultados de experimentos de oscilación de neutrinos.	36
a.	Compilación de la mayoría de los resultados de oscilación de neutrinos.	36
b.	Neutrinos solares y KamLAND.	36
c.	Neutrinos atmosféricos, MINOS y T2K.	36
1.16.	Anomalía de los antineutrinos de reactores nucleares de corta distancia.	37
1.17.	Resultados del experimento LSND.	38
a.	Exceso de eventos como función de L/E_ν	38
b.	Ajuste de oscilaciones sobre $(\sin^2 2\vartheta, \Delta m^2)$	38
2.1.	Vista esquemática del experimento MiniBooNE.	39
2.2.	Vista aérea de la línea del haz del experimento MiniBooNE.	41
2.3.	Estructura del haz de protones entregados por el Booster.	42
2.4.	Corno magnético.	42
a.	Blanco de berilio	42
b.	Fotografía del corno	42
2.5.	El detector MiniBooNE.	44
a.	Fotografía de la región interior y exterior del detector.	44
b.	Dibujo del detector MiniBooNE.	44
c.	Fotografía de la región de señal.	44
2.6.	Dibujo esquemático del recinto del detector MiniBooNE.	45
2.7.	Captura de carga y tiempo para un pulso de PMT.	46
2.8.	Fotografías del interior del edificio del detector.	47
a.	Paneles de la electrónica involucrada en la adquisición de datos.	47
b.	Rastreador de muones y fuentes de alto voltaje.	47
2.9.	Diagrama que resume la calibración de muones cósmicos.	49
2.10.	Distintas calibraciones de energía.	50
a.	Distribución de energía observada de electrones Michel.	50
b.	Distribución de la masa invariante de π^0	50
2.11.	Flujo total predicho de cada especie de neutrinos en el detector MiniBooNE.	54
a.	Modo de neutrinos.	54
b.	Modo de antineutrinos.	54
2.12.	Diagramas de Feynman de interacciones relevantes.	59
a.	CCQE.	59
b.	NC π^0	59
c.	CC π^\pm	59
2.13.	Identificación de partículas en MiniBooNE.	62
2.14.	Parámetros internos para la reconstrucción de trazas.	63
a.	Trazas sencillas	63
b.	Doble traza.	63
2.15.	Resultados de MiniBooNE en el modo de neutrinos de 2013.	66
a.	Distribuciones para los datos ν_e CCQE y exceso de eventos ν_e	66
b.	Regiones permitidas por MiniBooNE.	66
2.16.	Resultados de MiniBooNE en el modo de antineutrinos de 2013.	67
a.	Distribuciones para los datos $\bar{\nu}_e$ CCQE y exceso de eventos $\bar{\nu}_e$	67
b.	Regiones permitidas por MiniBooNE.	67
3.1.	Distribución normal bivariada.	74
a.	Muestreo de distribución bivariada.	74

b.	Elipses para varios valores de ρ .	74
3.2.	Construcción de una banda de confianza genérica y su uso.	77
3.3.	Bandas de confianza de 90 % N.C. para la media de una gaussiana en unidades de la desviación media cuadrática.	78
a.	Bandas de confianza implícitamente usadas.	78
b.	Bandas de confianza del método F–C.	78
3.4.	Función de verosimilitud para los parámetros vida media y tasa de descomposición en escala logarítmica.	80
3.5.	Función densidad de probabilidad de χ_k^2 .	80
3.6.	Distribuciones de E_ν^{QE} de los datos.	84
3.7.	Matriz de covarianza total y su colapso.	84
3.8.	Gráfica de $\chi_j^2(\sin^2 2\theta)$ para un valor fijo de $(\Delta m^2)_j$.	88
3.9.	Superficie $\chi^2(\sin^2 2\theta, \Delta m^2)$ con cortes de nivel.	90
3.10.	Superficie $\mathcal{L}(\sin^2 2\theta, \Delta m^2)$ con cortes de nivel para el método de máxima verosimilitud.	93
3.11.	Malla reducida.	98
3.12.	Construcción de los intervalos con el método F–C.	99
a.	Distribución de diferencias $\Delta\mathcal{L}_f^{\{p_0\}}$.	99
b.	Superficie $\Delta\mathcal{L}$.	99
c.	Superficie $\Delta\mathcal{L}_c(X\%)$.	99
d.	Intersección de las superficies $\Delta\mathcal{L}$ y $\Delta\mathcal{L}_c(X\%)$.	99
4.1.	Resultados en modo de neutrinos (475–3 000 MeV) datos liberados en 2007.	114
4.2.	Resultados en modo de neutrinos (475–3 000 MeV) datos liberados en 2009.	115
4.3.	Contornos en modo de neutrinos (200–3 000 MeV) datos liberados en 2009.	116
4.4.	Resultados en modo de antineutrinos (200–3 000 MeV) datos liberados en 2010.	117
4.5.	Contornos en modo de neutrino y antineutrinos (200–3 000 MeV) datos liberados en 2009 y 2010, respectivamente.	118
4.6.	Contornos en modo de neutrinos (200–3 000 MeV) datos liberados en 2012.	119
4.7.	Contornos en modo de antineutrinos (200–3 000 MeV) datos liberados en 2012.	120
4.8.	Histogramas del modo de neutrinos y antineutrinos (200–3 000 MeV) datos liberados en 2012.	121
4.9.	Contornos para el análisis combinado de neutrinos y antineutrinos (200–3 000 MeV) datos liberados en 2012.	122
D.1.	Posiciones de los mínimos de los experimentos ficticios.	155
a.	$(0.0003, 0.01 \text{ eV}^2)$	155
b.	$(0.0066, 4.42 \text{ eV}^2)$	155
c.	$(0.1875, 0.39 \text{ eV}^2)$	155
d.	$(0.0219, 1.31 \text{ eV}^2)$	155
D.2.	Comparación entre Condor y CUDA.	156
D.3.	Comparación con los contornos oficiales.	158
a.	Antineutrinos 2010.	158
b.	Combinado 2012.	158
c.	Neutrinos 2012.	158
d.	Antineutrinos 2012.	158
E.1.	Comparación de histogramas con errores sin constreñir y constreñidos.	161
F.1.	Esquema de operación del RWM.	164

F.2.	Gráficas en línea del RWM.	165
a.	CW1 y CW2	165
b.	CW2–CW1	165
F.3.	Defectos en el sistema con fibra óptica.	166
a.	<i>Bulto</i>	166
b.	Corrimientos de tiempo	166
c.	Colas amplias	166

Tablas

2.1.	Tiempos de vida y tasas de ramificación de los modos de decaimiento que producen neutrinos considerados en la simulación.	52
2.2.	Flujos predichos de $\nu_\mu/\bar{\nu}_\mu$ y $\nu_e/\bar{\nu}_e$ en el detector MiniBooNE.	55
a.	Flujo en modo de neutrinos.	55
b.	Flujo en modo de antineutrinos.	55
2.3.	Variaciones en el flujo total para cada especie de neutrino en modo de neutrinos y antineutrinos debido a incertidumbres sistemáticas.	57
3.1.	Transmutación permitida en las simulaciones para los distintos análisis.	82
3.2.	Valores de $\Delta\chi^2$ para determinar regiones de confianza.	87
a.	Valores correspondientes a una distribución χ^2 de un solo lado y un grado de libertad.	87
b.	Valores correspondientes a una distribución χ^2 de dos grados de libertad.	87
A.1.	Funciones usadas en los programas.	128
A.2.	Archivos que toman los programas a la entrada.	129
A.3.	Especificaciones de la tarjeta NVIDIA Tesla C2075.	137

Algoritmos y código

3.1.	Algoritmo del método de la búsqueda por barrido unidimensional.	89
3.2.	Algoritmo del método de la búsqueda por barrido bidimensional.	91
3.3.	Algoritmo del método de máxima verosimilitud.	94
3.4.	Algoritmo para generar datos ficticios $\mathbf{D}_f^{\{p_0\}}$ en el punto $p_0 \in \sin^2 2\theta - \Delta m^2$	97
3.5.	Algoritmo del método Feldman–Cousins.	101
A.1.	Código serial en C++ <code>frequentistFC_NuBar.cpp</code> para llevar a cabo las correcciones frecuentistas en el modo de antineutrinos.	137
A.2.	Código en CUDA <code>frequentistFC_NuBar.cu</code> para llevar a cabo las correcciones frecuentistas en el modo de antineutrinos.	146
B.1.	<i>Bash script</i> “ <code>submitting.sh</code> ” para mandar tareas al <i>pool</i>	149

Búsquedas de oscilaciones de neutrinos en el experimento MiniBooNE: análisis de aparición de neutrinos y antineutrinos del electrón

por

Iker Loic de Icaza Astiz

Tesis de Licenciatura. Facultad de Ciencias, UNAM

Resumen

En este trabajo se implementaron los análisis de oscilaciones por aparición de neutrinos y antineutrinos del electrón del experimento MiniBooNE empleando los datos liberados públicamente por la colaboración. Los cálculos se hicieron con algoritmos en C++, así como en procesadores gráficos en el lenguaje CUDA. Se realizaron los análisis correspondientes a las publicaciones de 2007 y 2009 en modo de neutrinos, 2010 en modo de antineutrinos, y 2013 en modo de neutrinos y antineutrinos, construyendo los intervalos de confianza en el espacio de parámetros de oscilaciones en cada caso. Los contornos calculados de este trabajo son indistinguibles de los reportados por la colaboración MiniBooNE si no se toman en cuenta las correcciones frecuentistas de Feldman y Cousins. Al implementar estas correcciones aparecen pequeñas diferencias con los contornos oficiales en la región de bajas señales, las cuales se adscriben al método de generación de experimentos ficticios empleado aquí, y que requieren más investigación. Las probabilidades del mejor ajuste y punto nulo, así como los excesos de eventos observados, presentan pequeñas variaciones respecto a los reportados en las publicaciones, las cuales provienen de una diferencia en la definición de la región de la señal usada en este trabajo, forzada por el formato de los datos liberados, y son consistentes dentro del margen de error. Este trabajo fue realizado de manera independiente a la colaboración MiniBooNE y sus resultados no son oficiales.

Director: Dr. Alexis A. Aguilar Arévalo, Instituto de Ciencias Nucleares, UNAM.

Neutrino Oscillations Searches in the MiniBooNE Experiment: electron neutrino and antineutrino appearance analyses

by

Iker Loic de Icaza Astiz

Bachelor Thesis. Facultad de Ciencias, UNAM.

Abstract

In this work we implemented the electron neutrino and antineutrino appearance oscillation analyses of the MiniBooNE experiment using the data publicly released by the Collaboration. The calculations were made with algorithms in C++ as well as in graphic processors using CUDA. We performed the analyses corresponding to the publications of 2007 and 2009 in neutrino mode, 2010 in antineutrino mode, and 2013 in neutrino and antineutrino modes, and constructed the confidence intervals in the oscillations parameter space for each case. The contours calculated in this work are indistinguishable from those reported by the MiniBooNE Collaboration when the frequentist corrections of Feldman and Cousins are not taken into account. After implementing these corrections small differences with respect to the official contours appear in the low signal regions, which are ascribed to the fake experiment generation method employed here, and that require further investigation. The best fit probabilities and null point, as the observed event excesses show small variations with respect to those reported in the publications, arising from a difference in the definition of the signal region employed here and forced by the format of the released data, and are consistent within errors. This work was carried out independently to the MiniBooNE Collaboration, and its results are not official.

Thesis Supervisor: Dr. Alexis Aguilar-Arevalo, Instituto de Ciencias Nucleares, UNAM.

Introducción

La historia de los neutrinos comienza con la investigación del decaimiento beta: después de que se hubieran observado líneas discretas en el espectro de energía del decaimiento alfa y gamma, fue una sorpresa para James Chadwick en 1914 que el espectro de energía del decaimiento beta fuera continuo. Surgieron dos posibles explicaciones: la conservación de la energía era solamente estadísticamente válida en tales procesos (preferida por Niels Bohr) o se emitía una nueva partícula sin detectar, la que se llevaba la energía y espín adicional (preferida por Wolfgang Pauli). En una carta fechada el 4 de diciembre de 1930 Pauli propone su solución al problema; una nueva partícula de espín 1/2 producida junto con el electrón pero que escapaba la detección. De esta forma el espectro continuo puede ser comprendido: tanto el electrón como esta otra partícula comparten la energía de transición, de forma que siempre sumen la energía total. Tal partícula, posteriormente bautizada por Enrico Fermi, era el *neutrino*. Los neutrinos fueron descubiertos hasta 1956 por Frederick Reines y Clyde Cowan.

La idea de las oscilaciones de neutrinos fue propuesta por primera vez por Bruno Pontecorvo en 1957, sugiriendo transiciones entre neutrinos y antineutrinos en analogía a lo que sucedía con los mesones K^0/\bar{K}^0 . La oscilación de neutrinos entre distintos sabores fue sugerida por los japoneses Ziro Maki, Masami Nakagawa y Shoichi Sakata en 1962, después del descubrimiento de los neutrinos del muón, y requería que los neutrinos tuvieran masa. Sin embargo, esa idea no estaba apoyada por la evidencia proveniente de experimentos de reactores nucleares, a pesar de que el déficit de los neutrinos solares, observado por Ray Davis en los sesentas y setentas, admitía tal solución.

A mediados de los noventa el experimento LSND en Los Alamos encontró una señal positiva para la oscilación de neutrinos generados en un acelerador y que viajaban distancias cortas. En 1998 el experimento Super-Kamiokande en Japón presentó, por primera vez, fuerte evidencia de oscilación de neutrinos producidos en la atmósfera terrestre. Fue hasta 2001 que el experimento SNO en Canadá resolvió el problema de los neutrinos solares con evidencia irrefutable de la desaparición de neutrinos provenientes del Sol que se podía explicar en términos de oscilaciones de sabores. Algunos años después las observaciones de los neutrinos atmosféricos y solares fueron verificadas por experimentos de reactores y aceleradores, sin embargo la señal observada por LSND era inconsistente con un experimento contemporáneo, KARMEN.

Las observaciones experimentales de oscilación de neutrinos han establecido contundentemente que los neutrinos no tienen masa nula. En su gran mayoría, el fenómeno de oscilaciones se explica como la mezcla de tres eigenestados de masa con tres eigenestados de sabor. De forma independiente, es un hecho experimental que hay tres sabores activos de neutrinos. Así pues, la observación hecha por el experimento LSND implica la existencia de por lo menos un neutrino estéril, un neutrino que no forma parte de las interacciones débiles pero sí de las mezclas. El experimento MiniBooNE en Fermilab fue desarrollado para corroborar o refutar el resultado de LSND, diseñado para ser sensible a la misma región del espacio de parámetros que explicaría la observación de LSND, pero con errores

sistemáticos diferentes y técnicas experimentales distintas.

En el primer resultado, buscando oscilaciones de neutrinos, MiniBooNE desfavorecía por completo la región de LSND, pero posteriormente al buscar oscilaciones antineutrinos, como las que investigó LSND, encontró una señal de oscilaciones semejante a la de LSND. Con la mejoría de las técnicas experimentales, la disminución de errores, el aumento de la estadística, mejorías en los análisis de datos y otros cambios; MiniBooNE encontró una señal de oscilación consistente con la de LSND en el modo de antineutrinos y en modo de neutrinos encontró una señal consistente ligeramente con oscilaciones. Así pues, MiniBooNE corrobora el resultado de LSND.

En este trabajo de tesis se utilizaron los datos publicados por el experimento MiniBooNE para realizar análisis de oscilaciones de aparición de neutrinos y antineutrinos del electrón. Se obtuvieron intervalos de confianza y límites de exclusión sobre el espacio de parámetros del modelo de oscilaciones con distintos métodos: búsqueda por barrido unidimensional, búsqueda por barrido bidimensional, máxima verosimilitud y con el método frecuentista de Feldman–Cousins. Se lograron reproducir, de forma independiente, la gran mayoría de los resultados de la búsqueda de oscilación de neutrinos, tanto en el modo de neutrinos como en el modo de antineutrinos, así como los resultados del análisis combinado de neutrinos y antineutrinos. Este ejercicio de repetir los resultados oficiales, sirvió a la colaboración como verificación de su trabajo y, en dos ocasiones, para hallar errores en sus algoritmos, ambos fueron reportados y corregidos. A pesar de que existen ciertas diferencias en los contornos obtenidos con el método frecuentista de Feldman–Cousins, los contornos obtenidos son estadísticamente equivalentes a los oficiales.

Se escribieron programas ex profeso para llevar a cabo los análisis, cada uno de ellos, así como para graficar los resultados. Los programas para el método de máxima verosimilitud y el método de Feldman–Cousins, los más robustos, han sido especialmente diseñados para ser sumamente eficientes y explotar las características peculiares del problema que puedan mejorar el rendimiento. Los análisis para el sumamente demandante método de Feldman–Cousins fueron ejecutados en un cúmulo de computadoras administradas con Condor en Fermilab y en un esquema en paralelo con tarjetas de vídeo NVIDIA del IF-UNAM, solamente se presentan los resultados obtenidos con las tarjetas de vídeo, pero los dos son congruentes. El rendimiento obtenido con las tarjetas de vídeo es un par de decenas de veces mayor que lo obtenido con un procesador serial común, en total el rendimiento obtenido en este trabajo es un par de centenas mayor que con los algoritmos oficiales. Lo cual significa una importante disminución en el tiempo de computo y de los recursos necesarios.

La estructura de esta tesis es la siguiente: el capítulo 1 tiene un breve resumen sobre neutrinos, haciendo énfasis teórico y experimental en las oscilaciones de neutrinos, se habla del estado experimental actual y se contextualiza el papel de los resultados de LSND y MiniBooNE. El capítulo 2 tiene la descripción del experimento MiniBooNE: la forma de generar el haz, detectar las partículas, las simulaciones usadas, los principales errores involucrados y los resultados obtenidos. El capítulo 3 contiene un apartado general sobre estadística y describe en detalle los distintos métodos usados para llevar a cabo los análisis, contiene varias imágenes originales. El capítulo 4 contiene los resultados de esta tesis, primero se hacen anotaciones sobre lo obtenido y al final del capítulo se presenta el conjunto de gráficas que se hicieron. El capítulo 5 contiene las conclusiones y comenta sobre la perspectiva del futuro de la física experimental de neutrinos. Los distintos apéndices contienen información adicional del trabajo de esta tesis, cabe resaltar que como complemento el último apéndice contiene una descripción sobre el trabajo que el autor hizo en una estancia en el Fermilab para contribuir al remplazo de un sistema de sincronización de tiempo.

La versión electrónica de este trabajo contiene más de setenta figuras a color y vínculos para moverse entre páginas: al presionar sobre los números de los índices, las referencias o el símbolo §.

Capítulo 1

Neutrinos

It doesn't matter how beautiful your theory is, it doesn't matter how smart you are.

If it doesn't agree with experiment, it's wrong.

Richard P. Feynman

Los neutrinos son lo más cercano a la nada como ninguna otra cosa que conozcamos, además son tan elusivos que son prácticamente invisibles. Tienen un rol fundamental en la física nuclear y de partículas elementales, así como en astrofísica y cosmología. Debido a que interactúan tan débilmente con la materia, algunas de sus propiedades más básicas, como su masa y simetría de conjugación de carga, son, en buena medida, desconocidas.

1.1. Acontecimientos históricos experimentales

El descubrimiento del electrón en 1897 por Joseph John Thomson empezó una nueva era en la física, la *física de partículas elementales*. Al quitarle a los átomos su carácter de “bloque constitutivo fundamental” surgió la interrogante sobre las otras partículas que podrían estar dentro del átomo. Se descubrieron una gran variedad de partículas yendo a escalas de longitud más y más pequeñas; se logró esto con la ayuda de aceleradores de partículas, equivalentemente, yendo a energías más y más altas¹. Eventualmente estos descubrimientos llevaron al actualmente aceptado *modelo estándar de la física de partículas elementales* en el cual los bloques constitutivos de la materia consisten de seis *quarks* y seis *leptones*, todos fermiones con espín 1/2. Interactúan entre sí a través de cuatro fuerzas fundamentales: gravitación, electromagnetismo (EM), la interacción fuerte y la interacción débil. En teoría cuántica de campos estas fuerzas están descritas por el intercambio de bosones, estos junto con las partículas elementales se muestran en la figura 1.2. De entre los fermiones hay unas partículas para las cuales nuestro conocimiento sigue siendo muy limitado. Al ser leptones no participan en la interacción fuerte y como no tienen carga eléctrica tampoco participan en las interacciones EM, solo participan en la interacción débil², lo que hace que sea muy difícil cualquier investigación experimental.

En lo que llamó un “remedio desesperado para salvar . . . la ley de conservación de la energía” Wolfgang Pauli escribió una carta en 1930 a la sociedad de física de Tubinga, en la que propuso la existencia de

¹El otro nombre con el que se conoce a esta área, *física de altas energías*, enfatiza el carácter experimental.

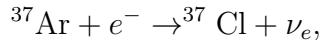
²Si no tienen una masa nula es posible que interactúen EM y gravitacionalmente.

partículas neutras en el núcleo [1, 2], en aquella carta las nombró neutrones. La carta explica que de esa forma el espectro continuo de energía en el decaimiento beta, observado por James Chadwick en 1914 [3], tendría sentido asumiendo que junto con un electrón se emite un neutrón de tal forma que la suma de energías de los tres cuerpos emitidos (nucleón, electrón y neutrón) se mantiene constante. Sin embargo, en la misma carta menciona que no se atreve a publicar tal idea y que prefiere consultarla con ellos antes; preguntando sobre que tan probable es encontrar evidencia experimental de tal partícula, más aún admite que el remedio puede parecer bastante improbable por que de existir esas partículas, ya debieron haber sido observadas hace mucho tiempo. Acaba la carta pidiendo a la sociedad de Tubinga que juzguen y escruten la propuesta y se disculpa por no poder asistir ya que debe asistir a un baile en Zúrich. Pauli determinó que además de ser neutra la nueva partícula debía tener espín 1/2 y una masa muy pequeña (a lo más 10^{-2} veces la del protón).

La idea de Pauli ganó aceptación con el descubrimiento del neutrón como constituyente de los núcleos por James Chadwick en 1932 [4] quien uso el mismo nombre. Luego en 1934 Enrico Fermi usó la idea de Pauli en su teoría del decaimiento beta [5] y acuñó el término *neutrino* que significa “pequeño neutral” para diferenciarlo de los neutrones de Chadwick. El artículo de Fermi unía el neutrino de Pauli, el positrón de Dirac y el modelo de neutrones y protones de Werner Heisenberg además de que puso una base teórica sólida para el futuro trabajo experimental. En 1942 el científico chino Wang Ganchang propuso el método detectar experimentalmente a los neutrinos [6], es también Wang quien propone el método de detección de neutrones por el cual Chadwick hizo su descubrimiento.

Experimento de retroceso nuclear de Rodeback y Allen

Podría considerarse que la primera evidencia experimental de los neutrinos [7] fue encontrada en la captura del electrón de ^{37}Ar :



la cual tiene un valor Q de 816 keV. Debido a que el proceso solo tiene dos partículas en el estado final la energía de retroceso del núcleo esta fija. Usando conservación de energía y momento, debido a que la masa en reposo de ^{37}Cl es mucho mayor que $Q \approx E_\nu$, la energía de retroceso T_{Cl} esta dada por

$$T_{\text{Cl}} = \frac{E_\nu^2}{2m_{\text{Cl}}} \approx \frac{Q^2}{2m_{\text{Cl}}} = 9.67 \text{ eV}.$$

Esta energía corresponde a una velocidad de 0.71 cm/ μ s para el núcleo ^{37}Cl . Por lo tanto la velocidad de retroceso podía ser medida por una observación retrasada en coincidencia, empezada por los electrones Auger emitidos después de la captura del electrón y detenida al medir el núcleo en retroceso [8], si el tiempo entre tales observaciones coincidía con el tiempo de vuelo de los iones en retroceso. Con una longitud de vuelo de 8 cm, se esperaba un retraso de 8.5 μ s. Se observó la señal alrededor de los 7 μ s, con mejoras posteriores al hacer correcciones experimentales. El experimento de George Rodeback y James Allen en 1952 solamente fue una indicación de detección de neutrinos, sin embargo no fue capaz de asegurar la existencia de los neutrinos.

Descubrimiento del neutrino por Cowan y Reines

En 1956 Clyde Cowan, Frederick Reines *et al.* publicaron resultados de la detección del neutrino. El experimento de neutrinos de Cowan–Reines se vale del decaimiento beta inverso en el cual un

antineutrino interactúa con un protón para generar un neutrón y un positrón:



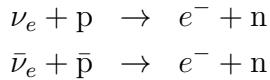
Se tienen neutrinos provenientes de un reactor nuclear los cuales interactúan con los protones de un tanque de agua con cloruro de cadmio, el positrón resultante de la interacción se aniquila inmediatamente con algún electrón del medio liberando dos rayos gamma (γ) los cuales pueden ser detectados. Por su parte el neutrón se encuentra con el cadmio, un elemento muy efectivo para capturar neutrones, llevando a cabo la siguiente reacción:



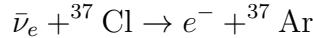
el arreglo era tal que el fotón del decaimiento del ${}^{109}\text{Cd}$ era detectado unos $5 \mu\text{s}$ después del primer par de fotones si en verdad se trataba de la interacción de un antineutrino. Es decir la coincidencia de este par de eventos es una marca característica de la interacción de un antineutrino. Casi cuarenta años después de haber publicado sus resultados se les otorgó el premio Nobel de física en 1995.

Diferencia entre ν_e y $\bar{\nu}_e$ y detección de neutrinos solares

El propósito del experimento era encontrar si los neutrinos y antineutrinos eran partículas idénticas. De ser así las reacciones



debían tener la misma sección eficaz. En el experimento real Ray Davis buscaba



usando el reactor de Brookhaven en Estados Unidos. Usaba 4000 l de CCl_4 líquido. Los átomos producidos de Ar eran extraídos burbujeando con He en el líquido y luego congelando los átomos en una trampa de carbón [9]. Como no observó el proceso que involucraba antineutrinos logró poner el límite superior

$$\bar{\sigma}(\bar{\nu}_e + {}^{37} \text{Cl} \rightarrow e^- + {}^{37} \text{Ar}) < 0.9 \times 10^{-45} \text{cm}^2,$$

cuando la predicción teórica era $\bar{\sigma} \approx 2.6 \times 10^{-45} \text{ cm}^2$.

Descubrimiento de la violación de paridad en las interacciones débiles

La *paridad* como una transformación de simetría se define como una inversión en el origen que resulta en $x \rightarrow -x$, significa que la probabilidad de cualquier proceso y del reflejado por un espejo tienen la misma probabilidad. Bajo transformaciones de paridad el ángulo de emisión cambia de acuerdo a $\theta \rightarrow \pi - \theta$, lo que lleva a $\Delta\theta \rightarrow -\Delta\theta$. En el clásico de experimento de Chien-Shiung Wu³ *et al.*, se usaron átomos polarizados de ${}^{60}\text{Co}$, implementados en una sal paramagnética a una temperatura de 0.1 K, para observar la distribución angular de emisión de electrones [10]. El decaimiento del ${}^{60}\text{Co}$ esta dado por:



³Conocida como *madame* Wu.

La configuración de espejo fue creado revirtiendo el campo magnético aplicado. Este experimento mostró que los electrones se emiten preferentemente en la dirección opuesta de espín del núcleo padre. Una muestra clara de que $\Delta\theta \neq 0$ y que el decaimiento beta, en efecto, viola la paridad.

Otro ejemplo de violación de paridad es el del decaimiento del pión en reposo de Richard Garwin *et al.* [11]. El pión positivo decae a través de la reacción

$$\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu,$$

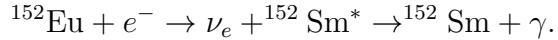
en donde el pión tiene espín 0 y decae en reposo, lo que implica que los espines del muón y el neutrino son opuestos entre sí. Si se define la *helicidad* como

$$h = \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{p}|},$$

resulta que $h(\mu^+) = h(\nu_\mu) = -1$. Al aplicar una transformación de paridad se tiene que la helicidad se transforma en $+1$. La invariancia de paridad implica que las dos helicidades deben tener la misma probabilidad y que no se debe observar una polarización longitudinal del muón. La violación hubiera quedado establecida si se hubiera observado una polarización, sin embargo resultó que era máximamente violada cuando únicamente se observó $h(\mu^+) = +1$.

Medida directa de la helicidad del neutrino

En circunstancias especiales, medir la polarización de fotones en reacciones de captura de electrones permite medir la helicidad de los neutrinos. En el experimento de Maurice Goldhaber *et al.* se usó la captura del electrón de ^{152}Eu [12]. El decaimiento está dado por



Por conservación de momento, con el decaimiento en reposo de ^{152}Eu , se tiene $\mathbf{p}_{^{152}\text{Sm}} = -\mathbf{p}_\nu$. La emisión de fotones frontales (961 keV) detienen al núcleo Sm, implicando $\mathbf{p}_\gamma = -\mathbf{p}_\nu$. Tales fotones también llevan el pequeño retroceso de $^{152}\text{Sm}^*$, esencial para absorción resonante (para tener en cuenta el efecto Doppler) que se usa para la detección. Se puede ver que el espín del neutrino y el fotón son opuestos; lo cual, al combinar con el arreglo de los momentos, implica que la helicidad del neutrino y del fotón son la misma: $h(\nu) = h(\gamma)$. La helicidad del fotón no es más que su polarización circular, medida a través de dispersión Compton en un bloque de hierro antes del proceso de absorción. Resultó que, en efecto, los neutrinos tienen una helicidad $h(\nu) = -1$, es decir los neutrinos son izquierdos.

Prueba experimental de que ν_μ y ν_e son diferentes

Si ν_e y ν_μ fueran partículas idénticas entonces las reacciones $\nu_\mu + n \rightarrow \mu^- + p$, $\bar{\nu}_\mu + p \rightarrow \mu^+ + n$; y $\nu_\mu + n \rightarrow e^- + p$, $\bar{\nu}_\mu + p \rightarrow e^+ + n$; debían ocurrir con la misma frecuencia, debido a que las últimas las pueden hacer ν_e y $\bar{\nu}_e$; de otra forma las últimas dos no debían ser observadas en lo más mínimo.

En 1962 el grupo de la universidad de Columbia dirigido por Leon Lederman, Melvin Schwartz y Jack Steinberger descubrió el neutrino del muón (ν_μ), mostrando así que existía más de una clase de neutrinos y que junto con los μ formaban la segunda generación de leptones. Tal trabajo les hizo acreedores del premio Nobel de física en 1988. El experimento se realizó en el AGS de Brookhaven

usando protones de 15 GeV que impactaban un blanco de berilio [13]. Los piones y kaones secundarios creados formaban un haz casi puro de ν_μ . Detrás de un blindaje de 13.4 m de acero, que absorbía todos los hadrones y la mayoría de los muones, se encontraban 10 módulos de cámaras de chispas de una tonelada cada uno. Se discriminaba entre muones y electrones por sus trazas características, los primeros dejan trazas rectas mientras que los otros hacen cascadas electromagnéticas. En total se observaron 29 eventos de tipo muón y 6 eventos de tipo electrón⁴, mostrando claramente que $\nu_\mu \neq \nu_e$.

Descubrimiento de la corriente neutra débil

El desarrollo de la teoría electrodébil de Sheldon Glashow, Steven Weinberg y Abdus Salam [14]; predijo la existencia del bosón Z junto con la corriente neutra (NC en inglés), y los bosones W^\pm . El descubrimiento se hizo en la cámara de burbujas *Gargamelle* en CERN [15, 16]. Se uso el sincrotrón de protones *PS* con el cual se obtenía un haz de $\nu_\mu/\bar{\nu}_\mu$ que se dirigía a una cámara de burbujas de 14 m^3 con gas freón. La búsqueda confiaba en eventos puramente hadrónicos sin leptones cargados en el estado final (eventos de corriente neutra), descritos por las reacciones

$$\begin{aligned} \nu_\mu + \text{N} &\rightarrow \nu_\mu + \text{X}, \\ \bar{\nu}_\mu + \text{N} &\rightarrow \bar{\nu}_\mu + \text{X}; \end{aligned}$$

X denota el estado hadrónico final. Además se detectaban las interacciones de corriente cargada (CC)

$$\begin{aligned} \nu_\mu + \text{N} &\rightarrow \mu^- + \text{X}, \\ \bar{\nu}_\mu + \text{N} &\rightarrow \mu^+ + \text{X}. \end{aligned}$$

En total se detectaron 102 eventos NC y 428 eventos CC en el haz de ν_μ y 64 NC y 148 CC para el haz de $\bar{\nu}_\mu$. Se tomaron del orden de 83 000 y 207 000 fotografías, para el haz de ν_μ y $\bar{\nu}_\mu$, respectivamente.

También se descubrieron eventos NC puramente leptónicos [17] provenientes de interacciones $\bar{\nu}_\mu + e \rightarrow \bar{\nu}_\mu + e$. Estas observaciones fueron confirmadas por otros experimentos.

Descubrimiento de los bosones de norma W y Z

Los bosones predichos por la teoría electrodébil finalmente fueron descubiertos en el CERN en 1983 por los experimentos *UA1* y *UA2* [18, 19, 20, 21]. Los procesos de producción eran de corriente débil y neutra dado a nivel de *quarks*

$$\begin{aligned} \bar{d} + u &\rightarrow W^+ \rightarrow e^+ + \nu_e (\mu^+ + \nu_\mu) \\ \bar{u} + d &\rightarrow W^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e (\mu^- + \bar{\nu}_\mu) \\ \bar{d} + d &\rightarrow Z^0 \rightarrow e^+ + e^- (\mu^+ + \mu^-) \\ \bar{u} + u &\rightarrow Z^0 \rightarrow e^+ + e^- (\mu^+ + \mu^-). \end{aligned}$$

Fueron experimentos complicados, ya que la sección eficaz de producción de los bosones débiles a esas energías es muy pequeña, varios ordenes de magnitud menor que las interacciones $p\bar{p}$. Los dos experimentos observaron del orden de 25 eventos Z, W , que fueron incrementados posteriormente. Con el inicio del colisionador LEP de e^+e^- en 1989 y el SLC en SLAC el número de bosones Z aumentó a varios millones y sus propiedades pudieron ser bien estudiadas. Las propiedades del W fueron investigadas en Fermilab.

⁴Se esperaban ciertos eventos de tipo electrón debido a la contaminación proveniente del decaimiento de kaones, por ejemplo $K^+ \rightarrow e^+ + \nu_e + \pi^0$.

Observación de neutrinos de la supernova 1987A

En 1987 había tres experimentos con la capacidad de detectar neutrinos provenientes de fuentes astrofísicas Kamiokande II en Japón, IMB en Estados Unidos y el experimento Baksan en la Unión Soviética. Los tres reportan la observación de neutrinos provenientes de la explosión de una súper novia tipo II por detectores subterráneos de neutrinos fue uno de los grandes logros de la astrofísica del siglo pasado. Cerca de 25 eventos de neutrinos fueron observados en un intervalo de 12 s. Fue la primera observación de neutrinos de una fuente astrofísica además del Sol. La supernova 1987A ocurrió en la gran nube de Magallanes, a una distancia de cerca de 50 kpc.

Número de sabores de neutrinos a partir del ancho de Z^0

El descubrimiento de la partícula τ por Martin Lewis Perl en 1975 [22] sugirió la existencia de un ν_τ , apuntando al esquema de tres generaciones de partículas en el modelo estándar completado en 1995 con el descubrimiento del *quark top* en Fermilab [23, 24] y con el descubrimiento del neutrino del tau por la colaboración DONUT en el 2000 también en Fermilab [25].

El número N_ν de neutrinos ligeros⁵ fue determinado en LEP al medir el ancho total de decaimiento Γ_Z de la resonancia Z^0 . Experimentalmente, la resonancia Z^0 se ajusta con cuatro parámetros diferentes que tienen pequeñas correlaciones: $m_Z, \Gamma_Z, \sigma_{\text{had}}^0 = \frac{12\pi}{m_Z^2} \frac{\Gamma_e \Gamma_{\text{had}}}{\Gamma_Z^2}$ y $R_l = \frac{\Gamma_{\text{had}}}{\Gamma_l}$.

Usando el ajuste más reciente a los cuatro experimentos de LEP [26] se deduce que el número de neutrinos es:

$$N_\nu = 2.9841 \pm 0.0083,$$

lo cual concuerda excelentemente con la expectativa teórica de 3 neutrinos. En la figura 1.1 se muestra la sección eficaz hadrónica como función de la energía para los datos del experimento ALEPH, del LEP. También se muestran las curvas de la predicción del modelo estándar para otros números de neutrinos.

Mezcla de neutrinos

El italiano Bruno Pontecorvo trabajando en la unión soviética sugirió por primera vez la idea de las oscilaciones de neutrinos en 1957 [28] sugiriendo la posibilidad de transiciones $\nu \leftrightarrow \bar{\nu}$ en analogía con las oscilaciones $K_0 \bar{K}^0$ [29, 30]. En 1962 Ziro Maki, Masami Nakagawa y Shoichi Sakata sugieren que las oscilaciones entre neutrinos de distintos sabores pueden ocurrir si la masa de los neutrinos no fuera nula. Si los estados de sabor definido y los de masa definida estuvieran relacionados a través de una transformación lineal similar a un cambio de base [31]. El formalismo matemático y la formulación de las oscilaciones en el vacío fue desarrollada por Pontecorvo [32] y un año después, en 1968, es observado el “déficit de los neutrinos solares” por Raymond Davis, Don Harmer y Kenneth Hoffman [33]. En ese mismo año Vladimir Gribov y Pontecorvo sacan un artículo en el que se adjudica el déficit de neutrinos solares al fenómeno de oscilación [34].

Varios experimentos de neutrinos solares empezaron a observar un déficit de neutrinos con respecto a lo esperado, lo que fue bautizado como “el problema de los neutrinos solares”. Además, también se observó un déficit de los neutrinos atmosféricos del muón que viajan hacia arriba, es decir de aquellos

⁵Por “ligeros” se entiende que $m_\nu < m_{Z/2}$.

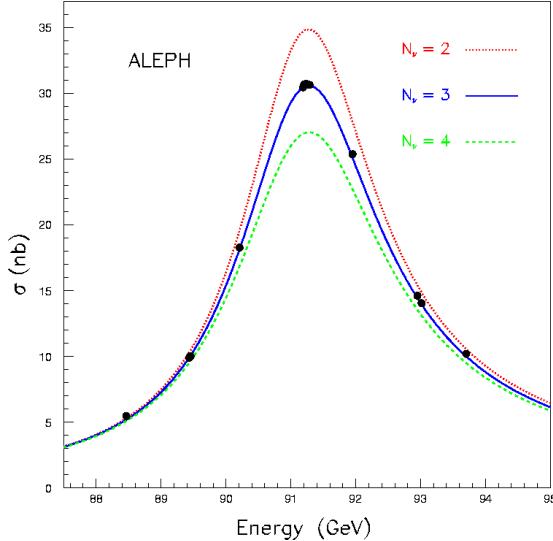


Figura 1.1: Sección eficaz como función de \sqrt{s} para la reacción $e^+e^- \rightarrow h$ del experimento ALEPH en el acelerador LEP. Las diferentes curvas muestran la predicción del modelo estándar para dos, tres y cuatro sabores de neutrinos ligeros [27].

que atraviesan la Tierra. En 1998 el experimento Super-Kamiokande en Japón dio una medida muy precisa de la oscilación de neutrinos con un rango de energía de cientos de MeV hasta algunos TeV y viajando distancias comparables al diámetro terrestre (~ 12700 km) [35]. Después de las observaciones de Davis en el experimento de Homestake, hubo varios experimentos radioquímicos y de radiación cherenkov subsecuentes que confirmaron el déficit, pero no fue sino hasta el 2001 que el Sudbury Neutrino Observatory (SNO) en Canadá tuvo suficientes datos para concluir que el déficit se debía a la oscilación de neutrinos [36, 37]. Adelante se hablará más al respecto, en § 1.3 se describen las fuentes más comunes de generación de neutrinos y en § 1.4.7 se habla más sobre los experimentos de neutrinos solares, atmosféricos y otros. En § 1.4 se describe la teoría que explica la oscilación de neutrinos.

En 1985 Stanislav Mikheyev y Alexei Smirnov, profundizando en el trabajo que hizo Lincoln Wolfenstein en 1975, notaron que la materia modifica el fenómeno de oscilación. El llamado efecto Mikheyev–Smirnov–Wolfenstein [38, 39] (efecto MSW) es de particular relevancia en el Sol en donde los neutrinos generados por fusión en el núcleo tienen que atravesar la alta concentración de electrones para salir. Los neutrinos solares tienen energías por debajo de los 20 MeV y viajan distancias del orden de 1.50×10^8 km.

A mediados de los noventas el experimento LSND en el laboratorio de Los Alamos buscó oscilaciones de neutrinos del tipo $\bar{\nu}_\mu \rightarrow \bar{\nu}_e$ con un haz de neutrinos que viajaba una distancia corta (~ 30 m) de la fuente al detector, encontrando una señal que favorecía este proceso. Sin embargo las distintas observaciones de oscilaciones implicaban tres regímenes muy distintos de oscilaciones, requiriendo la existencia de por lo menos un neutrino más, un serio conflicto con el modelo estándar. Las oscilaciones para neutrinos atmosféricos y solares fueron confirmadas, por su parte la observación de LSND permanece sin ser verificada o refutada de forma decisiva hasta la fecha. En § 1.5 se habla más sobre LSND y en el capítulo 2 se describe el experimento MiniBooNE, construido con el objetivo de verificar o refutar el resultado de LSND.

1.2. El modelo estándar de partículas elementales

A partir de un conjunto de leyes, teorías y observaciones empíricas, algunas hechas desde mediados del siglo XIX, surgió en los setenta *el modelo estándar de partículas elementales* (ME). Desde su concepción ha sido escudriñado por cientos de experimentos, la gran mayoría de los cuales ha dado fe de sus predicciones y su exactitud con gran precisión. Es verdaderamente inspirador que un conjunto de fuerzas, simetrías y bloques constitutivos básicos sean suficientes para describir la física detrás de fenómenos tan variados como las reacciones termonucleares y la combustión nuclear en el centro del Sol, así como el denso y caliente universo temprano momentos después del *Big Bang*, las reacciones que se llevan en lo alto de la atmósfera ocasionadas por partículas cósmicas, o aquellos fenómenos que se encuentran a una escala tan diminuta que hacen falta grandes acelerados para poder acceder a esos confines.

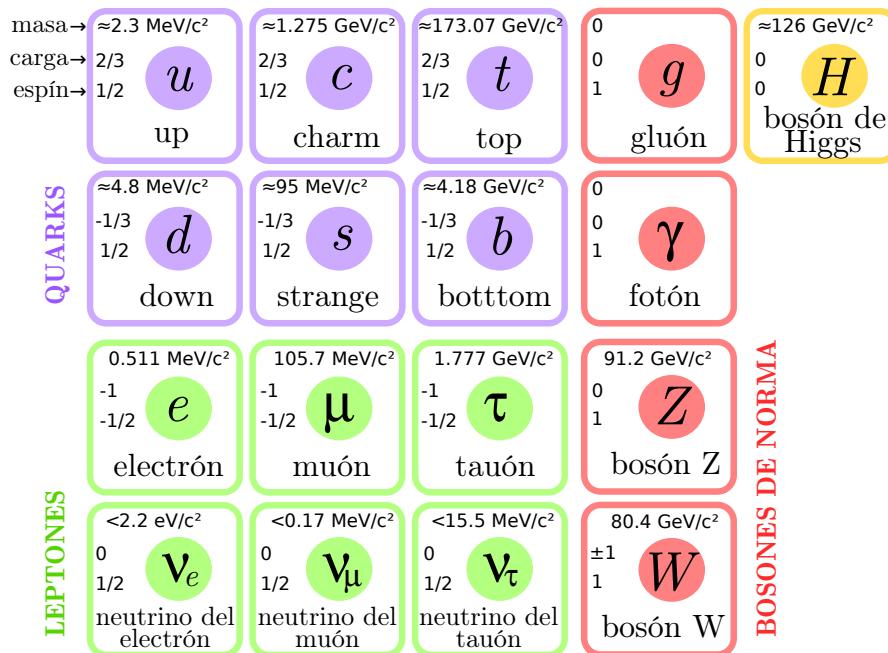


Figura 1.2: Modelo estándar de partículas elementales. Las tres primeras columnas ocupan las tres generaciones de materia; con los *quarks* en la parte superior y los leptones en la inferior, la cuarta columna tiene los bosones de norma y la quinta el bosón de Higgs. Ajustando los valores de las masas según el Particle Data Group [40] y parcialmente actualizado para la edición de 2014.

El modelo estándar de partículas elementales es una teoría sobre las interacciones electromagnéticas, la nuclear débil y la nuclear fuerte; que median la dinámica de las partículas subatómicas conocidas. Este modelo no incluye la interacción gravitacional. Las partículas elementales se dividen en *quarks* y *leptones*, y las interacciones son medidas por *bosones*. Los primeros no existen libres en la naturaleza, sino que están *confinados* en dobletes de *quark-antiquark*, formando partículas llamadas *mesones* (por ejemplo los piones y kaones) y en tripletes de *quarks*, formando bariones (los neutrones y protones por ejemplo), a los mesones y bariones en conjunto se les llama *hadrones*. Los *quarks* experimentan las cuatro interacciones fundamentales de la naturaleza, los leptones por su parte se encuentran exentos de la interacción nuclear fuerte.

A los distintos tipos de *quarks* se les dice *sabores* y hay seis distintos: *up* (*u*), *down* (*d*), *charm* (*c*), *strange* (*s*), *top* (*t*) y *bottom* (*b*). Por su parte hay seis leptones. Todos estos con su respectiva

antipartícula asociada, una partícula con la misma masa pero carga opuesta. Todas estas partículas se agrupan en tres familias o generaciones, cada generación tiene una pareja de *quarks* (uno con carga $+2/3 e$ y el otro con carga $-1/3 e$) y una pareja de leptones; uno con la carga del electrón y el otro con carga neutra. Precisamente, los leptones neutros del doblete de leptones son los *neutrinos*.

Los leptones se agrupan en dobletes de una partícula de carga negativa y un neutrino, a cada tipo de neutrino se le da el nombre del leptón cargado asociado con él; *electrón* (e) y neutrino del electrón (ν_e), *muón* (μ) y neutrino del muón (ν_μ); *tauón* (τ) y neutrino del tauón (ν_τ). Al igual que los *quarks*, a cada tipo de neutrino se le da el nombre de sabor. Las partículas del ME y su organización en generaciones se pueden apreciar en la figura 1.2.

Además de la carga eléctrica, los *quarks* tienen una propiedad llamada *carga de color*, responsable de que respondan a la interacción nuclear fuerte. Existen tres diferentes cargas (anticargas) de color: *rojo* (*antirojo*), *verde* (*antiverde*) y *azul* (*antiazul*); los hadrones se forman con *quarks* de tres colores distintos y los mesones con una pareja de color-anticolor. En vista de esto se justifica la elección de la arbitraria palabra “color” para describir tal propiedad, a saber: los hadrones solo pueden ocurrir en combinaciones incoloras, de color-anticolor o de “todos” los colores (en analogía con la luz). Un *antiquark* tiene tanto carga eléctrica como carga de color opuesta.

La primera generación del ME, formada por u , d , e y ν_e ; con sus respectivas antipartículas, forman prácticamente toda la materia en la Tierra y a través de (casi) todo el universo inmediato. En particular, los protones están formados por el triplete uud y los neutrones por udd , que, conjuntamente con los electrones, forman los átomos. Los neutrinos y antineutrinos del electrón son comúnmente emitidos en reacciones nucleares de isótopos radioactivos y solares, por ejemplo.

A pesar de su enorme éxito para describir los datos experimentales existentes con alta precisión, el ME generalmente no se considera como etapa definitiva en la unificación. Además de la inconsistencia con la teoría de la gravedad, nuevas observaciones y una variedad de resultados experimentales han mostrado que el cuadro que presenta el ME está incompleto. En particular, hay varios parámetros que, a pesar de lo que se podría esperar, no están explicados por la teoría y que se tienen que determinar experimentalmente:

- Las constantes de acoplamiento e , α_S , $\sin^2 \theta_W$.
- Las masas de los bosones m_W , m_H .
- Las masas de los leptones m_e , m_μ , m_τ .
- Las masas de los *quarks* m_u , m_d , m_s , m_c , m_b , m_t .
- Los parámetros de la matriz CKM: tres ángulos y una fase δ .

Además, la jerarquía de masa permanece sin ser explicada, figura 1.3, las partículas izquierdas y derechas se tratan de forma muy distinta, la cuantización de la carga y la igualdad del valor absoluto de la carga del electrón y el protón a un nivel mejor que 10^{-21} no está predicho. Como se mencionó, en el ME las masas de los neutrinos son nulas, por lo tanto cualquier evidencia de una masa no nula indicaría física “más allá del modelo estándar”⁶. Incluir neutrinos masivos añadiría aún más parámetros.

⁶Es cosa de gustos lo que significa exactamente “más allá del modelo estándar”. Las masas de los neutrinos pueden ser generadas dentro de la estructura de norma de $SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1)$ agrandando el contenido de partículas o añadiendo interacciones no renormalizables. A veces, aún al añadir nuevas partículas se le sigue llamando “modelo estándar”, por que la estructura de norma permanece inalterada [7].

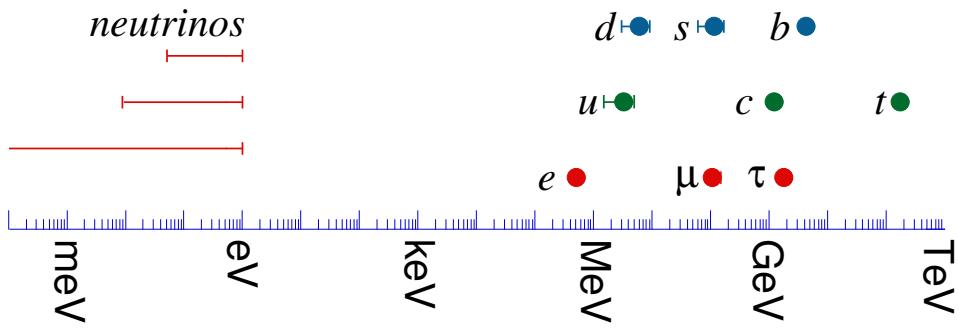


Figura 1.3: Escala de masas en el modelo estándar. La masa de las partículas de las distintas generaciones abarcan varios ordenes de magnitud, este comportamiento jerárquico sigue siendo una de las grandes interrogantes por resolver. A la izquierda se muestran las masas de los neutrinos, las partículas más ligeras, acotadas superiormente por ~ 1 eV.

1.2.1. Interacciones fundamentales

El ME está construido en base a principios de simetría, es decir, la invariancia de las leyes de la física ante un conjunto determinado de transformaciones que pueden ser efectuadas sobre un sistema físico. La existencia de simetrías en un sistema, implica la conservación de una cantidad física que describe parte del sistema. Así por ejemplo, rotar el sistema de referencia en el que se describe un sistema no invalida los resultados de uno u otro sistema, se dice que hay simetría rotacional y esta implica la conservación del momento angular; la simetría translacional, trasladar el sistema de referencia, implica la conservación del momento lineal; la simetría temporal, invariancia ante desplazamientos temporales, implica la conservación de energía del sistema.

Además de estas simetrías y sus respectivas propiedades conservadas, bien conocidas en la física clásica, el ME posee otras: *simetrías locales de norma*. Estas definen las cargas de las partículas y las propiedades de las fuerzas que actúan sobre ellas de manera análoga a aquella en la que la simetría cúbica de un objeto implica la existencia de cuatro vértices, seis caras y un grupo de rotaciones que intercambia las posiciones de las caras y vértices entre sí. De esta forma, las simetrías internas del ME implican que:

- Los *quarks* y leptones se pueden agrupar en multipletes de partículas.
- Las cargas de las partículas en cada multiplete están relacionadas de una manera definida.
- Existe un grupo de transformaciones internas que convierte a cada miembro de un multiplete en cualquier otro miembro del mismo multiplete.

Una importante implicación de estas teorías, llamadas *teorías de norma*,⁷ es que deben existir partículas mediadoras de las interacciones entre *quarks* y leptones. Estas partículas se conocen como *bosones intermediarios* o *bosones de norma*. Un *quark* o leptón emite un bosón intermediario y otro *quark* o leptón lo absorbe, y es mediante este intercambio de partículas que cada una siente la presencia o interacción de la otra. La interacción de un intermediario con un *quark* o un leptón perteneciente a un multiplete determinado, causa una de las transformaciones definidas por la simetría local de norma de la interacción asociada al intermediario, esto es, la emisión o absorción de un bosón de

⁷Ocasionalmente llamadas “Teorías de gauge”.

norma causa que un *quark* o leptón se transforme en otro miembro del multiplete al que pertenece e intercambie energía y momento en el proceso.

En el ME, cada fuerza (fuerte, débil y electromagnética), esta asociada con su propia simetría local de norma, la que asu vez determina un conjunto de cargas y un conjunto de bosones de norma que son los mediadores de la fuerza entre las partículas con cada tipo de carga.

La interacción electromagnética

Existe una sola simetría de norma asociada al electromagnetismo, y por lo tanto, un único tipo de carga eléctrica. Esta simetría de norma está relacionada con la invariancia de las propiedades observables de una partícula ante el cambio de fase de su función de onda (campo cuántico). Esta simetría es válida solo si la partícula tiene masa cero. Una consecuencia de que la masa del intermediario de la interacción electromagnética sea cero es que el alcance de la misma es infinito, puesta esta propiedad de la interacción es inversamente proporcional a la masa de su bosón intermediario. El bosón de norma de la interacción electromagnética es el fotón (γ) y tanto los leptones cargados como los *quarks* experimentan las interacciones electromagnéticas.

La interacción fuerte

La simetría de norma de la interacción nuclear fuerte se conoce como simetría de color, y da origen a un tipo de carga llamada de color: *rojo, verde o azul*. Los *quarks* pueden tener cualquiera de los tres colores, y dos *quarks* con color interactúan entre sí mediante el intercambio de uno de los bosones de norma de la interacción fuerte, los ocho gluones (g). De nuevo, la simetría asociada a la interacción de color implica que los gluones tienen masa cero y que la carga de color debe conservarse en una interacción de este tipo. Las propiedades de los *quarks* y las partículas compuestas que forman se derivan de las características de la simetría de color. Solo los *quarks* y los gluones experimentan las interacciones fuertes.

La interacción débil

Existen dos simetrías asociadas a la interacción débil, y por lo tanto dos tipos de carga débil: la *carga isotópica débil* y la *hipercarga débil*. Así mismo existen dos tipos de bosones intermediarios, el W y el Z , que trasmiten la interacción débil entre partículas con carga débil. El neutrino, aunque es eléctricamente neutro, posee los dos tipos de carga débil, y por lo tanto puede interactuar con la materia mediante el intercambio ya sea de un W o de un Z . El bosón W existe en dos formas: W^+ y W^- , cada uno posee una unidad de carga eléctrica ($+1e$ o $-1e$ respectivamente), y una unidad de carga isotópica débil. Cuando una partícula con carga isotópica débil absorbe o emite un W , gana o pierde una unidad de carga eléctrica y una unidad de carga isotópica débil, cambiando su identidad.

Los proceso de decaimiento beta del neutrón, decaimiento del muón, el decaimiento beta inverso y la captura electrónica se pueden explicar mediante la emisión de bosones W^\pm por parte de *quarks* o leptones que luego de la emisión se transforman en otras partículas (en la otra pareja del doblete).

En la actualidad las descripciones de las fuerzas electromagnética y débil se han fusionado en la llamada *teoría electrodébil*, desarrollada en los años sesenta por Weinberg, Salam y Glashow. En esta teoría ambas interacciones se presentan como dos aspectos diferentes de un mismo fenómeno.

1.2.2. Propiedades de los neutrinos

Los neutrinos son partículas elementales eléctricamente neutras que interactúan débilmente y con espín semi-entero, es decir son fermiones. Son creados como resultado de ciertos tipos de decaimiento radioactivo o reacciones nucleares como aquellas que ocurren en el Sol, en reactores nucleares o cuando rayos cósmicos colisionan con los átomos. Casi todas las medidas que hay sobre neutrinos se refieren a superposiciones de eigenestados de masa, que a su vez son combinaciones de eigenestados de sabor, al respecto se habla con gran detalle en § 1.4. Estas mezclas son análogas a las ya conocidas en el sector de *quarks* a través de la matriz CKM, sin embargo los resultados actuales de búsquedas de oscilaciones indican que no existen “eigenestados dominantes” como se presenta en el sector de *quarks*. Por lo tanto, no se puede asociar ningún eigenestado particular de masa con ninguna etiqueta leptónica. No obstante, los neutrinos se producen en decaimientos débiles con un sabor leptónico específico y se detectan con un sabor leptónico específico.

Momento magnético

El descubrimiento de las oscilaciones de neutrinos implica la existencia de, por lo menos, un eigenestado de masa distinto de cero. Debido a las fluctuaciones cuánticas, la existencia de una masa en los neutrinos sugiere fuertemente la presencia de un pequeño momento magnético, en la teoría electrodébil estándar extendida para incluir masas en los neutrinos

$$\mu < 3eG_F m_\nu / (8\pi^2 \sqrt{2}) = 3.2 \times 10^{-19} \mu_B ,$$

es decir, es inobservablemente pequeña dadas las pequeñas masas conocidas [40]. Intuitivamente, en una escala de tiempo y distancia suficientemente chica en donde la incertidumbre de la energía sea muy grande, el neutrino puede ser una mezcla de W^+ y e^- , y el campo magnético se acopla a ellos, después se combinan de vuelta en un neutrino. Se han obtenido varios límites a la fecha, proveniente de observaciones solares y a 90 % N.C. se tiene

$$\mu < 0.32 \times 10^{-10} \mu_B .$$

Sección eficaz de interacción

Una forma sencilla de calcular la sección eficaz de interacción de los neutrinos se basa en la *Regla de Oro de Fermi*, si se puede encontrar un elemento de matriz para la interacción débil en una de estas reacciones debería ser comparable en otra. Aplicando la teoría de Fermi del decaimiento beta en ciertos casos especiales permite estimar la fuerza del acoplamiento débil. Se estima que para el rango de energía del decaimiento beta la sección eficaz es $\sim 10^{-43} \text{ cm}^2 = 10^{-47} \text{ m}^2$. ¡Aproximadamente veinte ordenes de magnitud menos que la sección eficaz de dispersión de dos nucleones con baja energía! Con este valor nominal se puede estimar la tasa de interacciones. Multiplicando la sección eficaz por la densidad de nucleones da un número de interacciones por metro y el inverso de eso es un estimado del camino libre medio. Para el agua y el plomo, con densidades de 1000 kg/m^3 y 11400 kg/m^3 , respectivamente; el camino libre medio de un neutrino es alrededor de:

$$d_{\text{agua}} \approx \frac{u}{\sigma \rho} = \frac{1.66 \times 10^{-27} \text{ kg}}{10^{-47} \text{ m}^2 \cdot 1000 \text{ kg/m}^3} \approx 1.7 \times 10^{17} \text{ m} ,$$

$$d_{\text{plomo}} \approx \frac{u}{\sigma \rho} = \frac{1.66 \times 10^{-27} \text{ kg}}{10^{-47} \text{ m}^2 \cdot 11400 \text{ kg/m}^3} \approx 1.5 \times 10^{16} \text{ m}.$$

Para tener una perspectiva de estas distancias sirve compararlo con un año luz, 1 año luz = 9.46×10^{15} . Así pues, el camino libre medio de un neutrino en plomo es más de un año luz! Más aún, un neutrino con energía moderada podría atravesar más de mil años luz de plomo. Como comparación, es útil tener en cuenta que el camino libre medio en plomo de los rayos x usados para aplicaciones médicas es menor a 0.01 mm. Esta sección eficaz también puede ser usada para evaluar el número de eventos que se esperan en un detector de cierto tamaño.

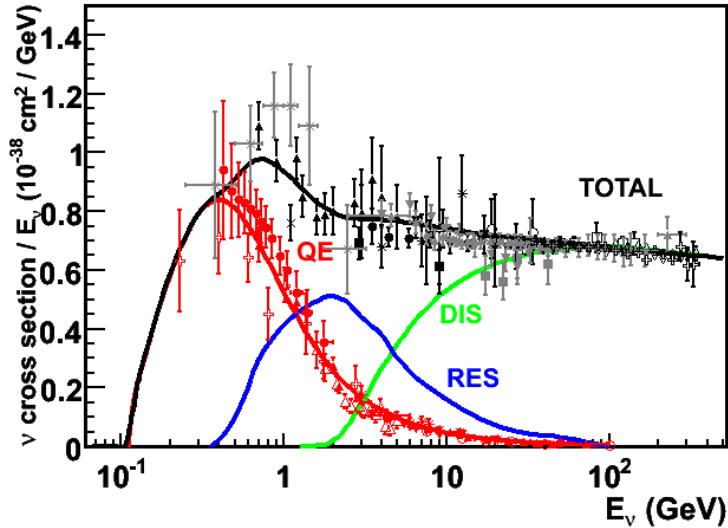


Figura 1.4: Secciones eficaces totales de CC de neutrinos y antineutrinos por nucleón dividida por la energía del neutrino y graficada como función de la energía. Estas contribuciones incluyen dispersión cuasielástica (QE), producción de resonancia (RES) y dispersión inelástica profunda (DIS). Los datos y la predicción de la dispersión cuasielástica han sido promediados sobre blancos de protones y neutrones, por lo tanto han sido divididos por un factor de dos. Tomada de [41].

Las interacciones de los neutrinos son descritas con gran precisión por el ME, las interacciones más sencillas son las que tienen con los electrones. De este tipo hay dispersión elástica $\nu_\alpha + e \rightarrow \nu_\alpha + e$, cuasielástica $\nu_\mu + e \rightarrow \nu_e + \mu$ y la producción de pares neutrino-antineutrino $e^+ + e^- \rightarrow \nu + \bar{\nu}$. Por otra parte, los neutrinos también interactúan con los nucleones de varias formas, por ejemplo la dispersión cuasielástica de corriente cargada, en que a través del intercambio de un bosón W un neutrino interactúa con un protón o un neutrón y surge un neutrón o un protón, respectivamente, y la pareja leptónica correspondiente. También para los nucleones se tiene dispersión elástica $\nu_\alpha + N \rightarrow +N$ y además se tiene la dispersión inelástica profunda (cargada o neutra) en que a través del intercambio de un bosón (W para las de corriente cargada y Z para la de corriente neutra) con el nucleón se forman varios hadrones.

Quiralidad

Resultados experimentales muestran que casi todos los neutrinos producidos y observados tienen quiralidad izquierda (espín antiparalelo a su momento) y que los antineutrinos tienen quiralidad derecha, dentro del margen de error. En el ME la masa de los neutrinos es nula y solo la componente

de quiralidad izquierda de la función de onda de la partícula ψ_L , participa de las interacciones; es decir, la componente derecha ψ_R no está involucrada. Las componentes de quiralidad se definen como

$$\psi_{L,R} \equiv P_{L,R} \psi,$$

donde los proyectores izquierdo y derechos se definen como $P_{L,R} \equiv \frac{1}{2}(1 \mp \gamma^5)$, de la matriz γ^5 se habla más adelante.

En este contexto, si se quieren tener neutrinos masivos, estos deben satisfacer la ecuación de Dirac para fermiones en el vacío. En 1928 Paul Dirac formuló una ecuación de onda relativista que describe los campos correspondientes a partículas elementales de espín 1/2 (como el electrón y los neutrinos) y sus antipartículas. Esta es una ecuación vectorial con cuatro números complejos, en contraste con la ecuación de Schrödinger que describe un campo con solo un valor complejo o escalar. La ecuación de Dirac es consistente tanto con la mecánica cuántica como con la relatividad especial. Implicó la existencia de un nuevo tipo de materia, la *antimateria*, que fue observada hasta después y lograba explicar la necesidad del espín como consecuencia de la unión de la mecánica cuántica y la relatividad. En su forma covariante es

$$i\hbar \gamma^\mu \partial_\mu \psi - mc\psi = 0, \quad (\mu = 0, 1, 2, 3). \quad (1.1)$$

En la representación de Dirac, las matrices gamma se escriben en términos de sub-matrices 2×2 de Pauli y la matriz de identidad de 2×2 I_2 . La masa de la partícula m , c es la velocidad de la luz. La notación estándar explicita es

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & -I_2 \end{pmatrix}, \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_1 \\ -\sigma_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_2 \\ -\sigma_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_3 \\ -\sigma_3 & 0 \end{pmatrix};$$

donde las matrices de Pauli son, usando la definición generalizada con la delta de Kronecker⁸

$$\sigma_j = \begin{pmatrix} \delta_{j3} & \delta_{j1} - i\delta_{j2} \\ \delta_{j1} + i\delta_{j2} & -\delta_{j3} \end{pmatrix}$$

Además es útil definir la matriz $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$, que, como se vio antes, sirve para definir a los proyectores de quiralidad. Por comodidad se presenta la ecuación de Dirac, (1.1), usando unidades naturales ($\hbar = c = 1$) y el operador $\not{D} = \gamma^\mu \partial_\mu = \gamma^0 \partial_0 + \gamma^1 \partial_1 + \gamma^2 \partial_2 + \gamma^3 \partial_3$ de la notación de Feynman:

$$(i\not{D} - m)\psi = 0. \quad (1.1')$$

Esta ecuación se obtiene al extremar la acción de la lagrangiana

$$\mathcal{L}_D = \bar{\psi} (i\not{D} - m) \psi, \quad (1.2)$$

en donde el segundo término de la derecha es el término de masa $\mathcal{L}_D^{\text{masa}} = m\bar{\psi}\psi$ y requiere que el campo tenga una componente izquierda y derecha $\psi = \psi_L + \psi_R$, porque debido a las propiedades de los proyectores de quiralidad

$$\mathcal{L}_D^{\text{masa}} = m (\bar{\psi}_R \psi_L + \bar{\psi}_L \psi_R).$$

⁸La delta de Kronecker, $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$, y $\delta_{ij} = 0$ en caso contrario.

Una manera de extender el ME para incluir masas de neutrinos, es incluir campos derechos ψ_R , pero al imponer las simetrías de la teoría electrodébil, exigir que los campos derechos no participen en las interacciones, es decir que sean *estériles* (ver § 1.4.7). La razón por la cual se exige que los neutrinos sean izquierdos es por las observaciones experimentales como las de *madame* Wu y Goldhaber, de las que se habló en § 1.1.

Sin embargo, existe otra manera para incluir la masa de los neutrinos en el ME. El físico italiano Ettore Majorana, propuso un termino de masa de la forma

$$\mathcal{L}_M^{\text{masa}} = m \overline{(\psi_L)^c} \psi_L ,$$

que incluye el conjugado de carga ψ^c de un espinor ψ , definido en la base de Majorana como $\psi^c \equiv i\psi^*$. Majorana se dio cuenta de que $(\psi_L)^c \equiv i(\psi_L)^*$ tiene quiralidad derecha, con lo cual el espinor queda como $\psi = \psi_L + (\psi_L)^c$ el cual satisface la llamada condición de Majorana $\psi^c = \psi$. En el caso de Majorana, el campo ψ no puede ser acoplado a un campo electromagnético sin violar la conservación de carga, así que ψ debe tener carga neutra.

Para Dirac las proyecciones quirales izquierda y derecha son independientes, mientras que para Majorana están relacionadas. Por lo mismo, en el esquema de Majorana los neutrinos tienen la mitad de grados libertad que en el esquema de Dirac. A las partículas que siguen un comportamiento descrito por la ecuación de Majorana se les llama *partículas de Majorana*, es decir, que son idénticas a sus antipartículas. Hasta ahora, ninguno de los fermiones del ME cumple tal propiedad. Sin embargo existe la posibilidad de que los neutrinos sean partículas de Majorana. Es importante aclarar que ninguno de los dos esquemas puede distinguirse con experimentos de oscilación de neutrinos, pero si en efecto los neutrinos fueran su propia antipartícula el *decaimiento beta doble sin neutrinos* podría ocurrir, § 1.4.6, así como una variedad de procesos que violan número leptónico.

1.3. Fuentes de neutrinos

Los neutrinos son creados en ciertas reacciones nucleares, como en el Sol, el interior de la Tierra o en reactores nucleares; como subproducto de la interacción de rayos cósmicos con la atmósfera; en eventos cósmicos masivos, como el *Big Bang* o colapsos de super novas; o artificialmente con aceleradores de partículas.

1.3.1. Reactores nucleares

Los reactores nucleares son la fuente principal de neutrinos generados por los seres humanos. Se generan $\bar{\nu}_e$ en el decaimiento beta de los núcleos que se fragmentan en la fisión. Generalmente, los cuatro principales isótopos que contribuyen al flujo de antineutrinos son ^{235}U , ^{238}U , ^{239}Pu y ^{241}Pu ; a través de los antineutrinos emitidos en el decaimiento beta negativo de los respectivos fragmentos de fisión. En promedio, se producen unos $6\bar{\nu}_e$ por fisión. La densidad de flujo está dada por

$$\Phi_\nu = 1.5 \times 10^{12} \frac{P/\text{MW}}{L^2/\text{m}^2} \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}, \quad (1.3)$$

donde P la potencia termal del reactor en MW y L es la distancia al reactor en m. Así pues, el flujo isotrópico total de los $\bar{\nu}_e$ emitidos es

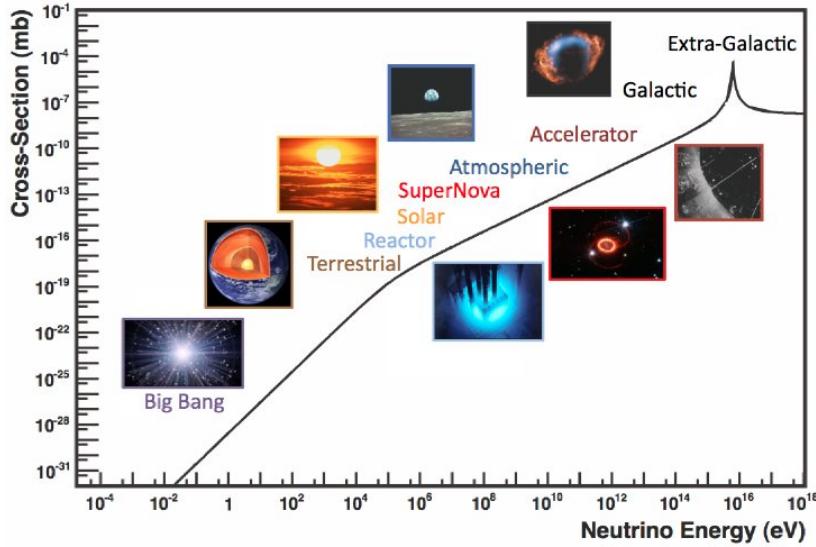


Figura 1.5: Ejemplo representativo de varias fuentes de neutrinos a lo largo de varios ordenes de magnitud de energía. Para comparar, se muestra la sección eficaz electrodébil para dispersión de electrones libres $\bar{\nu}_e e^- \rightarrow \bar{\nu}_e e^-$, como función de E_ν (para neutrinos masivos). El pico en 10^{16} eV se debe a la resonancia W^- . Tomado de [41].

$$F\Phi_\nu = 1.9 \times 10^{17} \frac{P}{\text{MW}} \text{ s}^{-1}. \quad (1.4)$$

Se describe brevemente el estado experimental actual de los experimentos de neutrinos de reactores en § 1.4.7.

Las bombas nucleares producen una gran cantidad de neutrinos. Inclusive, Reines y Cowan antes de buscar neutrinos de reactores consideraron la detección de neutrinos a partir de una explosión nuclear, proceso abandonado, entre otras cosas, por la dificultad de repetir el experimento.

1.3.2. Aceleradores de partículas

Se han usado aceleradores de partículas para generar haces de neutrinos, la técnica consiste en estrellar protones en un blanco fijo con lo cual se producen partículas inestables que decaen, entre otras cosas, a neutrinos. Con el decaimiento de muones positivos en reposo se obtiene un haz de antineutrinos del muón con energías del orden de decenas de MeV. Mucho más comunes son los haces que se obtienen del decaimiento de piones en vuelo, los piones generados con los protones del acelerador son enfocados con un campo magnético, los piones positivos (negativos) generan un haz de neutrinos (antineutrinos) del muón. Otro tipo de haz se obtiene al impactar protones con muy alta energía en blancos muy gruesos, efectivamente deteniendo a los protones, de esa forma se producen hadrones encantados pesados que decaen inmediatamente en neutrinos del electrón y muón casi en la misma proporción. Los neutrinos que se obtienen de los aceleradores son $\nu_e, \bar{\nu}_e, \nu_\mu$ y $\bar{\nu}_\mu$. Hay esfuerzos por construir complejos en donde los neutrinos se produzcan por medio del decaimiento de muones en anillos de almacenamiento de muones y “ β -beams”, llamados “fábricas de neutrinos”. La ventaja de estas fábricas es que la composición del haz se conocería con mucha precisión y la intensidad del haz

sería mucho mayor a lo que actualmente se tiene. En § 1.4.7 se encuentra un breve resumen del estado actual de los experimentos de aceleradores.

1.3.3. Manto y núcleo terrestre

Los llamados *geoneutrinos* provienen del decaimiento beta de isótopos radioactivos que se encuentran en el interior de la Tierra. Colectivamente, los geoneutrinos llevan información integrada sobre la abundancia de sus fuentes radioactivas dentro de la Tierra. Uno de los principales objetivos del campo emergente de geofísica de neutrinos involucra extraer información geológica valiosa de las medidas de geoneutrinos.

La mayoría de los geoneutrinos se originan en las cadenas de decaimiento β^- de ^{40}K , ^{232}Th y ^{238}U , de estas solo los geoneutrinos originados en las dos últimas cadenas tienen energía suficiente (> 1.8 MeV) para ser detectados por decaimiento beta inverso. Juntas, estas cadenas de decaimiento son responsables de más de 99 % del calor radioactivo generado dentro de la Tierra. Los experimentos Borexino [42, 43] en Gran Sasso, Italia; y KamLAND [44, 45] en Kamioka, Japón; han observado geoneutrinos y puesto restricciones en la cantidad de calor de origen radioactivo. Estos hallazgos marcan el inicio de la geofísica de neutrinos. Se espera que el experimento SNO+ empiece a recolectar datos en 2013 y hay una variedad de otros experimentos en planificación.

Como dato curioso, el potasio es un metal alcalino, los iones disueltos de potasio tienen un rol importante en diferentes procesos bioquímicos. En la naturaleza se encuentra formado de tres tipos distintos de isótopos de los cuales 0.0117 % es potasio 40, ^{40}K , el cual es inestable con una vida media de 1.25×10^9 años. En promedio un plátano tiene ~ 0.5 g de potasio, 7.7×10^{21} átomos de potasio, de los cuales 9.0×10^{17} son ^{40}K . Así pues en un plátano habrá del orden de 23 decaimientos por segundo. De esos decaimientos 89.28 % son a través de β^- y un antineutrino a ^{40}Ca , 10.72 % de las veces habrá captura de electrón resultando ^{40}Ar , un rayo gamma y un neutrino; y 0.001 de las veces decaerá a ^{40}Ar emitiendo un β^+ y un neutrino. Un plátano contiene un positrón, por un periodo breve de tiempo, cada 73 minutos. Notemos que de esos 23 decaimientos por segundo 21 ocasiones obtendremos antineutrinos y 2 serán neutrinos. Los plátanos son una comida radioactiva: comer 600 plátanos es aproximadamente equivalente a una placa de rayos X en el pecho, siempre y cuando puedan ser ingeridos todos antes de que el excedente de potasio sea desechado por los riñones.

1.3.4. Atmósfera

Los neutrinos atmosféricos son creados por las interacciones de rayos cósmicos primarios, protones y núcleos pesados, con los núcleos en la atmósfera. La interacción de estos rayos primarios genera rayos cósmicos secundarios, que incluye todos los hadrones y sus decaimientos, con un espectro de energía que tiene un pico en el rango de GeV y se extiende a energías más altas aproximadamente como una ley de potencias. En particular, se producen muchos piones, los cuales decaen a neutrinos del muón y muones: $\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$, $\pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu$. A altas energías, también los kaones contribuyen a la producción de neutrinos y muones. Los muones que decaen antes de llegar a la superficie generan electrones y neutrinos del electrón: $\mu^+ \rightarrow e^+ + \nu_e + \bar{\nu}_\mu$, $\mu^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$. A bajas energías ($E \lesssim 1$ GeV) la mayoría de los muones decaen antes de llegar a la superficie, se cumplen las siguientes

relaciones de los distintos flujos

$$\frac{\Phi_{\nu_\mu} + \Phi_{\bar{\nu}_\mu}}{\Phi_{\nu_e} + \Phi_{\bar{\nu}_e}} \simeq 2, \quad \frac{\Phi_{\nu_\mu}}{\Phi_{\bar{\nu}_\mu}} \simeq 1, \quad \frac{\Phi_{\nu_e}}{\Phi_{\bar{\nu}_e}} \simeq \frac{\Phi_{\mu^+}}{\Phi_{\mu^-}}.$$

Para energías mayores a 1 GeV aumenta la cantidad de muones que llegan a la superficie antes de decaer, lo que lleva a un aumento en la fracción del flujo de neutrino del muón sobre neutrinos del electrón. Se pueden detectar a los neutrinos con energías entre 100 MeV y 100 GeV, en laboratorios subterráneos dispersándose en núcleos. Es un requisito que los detectores sean subterráneos ya que si no las frecuentes interacciones de los muones secundarios abrumarían al detector. El estado actual de los experimentos con neutrinos atmosféricos se resume en § 1.4.7.

1.3.5. Sol

De las reacciones nucleares de fusión que alimentan al Sol y otras estrellas se liberan neutrinos. Los detalles de operación del Sol se explican en el modelo estándar solar, pero puesto de forma sencilla: cuando cuatro protones se fusionan para convertirse en un núcleo de helio, dos de ellos tienen que convertirse en neutrones y cada una de esas conversiones libera un ν_e . La energía liberada por cada fusión de ${}^4\text{He}$ es $Q = 2m_e + 4m_p - m_{\text{He}} = 26.73$ MeV, usando la constante solar en la Tierra $S = 8.5 \times 10^{11} \text{ cm}^{-2}\text{s}^{-1}$, se puede obtener una aproximación para el flujo de neutrinos en la Tierra:

$$\Phi_\nu \approx \frac{S}{13\text{MeV por cada } \nu_e} = 6.5 \times 10^{10} \text{ cm}^{-2}\text{s}^{-1}.$$

Los neutrinos solares son importantes para la física de partículas: con una distancia promedio Sol–Tierra de 1.496×10^8 km y neutrinos con energías de 1 MeV se pueden probar parámetros de oscilaciones del orden de $\Delta m^2 \sim 10^{-10}$ eV² lo cual no se puede probar con medios terrestres. Pero también lo son para la astrofísica: en promedio un fotón creado en el núcleo del Sol tarda varias decenas de miles de años en salir al exterior, sin embargo los neutrinos al interactuar tan débilmente logran llegar a la Tierra en un tiempo aproximado de 8 minutos. Lo que los hace magníficas herramientas para observar el interior del Sol en tiempo real⁹. Los principales resultados obtenidos hasta ahora de los experimentos de neutrinos solares se sintetiza en § 1.4.7.

1.3.6. Supernovas y cataclismos estelares

Los neutrinos se llevan la mayor parte de la energía gravitacional liberada por el colapso de estrellas masivas, eventos categorizados como supernovas tipo Ib, Ic y II. Cuando tales estrellas colapsan, la densidad de materia en el núcleo se vuelve tan grande que los protones y electrones se combinan para formar neutrones y neutrinos del electrón. La segunda fuente más importante es la energía termal del recién formado núcleo de neutrones, que se disipa a través de la formación de pares neutrino–antineutrino de todos los sabores.

Los detectores Kamiokande II e IMB detectaron 11 y 8 antineutrinos de origen termal, respectivamente; mientras que el detector Baksan encontró 5 neutrinos de origen termal o de captura del electrón, provenientes de la supernova 1987A. Todos estos, en un estallido que duró menos de 13 segundos.

⁹El único otro proceso que da información sobre el interior son las oscilaciones del Sol, la llamada *heliosismología*.

Como se esperaba, los neutrinos provenientes de la supernova llegaron a la Tierra varias horas antes que la radiación electromagnética. Los neutrinos logran atravesar la materia de la explosión rápidamente, debido a su excepcionalmente escasa interacción con la materia, mientras que los fotones son retrasados. Por la misma razón, se cree que los neutrinos llevan información de la región central de la explosión, la radiación electromagnética se dispersa o proviene de decaimientos de elementos radioactivos producidos en la onda de choque. El sistema SNEWS (*Supernova Early Warning System*), una red de detectores de neutrinos, vela el cielo para reportar candidatos a eventos de supernova.

La energía de los neutrinos de supernovas va de unos cuantos MeV a decenas de MeV. Sin embargo, se cree que los sitios en los que se aceleran los rayos cósmicos producen neutrinos que son, por lo menos, un millón de veces más energéticos. Estos lugares son los remanentes de supernova, ambientes con turbulentos gases. También surgen neutrinos de los brotes de rayos gamma (GRB por *gamma-ray burst*), resplandores de rayos gamma asociados con explosiones extremadamente energéticas. Se cree que la mayoría de los GRB consisten de un haz estrecho de intensa radiación liberada durante una supernova o hypernova cuando una estrella muy masiva que rota rápidamente colapsa. Los núcleos activos de galaxia (AGN por *active galactic nucleus*), regiones compactas en el centro de una galaxia que tienen una luminosidad mucho más alta de lo normal, también liberan neutrinos muy energéticos. Los principales experimentos que están en condiciones de observar neutrinos tan energéticos son: Baikal, AMANDA, IceCube, ANTARES, NEMO y Nestor. De hecho en abril de 2013, el experimento IceCube [46] reportó la observación de dos neutrinos con energías del orden de 10^{15} eV = PeV. Neutrinos aún más energéticos, resultantes en las interacciones de rayos cósmicos extragalácticos, esperan ser observados en el observatorio Pierre Auger, en Argentina o el experimento ANITA, en la Antártica.

1.3.7. *Big Bang*

Junto con la radiación cósmica de microondas (CMB por *Cosmic Microwave Background*) producida por *Big Bang*, existe un fondo de neutrinos de muy baja energía en el universo. A estos se les llama *neutrinos reliquia* y se predice que tienen una temperatura¹⁰ de 1.95 K. Varias propiedades de los neutrinos pueden ser deducidas desde la cosmología ya que afectan, por ejemplo, el fondo de radiación cósmica y la estructura a gran escala del universo y los procesos de nucleosíntesis que siguieron del *Big Bang*. Distintas medidas astrofísicas han determinado que el número de neutrinos es compatible con 3 y aunque aún no se descarta la posibilidad de más neutrinos¹¹ A pesar de que hay muchísimos neutrinos del *Big Bang* (411 cm^{-3} para cada eigenestado de masa), debido a la ínfima sección eficaz no han podido ser observados directamente sin embargo su existencia ha sido corroborada a través de observaciones cosmológicas recientes [47, 48, 49].

1.4. Oscilación de neutrinos

En el caso de una masa no nula para el neutrino, los eigenestados débiles y de masa no son necesariamente idénticos, un hecho bien conocido en el sector de *quarks* donde los dos tipos de estados están conectados por la matriz CKM, introducida por Nicola Cabibbo, Makoto Kobayashi y Toshihide Maskawa [50, 51]. Esto permite el fenómeno de oscilación de neutrinos, un tipo de oscilación de sabor

¹⁰Considerablemente más fríos si su masa excede 0.001 eV.

¹¹Depende mucho que datos se tomen en cuenta, algunos favorecen más neutrinos que otros.

que ya es conocido en otros sistemas de partículas. Las oscilaciones son observables siempre y cuando los paquetes de ondas de neutrinos formen una superposición coherente de estados. Tales oscilaciones entre los diferentes sabores de neutrinos no conservan números leptónicos de sabor individuales, solo número leptónico total. Puede ser descrito por teoría cuántica de campos, sin embargo aquí se desarrolla con argumentos simplificados y aproximaciones razonables que permiten simplificar la teoría; se puede consultar una derivación sofisticada con teoría cuántica de campos en [52].

1.4.1. Oscilación de 2ν en el vacío

Considerando solamente dos sabores de neutrinos. Los neutrinos vienen dados por las combinaciones de eigenestados de masa $|\nu_1\rangle$ y $|\nu_2\rangle$, con masas m_1 y m_2 .

Por ejemplo el estado de un neutrino del muón creado en $t = 0$ está expresado por una mezcla de los eigenestados de masa.

$$|\nu(0)\rangle = |\nu_\mu\rangle = -\sin\theta|\nu_1\rangle + \cos\theta|\nu_2\rangle,$$

de forma semejante el neutrino del electrón:

$$|\nu_e\rangle = \cos\theta|\nu_1\rangle + \sin\theta|\nu_2\rangle.$$

El ángulo θ caracteriza el grado de mezcla de los eigenestados de masa, es simplemente llamado *ángulo de mezcla*. Un tiempo t después la función de es:

$$|\nu_\mu(t)\rangle = -\sin\theta e^{-iE_1 t}|\nu_1\rangle + \cos\theta e^{-iE_2 t}|\nu_2\rangle,$$

donde los eigenestados se propagan como partículas libres y E_1 y E_2 son las energías de los estados $|\nu_1\rangle$ y $|\nu_2\rangle$ respectivamente. En unidades de $\hbar = c = 1$. Para neutrinos relativistas ($E_\nu \gg m$) podemos aproximar E_1 y E_2 por:

$$E_j = (p^2 + m_j^2)^{1/2} \simeq p + \frac{m_j^2}{2p},$$

se asume que los dos estados de masa tienen el mismo momento y además como la masa de los neutrinos es muy chica: $E_\nu \simeq p$. Sustituyendo estas energías, la función de onda al tiempo t se convierte en:

$$\begin{aligned} |\nu_\mu(t)\rangle &= -\sin\theta e^{-it(p+m_1^2/2E_\nu)}|\nu_1\rangle + \cos\theta e^{-it(p+m_2^2/2E_\nu)}|\nu_2\rangle \\ &= e^{-it(p+m_1^2/2E_\nu)} \left[-\sin\theta |\nu_1\rangle + \cos\theta e^{-it(p+m_2^2/2E_\nu)-p-m_1^2/2E_\nu} |\nu_2\rangle \right] \\ &= e^{-it(p+m_1^2/2E_\nu)} \left[-\sin\theta |\nu_1\rangle + \cos\theta |\nu_2\rangle e^{i\Delta m^2 t/2E_\nu} \right], \end{aligned}$$

donde $\Delta m^2 = m_1^2 - m_2^2$. Como van casi a la velocidad de la luz podemos hacer $t \approx x/c = L$; siendo L la distancia a la fuente de neutrinos de muones.

Calculemos la probabilidad $P(\nu_\mu \rightarrow \nu_e)$, de encontrar un ν_e en L , dado que ν_μ partió del origen $L = 0$. La probabilidad es el cuadrado de la amplitud $\langle \nu_e | \nu_\mu \rangle$. Usando la relación de ortonormalidad $\langle \nu_i | \nu_j \rangle = \delta_{ij}$ podemos calcular la probabilidad:

$$P(\nu_\mu \rightarrow \nu_e) = \langle \nu_e | \nu_\mu \rangle^2 = \left| \cos\theta \sin\theta (1 - e^{i\Delta m^2 t/2E_\nu}) \right|^2.$$

Usando que $\cos \theta \sin \theta = \frac{1}{2} \sin 2\theta$ se obtiene

$$P(\nu_\mu \rightarrow \nu_e) = \sin^2 2\theta \sin^2 \left(\frac{\Delta m^2 L}{4E_\nu} \right), \quad (1.5)$$

al trabajar con las unidades $[\Delta m^2] = \text{eV}^2$, $[L] = \text{m}$ y $[E_\nu] = \text{MeV}$ queda un factor de 1.27 y obtenemos la forma comúnmente usada de la fórmula de la probabilidad de oscilación de dos neutrinos:

$$P(\nu_\mu \rightarrow \nu_e) = \sin^2 2\theta \sin^2 \left(\frac{1.27 \Delta m^2 L}{E_\nu} \right). \quad (1.6)$$

El ángulo de mezcla $\sin^2 2\theta$ determina la amplitud de la oscilación, mientras que Δm^2 influye en la longitud de oscilación. De la fórmula (1.6) queda claro que las oscilaciones solo son posibles si θ y Δm^2 no son nulos, es decir que exista mezcla leptónica y exista por lo menos una masa distinta de cero. Todas las oscilaciones de dos neutrinos pueden ser caracterizadas por estas dos cantidades, porque $P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta) = P(\nu_\beta \rightarrow \nu_\alpha)$.

$P(\nu_\mu \rightarrow \nu_\mu)$ es la probabilidad de encontrar a ν_μ en L dado que ν_μ fue producido en el inicialmente. Es el complemento de la probabilidad, es decir:

$$P(\nu_\mu \rightarrow \nu_\mu) = 1 - \sin^2 2\theta \sin^2 \left(\frac{1.27 \Delta m^2 L}{E_\nu} \right) \quad (1.7)$$

Analogía en la música y equivalente en la física clásica

Las ondas describen algunos de los más extraordinarios fenómenos en el mundo. Pueden ser simples, como la nota de una flauta; o pueden ser mezclas complejas, como un acorde. Combinar dos ondas de tonos similares produce un efecto de “compás”. Al escuchar dos flautas tocando la misma nota, una de las dos ligeramente fuera de tono, se puede oír un efecto “wah-wah-wah” conforme el sonido viene y va; ya que el sonido es una mezcla de ondas ligeramente diferentes que interfieren entre sí.

Por su parte, los neutrinos también se encuentran gobernados por un fenómeno ondulatorio conforme viajan por el espacio. La interferencia entre las ondas también produce compases regulares, el efecto wah-wah-wah resultante se detecta en ciertas propiedades del neutrino que aparecen y desaparecen. Cuando los neutrinos interactúan con la materia producen otros tipos específicos de partículas. En un momento puede producir un electrón, pero en otro bien podría producir un tauón o un muón [53].

La física básica detrás de la oscilación de neutrinos puede encontrarse en cualquier sistema de osciladores armónicos acoplados, por ejemplo un par de péndulos conectados por un resorte con pequeño coeficiente de elasticidad. Se pone en movimiento a uno de los péndulos, mientras el otro permanece en reposo. Con el tiempo, el otro péndulo se mece debido al pequeño resorte que los conecta, la amplitud del primer péndulo disminuye conforme este cede energía al segundo. Eventualmente toda la energía del sistema se transfiere al segundo péndulo y el primero se queda en reposo, de ahí el proceso se revierte y se repite hasta que se pierde la energía por la fricción.

Se puede entender el comportamiento de este sistema a través de sus modos normales de oscilación. Si los dos péndulos son idénticos, un modo es cuando los dos péndulos se mecen en la misma dirección con distancia constante entre ellos, el otro modo es cuando los péndulos se mecen en direcciones

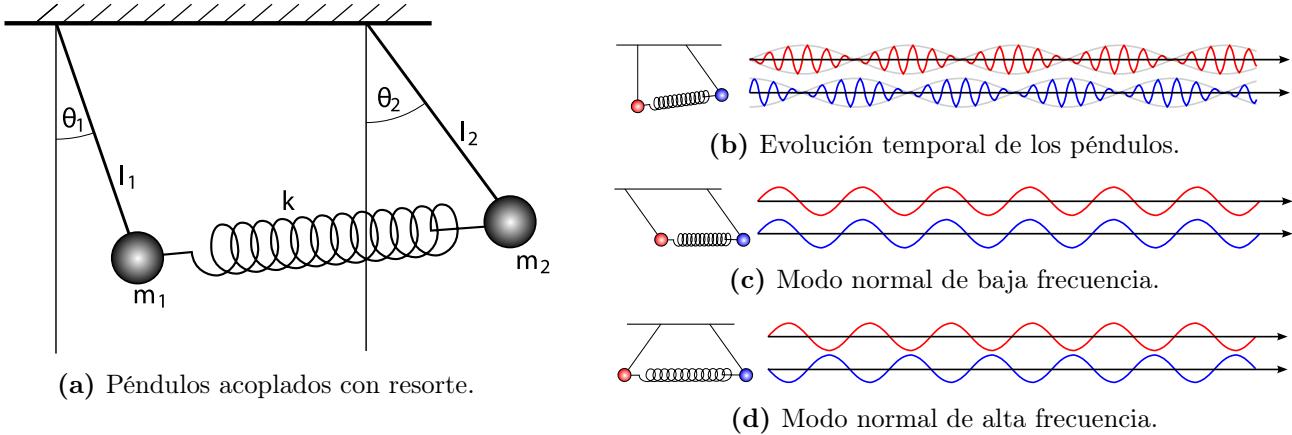


Figura 1.6: Análogo clásico de la oscilación de neutrinos: péndulos acoplados con un pequeño resorte. (a) Se tienen dos péndulos unidos con un pequeño resorte. (b) Al mover a uno de los dos, transfiere su movimiento al otro. Con el tiempo el sistema de los dos péndulos tendrá a los dos oscilando en la misma dirección, (c), o a los dos oscilando en direcciones opuestas, (d). Se puede describir cualquier instante del sistema como una combinación de estos dos modos normales de oscilación.

opuestas. Estos modos tienen frecuencias ligeramente distintas ya que el segundo modo involucra el ligero resorte y el primero no. El estado inicial del sistema de dos péndulos es una combinación de los dos modos, con el tiempo estos modos se desfasan, lo que se ve como una transferencia de movimiento entre los péndulos. Si los péndulos no son iguales el análisis es ligeramente más complicado, pero el comportamiento es similar.

La descripción del sistema en términos de los dos péndulos es análogo a la base de sabor de los neutrinos. Estos son los parámetros que son fácilmente producidos y detectados, a través de interacciones que involucran el bosón W en el caso de los neutrinos. La descripción en términos de los modos normales de oscilación es análoga a la base de masa de los neutrinos.

1.4.2. Oscilación de 3ν en el vacío

Un escenario más realista es aquel de tres sabores de neutrinos. Una vez más, los eigenestados de sabor ν_α no necesitan ser idénticos a los eigenestados de masa ν_i y, como en el sector de *quarks*, están conectados por una matriz unitaria U , llamada matriz PMNS (Pontecorvo–Maki–Nakagawa–Sakata)

$$|\nu_\alpha\rangle = U |\nu_i\rangle, \quad \alpha = e, \mu, \tau; \quad i = 1, 2, 3. \quad (1.8)$$

Para tres neutrinos de Dirac¹² U esta dada como

$$\begin{aligned} U &= \begin{pmatrix} U_{e1} & U_{e2} & U_{e3} \\ U_{\mu 1} & U_{\mu 2} & U_{\mu 3} \\ U_{\tau 1} & U_{\tau 2} & U_{\tau 3} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1.9)$$

¹²Si los neutrinos fueran partículas de Majorana entonces aparecería una fase de violación CP con dos neutrinos, para tres neutrinos se tendrían que añadir dos fases más.

donde $s_{ij} = \sin \theta_{ij}$, $c_{ij} = \cos \theta_{ij}$ ($i, j = 1, 2, 3$). Se muestra una ilustración gráfica de los elementos de mezcla de la matriz, ignorando la fase CP , en la figura 1.7a. Para el caso de tres sabores de neutrinos, existen varios esquemas posibles de masa, en particular el esquema de masas jerárquico normal e invertido que se muestran en la figura 1.7b. Nótese que con tres masas distintas existen dos diferencias de masas al cuadrado linealmente independientes, es decir habiendo medido dos la tercera esta determinada, por ejemplo $\Delta m_{31}^2 = \Delta m_{32}^2 + \Delta m_{21}^2$.

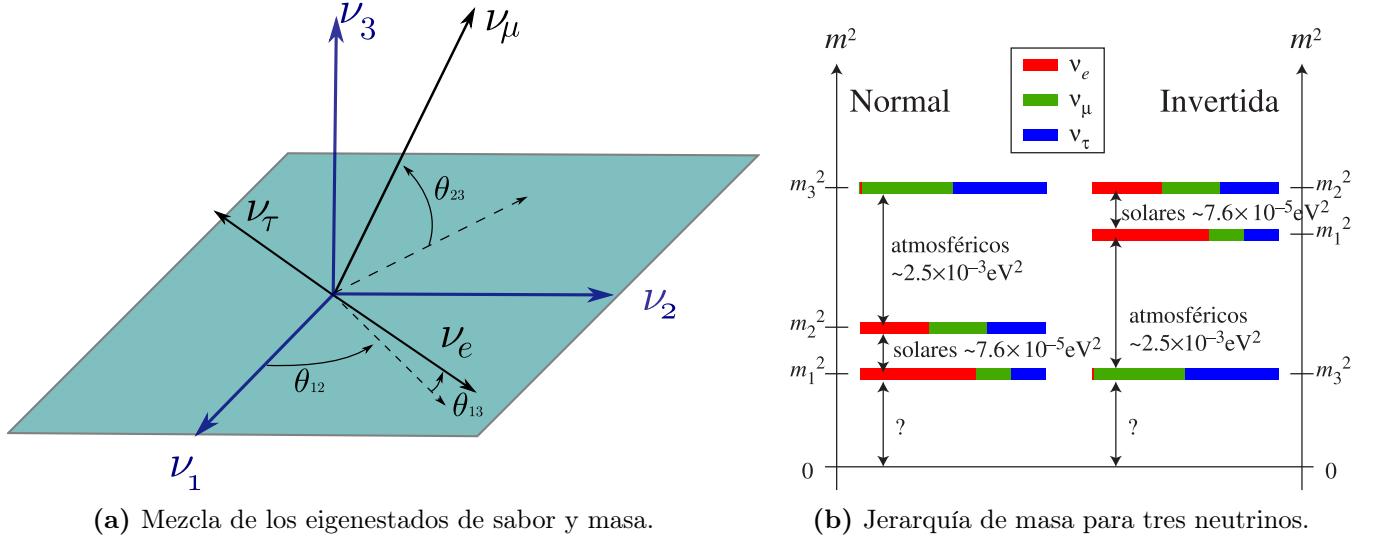


Figura 1.7: Representación gráfica de la mezcla de neutrinos. (a) La matriz de mezcla entre los eigenestados de masa y sabor puede ser vistos como una matriz de rotación de la base de vectores ν_e, ν_μ, ν_τ a la base ν_1, ν_2, ν_3 , se ignora la fase de violación de CP . (b) La jerarquía normal e invertida (caracterizada por $\Delta m_{23}^2 = m_3^2 - m_2^2 < 0$) de masas para tres neutrinos, cada eigenestado de masa es una mezcla de los tres eigenestados de sabor. Las diferencias de masa de los neutrinos atmosféricos y solares difieren por dos ordenes de magnitud. Se desconoce la masa absoluta de los neutrinos.

Una forma conveniente de presentar la matriz PMNS es

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{13} & 0 & s_{13}e^{-i\delta} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{13}e^{+i\delta} & 0 & c_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 \\ -s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.10)$$

esta forma factorizada de la matriz resulta muy útil para interpretar datos ya que la primera matriz (extrema derecha) contiene datos relevantes para oscilaciones de neutrinos atmosféricos y de aceleradores. La segunda (en medio) contiene los parámetros accesibles para experimentos de reactores de corta distancia y la fase de violación de CP δ , mientras que la tercera depende de los parámetros involucrados en oscilaciones de neutrinos solares.

Ahora se tienen más cantidades involucradas tanto en magnitud como en signo: para el caso de oscilación de dos neutrinos en el vacío el signo es irrelevante. Para neutrinos ultrarelativistas, en la ausencia de cualquier efecto de materia, la probabilidad esta dada por

$$\begin{aligned} P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta) = & \Delta_{\alpha\beta} - 4 \sum_{i>j=1}^3 \operatorname{Re} (U_{\alpha i}^* U_{\beta i} U_{\alpha j} U_{\beta j}^*) \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{ij}^2 L}{4E} \right) + \\ & + 4 \sum_{i>j=1}^3 \operatorname{Im} (U_{\alpha i}^* U_{\beta i} U_{\alpha j} U_{\beta j}^*) \sin \left(\frac{\Delta m_{ij}^2 L}{4E} \right) \cos \left(\frac{\Delta m_{ij}^2 L}{4E} \right). \end{aligned} \quad (1.11)$$

Las fórmulas generales para el escenario de tres sabores son bastante complejas; sin embargo, asumiendo el dominio de masas observado (ver el estatus experimental § 1.4.7):

$$\Delta m_{21}^2 = \Delta m_{\text{Sol}}^2 \ll \Delta m_{31}^2 \approx \Delta m_{32}^2 = \Delta m_{\text{atm}}^2. \quad (1.12)$$

se obtiene que para cada caso solo una escala de masas es relevante y la mayoría de los términos de la ecuación (1.11) se vuelven despreciables si $\Delta m^2 L / 4E \approx 1$, como es el caso en experimentos atmosféricos y de aceleradores con largas distancias, para los cuales las expresiones para las oscilaciones específicas son

$$P(\nu_\mu \rightarrow \nu_\tau) = 4 |U_{\tau 3}|^2 |U_{\mu 3}|^2 \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{\text{atm}}^2 L}{4E} \right) = \sin^2(2\theta_{23}) \cos^4(\theta_{13}) \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{\text{atm}}^2 L}{4E} \right) \quad (1.13)$$

$$P(\nu_e \rightarrow \nu_\mu) = 4 |U_{e 3}|^2 |U_{\mu 3}|^2 \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{\text{atm}}^2 L}{4E} \right) = \sin^2(2\theta_{13}) \sin^2(\theta_{23}) \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{\text{atm}}^2 L}{4E} \right) \quad (1.14)$$

$$P(\nu_e \rightarrow \nu_\tau) = 4 |U_{\tau 3}|^2 |U_{e 3}|^2 \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{\text{atm}}^2 L}{4E} \right) = \sin^2(2\theta_{13}) \cos^2(\theta_{23}) \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{\text{atm}}^2 L}{4E} \right). \quad (1.15)$$

Es importante mencionar que el futuro experimental de la física de neutrinos requiere medir los términos que no dominan la probabilidad de oscilación, lo cual significará un gran reto tecnológico y científico.

1.4.3. Efecto MSW

El llamado efecto MSW (o efecto de materia), descrito por Mikheyev,Smirnov y Wolfenstein [38, 39], actúa para modificar las oscilaciones de neutrinos en la materia con un perfil de densidad variable. La presencia de electrones en la materia cambia los niveles de energía de los eigenestados de masa de los neutrinos, debido a la dispersión coherente hacia adelante de corriente cargada de los neutrinos del electrón. La dispersión coherente hacia adelante es análoga al proceso electromagnético que lleva al índice de refracción de la luz en un medio. Esto significa que los neutrinos en la materia tienen una masa efectiva distinta a la que tienen en el vacío, y como la oscilación de neutrinos depende de la masa de estos entonces el efecto de oscilación es diferente. Cuando el perfil de densidad es variable se puede tener un efecto resonante que amplifica la probabilidad de transición de sabor de los neutrinos cuando estos pasan por una zona de densidad adecuada. Con los antineutrinos, el punto conceptual es el mismo pero la carga efectiva a la cual se acopla la interacción débil tiene un signo opuesto. El efecto MSW es importante para los neutrinos del electrón del Sol, donde hay una gran densidad de electrones.

Los efectos de materia para neutrinos de ~ 1 GeV viajando distancias cortas (~ 1 km) en la relativamente baja densidad de la roca son despreciables. Por lo cual, para los fines de esta tesis, la aproximación a oscilaciones en el vacío es más que suficiente.

1.4.4. Consideraciones experimentales

Como se vio en § 1.3 existen muchas fuentes de neutrinos, de esas las más importantes fuentes para buscar oscilaciones son: plantas nucleares ($\bar{\nu}_e$), aceleradores ($\nu_e, \bar{\nu}_e, \nu_\mu, \bar{\nu}_\mu$), la atmósfera ($\nu_e, \bar{\nu}_e, \nu_\mu, \bar{\nu}_\mu$) y el Sol (ν_e). Lo que muestra que las distintas fuentes no siempre pueden investigar los mismos valores

de los parámetros Δm^2 y $\sin^2 2\theta$, por ejemplo los acelerados de altas energías ($E \approx 1\text{--}100 \text{ GeV}$, $L \approx 1 \text{ km}$) no son capaces de inspeccionar los datos de neutrinos solares ($E \approx 1 \text{ MeV}$, $L \approx 10^8 \text{ km}$). Reexpresemos el término oscilante de la ecuación (1.5) como

$$\sin^2 \left(\frac{\Delta m^2}{4} \frac{L}{E} \right) = \sin^2 \left(\pi \frac{L}{\lambda_{\text{osc}}} \right)$$

en términos de la longitud de oscilación de un periodo completo $\lambda_{\text{osc}} \equiv 4\pi E/\Delta m^2 \approx 2.5 \frac{E_{\nu}/\text{MeV}}{\Delta m^2/\text{eV}^2} \text{ m}$, esta distancia crece para energías más altas o valores de Δm^2 más pequeños. La figura 1.8 muestra los tres casos que deben ser considerados con respecto a la posible observación de oscilaciones:

- $L \ll \lambda_{\text{osc}}$. El experimento se encuentra muy cerca de la fuente y las oscilaciones no tienen tiempo para desarrollarse.
- $L \sim \lambda_{\text{osc}}$. Una condición necesaria para observar oscilaciones y resulta ser la región más sensible.
- $L \gg \lambda_{\text{osc}}$. Varias oscilaciones han ocurrido entre la fuente y el detector. En tales circunstancias los experimentos solo miden la probabilidad promedio de transición.

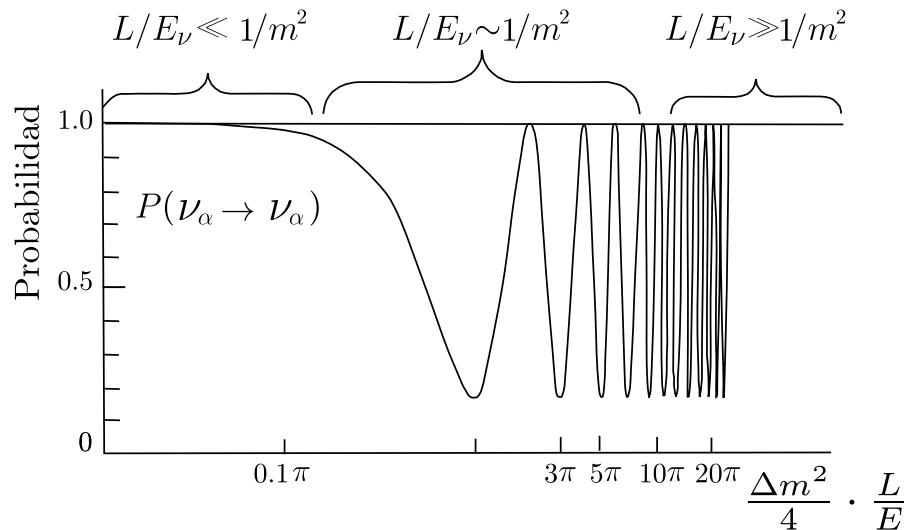
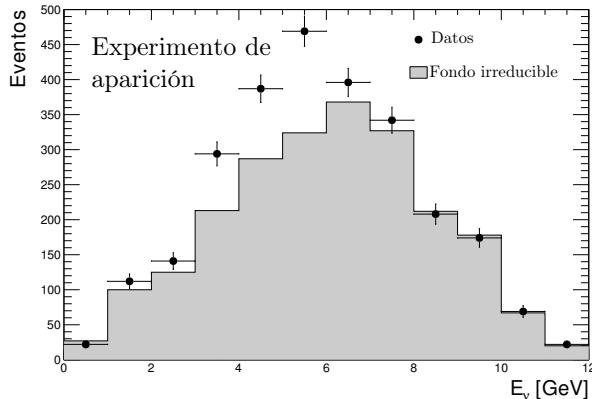


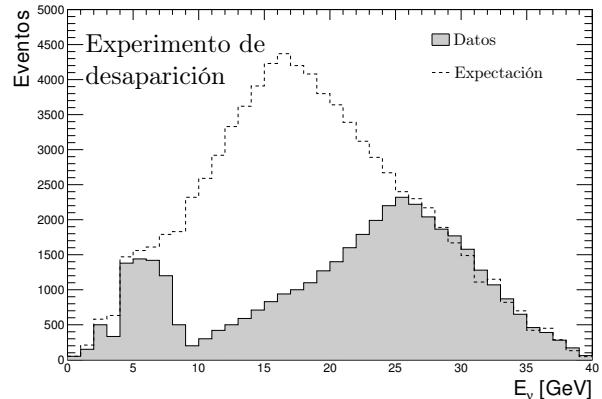
Figura 1.8: Gráfica logarítmica de la probabilidad de oscilación $P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\alpha)$ como función de L/E_ν , con $\sin^2 2\theta = 0.8$. Las llaves muestran tres casos posibles: no hay oscilaciones, cuando $L/E_\nu \ll 1/m^2$; sensibilidad máxima a oscilaciones, cuando $L/E_\nu \sim 1/m^2$; solo se pueden hacer mediciones del promedio de oscilaciones debido a la resolución finita, cuando $L/E_\nu \gg 1/m^2$.

Como ya se mencionó, usualmente se puede considerar que las mezclas de neutrinos ocurren solamente entre dos especies de neutrinos, como $\nu_\mu \leftrightarrow \nu_\tau$. Lo cual es una suposición razonable cuando: todos los ángulos de mezcla son pequeños o cuando la jerarquía de masas es tal que una diferencia de masas Δm_{ij}^2 , por ejemplo Δm_{21}^2 , es pequeña comparada con las otras; de tal forma hay una región en L/E_ν donde $\Delta m_{21}^2 \cdot L/E_\nu$ es despreciable, pero $\Delta m_{32}^2 \cdot L/E_\nu$ no lo es. En estos casos los resultados (o límites de exclusión) pueden ser mostrados como regiones permitidas en una gráfica de Δm^2 vs. $\sin^2 2\theta$, donde $\sin^2 2\theta$ es una combinación de los términos de la matriz de mezcla. Hay dos variedades de experimentos de oscilación de neutrinos: experimentos de *aparición* y de *desaparición*. Los primeros son aquellos en los que se buscan interacciones de neutrinos no esperados en el haz, (en la práctica, como nunca se tiene un haz completamente puro de un sabor dado, lo que se busca es un exceso de

interacciones de los neutrinos no esperados). Por ejemplo la búsqueda de un exceso de interacciones de ν_e en un detector, para un haz primordialmente formado de ν_μ . Se muestra un histograma típico de los eventos que vería un experimento de aparición en la figura 1.9a.



(a) Experimento de aparición



(b) Experimento de desaparición.

Figura 1.9: Histogramas típicos de los resultados esperados. (a) En un experimento de aparición se espera ver un exceso en cierta región de energía sobre el fondo irreducible. (b) En los experimentos de desaparición se observan menos eventos de los esperados en cierta región de energías.

En un experimento real la distancia que viajan los neutrinos L , y su energía E_ν , tienen ciertas distribuciones, así que se debe promediar la probabilidad P sobre una distribución de L/E_ν . A manera de ejemplo, hagamos la suposición poco realista de que $b \equiv 1.27 \cdot L/E_\nu$ tiene una distribución gaussiana con desviación estándar σ_b alrededor de un valor central b_0 . Entonces el promedio de la ecuación (1.6) es:

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} \sin^2 2\theta \left[1 - \cos (2b_0 \Delta m^2) \exp (-2\sigma_b^2 (\Delta m^2)^2) \right]. \quad (1.16)$$

El valor de $\langle P \rangle$ está dado por el experimento. Luego se resuelve la expresión (1.16) para $\sin^2 2\theta$ como función de Δm^2 . Notemos distintos casos, ilustrados en la figura 1.10:

- Como las oscilaciones son completamente estropeadas por la resolución para valores grandes de Δm^2 , $\sin^2 2\theta = 2\langle P \rangle$ en esta región.
- La excursión máxima de la curva hacia la izquierda es para $\sin^2 2\theta = \langle P \rangle$ con buena resolución. Esta protuberancia ocurre en $\Delta m^2 = \pi/2b_0$ eV².
- Para valores grandes de $\sin^2 2\theta$, $\Delta m^2 \approx \frac{1}{b_0} (\langle P \rangle / \sin^2 2\theta)^{1/2}$.
- Cuando $\sin^2 2\theta = 1$, se tiene $\Delta m^2 = \sqrt{\langle P \rangle} / b_0$.

Para valores grandes de Δm^2 se pierde información del espectro y solamente se tiene una medida de la magnitud del fondo. El contorno que se puede observar en los contornos depende de las características del experimento; como el tamaño de la fuente, la distribución de energía de los neutrinos y las peculiaridades del detector y el análisis.

Luego, en un experimento de desaparición se busca la atenuación del haz de neutrinos, digamos ν_e , a cierta distancia de la fuente, al mezclarse con, por lo menos, otro eigenestado de sabor. La

notación para tales experimentos es: $\nu_e \not\rightarrow \nu_e$. En contraste con la detección de algunos neutrinos del “sabor incorrecto” que establecen la mezcla en un experimento de aparición, la desaparición de algunos neutrinos de “sabor correcto” en un experimento de desaparición pasa inadvertida debido a la fluctuaciones estadísticas. Por esta razón, los experimentos de desaparición usualmente no pueden probar mezcla de poca probabilidad, es decir, de valores pequeños de $\sin^2 2\theta$. Se muestra un histograma típico de los eventos que vería un experimento de desaparición en la figura 1.9b. Los experimentos de desaparición caen en dos categorías:

- **I.** El flujo del haz se conoce, ya sea de la teoría o de otras medidas, por ejemplo los experimentos de reactores y algunos de aceleradores. No pueden probar mezclas con valores muy pequeños de $\sin^2 2\theta$, pero sí pueden establecer límites pequeños en Δm^2 para valores grandes de $\sin^2 2\theta$ debido a que L/E_ν puede ser muy grande. Un ejemplo de ese tipo de experimentos se muestra en la figura 1.10.
- **II.** La atenuación u oscilación del flujo de neutrinos del haz se mide en el mismo aparato (dos detectores ya que es impráctico en uno solo). Por encima de cierto mínimo Δm^2 el equilibrio es establecido en cierto punto del detector y la intensidad no cambia a lo largo del aparato. Como resultado de eso, la sensibilidad se pierde para Δm^2 grandes, como puede apreciarse en la figura 1.10. Hay varios experimentos que usan la estrategia de tener un detector “cercano” y uno “lejano” de forma exitosa.

Debido a su pequeña sección eficaz de interacción, para tener una tasa de eventos razonable R (eventos por segundo), la masa del detector (expresada en número de nucleones N_T) tiene que ser muy grande y la intensidad I ($\nu \text{ cm}^{-2}\text{s}^{-1}$) del haz o la fuente tiene que ser tan alta como sea posible. Así pues, para la sección eficaz σ correspondiente (en cm^2), un estimado de la tasa de eventos esta dado por

$$R = N_T \sigma I, \quad (1.17)$$

Además, los detectores deben satisfacer varios requisitos:

- Identificación de leptones cargados para distinguir eventos de corriente cargada y corriente neutra.
- Medidas de la energía y del ángulo de dispersión del lepton cargado para determinar las variables cinemáticas del evento.
- Medidas de la energía hadrónica total, por ejemplo para reconstruir E_ν .
- Identificación de hadrones secundarios individuales y su momento para investigar con detalle el estado hadrónico final.
- Detección de partículas de vida corta.
- Uso de distintos materiales como blanco en el detector.

Algunos de estos requisitos son excluyentes entre sí y no hay un solo detector que los cumpla todos, el diseño en cuestión y los requisitos que satisfagan los detectores dependen de las preguntas físicas que se quieran estudiar.

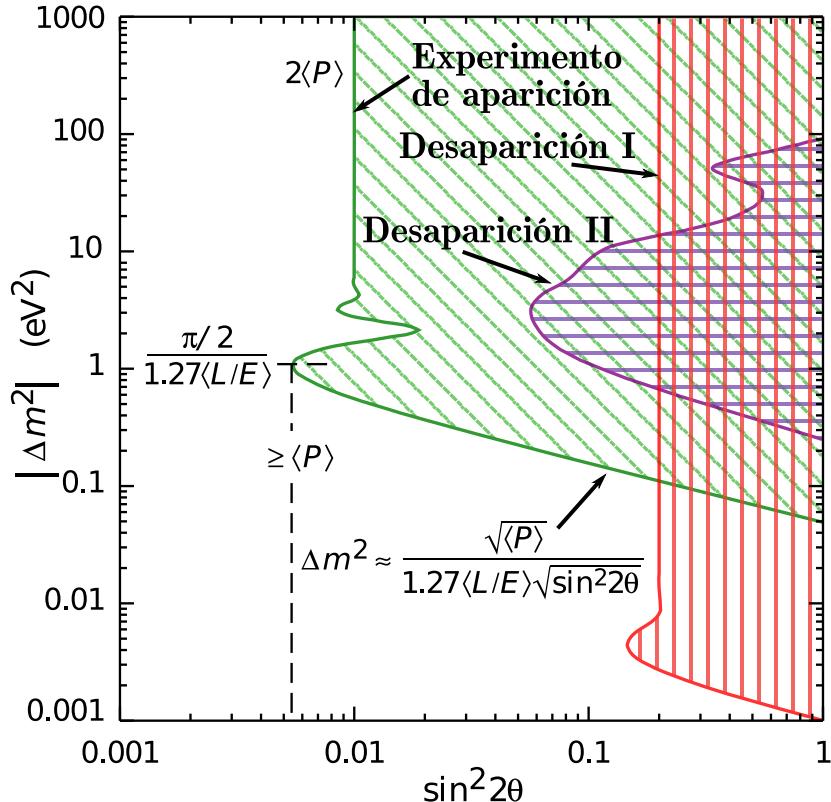


Figura 1.10: Gráfica estándar log-log de Δm^2 vs. $\sin^2 2\theta$ de contornos de confianza. Se muestran las regiones excluidas de los parámetros de experimentos hipotéticos de aparición y desaparición de neutrinos. Para Δm^2 pequeño el experimento pierde sensibilidad al estar muy cerca de la fuente, así que las oscilaciones apenas se desarrollan. Esto implica una pendiente de -2 hasta que llega a la sensibilidad máxima en el primer máximo de oscilación. Para Δm^2 grande las oscilaciones ya no pueden ser observadas, solo una probabilidad promedio de transición. Más detalles en el texto. Tomado de [54].

1.4.5. Mediciones directas de la masa de los neutrinos

Hay varias métodos directos de investigar la masa de los neutrinos¹³, la forma clásica para determinar la masa de $\bar{\nu}_e$ es el decaimiento beta. El decaimiento beta es una transición nuclear, donde el número de protones del núcleo Z cambia en una unidad, mientras que el número de nucleones A permanece igual. Hay tres formas de decaimiento beta: $(Z, A) \rightarrow (Z + 1, A) + e^- + \bar{\nu}_e$ (β^-), $(Z, A) \rightarrow (Z - 1, A) + e^+ + \nu_e$ (β^+), y $e^- + (Z, A) \rightarrow (Z - 1, A) + \nu_e$ (captura de electrón).

La forma del espectro de energía del electrón liberado en el decaimiento beta es distinta a la forma que tendría si el antineutrino tuviera una masa nula, a saber, dada la diminuta masa de los neutrinos¹⁴, el punto final del espectro es ligeramente más pequeño, como se observa en la figura 1.11. Observar esta variación en el espectro es lo que permite poner un límite a la masa de los neutrinos. El isótopo favorito es el tritio, a través de la reacción ${}^3\text{H} \rightarrow {}^3\text{He}^+ + e^- + \bar{\nu}_e$, para el cual el experimento Troitsk [55] tiene el mejor límite: $m_{\bar{\nu}_e} < 2.05$ eV, (95 % N.C.) Próximamente el experimento KATRIN [56] en Alemania prevé mejorar la sensibilidad a $m_{\bar{\nu}_e} \simeq 0.2$ eV.

¹³Estas dos secciones no pertenecen a la búsqueda experimental de oscilaciones, sin embargo sus resultados son relevantes para la oscilación de neutrinos y la física de neutrinos en general. Por eso es que se mencionan aquí.

¹⁴La invariancia en *CPT* asegura que $m_{\bar{\nu}_e} = m_{\nu_e}$

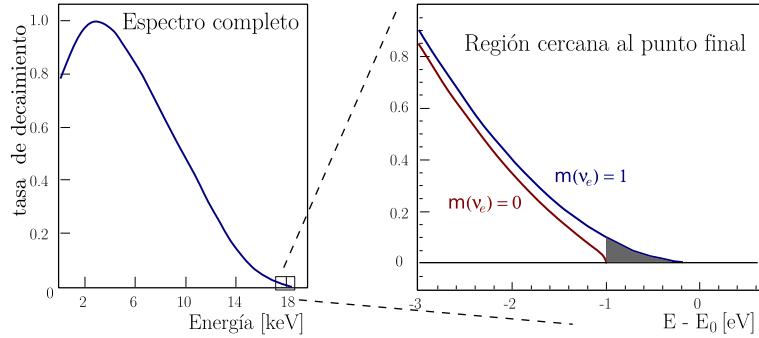


Figura 1.11: Punto final del espectro beta. El efecto de una masa finita del neutrino es un punto final reducido en $E_0 - m_\nu c^2$. Solo 2×10^{-13} se encuentran en la parte final de 1 eV.

A través del decaimiento en reposo del píon se puede poner un límite en la masa del neutrino del muón ν_μ , teniendo un conocimiento preciso del momento del muón y las masas del píon y el muón. El mejor límite obtenido a la fecha es $m_{\nu_\mu} < 0.17$ MeV, (90 % N.C.) [57]. De forma similar, se puede obtener un límite a la masa de ν_τ a través del decaimiento del leptón τ , el más riguroso es $m_\tau < 18.2$ MeV, (95 % N.C.) dado por el experimento ALEPH [58].

Adicionalmente, las observaciones cosmológicas del CMB, la estructura a gran escala, las supernovas tipo Ia y otras; proveen un límite superior a la suma de la masa de los neutrinos $\sum_k \nu_k$ que varía entre una fracción de eV a unos cuantos eV, estos límites dependen fuertemente de los modelos y los conjuntos de datos usados [47, 59].

1.4.6. Decaimiento beta doble sin neutrinos

El decaimiento beta doble ($2\nu\beta\beta$) es un proceso radioactivo en el cual un núcleo libera dos rayos gamma simultáneamente, caracterizado por que la carga del núcleo Z cambia en dos unidades mientras que la masa atómica A permanece sin alterar. Adicionalmente, un decaimiento nuclear de extrema importancia para la física de neutrinos es el *decaimiento beta doble sin neutrinos*¹³ ($0\nu\beta\beta$). Este proceso requiere que los neutrinos tengan una masa diferente de cero y que sean partículas de Majorana, por lo cual se considera el proceso “dorado” para probar el carácter fundamental de los neutrinos.

Un requisito necesario para que ocurra el decaimiento $2\nu\beta\beta$ es que el núcleo decaiga a una configuración menos energética. Además, por razones prácticas, se requiere que el decaimiento β sencillo esté prohibido por consideraciones energéticas. La reacción que sigue este decaimiento es:

$$(Z, A) \rightarrow (Z + 2, A) + 2e^- + 2\bar{\nu}_e,$$

para el caso sin neutrinos se puede considerar como si este par de neutrinos se anularan entre sí, o equivalentemente, como si el neutrino emitido por un nucleón fuera absorbido por el otro. Así pues, solo los electrones resultan en el estado final (el par de protones quedan ligados en el núcleo) y su energía cinética es aproximadamente la diferencia en la energía de amarre, con muy buena aproximación los electrones emitidos salen en direcciones opuestas.

Medir la tasa de decaimiento del decaimiento $0\nu\beta\beta$, además de confirmar la naturaleza de Majorana de los neutrinos, daría información en la escala de masa absoluta de los neutrinos y potencialmente en la jerarquía de masas y las fases de Majorana que aparecen en la matriz PMNS¹². Es esencial insistir

que las oscilaciones de neutrinos no pueden determinar el carácter fundamental de los neutrinos, es decir si son partículas de Dirac o Majorana, ni siquiera las fases de Majorana de la matriz de mezcla tienen algún efecto en las oscilaciones [60].

Actualmente el decaimiento $2\nu\beta\beta$ ha sido confirmado experimentalmente, visto en 35 isótopos distintos con vida media del orden de $\sim 10^{21}$ años. Sin embargo, solo existen límites para el decaimiento sin neutrinos¹⁵ Hay cerca de una docena de experimentos corriendo y propuestos que investigarán este fenómeno.

1.4.7. Estatus experimental de oscilaciones de neutrinos

Se pueden buscar oscilaciones de neutrinos en una variedad de experimentos, en los cuales los mecanismos de producción de neutrinos son muy diferentes. Se han encontrado dos escalas de masas muy diferentes, la de los neutrinos solares y la de los neutrinos atmosféricos, verificadas por experimentos de reactores nucleares y de aceleradores, respectivamente. Las oscilaciones de neutrinos son un hecho experimental que se encuentra muy bien explicado en el marco de mezclas de tres neutrinos. A continuación se describe un poco sobre los distintos experimentos y los resultados que han obtenido. Se muestra el estatus, relativamente actual, de los resultados de oscilaciones en la figura 1.15a, nótese que se gráfica Δm^2 vs $\tan^2 \theta$, razón por la cual algunos contornos son simétricos. Del lado derecho se ponen los contornos obtenidos por los experimentos de neutrinos solares (figura 1.15b) y de neutrinos atmosféricos (figura 1.15c).

Experimentos con neutrinos solares

La primera indicación de un déficit de neutrinos provino del experimento radioquímico de cloro Homestake a finales de los sesenta. Que observó una fracción de los esperados por el modelo solar estándar [61] (SSM por *Standar Solar Model*) de $R_{\text{Cl}}/R_{\text{SSM}} = 0.30 \pm 0.03$, con $R_{\text{Cl}} = 2.56 \pm 0.16 \pm 0.16$ SNU [33, 62]¹⁶ La fracción promedio de experimentos subsecuentes que usaban un blanco con Galio, SAGE [63] y GALLEX [64] (sucedido por GNO [65]), fue $R_{\text{Ga}}/R_{\text{SSM}} = 0.52 \pm 0.03$, con $R_{\text{Ga}} = 68.1 \pm 3.75$ SNU [65]. Además, los detectores cherenkov de agua Kamiokande [66] y Super-Kamiokande [67] en Japón obtuvieron una fracción del flujo esperado de $\Phi_{\text{SK}}/\Phi_{\text{SSM}} = 0.413 \pm 0.014$. El déficit en los distintos flujos observados por estos experimentos sugería un efecto dependiente de la energía, que se conoció como “el problema de los neutrinos solares” [68, 69], y que fue resuelto por el detector de agua pesada SNO [36, 37] en la mina de Sudbury Canadá. Esta es la solución con ángulo de mezcla grande (*large mixing angle*, LMA) y surge del esquema de conversión de sabores descrito por el efecto MSW [38, 39] en el perfil de densidad exponencial del Sol. SNO presenta un resultado combinando sus datos y los de otros experimentos en un análisis de tres neutrinos de $\Delta m^2_{21} = (7.41^{+0.21}_{-0.19}) \times 10^{-5} \text{ eV}^2$ y $\tan^2 \theta_{12} = 0.446^{+0.030}_{-0.029}$ [70], por su parte Super-Kamiokande presenta un resultado similar: $\sin^2 \theta_{12} = 0.304 \pm 0.013$, $\Delta m^2_{21} = 7.45^{+0.20}_{-0.19} \times 10^{-5} \text{ eV}^2$ [71], para ambos: $\theta_{12} \simeq 33^\circ$. Cabe resaltar que si SNO y Super-Kamiokande, experimentos de la misma naturaleza, se abstienen de combinar sus datos con los de KamLAND¹⁷ (de hecho tampoco se combinan entre sí) obtienen

¹⁵En 2001 parte de la colaboración Heidelberg-Moscow afirmó haber visto el proceso, con una vida media del orden de $\sim 10^{25}$ años, sin embargo es un resultado controversial que no ha sido aclarado.

¹⁶1 *Solar Neutrino Unit*, SNU $\equiv 10^{-36}$ capturas / átomo / segundo.

¹⁷Un experimento que es sensible a una región similar pero de distinta naturaleza, en § 1.4.7 se habla más de este experimento.

un ángulo de mezcla similar, pero la diferencia de masa cambia $\Delta m_{21}^2 = (5.6_{-1.4}^{+1.9}) \times 10^{-5}$ eV² y $\Delta m_{31}^2 = 4.8_{-0.9}^{+1.8} \times 10^{-5}$, respectivamente.

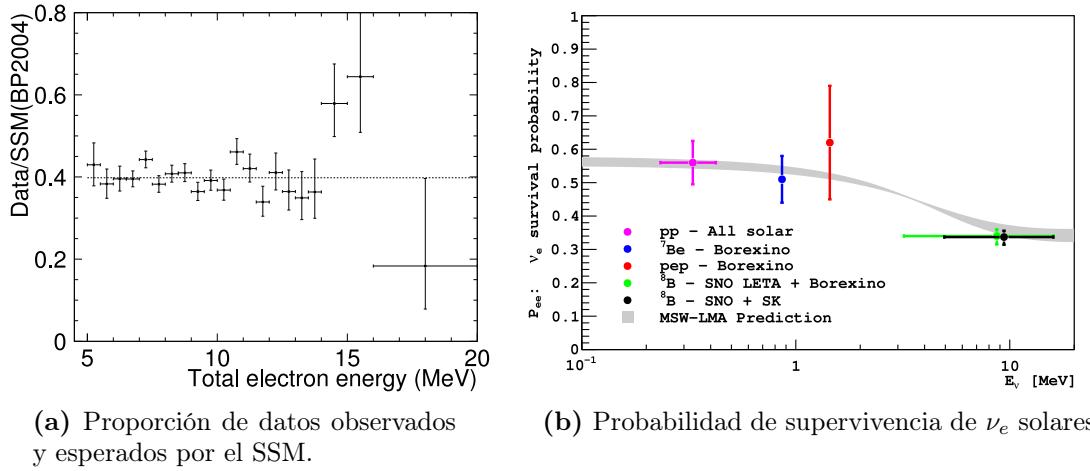


Figura 1.12: Resultados de experimentos de neutrinos solares. (a) Proporción de datos observados por Super-Kamiokande y eventos esperados según el SSM, la línea punteada representa el promedio de los datos. Gráfica de [72] (b) Probabilidad de supervivencia de distintos neutrinos solares, con datos de Kamiokande, Super-Kamiokande, SNO y Borexino, se muestra la banda a 1σ de la predicción MSW-LMA, imagen tomada de [73].

El actual experimento Borexino [73] observó los neutrinos pep (figura 1.12b) que provienen de la inusual reacción de captura del electrón con dos protones y un electrón, formando un núcleo de deuterio y un ν_e . Así pues, se han visto la mayoría de las componentes del flujo solar de ν_e , excepto la componente del ciclo de carbón-nitrógeno-oxígeno (CNO). Además, Super-Kamiokande observa una asimetría día/noche con 2.7σ de nivel de confianza, indicación de la regeneración de ν_e conforme atraviesa la masa terrestre.

Uno de los grandes hitos en la historia actual es la solución al problema de los neutrinos solares¹⁸, un logro de la creciente rama de la astrofísica de neutrinos. Nuevas observaciones lograran tener un mejor idea de la composición y estructura del Sol, como la distribución homogénea de elementos en el Sol. Hay nuevos experimentos en rumbo, actualmente ya casi acaban las remodelaciones a SNO para hacer SNO+ [74], además de mejorar la electrónica se cambió el agua pesada por centellador, y se espera que sea operacional el próximo año. SNO+ buscará los neutrinos CNO y mejorará las medidas de los neutrinos pep y del ^8B , buscará geoneutrinos, neutrinos de supernovas e investigará el doble decaimiento beta. Se investiga la posibilidad de construir un nuevo detector de 50 kilotoneladas, LENA [75], con una gran variedad de objetivos: neutrinos solares, geoneutrinos, supernovas, oscilaciones de corta distancia con fuentes radioactivas.

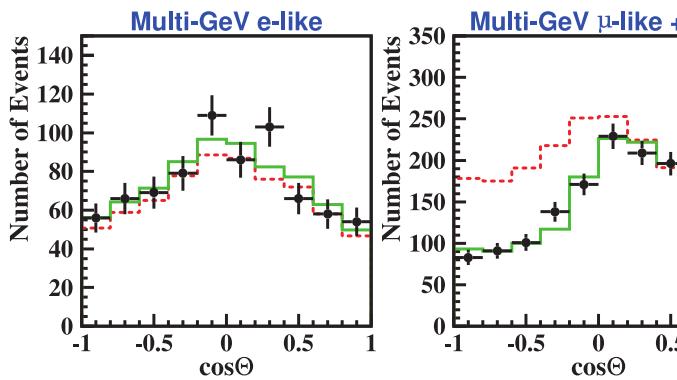
Experimentos con neutrinos atmosféricos

Estos neutrinos son producidos por el decaimiento de mesones que se originan de la interacción de rayos cósmicos con el oxígeno y nitrógeno de la atmósfera terrestre. En 1965, las primeras observaciones de estos neutrinos en experimentos en Sudáfrica [76] e India [77] mostraban incompatibilidad con la expectativa con poca significación estadística, mientras que dos experimentos de calorímetros,

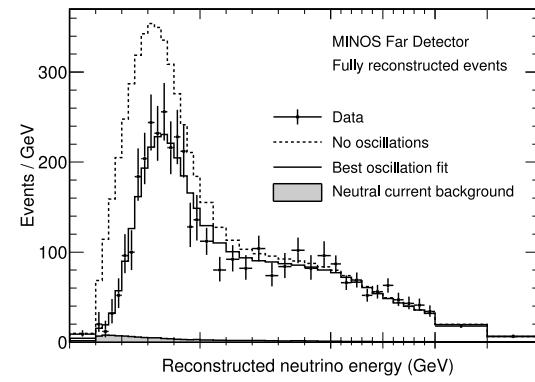
¹⁸Todavía hay cosas por resolver: la probabilidad de supervivencia en la región de transición vacío/materia y una parte plana del espectro que observa Super-Kamiokande que no se puede explicar con LMA.

NUSEX [78] en 1988 y Frejus [79] en 1994, no observaron discrepancia. Observaciones posteriores con detectores cherenkov de agua, Kamiokande [80] e IMB [81] obtuvieron una proporción de eventos inducidos por muón y eventos inducidos por electrón ~ 0.6 más pequeña que el valor esperado. Estas discrepancias se conocieron como “la anomalía de neutrinos atmosféricos”. La dependencia en el ángulo cenital de las mediciones de Kamiokande indicaron que el déficit era causado principalmente por neutrinos que venían por debajo del horizonte y viajaban los $\sim 10^4$ km del diámetro terrestre, mientras que aquellos que venían de arriba del horizonte solo viajaban ~ 15 km. Esto se ve apoyado por las observaciones de que el déficit crece con la distancia viajada por el neutrino desde su punto de producción. Para eventos de varios GeV Super-Kamiokande encontró en 1998 una asimetría ascendente-descendente en los eventos observados desviándose del valor esperado por ~ 10 desviaciones estándar $A_\mu = \frac{U-D}{U+D} = -0.29 \pm 0.03$, en donde $U(D)$ ocurren en el intervalo de ángulo cenital $-1 < \cos \theta_z < -0.2$ ($0.2 < \cos \theta_z < 1$).

La alta precisión y estadística del conjunto de datos atmosféricos de Super-Kamiokande [35, 82, 83] junto con la confirmación de los experimentos de calorímetro metálico, Soudan2 [84] y MACRO [85], resultó en evidencia definitiva de la desaparición de neutrinos del muón producidos en la atmósfera. La mejor interpretación de estos resultados es la oscilación de ν_μ hacia ν_τ , actualmente los mejores valores que se tienen para los parámetros de oscilación vienen del experimento de acelerador MINOS [86] y son $|\Delta m_{23}^2| = (2.41^{+0.09}_{-0.10}) \times 10^{-3}$ eV² para la diferencia de masas y $\sin^2 2\theta_{23} = 0.950^{+0.035}_{-0.036}$ para el ángulo de mezcla, de forma similar a como los experimentos de reactores pueden probar los parámetros de oscilación de los neutrinos solares, es posible configurar un experimento de acelerador para que busque oscilaciones en el régimen atmosférico. La explicación en términos de oscilación $\nu_\mu \rightarrow \nu_e$ esta excluida con alto nivel de confianza ya que los eventos ν_e concuerdan bien con la expectación y hubieran producido un déficit en el experimento de reactor nuclear CHOOZ que no fue observado. La oscilación en neutrinos estériles también está descartada para neutrinos atmosféricos ya que esto implicaría una supresión en la señal de corriente neutra que no fue observada [87]. La interpretación en términos de no aparición de ν_τ esta desfavorecida a 3.8σ [88] de acuerdo con un análisis reciente de los efectos de esta hipótesis.



(a) Neutrinos atmosféricos de Super-Kamiokande.



(b) Eventos de MINOS.

Figura 1.13: Resultados de experimentos en el régimen atmosférico. (a) Distribuciones de ángulo cenital del experimento Super-Kamiokande, en linea punteada se muestra el MC sin oscilar y la linea continua muestra la expectación del mejor ajuste para oscilaciones $\nu_\mu \leftrightarrow \nu_\tau$ [89]. (b) Muestras de datos del detector lejano de MINOS comparadas a la predicción con y sin oscilaciones [90].

Todavía quedan varias cosas por determinar: el octante del ángulo θ_{23} , la jerarquía de masas y la fase de violación CP . Además del experimento Super-Kamiokande, el experimento IceCube [91] en el polo

sur es capaz de ver oscilaciones de neutrinos atmosféricos¹⁹ y a mediados de 2013 reportó resultados significativos que son consistentes con los obtenidos por los otros experimentos. Con el objetivo de estudiar las interrogantes restantes ya se empezó la construcción del experimento INO [92] en la India, el cual se espera que entré en funcionamiento en 2018. Se han propuesto los experimentos Hyper-Kamiokande [93] y PINGU [94] como las siguientes fases, mucho más grandes, de los experimentos Super-Kamiokande y IceCube, respectivamente.

Experimentos de reactores nucleares

Los reactores nucleares son fuentes de $\bar{\nu}_e$ exclusivamente, con energías de 2–10 MeV, con energías tan pequeñas un $\bar{\nu}_e$ que oscila a otro sabor se vuelve imposible de detectar con detectores convencionales. No hay suficiente energía para producir un μ o τ , requisito para saber que la transición tomo lugar, es por eso que los experimentos de reactor típicamente buscan una señal de desaparición.

Los experimentos Gosgen [95] ($L \sim 38\text{--}65\text{ m}$) en Suiza y Krasnoyarsk [96] ($L \sim 57\text{--}231\text{ m}$) en Rusia, Bugey [97] ($L \sim 50\text{--}94\text{ m}$) y CHOOZ [98, 99] ($L \sim 1\text{ km}$) en Francia, y Palo Verde [100] ($L \sim 750\text{--}890\text{ m}$) en Estados Unidos, no encontraron evidencia de oscilaciones, poniendo límites de exclusión en el espacio de parámetros por encima de $\sin^2 2\theta \gtrsim 10^{-1}$ y $\Delta m^2 \gtrsim 10^{-3}\text{ eV}^2$. La región de exclusión de CHOOZ se extiende hasta valores de Δm^2 que son relevantes a la interpretación de datos de neutrinos atmosféricos y tiene importantes implicaciones en análisis globales que invocan el esquema de tres neutrinos.

El experimento en curso²⁰ KamLAND [101] detecta $\bar{\nu}_e$, con un blanco de centellador líquido, provenientes de varios reactores nucleares alrededor de la mina de Kamioka en Japón, que se localizan a distancias entre 150 y 210 km. Con estas distancias superiores, el experimento es sensible a oscilaciones de neutrinos con $\Delta m^2 \gtrsim 10^{-5}\text{ eV}^2$, similar a aquellas que influyen en neutrinos solares y observa un déficit de neutrinos consistente con los parámetros de oscilación de experimentos de solares. Enfatizando, los $\bar{\nu}_e$ de los reactores oscilan con parámetros consistentes con aquellos de los ν_e provenientes del Sol, precisamente el comportamiento esperado si la simetría *CPT* rige el comportamiento de los procesos leptónicos. Con el cierre a largo plazo de las centrales nucleares en Japón, KamLAND ha tenido una maravillosa oportunidad para hacer estudios del ruido y ha publicado un análisis combinando sus datos con los solares (figuras 1.14a y 1.15b), el cual otorga parámetros de oscilación: $\tan^2 \theta_{12} = 0.436_{-0.025}^{+0.029}$, $\Delta m_{21}^2 = 7.53_{-0.18}^{+0.18} \times 10^{-5}\text{ eV}^2$, and $\sin^2 \theta_{13} = 0.023_{-0.002}^{+0.002}$ [45]. Esta es la solución LMA al problema de los neutrinos solares, en contraste a otras soluciones que tenían ángulos de mezcla más pequeños. Con los datos del experimento KamLAND en los análisis globales de los datos de neutrinos solares, la solución LMA emergió con claridad como la solución favorecida para el problema de los neutrinos solares.

Actualmente hay tres experimentos de reactores que se encargan de medir el ángulo de mezcla θ_{13} , a saber: Double Chooz en Francia [103], RENO en Corea [104] y Daya Bay en China [105]. Los tres reportan valores congruentes del orden de $\sin^2 2\theta_{13} \sim 0.1$, y están trabajando para presentar un resultado conjunto²¹, pero aquí nos limitaremos a los resultados de Daya Bay, a la fecha los más precisos. Se tiene un conjunto de detectores cercanos (cientos de metros) a los reactores y un cumulo de detectores a una distancia de $\sim 2\text{ km}$, con este arreglo se logra una mejor determinación de la tasa

¹⁹Aunque ese no es su objetivo principal.

²⁰Ya cesó su investigación de oscilación de neutrinos, sin embargo esta en el proceso de cambiar de giro hacia la investigación de decaimiento $0\nu\beta\beta$.

²¹Se debe prestar atención a los errores correlacionados, además de que deben ser evaluados de forma unificada.

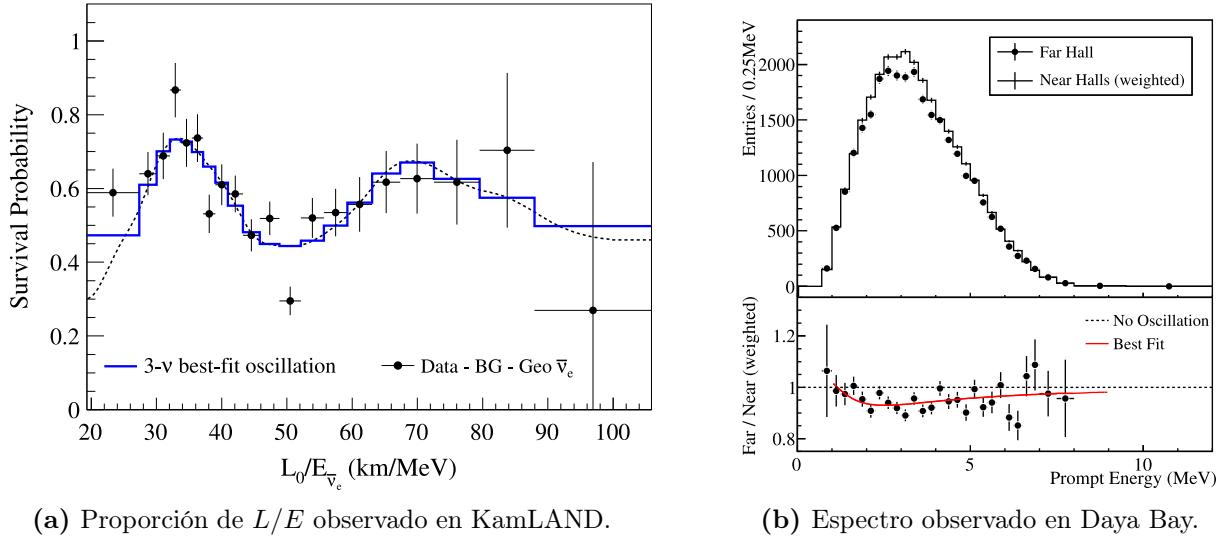


Figura 1.14: Resultados de experimentos de reactores. (a) Proporción del espectro observado de $\bar{\nu}_e$ entre lo esperado sin oscilaciones en KamLAND, tomada de [45]. (b) Espectro de energía medido en los detectores lejanos comparado con la predicción sin oscilaciones basada en lo medido en los detectores cercanos de Daya Bay, debajo se muestra la proporción de las dos muestras, tomada de [102]

de desaparición, la detección de $\bar{\nu}_e$ se hace con centellador dopado con Gd a través de decaimiento beta inverso y una señal retrasada de la captura del neutrón. La fracción de datos observados entre los esperados de no haber oscilación (figura 1.14b) es de $R = 0.944 \pm 0.007$ (stat) ± 0.003 (sist), así pues se tiene una incontrovertible observación (7.7σ) de un déficit de $\bar{\nu}_e$, con lo cual se obtiene $\sin^2 2\theta_{13} = 0.089 \pm 0.010$ (stat) ± 0.005 (sist); que equivale a $\theta_{13} \simeq 8.7^\circ$ [102], el ángulo de mezcla leptónico más pequeño es comparable al ángulo de mezcla más grande de *quarks*. Ya se está considerando la siguiente etapa de Daya Bay, el experimento de 20 kilotoneladas JUNO, que se encontrará a una distancia de ~ 60 km de los reactores nucleares. También se considera la construcción de RENO-50 un detector de 18 kilotoneladas localizado a 50 km de la fuente de neutrinos. Estos nuevos experimentos pretenden hacer medidas de precisión de los parámetros de mezcla, detectar geoneutrinos, neutrinos de supernovas, investigar neutrinos estériles y determinar la jerarquía de masas.

Experimentos con neutrinos de acelerador

Como se mencionó en § 1.3.2 se pueden producir haces de neutrinos en los aceleradores de partículas, a través de varios mecanismos, con el decaimiento de mesones. El primer experimento de oscilación de neutrinos de larga distancia fue K2K [106, 107] que producía neutrinos en el laboratorio KEK de un haz de protones con momento $12 \text{ GeV}/c$ que impactaban un blanco de aluminio y viajaban una distancia de $L \sim 235$ km al detector Super-Kamiokande. El segundo fue el experimento en curso MINOS [108]: protones con momento de $120 \text{ GeV}/c$ del *Main Injector* de Fermilab impactan en un blanco de grafito para generar un haz de neutrinos que viajan una distancia de $L \sim 730$ km hasta el calorímetro de hierro en Soudan, Minnesota en Estados Unidos. Además del resultado ya mencionado de neutrinos atmosféricos, MINOS encuentra valores consistentes para los parámetros de oscilaciones de neutrinos y antineutrinos en la región a la cual es sensible [86]. Más aún, con la gran estadística que cuenta y la capacidad de diferenciar entre neutrinos y antineutrinos pueden desfavorecer 31% (5%) del espacio de tres parámetros definido por la fase de violación de CP δ , el octante de θ_{23} y la jerarquía de masa a 68% (90%) nivel de confianza [109].

Además de MINOS, operan actualmente los experimentos OPERA [110] e ICARUS [111] en Gran Sasso Italia, con neutrinos producidos a 732 km de distancia en CERN Suiza; T2K [112] con neutrinos que viajan 295 km de Tokai a Kamioka en Japón y recientemente se acabó la construcción del experimento NO ν A [113], el sucesor de MINOS, con neutrinos que viajan 810 km desde Fermilab hasta el norte de Minnesota. OPERA se dedica a la búsqueda de oscilaciones $\nu_\mu \rightarrow \nu_\tau$ por búsqueda directa de aparición, a la fecha ha reportado 3 eventos ν_τ a 3.2σ de confianza [114]. Recientemente el experimento T2K reporta [115] medidas precisas de los parámetros de oscilación similares a aquellos encontrados por MINOS. En el futuro próximo T2K y NO ν A llevarán a importantes constricciones en la determinación de la fase de violación de CP , la jerarquía de masas y el octante de θ_{23} . Tanto Europa como Estados Unidos investigan la posibilidad de un programa de neutrinos a gran distancia con LBNO (2300 km) y LBNE (1300 km)

Ejemplos de experimentos de oscilación de neutrinos de corta distancia son LSND, KARMEN; los cuales se resumen al final de este capítulo, y MiniBooNE, del cual se hablará con detalle en el próximo capítulo.

Neutrinos estériles y oscilación de $3 + n$ neutrinos

Los experimentos de oscilación de neutrinos atmosféricos, solares, de aceleradores y de reactores se describen de forma consistente usando tres sabores activos de neutrinos, es decir con dos diferencias de masas al cuadrado y tres ángulos de mezcla. Sin embargo, varios experimentos con fuentes radiactivas, reactores y aceleradores sugieren la posible existencia de una o más especies de neutrinos que no forman parte de las interacciones débiles, es decir de neutrinos *estériles*.

La primera evidencia de neutrinos estériles vino en los noventa con el experimento LSND, con un haz de $\bar{\nu}_\mu$, generados con un acelerador, detectó un exceso de $\bar{\nu}_e$ en la escala de $\Delta m^2 \sim 1 \text{ eV}^2$ significante a 3.8σ . Lo cual no concordaba con la imagen que se había formado de las oscilaciones de neutrinos. Con el objetivo de corroborar o refutar a LSND se construye el experimento MiniBooNE en Fermilab, el cual también observa un exceso de eventos a la misma escala. Debido a la gran certeza que se tiene de los resultados con neutrinos atmosféricos y al hecho de que el nivel de confianza de los resultados obtenidos por MiniBooNE y LSND es menor a 4σ , vuelve a estas observaciones “anómalas”²².

Al reevaluar el flujo de neutrinos emitido por reactores nucleares, se obtuvo un incremento de $\sim 3\%$ después de haber reconsiderando mejorías en el espectro de los neutrinos de reactores, reevaluar secciones eficaces y considerando los isótopos de vida larga que se acumulan en los reactores. Basándose en el nuevo cálculo de flujo, los resultados de corta distancia ($L \leq 100 \text{ m}$) muestran un déficit de $\sim 6\%$ (98.6% N.C.) en el flujo medido de $\bar{\nu}_e$, a este déficit se le llama “la anomalía de reactores nucleares” [118]. Un déficit que puede ser explicado por la desaparición de $\bar{\nu}_e$ debido a oscilaciones con $\Delta m^2 \sim 1 \text{ eV}^2$.

La “anomalía del galio” surgió en experimentos de fuente radioactiva en SAGE [120] y GALLEX [121], experimentos de galio de neutrinos solares. Obtuvieron una tasa de eventos inducidos por flujos de ν_e producidos por intensas fuentes de ^{51}Cr y ^{37}Ar 15% más baja de lo esperado. Este efecto puede ser explicado por la hipótesis de desaparición de ν_e debido a oscilaciones con $\Delta m^2 \gtrsim 1 \text{ eV}^2$ [122, 123].

Más aún, el análisis de datos cosmológicos como el CMB, nucleosíntesis en el *Big Bang* y la abundancia relativa de elementos aún admiten un neutrino extra [47, 48, 49].

²²Es común escuchar sobre “la anomalía LSND”, y en fechas recientes también se ha escuchado hablar sobre “la anomalía MiniBooNE”.

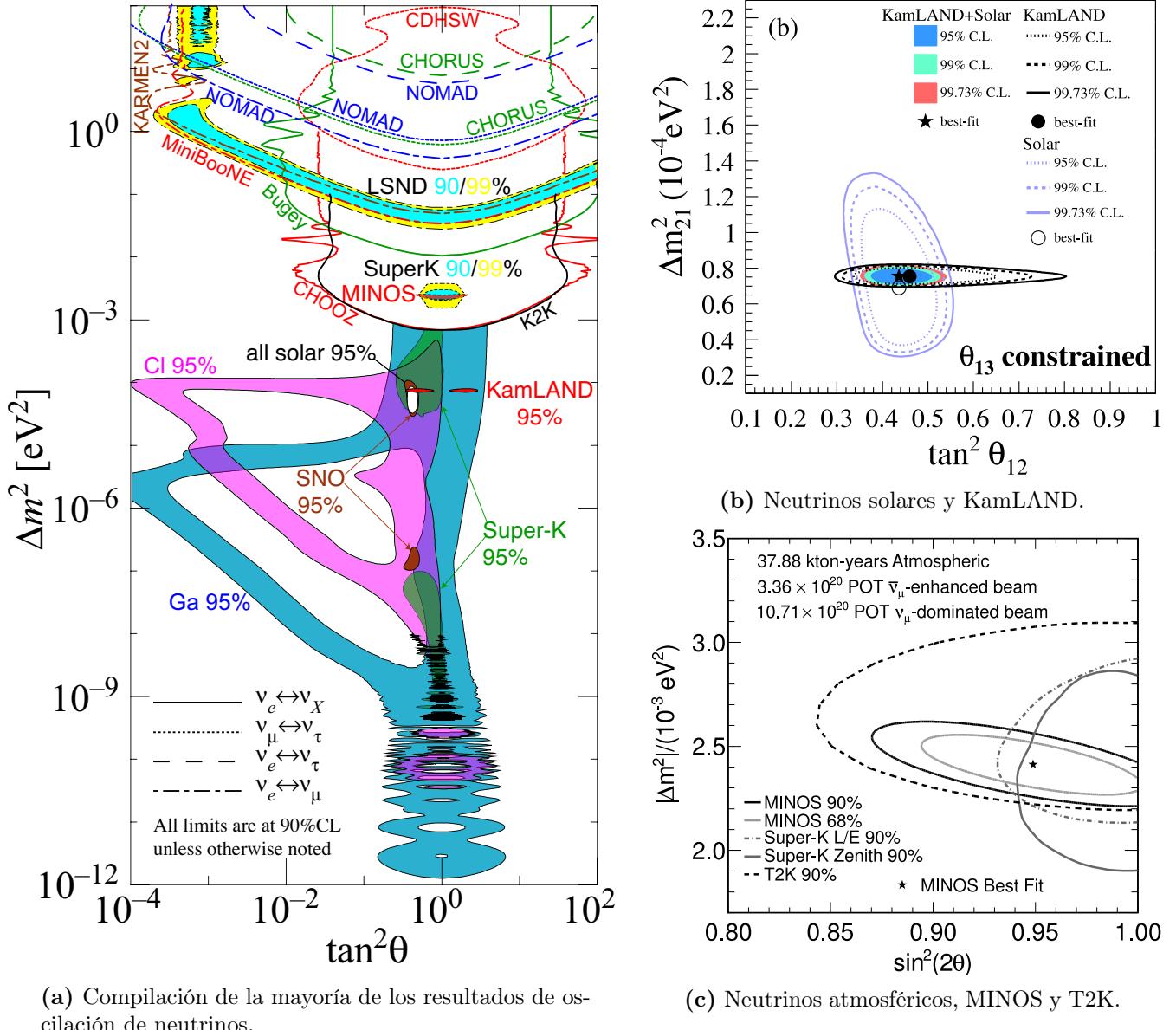


Figura 1.15: (a) Regiones favorecidas o excluidas de Δm^2 vs. $\sin^2 2\theta$ por varios experimentos basadas en análisis de oscilación de dos neutrinos. [40]. Referencias a los datos usados para esta figura pueden ser encontrados en <http://hitoshi.berkeley.edu/neutrino>. (b) Regiones permitidas sobre el plano $\tan^2 \theta_{12}$ – Δm_{21}^2 para datos solares y de KamLAND para un análisis con tres neutrinos y θ_{13} constreñida por experimentos. Tomada de [45] (c) Regiones permitidas de $|\Delta m^2|$ vs. $\sin^2 2\theta$, asumiendo oscilaciones idénticas de neutrinos y antineutrinos. El resultado de MINOS [86] se compara al de Super-Kamiokande [116] y T2K [117].

Sin embargo, numerosos experimentos han obtenido límites de exclusión inconsistentes con lo observado por MiniBooNE y LSND. En particular el experimento con antineutrinos KARMEN [124], contemporáneo a LSND, pone un límite que excluye gran parte de las regiones permitidas por LSND y MiniBooNE, recientemente los experimentos OPERA [125] e ICARUS [126] (oscilación de neutrinos) pusieron límites que excluyen la región con $\sin^2 2\theta > 10^{-2}$. Por otra parte, las distintas anomalías no parecen tener una explicación común: MiniBooNE favorece la existencia de por lo menos dos neutrinos estériles pero tal escenario sigue mostrando mucha tensión para los experimentos de desaparición.

En vista de toda esta evidencia un gran número de experimentos surgirán con el objetivo de investigar

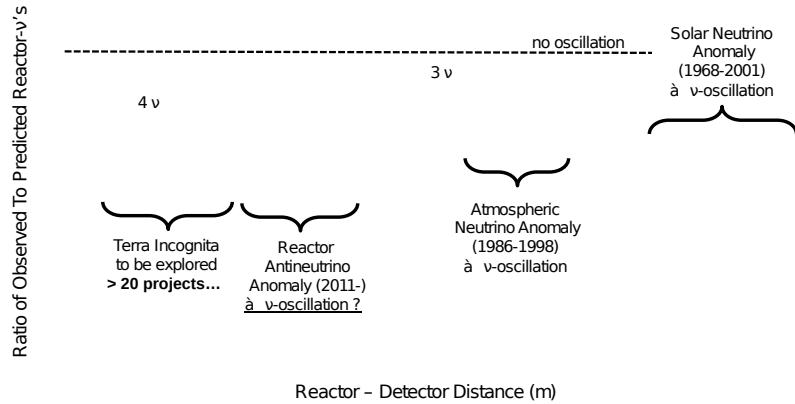


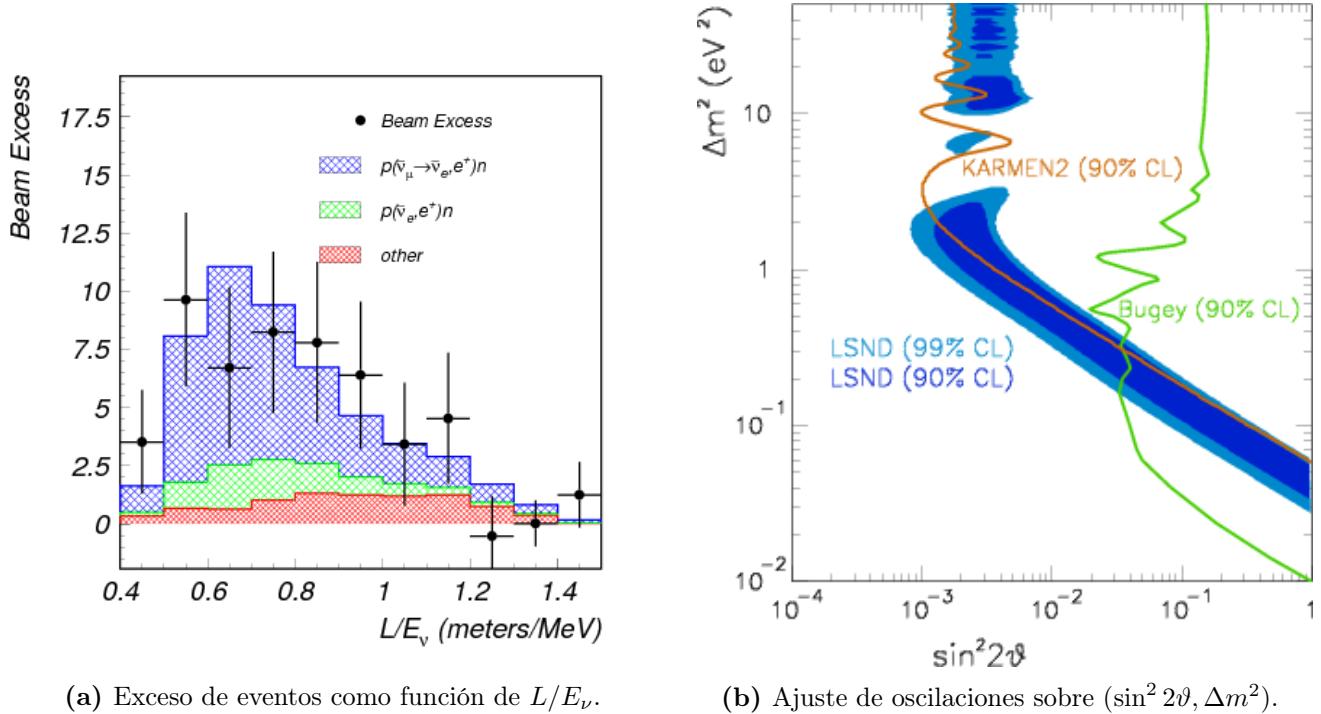
Figura 1.16: Anomalía de los antineutrinos de reactores nucleares de corta distancia. Los resultados experimentales son comparados a la predicción sin oscilación. El promedio de la tasa media, incluyendo correlaciones, es 0.943 ± 0.023 . La línea punteada muestra una posible solución con tres neutrinos activos, mientras que la línea continua incluye un nuevo estado de masa. Estas líneas no son ajustes a los datos, solo se ponen como ilustración. Tomado de la presentación [119] sobre el artículo [118].

la posible presencia de los neutrinos estériles con una variedad de métodos y acercamientos [127]. Entre los cuales se encuentran los de fuente radioactiva SOX [128] y CeLand [129]; los de haces de aceleradores NESSiE [130], IsoDAR [131], nuSTORM [132] y MINOS+ [133]; y los de reactores Stereo, Solid, SCARR y Nucifer [134].

1.5. LSND

El experimento *LSND* (*Liquid Scintillator Neutrino Detector*) fue diseñado para buscar oscilaciones $\bar{\nu}_\mu \rightarrow \bar{\nu}_e$ con alta sensibilidad y para medir secciones eficaces νC [136]. Tenía la ventaja de tener una muy alta intensidad de protones, un detector de gran masa y buen sistema de identificación de partículas. El experimento *KARMEN* (*KArlsruhe Rutherford Medium Energy Neutrino*) fue contemporáneo a LSND y también presentó resultados en la búsqueda de oscilaciones. KARMEN tenía una excelente resolución de energía pero un factor de trabajo menor al de LSND. Los dos experimentos partían de un haz de alta intensidad de protones de 800 MeV que interactuaba en un amortiguador para producir una gran cantidad de piones, la mayoría π^+ de los cuales casi todos decaían. Los π^- son absorbidos y solo una pequeña fracción decae a μ^- , que por su parte son capturados en su mayoría. Por lo tanto casi todos los neutrinos producidos provienen de decaimientos $\pi^+ \rightarrow \nu^+ \nu_\mu$ y $\mu^+ \rightarrow e^+ \bar{\nu}_\mu \nu_e$, de los cuales la mayoría de los decaimientos ($> 95\%$) son en reposo (*decay-at-rest*, DAR) y solo una pequeña fracción ($< 5\%$) son en vuelo (*decay-in-flight*, DIF). Después de seis años de recolectar datos el experimento LSND obtuvo evidencia de oscilaciones de neutrinos [137] en el rango de masa $\Delta m^2 > 0.2 \text{ eV}^2$, como se muestra en la figura 1.17b. Sin embargo ese resultado no fue confirmado por el experimento KARMEN [124]. A pesar de eso se hizo un análisis conjunto de los dos experimentos [138] que revela una región de compatibilidad en una banda desde 0.2 a 1 eV^2 y en una región alrededor de 7 eV^2 .

El experimento LSND observó un exceso de eventos sobre el fondo fuera del haz y el fondo de neutrinos que es consistente con oscilaciones de neutrinos. Se tiene un exceso dentro y fuera del



(a) Exceso de eventos como función de L/E_ν . (b) Ajuste de oscilaciones sobre $(\sin^2 2\theta, \Delta m^2)$.

Figura 1.17: Resultados del experimento LSND: (a) Exceso de eventos como función de L/E_ν en el rango de energía $20 < E_e < 60$ MeV, L es la distancia que viajaron los ν en metros y E_ν es la energía de los ν en MeV. Los datos concuerdan bien con el fondo esperado y oscilaciones de neutrinos para Δm^2 baja. (b) Ajuste de oscilaciones en el espacio de parámetros $(\sin^2 2\theta, \Delta m^2)$ para la muestra completa de datos de LSND de $20 < E < 200$ MeV. Las regiones sólidas corresponden a las regiones permitidas de LSND, mientras que las curvas son los límites de exclusión de 90 % N.C. de los experimentos Bugey y KARMEN en ISIS.

haz de 117.9 ± 22.4 con neutrones en coincidencia. Subtrayendo el fondo de neutrinos provenientes de μ^- DAR (19.5 ± 3.9 eventos) y el de π^- DIF (10.5 ± 4.6 eventos)²³ lleva a un exceso total de $87.9 \pm 22.4 \pm 6.0$ eventos significativos a 3.8σ . Este exceso corresponde a una probabilidad de oscilación de $0.264 \pm 0.067 \pm 0.045$ %, donde el primer error es estadístico y el otro es sistemático derivado de incertidumbres en los fondos, flujo de neutrinos (7 %), eficiencia de e^+ (7 %) y eficiencia de γ (7 %).

A través de un análisis estadístico, sobre el espacio de parámetros $(\sin^2 2\theta, \Delta m^2)$, a los eventos en el haz de la muestra final de oscilación, se obtienen los parámetros favorecidos para la oscilación de neutrinos. El análisis permite obtener las regiones que permiten oscilación de neutrinos por LSND. Los fondos relacionados al haz se determinan con muestras Monte Carlo (MC) para cada contribución individual al fondo. El ajuste de oscilaciones sobre el espacio $(\sin^2 2\theta, \Delta m^2)$ para toda la muestra de datos de $20 < E_e < 200$ MeV se muestra en la figura 1.17b. El ajuste incluye oscilación $\bar{\nu}_\mu \rightarrow \bar{\nu}_e$ y $\nu_\mu \rightarrow \nu_e$, así como todos los fondos conocidos de neutrinos. La región sólida interna corresponde a la región permitida de 90 % N.C. mientras que la externa corresponde a la de 99 % N.C. Las curvas son los límites de exclusión de 90 % N.C. del experimento de reactor Bugey [97] y el experimento KARMEN en ISIS [124]. La región más favorecida es la banda 0.2 a 1.0 eV², aunque una región alrededor de 7 eV² también es posible.

El experimento LSND es el precursor de MiniBooNE, de hecho el objetivo principal de MiniBooNE era corroborar o refutar el resultado obtenido por LSND, el cual, apunta a la existencia de más sabores de neutrinos; llamados *neutrinos estériles*.

²³También incluye el fondo de interacciones $\nu_\mu(\bar{\nu}_\mu) + C \rightarrow \mu^-(\mu^+) + nX$.

Capítulo 2

Experimento MiniBooNE

MiniBooNE (*Mini¹ Booster Neutrino Experiment*) es un experimento de oscilación de neutrinos de corta distancia. Surgió con el objetivo de comprobar o refutar los resultados presentados por el experimento LSND [141] (ver § 1.5). MiniBooNE recolectó datos de 2002 a 2012. Se encuentra en *Fermilab (Fermi National Accelerator Laboratory)*, un laboratorio mundialmente reconocido dedicado a la física de altas energías ubicado en el estado de Illinois en Estados Unidos.

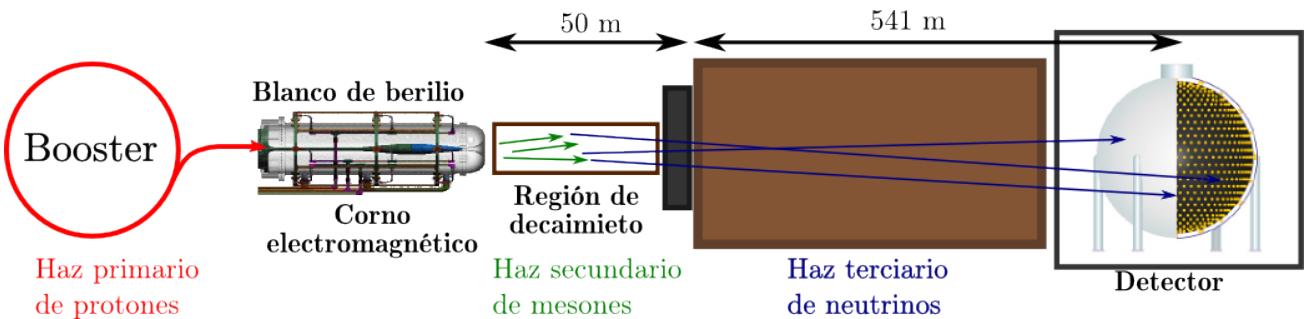


Figura 2.1: Vista esquemática del experimento MiniBooNE. El acelerador Booster manda protones de 8 GeV hacia el blanco de MiniBooNE, el cual se encuentra dentro del corno magnético. Los mesones creados de la interacción del haz primario de protones son enfocados/desenfocados en el corno magnético, formando el haz secundario. Estos mesones decaerán más adelante para formar el haz terciario de neutrinos. La componente hadrónica será detenida en el tope del haz, pero los neutrinos seguirán viajando por la tierra hasta llegar al detector, donde algunos serán detectados.

Una vista esquemática del experimento MiniBooNE se muestra en la figura 2.1. Los protones de 8 GeV de energía provenientes del sincrotrón *Booster* inciden sobre un blanco de berilio (Be), el cual se encuentra dentro de un *corno magnético*. De la interacción de los protones con el berilio se generan mesones que son enfocados y direccionados con el corno; estos mesones decaerán en neutrinos los cuales viajarán una distancia aproximada de 541 m hasta el detector. La energía media de los neutrinos obtenidos, en el marco de referencia del detector, es de cientos de MeV. Al cambiar la polaridad del corno se puede elegir entre un haz de alta intensidad primordialmente formado por neutrinos del muón ν_μ o uno formado de antineutrinos del muón $\bar{\nu}_\mu$. MiniBooNE hizo búsquedas de

¹Se llama “Mini” porque inicialmente era la primera fase de un experimento con dos detectores, BooNE. Sin embargo nunca se aprobó la construcción del segundo detector.

oscilación de neutrinos y antineutrinos por *aparición*: $\nu_\mu \rightarrow \nu_e$ y $\bar{\nu}_\mu \rightarrow \bar{\nu}_e$. Es decir de un haz de ν_μ ($\bar{\nu}_\mu$) se busca un exceso en el fondo intrínseco esperado de ν_e ($\bar{\nu}_e$).

Usando una proporción similar de distancia entre energía, $L[\text{m}]/E[\text{MeV}]$, a aquella que uso LSND, se tiene sensibilidad a la misma región de oscilaciones de neutrinos de $\Delta m^2 \sim 1 \text{ eV}^2$. De hecho la energía y distancia características hacen al experimento más sensible a oscilaciones de dos neutrinos con una diferencia de masa $> 0.01 \text{ eV}^2$ [141]. Es fundamental disponer tales parámetros de la forma que se hizo ya que la probabilidad de oscilación es muy pequeña, según los resultados sugeridos por LSND, $\sim 0.25\%$. Es importante notar que a pesar de que la proporción se mantuvo similar la distancia y la energía se elevaron dos órdenes de magnitud a como eran en LSND. Consiguiendo de esa forma cambiar el método de detección y los errores sistemáticos asociados.

Típicamente las incertidumbres en el flujo de haces de neutrinos generados con aceleradores son más de un orden de magnitud mayores a cualquier efecto esperado por fenómenos de oscilación. Esto hace que una búsqueda de oscilación por *desaparición* de ν_μ ($\bar{\nu}_\mu$) sea sumamente desafiante para solamente un detector. Sin embargo para el caso de una búsqueda de oscilación por aparición en la cual la contaminación intrínseca de ν_e ($\bar{\nu}_e$) es $< 1\%$, junto con una medición de la componente rica en estadística de ν_μ ($\bar{\nu}_\mu$) del haz, usada para constreñir el error sistemático del flujo y la sección eficaz, se puede lograr suficiente sensibilidad al proceso de baja amplitud $\nu_\mu \rightarrow \nu_e$ ($\bar{\nu}_\mu \rightarrow \bar{\nu}_e$). Más aún se requiere un haz de neutrinos (antineutrinos) de alta intensidad para generar suficiente estadística de eventos $\nu_\mu \rightarrow \nu_e$ ($\bar{\nu}_\mu \rightarrow \bar{\nu}_e$) y un detector con la capacidad para detectar eficazmente eventos ν_e ($\bar{\nu}_e$) sin confundirlos con $> 99\%$ de ν_μ ($\bar{\nu}_\mu$) para que la tarea de buscar oscilaciones de neutrinos en la escala de 1 eV^2 sea factible.

2.1. El haz de neutrinos del Booster

Como se puede apreciar en la figura 2.1 la línea del haz del Booster (BNB por sus siglas en inglés: *Booster Neutrino Beamline*) está dividida en tres etapas:

- Un haz primario de protones extraídos del Booster que inciden en un blanco de berilio.
- Un haz secundario de mesones formados por las colisiones de los protones del haz primario con los núcleos del berilio del blanco.
- Un haz terciario compuesto principalmente de neutrinos, originados del decaimiento de los mesones del haz secundario a lo largo de un túnel.

2.1.1. El haz primario de protones

La disposición esquemática del BNB se discute con gran detalle en el reporte técnico del diseño [142] y en la figura 2.2 se muestra una foto aérea con los puntos clave. Para generar los neutrinos que detecta MiniBooNE se parte de un haz de protones los cuales surgen de una botella con hidrógeno que pasan por un acelerador Cockcroft–Walton², estos protones son acelerados en un acelerador lineal (linac) de 150 m de largo y de ahí se meten al Booster, un sincrotrón de 468 m de circunferencia, saliendo del Booster se dirigen al *Main Injector*, otro sincrotrón de protones, antes de ser acelerados los protones

²En 2012 se desmanteló este acelerador para poner uno más moderno de mayor intensidad.

son “pateados” hacia el edificio *MI-12* (Main Injector 12). El Booster entrega protones con energía cinética de 8 GeV (momento de 8.9 GeV/c) agrupados con la siguiente estructura: 6×10^{10} protones forman un *bunch*, cada *bunch* tiene un ancho de 2 ns y la separación entre cada *bunch* es de 18 ns, se tienen aproximadamente 82 *bunches* en un *spill*. Un *spill* dura 1.6 μ s y tiene 4.9×10^{12} protones. En 1 s se tienen de 4 a 10 *spills*, si los demás experimentos que operan en Fermilab están apagados se suele tener mayor intensidad. En la figura 2.3 se muestra un dibujo con esta estructura.

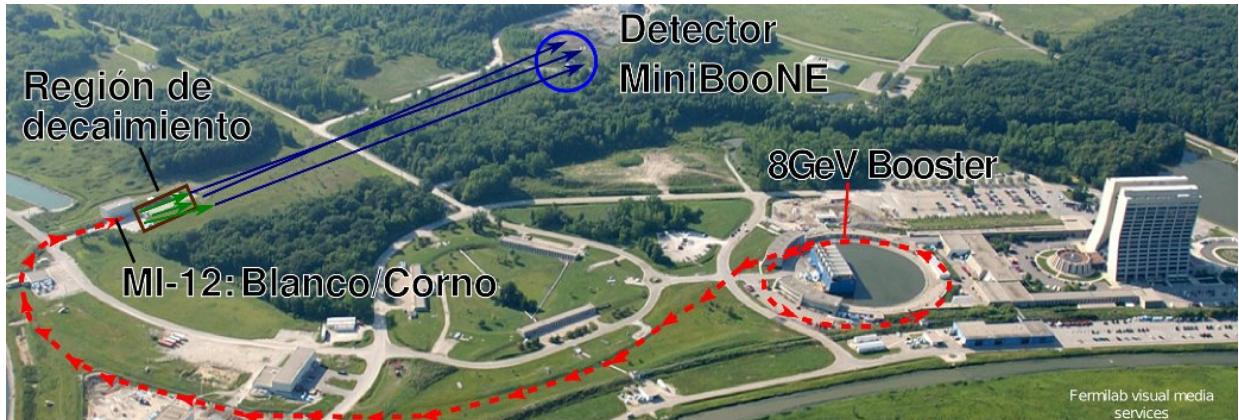


Figura 2.2: Vista aérea de la línea del haz del experimento MiniBooNE. Protones con 8 GeV salen del sincrotrón Booster hacia el edificio MI-12 en donde se encuentra el corno magnético y dentro el blanco de berilio. Los mesones que surgen de la interacción con los protones decaen más adelante en neutrinos que llegan al detector.

La cantidad absoluta de protones en el blanco (POT: *Protons On Target*), su posición, perfil y tiempo son constantemente monitoreados con toroides, monitores de posición de haz, y cámaras multialámbricas, respectivamente. Para evitar que el haz se mueva demasiado de su posición nominal y se estrelle contra el material del corno, un colimador con forma de dona y un monitor de pérdida de haz están instalados en el extremo del blanco para tirar el haz si es necesario. Un programa de autoenfoque [143] la posición y ángulo del haz en tiempo real y minimiza cualquier desalineado.

2.1.2. El blanco de protones

Localizado en la parte subterránea de MI-12 y dentro de una caja de acero, para aislar la radiación, se encuentra el corno magnético y a lo largo del eje de este, el blanco de berilio; los cuales se muestran en la figura 2.4a. Las especificaciones del blanco se encuentran en el correspondiente reporte técnico del detector y el artículo sobre el funcionamiento del detector [144, 145]. El blanco de berilio mide 71.1 cm de largo (la longitud equivalente a 1.7 interacciones de protón) y 0.96 cm de diámetro. Compuesto de 7 pastillas de berilio (cada una de ~ 10 cm de largo) y rodeado por una “manga” de berilio de 0.9 cm de espesor. Alrededor de las mangas se colocan tres aletas radiales dispuestas de forma simétrica, i.e. separadas a 120° (no se muestran en la figura), para soportar el blanco a la vez que permiten que se enfríe el mismo al circular aire. El haz de protones impacta en la cara frontal del blanco en un área de $\sigma_x = 1.51$ mm y $\sigma_y = 0.75$ mm; y se encuentra alineado con el eje del corno y el del blanco.

El berilio fue específicamente escogido como el blanco de los protones debido a su bajo número atómico ($Z = 4$), ya que minimiza las pérdidas de energía que sufren los protones incidentes,

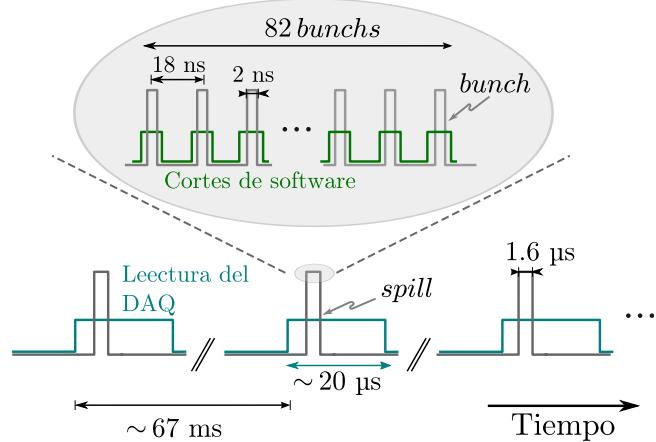
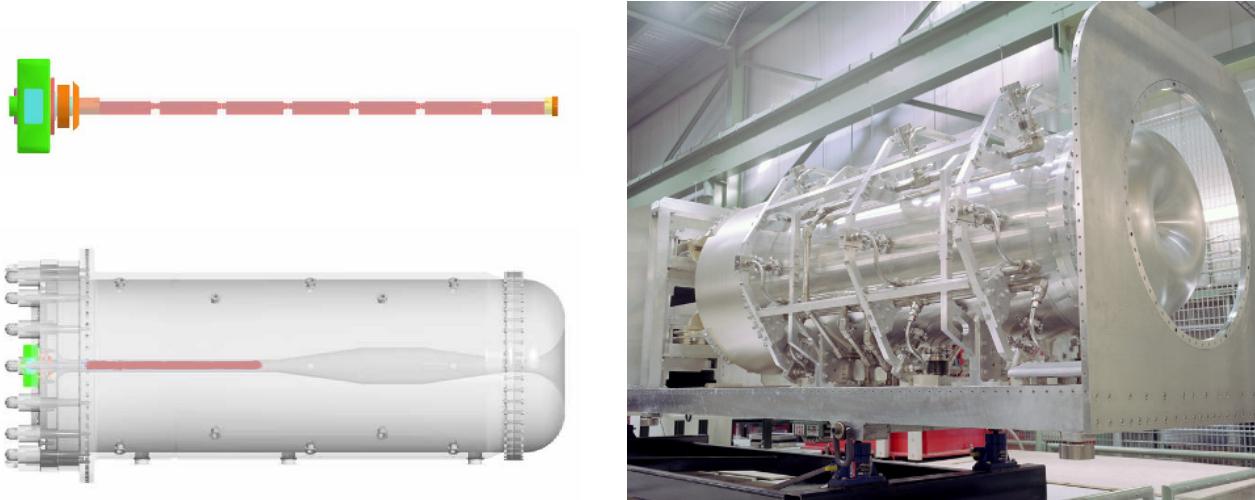


Figura 2.3: Estructura del haz de protones entregados por el Booster. 6×10^{10} protones de 8 GeV forman un *bunch* con ancho de 2 ns, los cuales están separados 18 ns. 82 *bunches* forman un *spill*, el cual dura 1.6 μ s y tiene 4.9×10^{12} protones. En 1 s se tienen de 4 a 10 *spills*. También se muestran las ventanas de adquisición de datos y los cortes de datos que hace el *software*.

antes de que interactúen con el blanco y la absorción de los mesones secundarios π^\pm, K^\pm, K_0 .



(a) Blanco de berilio (arriba) y su posición dentro del corno (abajo).

(b) Fotografía del corno magnético.

Figura 2.4: Corno magnético. Con el campo magnético toroidal generado en este se enfocan los mesones originados de las colisiones de los protones con el blanco, gracias a ello se pueden dirigir los neutrinos hacia el detector.

2.1.3. Enfocado de mesones secundarios

El corno magnético³ está formado por dos corazas concéntricas de aluminio conectadas en el fondo con una tapa con forma de medio toro. Se pulsa la corriente del corno para coincidir con las colisiones

³Diseñado por Bartozsek Engineering. [146]

del los protones con el blanco, produciendo un campo magnético que enfoca los mesones de corta vida que son creados de la interacción del haz primario con el blanco.

En modo de neutrinos la corriente operacional del corno tiene un pico de 174 ± 1 kA (-174 ± 1 kA en modo de antineutrinos) y fluye a través de la coraza interna y de vuelta por la coraza exterior produciendo de esa forma un campo magnético toroidal en el volumen entre los dos conductores coaxiales, con intensidad $B[\text{kG}] = I[\text{kA}]/5R[\text{cm}]$ con incertidumbre de 5 % y dirección azimutal [147]⁴. La corriente y forma del corno fueron optimizadas usando GEANT [148] para maximizar el flujo de ν_μ entre 0.5–1 GeV en el detector y minimizar el flujo por encima de 1 GeV; además de maximizar la pureza en la selección de signo del haz de neutrinos; i.e. minimiza la cantidad de antineutrinos en el modo de neutrinos y viceversa. Es importante aclarar que el campo magnético dentro de la coraza interior y fuera de la coraza exterior es despreciable. La figura 2.4b muestra una foto del corno magnético, en la cual se puede apreciar el orificio por el cual desalojan los protones y mangueras con las que se regula su temperatura.

MiniBooNE corrió en modo de neutrinos desde septiembre de 2002 hasta diciembre de 2006, luego de octubre de 2007 hasta abril de 2008. En Enero de 2006 y hasta julio de 2007 empezó a correr en modo de antineutrinos; i.e. entre las corridas de neutrinos, reasumiendo en abril de 2008 y hasta abril de 2012. En total se cuenta con datos correspondientes a 6.46×10^{20} POT en el modo de neutrinos y con 11.27×10^{20} en el modo de antineutrinos.

2.1.4. El conducto de decaimiento de mesones secundarios

Delante del blanco se encuentra un colimador de concreto de 214 cm de largo, con una apertura de 30 cm (en la cara posterior) a 35.5 cm (en la cara anterior) de radio. El colimador absorbe partículas secundarias que salen con ángulos grandes con respecto a la dirección del haz, de cualquier forma estas partículas no contribuirían de forma significativa al haz de neutrinos observado en el detector. Inmediatamente después del colimador, los mesones secundarios entran al conducto de decaimiento, de 50 m de largo y rellena con aire a presión y temperatura ambiente. Los mesones cargados decaen en vuelo produciendo neutrinos y otras partículas terciarias. Un conjunto de 10 placas retráctiles de acero y concreto se encuentran suspendidas por encima del conducto de decaimiento. Cuyo propósito es estudiar los errores sistemáticos del haz, mediante las modificaciones en el flujo de neutrinos proveniente de partículas de vida larga. Debido a la corrosión ocasionada por la exposición a la radiación dos placas se cayeron accidentalmente en diciembre de 2006 y permanecieron en el conducto de decaimiento durante parte de la corrida de antineutrinos.

Al final de la región de decaimiento se encuentra el vertedero de haz, 50 m después del blanco una pared de acero y concreto absorbe la componente hadrónica del haz; primordialmente los protones del haz primario que no interactuaron y los mesones que no han decaído, los neutrinos por su parte continúan su recorrido hacia el detector. La distancia de 50 m fue elegida para reducir los decaimientos de muones de larga vida, que de otra forma contribuirían al error sistemático de ν_e en la búsqueda. Dentro del conducto de decaimiento se encuentra el *Little Muon Counter* (LMC) un espectrómetro fuera de eje que mide la tasa y espectro de los muones producidos a un ángulo de 7° del eje del haz. Más detalles del LMC se pueden consultar en [149].

⁴las líneas de campo son toroidales rodeando a la coraza interna

2.2. El detector

El detector es un tanque esférico de 6.1 m de radio lleno con $\sim 950\,000$ litros de aceite mineral ultra puro Exxon/Mobil Marcol 7 (CH_2), con una densidad de 0.845 g/cm^3 y un índice de refracción de 1.47 el cual actúa tanto como blanco para los neutrinos, así como medio de propagación de las partículas resultantes de la interacción de los neutrinos con el aceite. Se encuentra a 541 m del centro del blanco y su centro está desplazado verticalmente 1.9 m del eje del haz, definido por el centro del conducto de decaimiento. Esta dividido en dos regiones concéntricas: una interior de 5.5 m de radio y una capa exterior de 6.1 m de radio. La región interior es observada por 1280 tubos fotomultiplicadores (PMT por sus siglas en inglés) que observan hacia el centro del tanque, es en esta región que se observan las interacciones buscadas, por lo mismo se le llama *región de señal*. Las paredes de la región de señal están pintadas de negro para evitar que la luz se refleje lo que dificultaría la reconstrucción de eventos. Por su parte la región exterior cuenta con 240 PMT's apuntando en dirección tangencial a la pared del tanque, estos detectan la luz producida por partículas cargadas que penetran desde el exterior; e.g. rayos cósmicos, proveen un mecanismo extra para la detección de ruido: por eso se le llama *región de voto* esta pintada de blanco para maximizar la detección de partículas que la atraviesan. Hay una discriminación de $> 99.99\%$ de eventos cósmicos de fondo [145]. En la figura 2.5 se pueden observar fotos de la región de voto y señal, así como un dibujo a escala del tanque comparado con una persona. La cobertura que tienen los PMT's para un detector con interior líquido es proporcional a la superficie del detector, se escogió un tanque esférico por que es el que maximiza la proporción entre volumen y área.

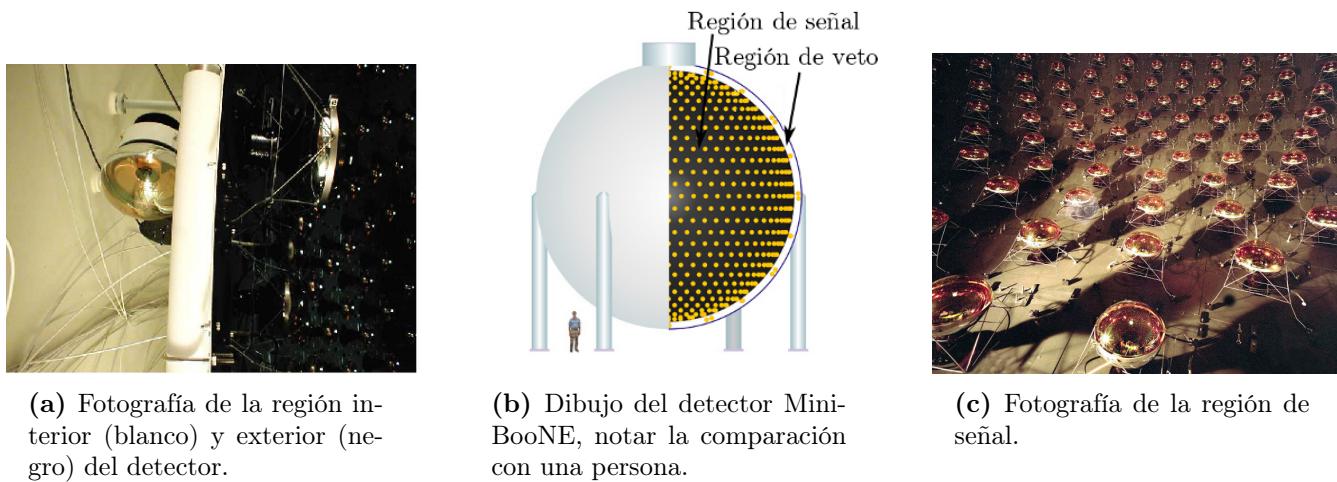


Figura 2.5: El detector MiniBooNE es un tanque lleno de aceite mineral de 6.1 m de radio que cuenta con una región interior de señal pintada de negro con un radio interior de 5.5 m y una región exterior de voto pintada de blanco. Los fotomultiplicadores detectan radiación de cherenkov y centelleo producida por las partículas cargadas que pasan por el aceite, en la región de voto se detectan las partículas cargadas que entran al tanque y en la parte interior es donde se detectan las interacciones buscadas.

El detector está especialmente diseñado para detectar partículas cargadas relativistas que emiten radiación cherenkov [150]. Una partícula cargada que viaja a una velocidad mayor a la que lo haría la luz ($\sim 1.93 \times 10^8 \text{ m/s}$) en el aceite emite radiación cherenkov en forma de conos de luz. Los PMT's también son sensibles a la luz isotrópica emitida a través de procesos de centelleo en el aceite, es decir a la luz emitida en los procesos de fluorescencia.

Notemos que el índice de refracción del aceite es más alto que el del agua (1.33) y que su densidad es

menor, por lo cual los electrones emiten mucha más radiación cherenkov en el aceite que en el agua. Más aún, la baja velocidad de la luz en el aceite mejora la reconstrucción de la posición de los eventos. El aceite permite la detección de muones, piones y protones de baja energía usados para rechazar eventos espurios; ya que tiene un menor umbral cherenkov y por la presencia de luz de centelleo. El aceite mineral tiene menor dispersión múltiple que el agua y una menor tasa de captura de μ , 8 % para el aceite y 20 % para el agua. La menor tasa de captura incrementa la eficiencia de la identificación de reacciones que involucran partículas cargadas. Además en el aceite se pueden sumergir componentes eléctricas sin peligro. La desventaja del aceite es que el modelo óptico que requiere para describir la generación y transmisión de la luz es mucho más complicado (§ 2.4.3).

El edificio que alberga al detector y la electrónica asociada, figura 2.6, se localiza debajo de un montículo de 3 m de tierra que sirve como blindaje de rayos cósmicos y mantiene la tasa de rayos cósmicos que pasan por el tanque por debajo de los 10 kHz, también sirve como aislante térmico para ayudar al aire acondicionado a mantener una temperatura constante en todo el edificio.

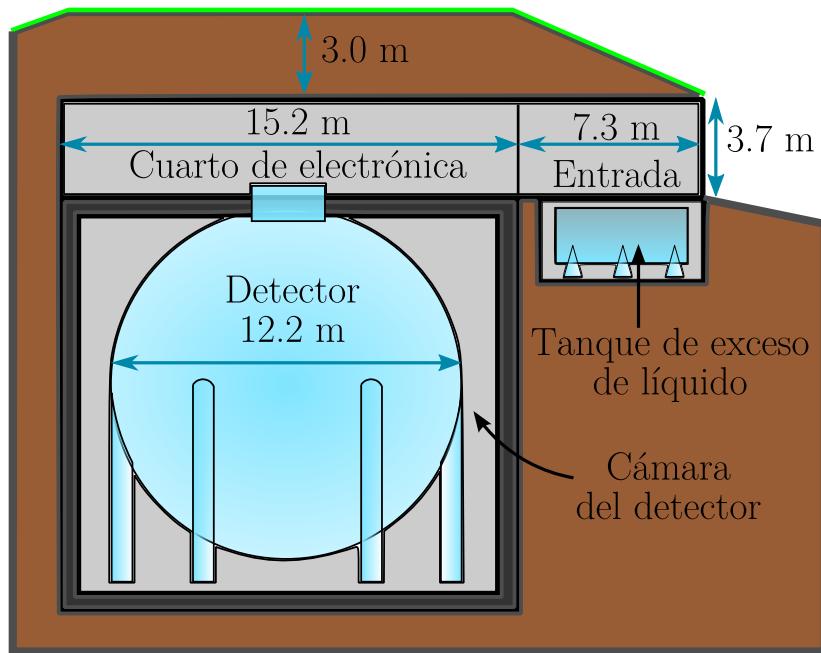


Figura 2.6: Dibujo esquemático del recinto del detector MiniBooNE. El detector está localizado dentro de una cámara cilíndrica subterránea de 13.7 m de diámetro. La electrónica del detector se almacena en un cuarto superior a la cámara del tanque y por debajo de un montículo de tierra de 3 m, que blinda el detector de muones cósmicos y lo aisla de variaciones de temperatura. También se muestra el tanque de exceso de líquido que permite la expansión térmica y recirculación del aceite en el tanque de MiniBooNE. El acceso al cuarto de electrónica es a través de una puerta que se muestra a la derecha y de ahí se puede bajar a la cámara del detector.

2.2.1. Electrónica y sistemas de adquisición

El experimento usa 1197 PMT's Hamamatsu R1408 usados previamente en el experimento LSND además de 323 nuevos Hamamatsu R5912. Los dos tipos de PMT's miden 8 pulgadas de diámetro y están fabricados con vidrio de baja radiactividad, la principal diferencia es que el modelo R5912 tiene una cadena de dinodos de 10 etapas mientras que el R1408 solo tiene 9 etapas [151]. El voltaje de operación de cada PMT's se ajusta con una serie de resistencias en las entradas de los preamplificadores,

permitiendo el uso de suministros fijos de voltaje para operar todos los tubos.

Cuando un fotón llega a un tubo se genera un photoelectrón por efecto fotoeléctrico el cual es multiplicado sucesivamente por los dinodos de los fotomultiplicadores. Cada tubo entrega dos voltajes análogos, uno que es proporcional a la carga del pulso (Vq) y el otro proporcional al tiempo (Vt) por separado. Se lee información cuando la carga almacenada es superior a lo equivalente a 0.1 photoelectrones. Se usan tarjetas para llevar a cabo la conversión de carga-tiempo (en inglés llamadas *QT board*) y convertir los pulsos analógicos en digitales (conversión analógica-digital CAD) a 10 MHz (ver figura 2.7), los cuales son almacenados en intervalos de 200 μ s posteriores a una señal disparador *trigger*. Una sola *QT board* se encarga de procesar la información de 8 PMT's. En la figura 2.8a se pueden observar las *QT boards*.

El flujo de datos para el detector consiste de la siguiente información para cada impacto de los PMT's:

1. El número del canal del PMT.
2. El tick del reloj, contado desde el principio del evento que precede el disparador del discriminador.
3. Cuatro valores almacenados de Vq en conteo de CAD: *charge quad*.
4. Cuatro valores almacenados de Vt en conteo de CAD: *time quad*.

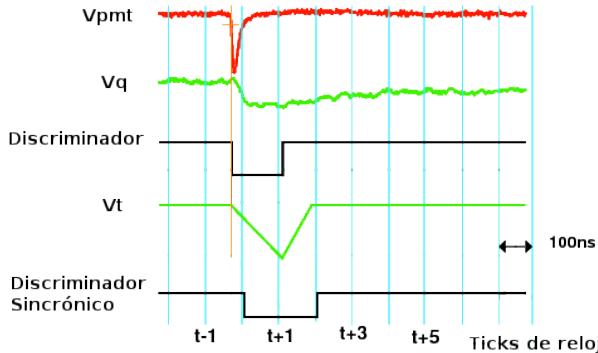


Figura 2.7: Captura de carga y tiempo para un pulso de PMT. V_{pmt} es el pulso del ánodo y Vq la carga integrada. La señal digital del discriminador es creada cuando la señal del ánodo atraviesa cierto umbral predefinido. Vt es una señal analógica que empieza con el discriminador. La traza del discriminador síncrono representa una señal que puede ser usada por la electrónica de disparo. Vq y Vt son señales analógicas que son digitalizadas por convertidores a los tiempos de muestreo representados por las líneas verticales, etiquetados por los ticks de reloj [144].

Cuando un impacto en un PMT satura el rango CAD (teniendo más de veinte photoelectrones) el sistema de adquisición de datos (DAQ por sus siglas en inglés) escribe *charge quads* adicionales hasta que Vq es suficientemente chico para entrar en el rango del CAD. Los *quads* de carga y tiempo son usados para extraer el tiempo relativo en el cual cada impacto ocurrió con respecto a los otros impactos de un evento dado y el número de photoelectrones que corresponden a cada impacto. El tiempo y carga de un impacto son calculados de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} t &= t_0 + (100 \text{ ns}) \times N_{\text{tick}} + \Delta t_{\text{off}} + \Delta t_q(Q_0) \\ q &= Q_0 / \text{Ganancia} \end{aligned} \quad (2.1)$$

donde t_0 es el tiempo del impacto relativo al tick del reloj anterior, el cual se obtiene de la pendiente de la rampa de la señal Vt y su intersección con la línea de base. N_{tick} es el número de ticks de reloj que

preceden el *trigger* del discriminador y es la medida gruesa del tiempo del *trigger*. El término Δt_{off} es una calibración constante independiente del canal que quita diferencias de tiempo provenientes de diferencias en las longitudes de los cables y la cantidad de dinodos. El término $\Delta t_q(Q_0)$ es una corrección que depende de la carga en el ánodo del PMT y se encuentra en tablas. La ganancia de los PMT's y la corrección del tiempo dependiente de la carga se determinan con el sistema de calibración del láser.



(a) Paneles de la electrónica involucrada en la adquisición de datos.



(b) Rastreador de muones y fuentes de alto voltaje.

Figura 2.8: (a) Del lado izquierdo y en rojo se pueden observar las QT *boards*. Del lado derecho se ven distintos NIM *boards*. Por la parte de atrás (no visibles) se encuentran las fuentes de poder. (b) Fotografía del rastreador de muones y fuentes de alto voltaje. Se muestra un arreglo de tiras centelladoras acopladas con PMT's usadas para determinar la dirección de muones cósmicos entrantes. A la derecha en el fondo hay armarios azules que contienen fuentes de alto voltaje.

2.2.2. Sistema de *triggers*

La lógica de los *triggers* de MiniBooNE se construye en el *software* usando información externa del acelerador y los sistemas de calibración junto con la multiplicidad de información de los PMT's.

El principal *trigger* físico solamente requiere que se haya mandado el haz de protones al blanco de MiniBooNE sin importar si hay o no actividad en el detector. Esta información se obtiene de los relojes de la red del acelerador (ACNET por *Accelerator Network*). Este *trigger* hace que se empiece a almacenar información $5 \mu s$ antes de la llegada de los neutrinos al detector provenientes de un *spill* de $1.6 \mu s$. De esa forma se almacena la actividad en el detector de antes y después del *spill* con mínimo sesgo. Un *trigger* del haz inicia una ventana de tiempo que inhibe la aceptación de *triggers* subsecuentes por $20 \mu s$.

Existen otros tipos de *triggers* para producir conjuntos de datos con propósitos especiales. *Triggers* usados para recolectar eventos de neutrinos provenientes de otras fuentes en Fermilab, para buscar neutrinos provenientes de Supernovas, construir muestras para calibrar y monitorear el desempeño del detector. La frecuencia total de los *triggers* es de ~ 26 Hz, de los cuales hasta 5 Hz se deben a *triggers* del haz. En el artículo [145] se encuentra información detallada sobre todos los *triggers*, la forma en que operan y como se instalaron.

2.2.3. Sistemas de calibración del detector

MiniBooNE emplea dos herramientas de calibración *in situ*: un láser pulsado y un sistema con muones cósmicos. Además, también se usan los datos del mismo experimento para calibrar la reconstrucción de ciertas cantidades físicas, como la masa de los piones neutros y el espectro de energía de los electrones Michel. Aquí se describen estos métodos con algo de detalle.

El sistema de calibración del láser

Luz emitida de un láser pulsado de diodo es enviada por fibras ópticas a cuatro frascos disipadores de luz distribuidos en varias posiciones en el interior del detector. El propósito de estos dispositivos es el de proporcionar una fuente controlada de fotones que pueda ser usada para monitorear las variaciones del tiempo y la ganancia de PMT's individuales. Los frascos tienen un diámetro de 10 cm y están llenos con un medio dispersivo de nombre Ludox ® [152].

El láser es pulsado de forma asincrónica al haz de protones a 3.3 Hz de forma continua durante periodos normales de toma de datos. Una caja de distribución es usada para mandar los pulsos de ≤ 100 ns de ancho a cada uno de los cuatro frascos. Se usa la ecuación (2.1) para hacer las correcciones, se determinan por separado para los PMT R1408 y R5912. Las correcciones al tiempo se hacen con corridas que tienen distintas intensidades de luz mientras que las correcciones a la ganancia se calculan ajustando el pico del foto electrón sencillo para cada PMT en corridas de baja intensidad [153]. Las corridas con láser de baja intensidad también son usadas para determinar las tablas de eficiencia cuántica de los PMT's y verosimilitud de carga, ambas son clave para los algoritmos de reconstrucción (§ 2.5). Estas calibraciones son almacenadas cada cuatro días y son principalmente realizadas usando el frasco central. Los datos de los otros tres frascos y de las muestras de electrones Michel son usadas para cotejar las calibraciones.

Rastreador de muones y cubos centelladores

Un hodoscopio se encarga de determinar el punto de entrada y la dirección de muones provenientes de rayos cósmicos que penetran el tanque. Con dos arreglos de tiras centelladoras acopladas a PMT's se miden las coordenadas (x, y) de un muón cósmico entrante en dos alturas fijas z_b y z_t encima del tanque ($z_t - z_b = 150$ cm), ver figura 2.8b. Este sistema permite reconstruir trazas de muones con una resolución angular de $\sim 4^\circ$ [154].

Dentro del detector se encuentran siete cubos centelladores aislados ópticamente y conectados por una fibra óptica a un PMT, se usan junto con el rastreador de muones para obtener una medida precisa de la energía de muones en reposo de su rango de frenado [155].

Para un muón viajando hacia abajo que pasa por los dos arreglos de tiras centelladoras y se detiene en uno de los cubos centelladores se tienen tres puntos con los cuales se ajusta una recta, la recta ajustada se intersecta con la esfera definida por la barrera óptica del tanque para obtener el punto de entrada del muón (se escoge la solución que satisface $y > y_{cubo}$). El rango del muón es la distancia desde el punto de entrada al cubo. La posición de los cubos va de 15 cm a 400 cm desde la superficie del tanque, que corresponde a energías de muones en reposo desde 20 MeV a 800 MeV. La figura 2.9 resume esta técnica. La muestra de muones en reposo es usada para la calibración de los algoritmos de reconstrucción de energía; logrando una resolución de $\pm 3\%$ en el rango de energía relevante para

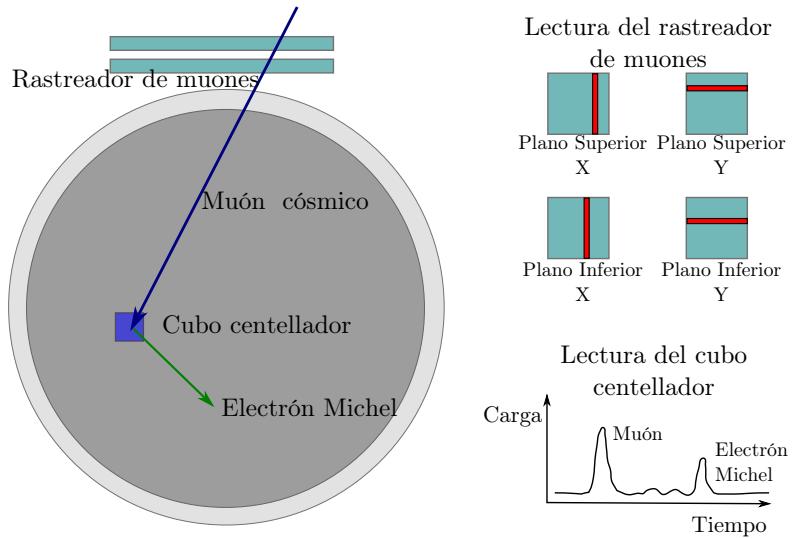


Figura 2.9: Diagrama que resume la calibración de muones cósmicos: un muón cósmico bajando atraviesa el rastreador de muones, obteniendo dos puntos de la trayectoria, y se detiene en un cubo centellador, obteniendo el tercer punto de la trayectoria del muón con los que se ajusta una recta que determina el punto de entrada del muón. Se adquiere una muestra de estos eventos que sirve para calibrar los algoritmos de reconstrucción de energía.

estos eventos. Esta se recolecta requiriendo una coincidencia retrasada entre el muón que se detiene en un cubo y su subsecuente electrón decaído.

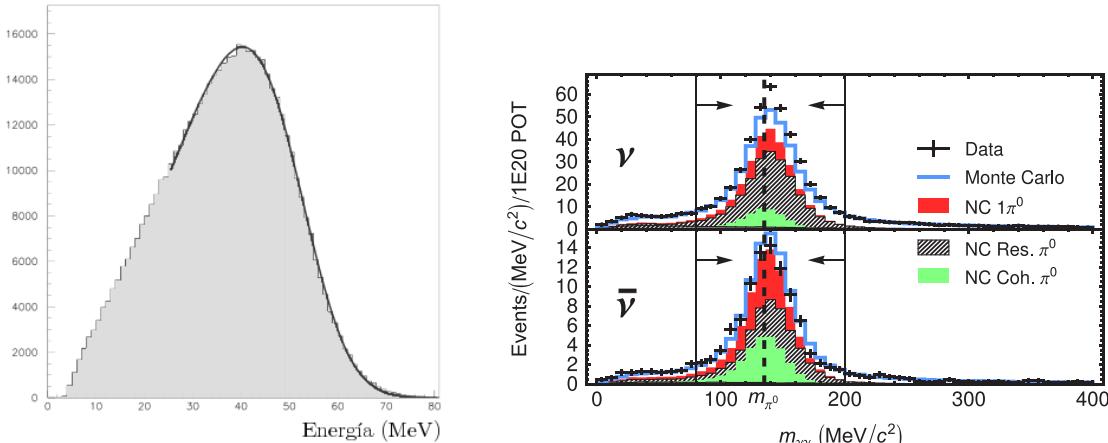
Calibración de energía con electrones Michel

A los electrones que provienen del decaimiento de muones en reposo se les llama *electrones Michel* ($\mu^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e \nu_\mu$). El espectro de energía de estos provee otra forma absoluta de calibrar la energía de los eventos en el tanque. La distribución de energía observada de estos electrones, mostrada en la figura 2.10a provee una medida de la resolución de energía en el punto final del espectro de los electrones Michel de 52.8 MeV.

La muestra de electrones Michel también es usada para afinar los algoritmos de reconstrucción [157] y prueba las constantes de calibración de los PMT's determinadas en las corridas con láser. Además con ella se estudian las propiedades ópticas del aceite y tiene un rol muy importante en la determinación del error sistemático del modelo óptico del detector (§ 2.4.3).

Calibración de energía con $NC\pi^0$

Uno de los procesos frecuentes en el detector, que involucran neutrinos, es la producción de piones neutros por interacciones de corriente neutra $\nu_\mu - NC\pi^0$, como se muestra en la figura 2.12b. El pión generado decae rápidamente a dos fotones, los cuales generan una cascada electromagnética que pueda ser detectada en el tanque. Cumpliendo una lista de criterios, se puede formar una muestra de eventos π^0 , como se muestra en la figura 2.10b. Los algoritmos de reconstrucción son ajustados para que, del par de cascadas electromagnéticas, se reconstruya precisamente el pico de la masa del π^0 ($m_{\pi^0} = 134.9766$ MeV). Con esta calibración se reconstruyen fotones con energías entre 50 MeV y 350 MeV.



(a) Distribución de energía observada de electrones Michel.

(b) Distribución de la masa invariante de π^0 .

Figura 2.10: Distintas calibraciones de energía. (a) Distribución de energía observada de electrones Michel (histograma) y mejor ajuste (curva sólida) obtenida convolucionando el espectro de energía teórico con una gaussiana con ancho proporcional a \sqrt{E} . La resolución de energía determinada con el ajuste es de 14.8 % a 52.8 MeV. (b) Distribución de la masa invariante m_{π^0} para eventos que cumplen los criterios de selección, la línea punteada muestra $m_{\pi^0} = 134.9766$ MeV, tomada de [156].

2.3. Simulación Monte Carlo del haz

Las propiedades del flujo de neutrinos de MiniBooNE son determinadas usando una simulación Monte Carlo (MC) basada en *Geant4* [158]. La simulación se puede dividir a grandes rasgos en cinco pasos:

1. Definición de la geometría de la linea del haz, especificada por la forma, localización y composición de las componentes del BNB, a partir de esta todas las otras partículas se propagan.
2. La generación de los protones primarios antes del blanco de acuerdo a las propiedades ópticas del haz.
3. La simulación de las partículas generadas en la interacción primaria p-Be. Se desarrollaron tablas personalizadas para la producción de protones, neutrones, π^\pm , K^\pm y K^0 en estas interacciones para adaptarse a datos externos.
4. La propagación de las partículas usando el sistema Geant4 en el blanco, corno magnético, túnel de decaimiento y el tope del haz, tomando en cuenta pérdida de energía y procesos electromagnéticos y hadrónicos que alteran la cinemática de las partículas. Las interacciones hadrónicas y decaimientos también pueden aniquilar las partículas en el proceso de rastreo y crear nuevas partículas que deben ser rastreadas. El efecto del campo magnético esperado del corno en la trayectoria de las partículas.
5. La identificación de los procesos de decaimiento de los cuales resultan neutrinos. Se maneja la simulación de los decaimientos por un modelo personalizado de decaimiento fuera del sistema Geant4. El modelo de decaimiento refleja las últimas medidas de la tasa de ramificación y simula los efectos de polarización y distribución cinemática resultantes de los factores de forma de decaimiento. Se usan distintas técnicas para mejorar la precisión estadística de la predicción del flujo.

Geometría del BNB, campos magnéticos y protones primarios

La geometría de la simulación MC en Geant4 consiste de los últimos 50 m de la línea del haz del Booster, el edificio del blanco y los 50 m del conducto de decaimiento. La descripción de la geometría se definió para igualar tanto como sea posible la verdadera linea del haz como fue construida. Cada sección es simulada con paredes de concreto rodeadas por una capa uniforme de dolomita. Toda la estructura esta llena con aire a temperatura y presión ambiental.

La simulación del edificio del blanco contiene el corno, el blanco y el colimador del haz secundario. Además de las paredes de concreto el edificio esta forrado con 1.28 m de blindaje de acero. Las siete pastillas y la cubierta del blanco, junto con las aletas que lo sostienen forman la simulación del blanco. El corno es construido usando un polígono de aluminio en GEANT que especifica el radio interno y externo en catorce puntos distintos a lo largo de la dirección del haz. Se pone un polígono de aire dentro del de aluminio para establecer el ancho de los conductores interior y exterior.

Los protones primarios son simulados individualmente, ya que no se esperan efectos correlacionados entre los protones de un *bunch*. Las propiedades del haz de protones, como la posición y perfil, han sido simuladas usando TRANSPORT [161] y verificadas por monitores [143]. Los protones son generados 1 cm antes del blanco con posiciones transversales (x, y) extraídas de distribuciones aleatorias gausianas con media 0 mm y 1.51 mm y anchos de 0.75 mm, respectivamente. Igualmente las desviaciones angulares de los protones de la dirección z , θ_x y θ_y , son extraídas de gausianas con media 0 mrad y anchos de 0.66 mrad y 0.40 mrad, respectivamente. La cantidad de protones que experimentan interacciones inelásticas en el blanco (en contraposición a dispersarse) se estudia en § 2.3.1. En particular mientras que la configuración describe un haz divergente, la simulación TRANSPORT indica que se espera que los protones sean convergentes en el blanco, con una “cintura” de divergencia nula en el centro del blanco. La simulación de la configuración del haz es tal que 99.8 % de los protones se encuentran en una trayectoria para intersectar al blanco. Los estudios en § 2.3.1 indican que perturbaciones razonables al modelo, incluida la configuración de enfocado, no afectan el flujo predicho de neutrinos en más de 1 %.

Se simula el campo magnético esperado de $1/R$ en el volumen que corresponde al espacio entre los conductores interno y externo del corno. La intensidad del campo corresponde a una corriente de 174 kA a lo largo del conductor interior (invertido cuando se simula el modo de antineutrinos). La profundidad de penetración del campo magnético en el cilindro del conductor interior del corno (descrita en § 2.3.1) se incluye en la simulación. La predicción de las trayectorias de las partículas cargadas en el campo magnético en la simulación Geant4 han sido revisadas en un estudio externo usando la rutina DRKNYS de CERNLIB [160], un método numérico implementado independientemente.

Haz secundario (mesones) y terciario (neutrinos)

Lo primero que encuentran la gran mayoría de los protones primarios es el blanco. Ya que las interacciones p–B son la principal fuente de mesones secundarios se uso un modelo dedicado ajustado a datos externos para describir la producción de partículas en las pastillas, la manga y las aletas. La dispersión elástica se lleva acabo por los modelos existentes de Geant4, mientras que la dispersión cuasielástica de nucleones y piones usan un modelo dedicado basado en datos de dispersión hadrón-núcleo libre. Debido a la divergencia del haz primario y su dispersión, es posible que un protón primario interactúe fuera del blanco (usualmente en el aluminio del corno o el concreto de la región de decaimiento). Para estos casos la producción de partículas se maneja por el modelo hadrónico predeterminado del sistema

Geant4.

Para las interacciones primarias p–Be se generan partículas secundarias de siete tipos (π^\pm , K^\pm , K^0 , p, n) de acuerdo a tablas que describen la doble sección eficaz diferencial para la producción de cada especie secundaria como función de p_z y p_T , las componentes de momento a lo largo y transversalmente a la dirección de los protones primarios, respectivamente. La sección eficaz de producción total para una especie dada, obtenida al integrar la doble sección eficaz diferencial, determina la multiplicidad promedio de la especie en cada reacción primaria p–Be (interacciones hadrónicas excluyendo dispersión elástica y cuasielástica) cuando se divide por la sección eficaz de la reacción.

Los neutrinos que llegan al detector son producidos en los decaimientos de piones cargados, kaones cargados y neutros y muones. Los tiempos de vida, los modos de decaimiento y las tasas de ramificación asociadas, así como las distribuciones cinemáticas de los neutrinos producidos en los decaimientos considerados en la simulación, afectan la predicción del flujo de neutrinos y se discuten a continuación. En la tabla 2.1 se dan los tiempos de vida y las tasas de ramificación de las partículas madre consideradas en la simulación, para los distintos modos de decaimiento. También se simulan los correspondientes decaimientos de partículas negativas.

Partícula	Tiempo de vida [ns]	Modo de decaimiento	Tasa de ramificación [%]
π^+	26.03	$\mu^+ + \nu_\mu$	99.9877
		$e^+ + \nu_e$	0.0123
K^+	12.385	$\mu^+ + \nu_\mu$	63.44
		$\pi^0 + e^+ + \nu_e$	4.98
		$\pi^0 + \mu^+ + \nu_\mu$	3.32
K_L^0	51.6	$\pi^- + e^+ + \nu_e$	20.333
		$\pi^+ + e^- + \bar{\nu}_e$	20.197
		$\pi^- + \mu^+ + \nu_\mu$	13.551
		$\pi^+ + \mu^- + \bar{\nu}_\mu$	13.469
μ^+	2197.03	$e^+ + \nu_e + \bar{\nu}_\mu$	100.0

Tabla 2.1: Tiempos de vida y tasas de ramificación de los modos de decaimiento que producen neutrinos considerados en la simulación.

Simplemente ejecutar la simulación Geant4 y registrar los neutrinos resultantes protón por protón no otorgaría suficientes neutrinos en el detector MiniBooNE que permitan determinar precisamente el flujo en el espacio fase de interés. Por lo tanto se hicieron varias modificaciones para mejorar la estadística de la simulación MC.

Se consigue una gran mejora estadística al hacer “redecaer” a la partícula madre del neutrino. Para cada neutrino producido en el MC del haz, el decaimiento de la partícula que produjo el neutrino se realiza mil veces. Cada redecaimiento se realiza en el mismo lugar, pero la cinemática del decaimiento se designa aleatoriamente cada vez de las distribuciones de decaimiento, logrando diferentes momentos en las partículas hijas en cada elección.

Se usa una técnica similar para mejorar la estadística de neutrinos provenientes del decaimiento de muones. La mayoría de los muones producidos en el haz secundario no decaen antes de detenerse en el tope del haz o en las paredes de la región de decaimiento debido a su largo tiempo de vida. Para

obtener una mejor estimación de la componente del flujo de neutrinos provenientes de muones DIF se hacen 19 copias idénticas de cada muón producido en la simulación, las cuales son propagadas de forma independiente en la simulación. Para tener en cuenta la sobreproducción de neutrinos el peso de cada neutrino proveniente del decaimiento de un muón es reducido por un factor de 20.

Se usa otra técnica de ponderación para determinar el flujo de neutrinos de alta energía. El espectro de energía de los neutrinos en MiniBooNE tiene su máximo entre 500 y 600 MeV con una larga cola para la parte de alta energía, extendiéndose más allá de 6 GeV. Como se producen muy pocos neutrinos para estas altas energías, las fluctuaciones estadísticas son mucho mayores, incrementando la incertidumbre en la forma de la cola de alta energía. El procedimiento de redecaimiento descrito antes empeora el problema, ya que las partículas madre tienden a decaer a neutrinos de alta energía con dirección frontal lo cual resulta en una fracción significante de los mil redecaimientos apuntando al detector, todos con energías similares. Para reducir la incertidumbre estadística en la predicción de la cola de alta energía, las secciones eficaces de la producción de mesones en las interacciones p-Be son multiplicadas por una función exponencial del momento longitudinal de los mesones. Cada evento es “desponderado” por su correspondiente mejora en la sección eficaz para conservar la proporción correcta de protones/neutrinos. Esto provee una producción artificialmente grande de neutrinos a altas energías con pequeño peso estadístico, consiguiendo reducir la incertidumbre estadística en la cola de alta energía para la predicción del flujo de neutrinos.

El flujo de neutrinos en el detector MiniBooNE se determina al proyectar la trayectoria del neutrino al plano que contiene el centro del detector, 541 m de la fachada del blanco. Los neutrinos que se encuentran en una trayectoria hacia el detector⁵ son registrados en las distribuciones de flujo usadas para la simulación de eventos MC en el detector. Para la simulación de interacciones de neutrinos fuera del detector, en las paredes de concreto del edificio del detector o en la tierra que se encuentra más adelante, se usa un radio más grande de 1400 cm para determinar las distribuciones de flujo.

2.3.1. Predicción del flujo de neutrinos en MiniBooNE

Los resultados de la simulación se encuentran en las figuras 2.11a y 2.11b, que muestran el flujo total predicho de cada especie de neutrinos en el detector MiniBooNE en modo de neutrinos y antineutrinos, respectivamente. En cada caso, la contribución $\nu_e/\bar{\nu}_e$ es menor al 1% en el máximo del flujo de $\nu_\mu/\bar{\nu}_\mu$, aunque se eleva a energías más altas. Como se muestra, los flujos predichos muestran muchas características que se entienden mejor al analizar las fuentes de cada componente del flujo.

La contribución integrada de cada especie de neutrino y antineutrino, junto con sus cadenas principales de decaimiento, se muestran en la tabla 2.2a para la configuración en el modo de neutrinos, la tabla 2.2b tiene lo correspondiente para la configuración en el modo de antineutrinos. La contribución dominante de las cadenas de decaimiento en las que el mesón secundario es producido por un nucleón se separa de cuando proviene de la interacción de un mesón. Esto debido a la diferencia cualitativa en el entendimiento sistemático para los dos procesos. Para el primer caso las secciones eficaces de producción se basan en experimentos de producción de partículas⁶, con incertidumbres sistemáticas propagadas de las incertidumbres reportadas en esos experimentos. Para el segundo caso, la simulación depende en el modelo de interacción hadrónica por defecto de Geant4 para producir las secciones eficaces de producción; la cual, afortunadamente, es una pequeña contribución al flujo para todos los casos.

⁵610.6 cm desde el centro del detector en este plano, tomando en cuenta el desplazamiento vertical.

⁶Ver más detalles en la sección V del artículo [162].

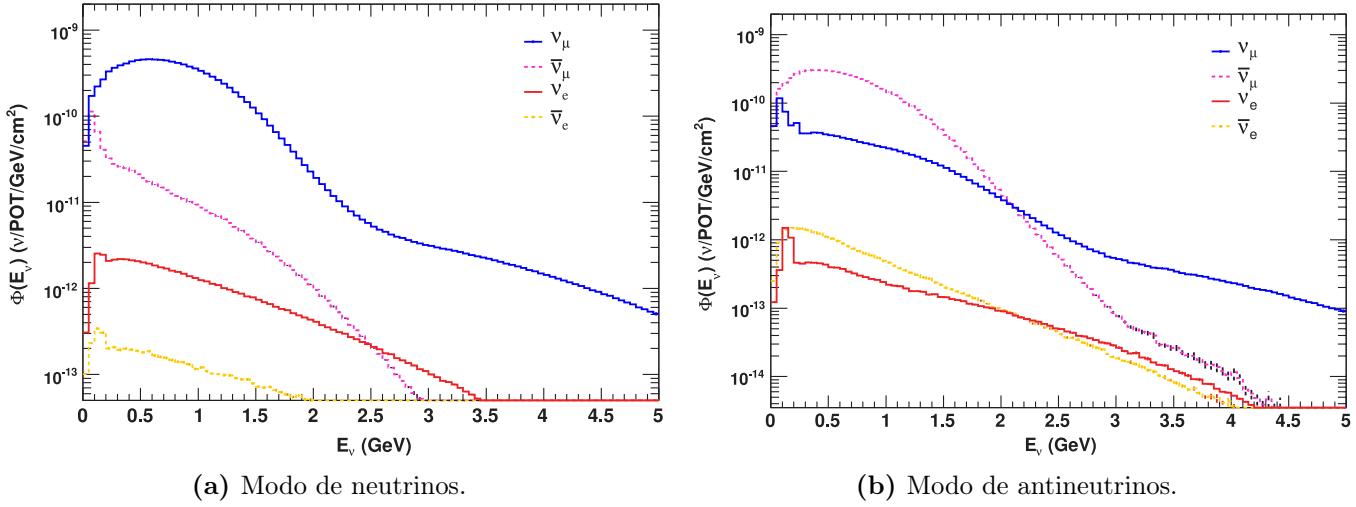


Figura 2.11: Flujo total predicho de cada especie de neutrinos en el detector MiniBooNE, con el corno en modo de (a) neutrinos y (b) antineutrinos [162].

Con el corno en modo de neutrinos el flujo de ν_μ , es dominado por la contribución de $\pi^+ \rightarrow \nu_\mu$ para energías menores a 2 GeV, y la contribución $K^+ \rightarrow \nu_\mu$ se vuelve dominante para altas energías. Hay una pequeña contribución de piones producidos en el decaimiento de kaones y una contribución similar inducida por mesones terciarios. En la tabla la cadena $\pi^- \rightarrow \bar{\nu}_\mu$ se refiere a la contribución dominante al flujo de $\bar{\nu}_\mu$ para todas las energías. La siguiente contribución más grande viene de la cadena $\pi^+ \rightarrow \mu^+ \bar{\nu}_\mu$. Para el flujo de ν_μ la contribución proveniente de la cadena análoga $\pi^- \rightarrow \mu^- \rightarrow \nu_\mu$ es suprimida debido al desenfoque de los π^- . La contribución de kaones es suprimida debido a la baja tasa de producción de K^- comparada con la producción de K^+ . Aparte de las bajas energías (200 MeV) el flujo predicho de $\bar{\nu}_\mu$ típicamente es $\sim 6\%$ el de ν_μ .

También en modo de neutrinos, las componentes dominantes para el flujo de ν_e son la cadena de decaimiento $\pi^+ \rightarrow \mu^+ \rightarrow \nu_e$ y el decaimiento a tres cuerpos $K^+ \rightarrow \nu_e$, donde el primero domina a energías menores a 1 GeV y el segundo a energías más altas. El máximo en el espectro $K^+ \rightarrow \nu_e$ a bajas energías proviene del decaimiento K^+ en reposo⁷. Para $\bar{\nu}_e$, la cadena $\pi^- \rightarrow \mu^- \rightarrow \bar{\nu}_e$ solo contribuye a bajas energías debido al desenfoque de π^- y la contribución de $K^- \rightarrow \bar{\nu}_e$ es suprimida tanto por la baja tasa de producción como por el desenfoque. El resto del espectro es dominado por el decaimiento K_L^0 . Como en el caso $\nu_\mu/\bar{\nu}_\mu$, el flujo predicho de $\bar{\nu}_e$ es $\sim 10\%$ del flujo ν_e .

Ahora para el flujo predicho en el modo de antineutrinos. El flujo de $\bar{\nu}_\mu$ es dominado a todas las energías por $\pi^- \rightarrow \bar{\nu}_\mu$; la producción suprimida de K^- resulta en que la contribución $K^- \rightarrow \bar{\nu}_\mu$ es mucho más chica que la correspondiente contribución $K^+ \rightarrow \nu_\mu$ en modo de neutrinos. Más aún, como los K^- en reposo son capturados, el flujo de $\bar{\nu}_\mu$ no muestra los picos del decaimiento en reposo a dos y tres cuerpos a bajas energías que se encuentran en ν_μ proveniente del decaimiento K^+ tanto en modo de neutrinos como antineutrinos. También se puede observar que el flujo a altas energías de ν_μ no es substancialmente suprimido en relación con el de $\bar{\nu}_\mu$. De hecho, a pesar del desenfoque de K^+ , el flujo de $K^+ \rightarrow \nu_\mu$ es mayor que el de $K^- \rightarrow \bar{\nu}_\mu$. Esto se debe a las tasas relativas de producción y, para altas energías, el efecto de partícula dominante en donde π^+ y K^+ tienen un espectro de momentos más grande que las contrapartes negativas. El gran momento de las partículas que producen estos neutrinos, junto con su distribución angular frontal, resulta en menor desenfoque para la componente de “signo erróneo”, partículas positivas para el modo de neutrinos y partículas

⁷El máximo del decaimiento a dos cuerpos es mucho más chico debido a la supresión por helicidad.

	ν_μ		$\bar{\nu}_\mu$	
	Flujo ($\nu/\text{cm}^2/\text{POT}$)	5.19×10^{-10}	Flujo ($\nu/\text{cm}^2/\text{POT}$)	3.26×10^{-11}
Fracción del total		93.6 %		5.86 %
Composición	π^+ :	96.72 %	π^- :	89.74 %
	K^+ :	2.65 %	$\pi^+ \rightarrow \mu^+$:	4.54 %
	$K^+ \rightarrow \pi^+$:	0.26 %	K^- :	0.51 %
	$K^0 \rightarrow \pi^+$:	0.04 %	K^0 :	0.44 %
	K^0 :	0.03 %	$K^0 \rightarrow \pi^-$:	0.24 %
	$\pi^- \rightarrow \mu^-$:	0.01 %	$K^+ \rightarrow \mu^+$:	0.06 %
	Otra:	0.30 %	$K^- \rightarrow \pi^-$:	0.03 %
			Otra:	4.43 %
		ν_e	$\bar{\nu}_e$	
Flujo ($\nu/\text{cm}^2/\text{POT}$)		2.87×10^{-12}	Flujo ($\nu/\text{cm}^2/\text{POT}$)	3.00×10^{-13}
Fracción del total		0.52 %		0.05 %
Composición	$\pi^+ \rightarrow \mu^+$:	51.64 %	K_L^0 :	70.65 %
	K^+ :	37.28 %	$\pi^- \rightarrow \mu^-$:	19.33 %
	K_L^0 :	7.39 %	K^- :	4.07 %
	π^+ :	2.16 %	π^- :	1.26 %
	$K^+ \rightarrow \mu^+$:	0.69 %	$K^- \rightarrow \mu^-$:	0.07 %
	Otra:	0.84 %	Otra:	4.62 %

	ν_μ		$\bar{\nu}_\mu$	
	Flujo ($\nu/\text{cm}^2/\text{POT}$)	5.42×10^{-11}	Flujo ($\nu/\text{cm}^2/\text{POT}$)	2.93×10^{-10}
Fracción del total		15.71 %		83.73 %
Composición	π^+ :	88.79 %	π^-	98.4 %
	K^+ :	7.53 %	K^- :	0.18 %
	$\pi^- \rightarrow \mu^-$:	1.77 %	$K^0 \rightarrow \pi^-$:	0.05 %
	K^0 :	0.26 %	K^0 :	0.05 %
	Otra:	2.00 %	$\pi^+ \rightarrow \mu^+$:	0.03 %
			$K^- \rightarrow \pi^-$:	0.02 %
	Otra:		Otra:	1.30 %
		ν_e	$\bar{\nu}_e$	
Flujo ($\nu/\text{cm}^2/\text{POT}$)		6.71×10^{-13}	Flujo ($\nu/\text{cm}^2/\text{POT}$)	1.27×10^{-12}
Fracción del total		0.2 %		0.4 %
Composición	K^+ :	51.72 %	$\pi^- \rightarrow \mu^-$:	75.67 %
	K^0 :	31.56 %	K^0 :	16.51 %
	$\pi^+ \rightarrow \mu^+$:	13.30 %	K^- :	3.08 %
	π^+ :	0.83 %	π^- :	2.58 %
	$K^+ \rightarrow \mu^+$:	0.41 %	$K^- \rightarrow \mu^-$:	0.06 %
	Otra:	2.17 %	Otra:	2.10 %

(a) Flujo en modo de neutrinos.

(b) Flujo en modo de antineutrinos.

Tabla 2.2: Flujos predichos de $\nu_\mu/\bar{\nu}_\mu$ y $\nu_e/\bar{\nu}_e$ en el detector MiniBooNE. Contribución al flujo de decaimientos de mesones donde la partícula madre en la cadena de decaimientos es producida por interacción con un protón o un neutrón. La categoría “otra” incluye los canales con contribuciones menores a aquellas mostradas, junto con casos donde la partícula madre en la cadena de decaimiento es producida por la interacción de un mesón [162].

negativas para el modo de antineutrinos. Un efecto similar se ve para las componentes $\nu_e/\bar{\nu}_e$ en modo de antineutrinos: mientras que los $\bar{\nu}_e$ están dominados por decaimientos μ^- para energías por debajo de 2 GeV, el flujo de $K^+ \rightarrow \nu_e$ es mayor que el flujo de $K^- \rightarrow \bar{\nu}_e$. Una observación pertinente es que mientras la tasa absoluta de $\nu_e/\bar{\nu}_e$ proveniente de K_L^0 permanece igual que en modo de neutrinos, la contribución relativa es mucho mayor en modo de antineutrinos.

Incertidumbres sistemáticas

Las incertidumbres sistemáticas en la predicción del flujo de neutrinos para el modo de neutrinos y antineutrinos se encuentran resumidas en la tabla 2.3. Las distintas fuentes de incertidumbre en el haz están relacionadas, por ejemplo una variación en la cantidad de protones entregados se refleja en una variación en la cantidad de piones producidos, cada variación de un parámetro en la simulación tendrá efectos en las distribuciones de energía de los eventos empleados en los análisis. La matriz de covarianza del contenido de los *bins* de estas distribuciones se calcula para cada fuente de error sistemático. Así pues se construyen matrices de covarianza que se integran con otras para determinar la incertidumbre sistemática en los análisis. Estas incertidumbres provienen de distintas fuentes:

Entrega de protones: La simulación determina la tasa y espectro de los neutrinos por cada protón en el blanco. Esta información es combinada con el número de protones entregados al blanco para determinar el número de neutrinos que pasan a través del detector MiniBooNE a lo largo del periodo de captura de datos. Como resultado la predicción del número de interacciones de neutrinos en el detector varía directamente con la incertidumbre en el número de protones en el blanco. Una incertidumbre relacionada surge de la forma en como la óptica del haz de protones cambia el número

esperado de protones interactuando en el blanco (o en otras partes), consecuentemente cambiando el flujo de neutrinos.

Como se menciona en § 2.1.1, los protones entregados son monitoreados por dos toroides antes de que estos incidan en el blanco. Se estima que la incertidumbre sistemática en las medidas es de 2 %, dado que el flujo total de neutrinos se escala con la cantidad de protones entregados, esta fuente de error se puede tratar como incertidumbre en la normalización del total.

Producción de partículas: Las incertidumbres en la tasa y espectro de las partículas secundarias producidas en las interacciones p–Be afecta de forma similar la tasa y espectro de los neutrinos producidos. Esta es la incertidumbre dominante.

Interacciones hadrónicas: la tasa de las interacciones hadrónicas afecta muchos aspectos de la producción de neutrinos, incluyendo la tasa de las interacciones p–Be y la probabilidad que tienen los mesones de sobrevivir posibles interacciones hadrónicas en el blanco o corno, y decaer para producir neutrinos. Incertidumbres en la tasa de estas interacciones afectan tanto la tasa y la forma del flujo.

Campo magnético del corno: las incertidumbres en dos propiedades del campo magnético causan incertidumbres sistemáticas en el flujo de neutrinos. La primera es el efecto que tienen las variaciones de la corriente en el campo magnético, para lo cual se simulan los efectos de una variación de 174 ± 1 kA para obtener la incertidumbre sistemática en el flujo de neutrinos. El otro viene del modelado de la corriente dentro del cilindro interior debido al “efecto de profundidad de penetración”, el cual permite que el campo magnético penetre el conductor, incrementando el campo magnético efectivo que experimentan las partículas que atraviesan el conductor interior. Es importante considerar tal efecto para partículas producidas a ángulos pequeños y con gran momento. Se simula el caso en el que este efecto existe y cuando no se encuentra, encontrando una pequeña diferencia para neutrinos con energías menores a 1 GeV y hasta 18 % cuando tienen energías de ~ 2 GeV.

Geometría de la línea del haz: desplazamientos o desajustes de los componentes de la línea del haz pueden afectar el flujo de neutrinos en muchas formas. Por ejemplo un desajuste puede hacer que el detector se exponga a una parte distinta de la esperada del flujo de neutrinos. Un desplazamiento del blanco con respecto al corno puede resultar en una variación de las propiedades de enfoque. Estas variaciones son simuladas, sin embargo las magnitudes de las perturbaciones geométricas que son necesarias para tener un efecto substancial en el flujo ($> 1\%$) están por encima de lo que se considera la tolerancia y precisión con la que se construye la línea del haz. Por lo tanto, no se asigna ninguna incertidumbre sistemática significativa a la geometría del haz.

2.4. Simulación Monte Carlo del detector

Las tasas de interacción de neutrinos, productos y su cinemática en el detector MiniBooNE son predichas usando un generador de eventos de neutrinos basado en NUANCE v3 [163], pero adecuado al experimento MiniBooNE, como ajustes del factor de forma axial de la dispersión cuasielástica, el modelo de bloqueo de Pauli y las secciones eficaces de la producción coherente de piones neutros

Fuente de incertidumbre	Modo de neutrinos				Modo de antineutrinos			
	ν_μ	$\bar{\nu}_\mu$	ν_e	$\bar{\nu}_e$	ν_μ	$\bar{\nu}_\mu$	ν_e	$\bar{\nu}_e$
Entrega de protones	2.0 %	2.0 %	2.0 %	2.0 %	2.0 %	2.0 %	2.0 %	2.0 %
Óptica de protones	1.0 %	1.0 %	1.0 %	1.0 %	1.0 %	1.0 %	1.0 %	1.0 %
Producción de π^+	14.7 %	1.0 %	9.3 %	0.9 %	13.8 %	0.1 %	2.1 %	0.1 %
Producción de π^-	0.0 %	16.5 %	0.0 %	3.5 %	0.5 %	17.5 %	0.0 %	13.6 %
Producción de K^+	0.9 %	0.2 %	11.5 %	0.3 %	3.1 %	0.0 %	22.3 %	0.4 %
Producción de K^0	0.0 %	0.2 %	2.1 %	17.6 %	0.1 %	0.0 %	6.1 %	3.9 %
Campo del corno	2.2 %	3.3 %	0.6 %	0.8 %	1.5 %	1.0 %	3.2 %	1.5 %
Secciones eficaces de p/n	2.8 %	5.7 %	3.3 %	5.6 %	6.2 %	2.1 %	6.2 %	2.5 %
Secciones eficaces de π	1.2 %	1.2 %	0.8 %	0.7 %	1.5 %	1.2 %	1.6 %	1.5 %

Tabla 2.3: Variaciones en el flujo total para cada especie de neutrino en modo de neutrinos y antineutrinos debido a incertidumbres sistemáticas [162].

basados en los datos del experimento. Los varios parámetros del generador son afinados con la mejor información disponible de secciones eficaces. En la entrada se pone la predicción del flujo de neutrinos descrita en § 2.3.1, así como el material del detector (aceite mineral) y su geometría. NUANCE puede simular 99 interacciones distintas de neutrinos/antineutrinos, en un amplio rango de energías (100 MeV a 1000 GeV). Los procesos más importantes para este análisis son la dispersión cuasielástica de corriente cargada (CCQE por sus siglas en inglés) y la interacción por corriente neutra (NC). La figura 1.4 contiene las secciones de varios procesos relevantes en MiniBooNE. En el tiempo en que el experimento empezó a correr la mayoría de las mediciones que existían sobre secciones eficaces eran para núcleos ligeros y energías mayores, pero la mayoría de las interacciones que ocurren son para nucleones amarrados a núcleos de ^{12}C , por lo tanto se modelaron efectos nucleares para incorporar el conocimiento que se tenía de las secciones eficaces de nucleones libres de blancos ligeros.

Las incertidumbres en la modelación y las secciones eficaces de los procesos que se describen más adelante se integran para formar una matriz de covarianza, la cual se usa para determinar las incertidumbres en los análisis.

2.4.1. Interacción cuasielástica de corriente cargada (CCQE)

Por su relativamente alta sección eficaz y la capacidad de identificar el sabor del neutrino incidente, las dispersiones cuasielástica de corriente cargada son el canal a través del cual se hace la búsqueda de oscilaciones⁸. Las interacciones CCQE de neutrinos ocurren con neutrones en el átomo de carbono:

$$\nu_\mu \text{ n} \rightarrow \mu^- \text{ p}, \quad \nu_e \text{ n} \rightarrow e^- \text{ p}; \quad (2.2)$$

por lo cual se utiliza el modelo del gas relativista de Fermi de Smith–Monitz [164]. Por su parte las interacciones CCQE de antineutrinos se dan con protones:

$$\bar{\nu}_\mu \text{ p} \rightarrow \mu^+ \text{ n}, \quad \bar{\nu}_e \text{ p} \rightarrow e^+ \text{ n}; \quad (2.3)$$

⁸Son responsables de $\sim 40\%$ de todas las interacciones en el detector.

los cuales se encuentran libres (átomos H) y amarrados (átomos C), así que se usa una combinación del formalismo Llewellyn-Smith [165] y del Smith–Moniz. El diagrama de Feynman de esta interacción se muestra en la figura 2.12a.

La energía del neutrino incidente puede ser calculada en la cinemática del estado final si se determina el ángulo de deflexión y la energía de las dos partículas salientes. En general, como es el caso en MiniBooNE, la traza del nucleón saliente es difícil de medir, pero la energía y ángulo del leptón saliente están bien determinados. En estos casos se puede aproximar la energía del neutrino asumiendo que el nucleón está en reposo.

En una interacción cuasielástica con un nucleón libre en reposo, la energía del neutrino incidente está completamente determinada por la energía del leptón saliente E_l y su ángulo de deflexión θ_l con respecto a la dirección del neutrino:

$$E_\nu^{QE}(\mathbf{p}_n = 0) = \frac{1}{2} \frac{2M(E_l - m_l^2)}{M - E_l + \sqrt{E_l^2 - m_l^2} \cos \theta_l} \quad (2.4)$$

El cuadrimomento transferido $Q^2 = -q^2 = -(p_\nu - p_l)^2$ también está dado en términos de estas cantidades:

$$Q^2 = 2E_\nu E_l (1 - \beta_l \cos \theta_l) - m_l^2, \quad (2.5)$$

donde β_l es la velocidad del leptón saliente, pero esta expresión es general y no asume nada para el nucleón blanco. El modelo de gas de Fermi en la simulación de NUANCE tiene a los neutrones en un pozo de potencial con energía de amarre $B = 34$ MeV y satisfaciendo la relación de dispersión $(E_n - B)^2 = |\mathbf{p}_n|^2 - M_n^2$. El momento máximo de un neutrón dentro del núcleo de amarre (el momento de Fermi) se fija a $p_F = 220$ MeV/c. La energía de amarre y momento de Fermi se fijan a través de datos de dispersión de electrones. Se implementó un proceso de calibración para reducir los efectos de ignorar los efectos del movimiento de Fermi en el cálculo de la energía de los neutrinos en interacciones CCQE (tanto para ν_e como $\bar{\nu}_\mu$), este procedimiento de calibración mejora la resolución de energía a 1 GeV de la energía del muón de $\sim 15\%$ a $\sim 10\%$ al reducir las colas no gaussianas en la distribución de residuos fraccionales $(E_\nu^{\text{rec}} - E_\nu^{\text{true}})/E_\nu^{\text{true}}$.

En modo de neutrinos la tasa de producción de los eventos CCQE en la simulación MC fue corregida a través de un incremento de $\times \sim 1.20$ en la tasa de producción de π^+ para ajustar el número de eventos observados ν_μ , resultando en un incremento de ~ 20 en la normalización. Por su parte en modo de antineutrinos, en donde la contribución de signo incorrecto es mayor, la predicción MC de los eventos observados requirió un incremento de 1.20 a la tasa de decaimientos de π^- para ajustar los datos observados de μ^+ , mientras que la producción de los μ^- resultó ser 0.99 de la tasa predicha⁹. En conjunto, la normalización requirió un incremento de 13 %. Estas normalizaciones son compatibles con la incertidumbre combinada del flujo de neutrinos y las secciones eficaces.

2.4.2. Producción de π^0 por interacciones de corriente neutra (NC)

El fondo inducido por ν_μ más grande a la búsqueda de aparición de ν_e en MiniBooNE es la producción de π^0 por interacciones de corriente neutra. El modo dominante de producción $\nu_\mu\text{--NC}\pi^0$ es

⁹Se hizo un estudio dedicado a este efecto, ver la sección V.C de la referencia [166]

la excitación de nucleones en resonancias bariónicas como $\Delta(1232)$ y su subsecuente decaimiento en dos fotones, un proceso ilustrado en la figura 2.12b. Las predicciones en la simulación del detector de este proceso toman en cuenta el formalismo de Rein y Sehgal [167]. Las predicciones que existían de las secciones eficaces de este proceso tenían una gran incertidumbre, especialmente para el rango de energías de interés. Los piones neutros también pueden producirse en el proceso de dispersión coherente de un neutrino con un núcleo como conjunto:¹⁰ $\nu_\mu A \rightarrow \nu_\mu A\pi^0$, el cual también se simula. La colaboración encontró que la producción coherente de π^0 no es despreciable, lo cual exigió una medida directa de la tasa de eventos $NC\pi^0$ para hacer correcciones a la predicción de la simulación y para constreñir las incertidumbres asociadas con tal predicción.

Medir el proceso de producción de piones neutros por interacción de corriente neutra consistió en juntar una muestra de interacciones $NC\pi^0$ de gran pureza (96.5 %) y determinar la producción que generan estos eventos en nueve *bins* de momento reconstruido para π^0 . Se describe tal medición con gran detalle en [168]. Una comparación de estas distribuciones entre los datos y las simulaciones define un factor de corrección que puede ser aplicado a cada *bin* de momento reconstruido de π^0 para hacer que la distribución simulada esté en acuerdo con la de los datos. Los datos muestran un exceso de eventos π^0 en la región de bajo momento, en comparación con la predicción sin corregir; mientras que la región de gran momento concuerda satisfactoriamente.

Al repasar la simulación usando la corrección en el momento de π^0 y la fracción medida de la producción coherente de π^0 se obtiene una predicción del número de interacciones que producen piones neutros en el detector. El error en la producción general de π^0 (relevante para los análisis de oscilación) se reduce de $\sim 25\%$ a 5 %, una importante mejoría en la sensibilidad de la búsqueda de aparición de ν_e [169].

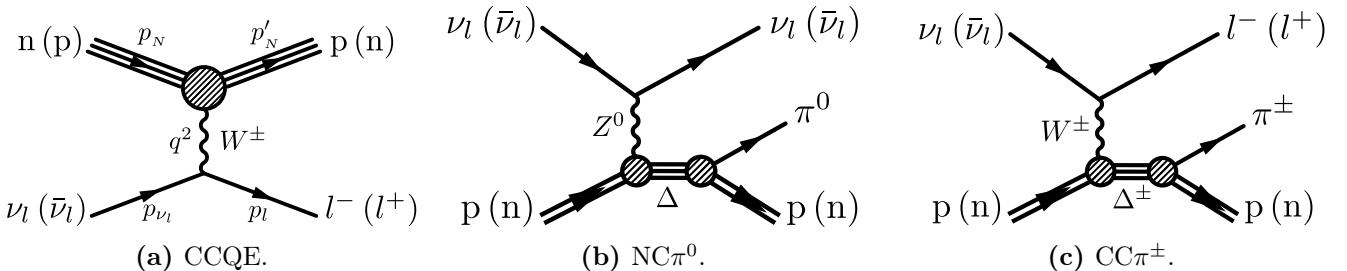


Figura 2.12: Diagramas de Feynman de interacciones relevantes. (a) Interacción CCQE de un ν_l con un nucleón para formar el correspondiente leptón cargado l y el otro nucleón. (b) Producción de π^0 de corriente neutra (ν_l - $NC\pi^0$) a través de la excitación de un nucleón en una resonancia Δ^\pm . (c) Producción de π^\pm de corriente cargada (ν_μ - $CC\pi^\pm$) a través de la excitación de un nucleón en una resonancia Δ^\pm .

El generador de eventos de MiniBooNE, NUANCE, saca un conjunto de partículas y canales generados por neutrinos. Esta información es usada por la simulación del detector para modelar la propagación de partículas, la emisión y propagación de luz resultante y la respuesta de los PMT's. El experimento usa el *software* de simulación GEANT3 [170], en conjunto con un modelo óptico a la medida para simular las interacciones en el detector. El dominio geométrico de la simulación incluye el tanque, el suelo alrededor y la cámara del detector, incluyendo la electrónica encima. En la simulación, se asume que el aceite mineral es CH_2 con una densidad de 0.845 g/cm^3 ; también se incluyen los detalles de la estructura de los PMT's, los cubos centellados y los frascos usados para la calibración con láser. Se usa el algoritmo de rastreo por defecto de GEANT3 para propagar las partículas; sin embargo se hicieron algunas modificaciones a las rutinas estándar para incluir un modelo mejorado del decaimiento Dalitz

¹⁰En oposición a la interacción de un neutrino con un solo nucleón.

$(\pi^0 \rightarrow e^+ e^- \gamma)$, decaimiento del muón ($\mu \rightarrow e\gamma\gamma$) y la posibilidad de captura del μ^- por el carbono. El paquete por defecto de interacciones hadrónicas GFLUKA, fue sustituido por GCALOR [171].

Los eventos que provienen de interacciones fuera del tanque contribuyen significativamente al fondo de errores en la identificación de la búsqueda de oscilaciones, típicamente producen un NC π^0 que decae en dos fotones, uno de los cuales encuentra su camino al detector. Los eventos de interacciones externas tienden a depositar toda su energía cerca de la pared del detector y sus trazas tienden a apuntar hacia el centro del detector. Se uso una muestra dedicada de eventos en la suelo para medir la tasa observada de estas interacciones, la cual demostró ser consistente con la simulación MC dentro de la incertidumbre de las medidas [172]. Las incertidumbres de estos eventos también son consideradas en los análisis.

2.4.3. El modelo óptico de MiniBooNE

La colaboración desarrolló un modelo óptico personalizado para caracterizar la producción y propagación de los fotones ópticos que son producidos por las partículas cargadas que atraviesan el detector.

La producción de luz ocurre a través de radiación cherenkov, centelleo y fluorescencia.

- Radiación cherenkov: cuando una partícula cargada se mueve más rápido que la luz en ese medio entonces emite radiación cherenkov, la cual es expedita y direccional. El ángulo entre la traza de la partícula y los fotones emitidos esta gobernado por la fórmula:

$$\cos \theta_c = \frac{1}{\beta n} = \frac{1}{n} \left[\frac{(T + m)^2}{(T + m)^2 - m^2} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (2.6)$$

donde n es el índice de refracción del medio y $\beta = v/c$ es el cociente de la velocidad de la partícula y la luz. Además, del lado derecho, se ha expresado el ángulo en términos de la energía cinética T y la masa de la partícula m . La tasa de emisión de fotones como función de la longitud de onda esta dada por:

$$\frac{d^2N}{dx d\omega} = \alpha q^2 \left[1 - \frac{1}{\beta^2 n^2(\omega)} \right], \quad (2.7)$$

donde, ahora, x es la longitud de camino, ω la frecuencia del fotón, α la constante de estructura fina y q la carga de la partícula. La energía cinética mínima que se necesita para producir radiación cherenkov es $T_{Ch} = m \left[(n/\sqrt{n^2 - 1}) - 1 \right]$. El umbral de energía de los protones para producir radiación cherenkov es $T_{Ch} \simeq 350$ MeV.

- Centelleo y fluorescencia: las trazas de ionización de las partículas excitan los electrones en los átomos del aceite, la des-excitación subsecuente emite fotones, la cual se conoce como luz de centelleo y es por naturaleza retardada e isotrópica. Cuando los fotones ópticos son los responsables de la excitación y des-excitación de las moléculas, contrariamente a las trazas de ionización, el proceso se conoce como fluorescencia. Las características del centelleo y la fluorescencia están determinadas por la composición química del aceite. La luz de centelleo es proporcional a la pérdida de ionización de la partícula.

La propagación o transmisión de fotones en MiniBooNE ocurre a través de procesos de dispersión, cuando un fotón óptico interactúa con una molécula y se desvía y cambia su polarización manteniendo la misma longitud de onda; fluorescencia, cuando fotones ópticos (creados por centelleo o radiación cherenkov) son absorbidos y reemitidos posteriormente con distinta longitud de onda y/o dirección¹¹; y absorción de fotones en el aceite, la diferencia entre la tasa total de desaparición y la suma de la attenuación debido a centelleo y fluorescencia. Los estudios que se hicieron de las propiedades ópticas del aceite se encuentran en [173].

Se usa un espacio de 35 parámetros para representar todas las posibles variaciones en las propiedades ópticas del detector, se forma una matriz de covarianza que relaciona todos esos parámetros, con un procedimiento descrito en [174]. Esta matriz se usa para estimar la incertidumbre sistemática en los análisis.

Simulación de la respuesta de los PMT's y adquisición digital

El paso final de la simulación es generar la respuesta de los PMT's a los fotoelectrones de GEANT3 que llegan a los PMT's, después de eso la información se pasa a través de un código que replica el paso de los datos por la electrónica DAQ. Esto asegura que la salida final del MC es estructuralmente igual a los datos.

La respuesta de los PMT's es simulada alterando el tiempo y la carga acumulada por cada impacto de fotón, para tomar en cuenta efectos como pulsos prematuros o tardíos y comportamientos individuales de cada PMT, observados en estudios dedicados [175] y usando los datos de la calibración del láser (§ 2.2.3). También se agrega la correspondiente compensación de tiempo a cada canal. Al final la digitalización de la simulación de la respuesta de los PMT's se logra creando un pulso triangular que se usa para construir el conjunto de *quads* de carga y tiempo (§ 2.2.1).

2.5. Reconstrucción de eventos e identificación de partículas

Los fotones cherenkov producidos por partículas cargadas que emergen de la interacción de neutrinos son detectados por los PMT's del detector MiniBooNE. Los fotones son emitidos con un ángulo θ_c (ecuación (2.6)) con simetría azimutal alrededor de la traza de la partícula cargada, resultando en un patrón con forma de anillo que puede ser identificado en el arreglo de PMT's. La cantidad, distribución espacial y tiempos de arribo de estos fotones proveen información de la localización, dirección y energía de la partícula. A la extracción de tal información a partir de las medidas de la carga y tiempo de los PMT's se le llama “reconstrucción”. El objetivo de esta tesis no es describir el mecanismo de reconstrucción de partículas, el cual se describe en la referencia [176].

El haz de neutrinos de ~ 1 GeV en MiniBooNE resulta en interacciones con relativamente poca multiplicidad de partículas salientes. En el canal más abundante, las interacciones CCQE (figura 2.12a) el nucleón suele estar debajo del umbral cherenkov y solo el leptón resultante produce significativa luz. Un muón en el detector exhibe un comportamiento mínimo de ionización a lo largo de su camino, con poca probabilidad de pérdida radiante de energía. En contraste, los electrones típicamente inducen cascadas electromagnéticas, resultando en positrones y electrones adicionales que emiten luz

¹¹De particular importancia es la fluorescencia debido a fotones ultravioleta, los cuales no son registrados por los PMT's pero si pueden ser absorbidos y reemitidos con otra longitud de onda.

cherenkov además de ser fuertemente afectados por la dispersión de Coulomb. Así pues, los muones y electrones tienen patrones de anillos cherenkov significativamente diferentes, esta diferencia es la base para distinguir la traza de un muón y de un electrón: el algoritmo de reconstrucción tiene un modelo para cada una.

El segundo proceso más abundante en MiniBooNE es la producción de π^0 a través interacciones de corriente neutra (figura 2.12b) en los cuales la cascada de uno de los fotones no es observada y la otra es indistinguible de la cascada de un electrón.

Como el retroceso del nucleón (núcleo para el caso de la dispersión coherente) esta debajo del umbral cherenkov, los eventos $NC\pi^0$ están bien descritos en el algoritmo de reconstrucción por dos trazas de electrones que apuntan a un vértice común. Errores en la identificación de π^0 (por ejemplo, debido a una gran asimetría en la energía de los dos fotones o a un pequeño ángulo de separación entre los fotones que deja anillos cherenkov traslapados) forma la mayor parte del fondo en la búsqueda de oscilaciones. Por lo tanto, la reconstrucción e identificación de eventos π^0 es primordial.

Si bien se pueden adaptar otros canales en el algoritmo de reconstrucción, el análisis de aparición de ν_e ($\bar{\nu}_e$) solamente usa cuatro modelos de eventos: traza sencilla de electrón, traza sencilla de muón, dos trazas de fotones y dos trazas de fotones con la masa invariante de π^0 . Estos modelos se representan en la figura 2.13.

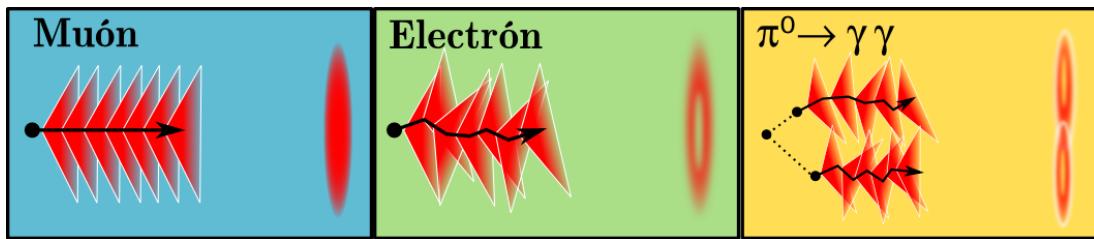


Figura 2.13: Identificación de partículas en MiniBooNE. Los eventos son reconstruidos como eventos de muón, anillo de luz bien definidos; eventos de electrón, anillos de luz difusos; o π^0 , par de anillos difusos. MiniBooNE no puede reconocer entre el anillo dejado por un electrón y un fotón.

La reconstrucción de una traza sencilla en el detector, ya sea de electrón o de muón, se basa en un modelo con siete parámetros: las tres coordenadas del punto de inicio, x_0, y_0, z_0 ; el tiempo de inicio, t_0 ; la dirección, θ_0, ϕ_0 ; y la energía cinética, E_0 . El tiempo y punto de inicio son referidos como el “vértice” del evento. La dirección esta descrita en términos del ángulo polar θ_0 definido con respecto a la dirección del haz de neutrinos y el ángulo azimutal ϕ_0 alrededor de este eje del haz. Para el modelo del electrón, las variaciones estocásticas en las cascadas electromagnéticas son modeladas en promedio, no se intenta tomar en cuenta variaciones evento por evento en el perfil de la cascada. Lo mismo va para las variaciones mucho más pequeñas de la propagación del muón. Esta simplificación permite que la traza sea completamente especificada con los siete parámetros de arriba, con los cuales se forma el vector de parámetros $\mathbf{X} = (x_0, y_0, z_0, t_0, \theta_0, \phi_0, E_0)$, como se muestran en figura 2.14a.

Las observables de un evento son medidas con los 1280 PMT's en la región principal del detector. Para cada PMT, se tiene: un bit indicando si el tubo registró un impacto; si el tubo registró un impacto, la carga medida del impacto y el tiempo medido del impacto.

Asumiendo que el comportamiento de los PMT's es independiente, la verosimilitud para un conjunto de mediciones en los PMT's dados los parámetros de la traza \mathbf{X} se expresa como

$$\mathcal{L}(\mathbf{X}) = \prod_{\text{Sin impacto}} (1 - P(i; \mathbf{X})) \times \prod_{\text{Con impacto}} P(i; \mathbf{X}) f_q(q_i; \mathbf{X}) f_t(t_i; \mathbf{X}), \quad (2.8)$$

en donde los productos se toman sobre todos los PMT's impactados y no impactados. Además, $P(i; \mathbf{X})$ es la probabilidad de que el i -ésimo tubo sea impactado dados los parámetros \mathbf{X} ; q_i, t_i son la carga y tiempo medidos en el i -ésimo PMT; $f_q(q_i; \mathbf{X})$ es la función de densidad de probabilidad para la carga medida en el i -ésimo PMT, dado \mathbf{X} , evaluado en q_i ; y $f_t(t_i; \mathbf{X})$ es la función de densidad de probabilidad para el tiempo medido dado \mathbf{X} , evaluado en t_i .

El algoritmo de reconstrucción maximiza la verosimilitud para determinar los parámetros de las trazas bajo la hipótesis de electrón, muón o pión neutro. Subyacente a la verosimilitud hay un modelo de trazas y del detector que calcula para un parámetro dado el conjunto de funciones de distribución de probabilidad de carga y tiempo para cada PMT, tomando en cuenta producción espacialmente extendida de radiación cherenkov y de centello así como efectos de luz indirecta desde procesos ópticos subsecuentes. En particular, la reconstrucción de dos trazas requiere reconstruir dos trazas sencillas que se encuentren trasladadas distancias s_1 y s_2 de un vértice común. Adicionalmente se constriñe que este par de trazas reconstruyan la masa invariante el pión neutro. Los parámetros usados para la reconstrucción de dos trazas se pueden ver en la figura 2.14b.

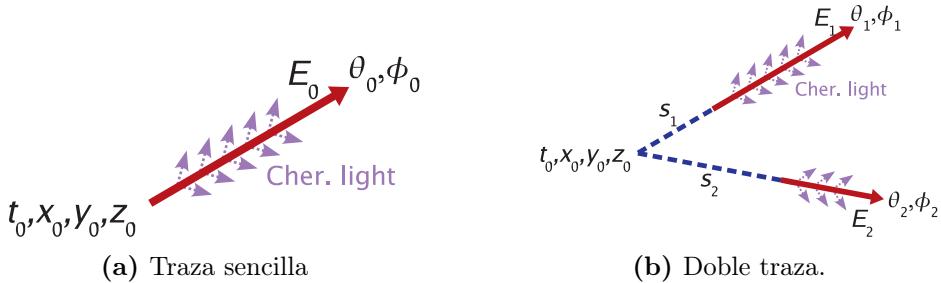


Figura 2.14: Parámetros internos para la reconstrucción de trazas. (a) Traza sencilla dejada por un muón o electrón y (b) traza doble dejada por dos fotones. Los parámetros de la doble traza pueden ser constreñidos para que la masa invariante de los dos fotones $m_{\gamma\gamma}$ siempre sea m_{π^0} . Figuras sacadas de [176].

2.5.1. Identificación de partículas

Además de los distintos patrones de luz que dejan los muones y electrones, se distinguen los eventos de ν_μ ($\bar{\nu}_\mu$) de los ν_e ($\bar{\nu}_e$) en que más de 80 % de las veces se observa el electrón retrasado del decaimiento de los muones. Se usa la información de la carga y el tiempo en la ventana de 19.2 μs para reconstruir las interacciones de neutrinos e identificar las partículas producidas. Se define esta ventana de tiempo como un “evento” y esta dividida en “subeventos”, colecciones de impactos en los PMT's aglomerados en un tiempo de ~ 100 ns. Un evento CCQE ν_μ puede tener dos subeventos: el primero con fotones producidos por el muón generado y el segundo del decaimiento del muón al electrón. Por su parte un evento CCQE ν_e solo tiene un subevento.

El máximo de la verosimilitud que arrojan los análisis del electrón, muón y el ajuste para dos trazas con masa fija pueden ser usados para probar hipótesis. Las dos cantidades

$$\mathcal{R}_{e/\mu} \equiv \log(\mathcal{L}_e/\mathcal{L}_\mu) = \log \mathcal{L}_e - \log \mathcal{L}_\mu, \quad (2.9)$$

$$\mathcal{R}_{e/\pi} \equiv \log(\mathcal{L}_e/\mathcal{L}_\pi) = \log \mathcal{L}_e - \log \mathcal{L}_\pi, \quad (2.10)$$

son usadas en un evento dado para determinar si la hipótesis del electrón se prefiere sobre la hipótesis del muón o del pión neutro.

Para los eventos ν_e ($\bar{\nu}_e$) CCQE, la fracción $\mathcal{R}_{e/\mu}$ tiende a tomar valores positivos, indicando que el ajuste a la hipótesis del electrón esta favorecida sobre la hipótesis del muón. Análogamente, $\mathcal{R}_{e/\mu}$ tiende a ser negativa para los eventos ν_μ ($\bar{\nu}_\mu$) CCQE, indicando que la hipótesis del muón ajusta mejor los datos que la del electrón. A grandes energías (> 1 GeV), la separación entre electrón y muón mejora gracias a que la longitud que viajan los muones crece aproximadamente linealmente con la energía, mientras que la del electrón crece más lentamente. Asimismo, la cantidad $\mathcal{R}_{e/\pi}$ prueba si un evento dado se ajusta mejor como una traza sencilla de electrón o como π^0 . En general, la separación entre electrones y piones se vuelve más difícil a grandes energías conforme crece la asimetría en las energías de los fotones que decaen de π^0 y las fluctuaciones en las cascadas de un electrón sencillo se vuelven tan grandes que imitan la presencia de un segundo fotón. También, los eventos π^0 en que un fotón deja el tanque sin convertirse presentan un fondo irreducible a bajas energías. Evento por evento, MiniBooNE es incapaz de discernir entre neutrinos y antineutrinos, es decir entre e^+ y e^- o μ^+ y μ^- , sin embargo acumulando muchos datos se puede construir una distribución angular que permite estimar el número de neutrinos y antineutrinos en cada modo.

Criterios de selección de eventos

El primer paso en la selección de eventos es el rechazo del ruido no relacionado al haz. Este es un fondo originado principalmente por rayos cósmicos, que pueden imitar la señal de interacción de un neutrino con la energía adecuada. Filtrar los datos de acuerdo a su sincronización con el haz provee una buena forma de rechazar eventos espurios. Característico de los eventos de neutrinos, se impone que el primer subevento tenga menos de 6 impactos en la región de veto y más de 200 impactos en los PMT's en la región de señal. Estos tres filtros rechazan $> 99.99\%$ del fondo que no esta relacionado al haz¹². Se aplica un filtro adicional que divide los eventos restantes en dos categorías: una muestra con dos subeventos (característico de CCQE ν_μ) y una muestra con un subevento (característico de CCQE ν_e y su fondo respectivo). Además de estos filtros se hacen filtros cinemáticos para aumentar la pureza de cada muestra.

Muestra de ν_μ CCQE: eventos con estructura de dos subeventos, el primer subevento satisface los filtros anteriores y el segundo subevento (un electrón Michel) registra un máximo de 200 y 6 impactos en la región de señal y la de veto, respectivamente. Se requiere un tiempo mínimo de 1000 ns entre el primer y segundo subevento. Tanto el vértice como el punto final de la traza del primer subevento deben ocurrir en el volumen alrededor del centro del tanque delimitado por un radio de 500 cm. La energía reconstruida $E_\nu^{QE} > 150$ MeV. La separación entre los vértices del muón y del electrón deben satisfacer cierta relación que depende de la energía reconstruida del muón.

¹²Mayor de 1000 a 1 para rayos cósmicos.

Muestra de ν_e CCQE: identificados por tener estructura de un subevento y los filtros iniciales. El vértice reconstruido, asumiendo hipótesis de electrón, debe estar dentro de una esfera concéntrica al detector de 500 cm de radio. Para minimizar la cantidad de ν_μ que son identificados erróneamente como ν_e se demanda que el punto final de la traza, asumiendo hipótesis de muón en la reconstrucción, debe estar contenido dentro de un volumen de 488 cm de radio. La energía visible mínima debe ser mayor a 140 MeV. Se aplica un filtro adicional basado en cinemática para rechazar eventos que provienen de interacciones exteriores a la región de interés. Hay varios filtros que vienen de los algoritmos de reconstrucción y las fracciones (2.9) y (2.10).

2.6. Resultados publicados por MiniBooNE

MiniBooNE tuvo diez años de corrida de 2002 a 2012, en los cuales publicó diez artículos de oscilaciones, doce artículos de secciones eficaces¹³ y flujos, uno sobre el detector, uno de búsqueda de supernovas, además se hicieron diecisiete tesis de doctorado. En particular los artículos sobre secciones eficaces cubren cerca del 90 % de las interacciones de los neutrinos, muchas de las cuales no habían sido medidas antes, y han motivado mucho trabajo teórico sobre interacciones neutrino–núcleo. La lista completa se puede ver en: <http://www-boone.fnal.gov/publications>.

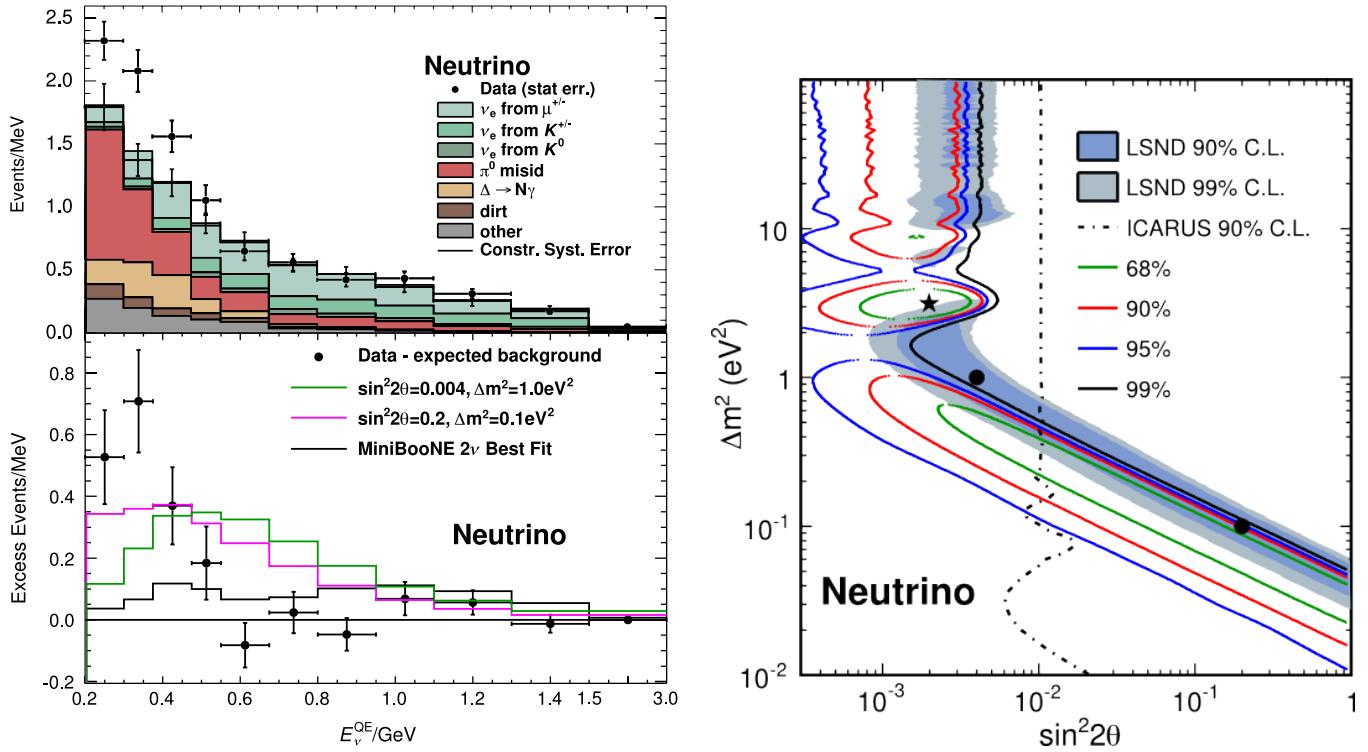
La tasa de neutrinos por POT se mantuvo muy estable, con variaciones menores a < 2 %, a lo largo de los diez años. Solamente hubo dos incidentes: se cambió un corno en 2004, pero desde entonces tanto el corno como el blanco han corrido sin problemas, imponiendo un récord; y el desplome en 2006 de unas placas de hierro en el túnel de decaimiento bajando la cantidad de antineutrinos.

De forma consistente en toda la vida del experimento los cortes del haz y el detector para los análisis de secciones eficaces y oscilación quitan solamente 2–3 %. Durante el tiempo de vida del experimento, solamente 35 PMT's y canales de electrónica fallaron ($\sim 2\%$).

El enfoque de esta tesis está en los artículos sobre el objetivo principal de MiniBooNE (comprobar o refutar los resultados de LSND), es decir los análisis de aparición de neutrinos (antineutrinos) del electrón para la búsqueda de oscilación de neutrinos.

- En 2007 sale el primer artículo publicado por la colaboración, intitulado “*A Search for Electron Neutrino Appearance at the $\Delta m^2 \sim 1 \text{ eV}^2$ Scale*”, coincidió con el primer artículo de oscilaciones [177], ahí se reporta el estado de la búsqueda de aparición de ν_e en un haz de ν_μ . Se llevaron a cabo dos análisis independientes para energías superiores a 475 MeV, ninguno de los cuales mostró un exceso significativo sobre el fondo esperado de ν_e . Los datos encontrados resultaron inconsistentes con respecto a un modelo de oscilación de dos neutrinos. De hecho el límite obtenido a 90 % N.C. excluía completamente la región permitida al mismo nivel de confianza por LSND.
- Desde la primera publicación la colaboración observa un exceso de eventos a candidatos ν_e en la región de energía de $200 < E_\nu^{QE} < 475$ MeV. Habiendo hecho un estudio extensivo sobre la causa de estos eventos la colaboración publicó en 2009 el artículo [178] “*Unexplained Excess of Electron-Like Events From a 1-GeV Neutrino Beam*”, precisamente el exceso de eventos no es del

¹³Durante un tiempo el experimento SciBooNE se encontraba en la línea del BNB, a ~ 100 m del punto de producción. Midió las secciones eficaces de los neutrinos en carbono y hierro, estas mediciones sirvieron para MiniBooNE y el experimento T2K en Japón.



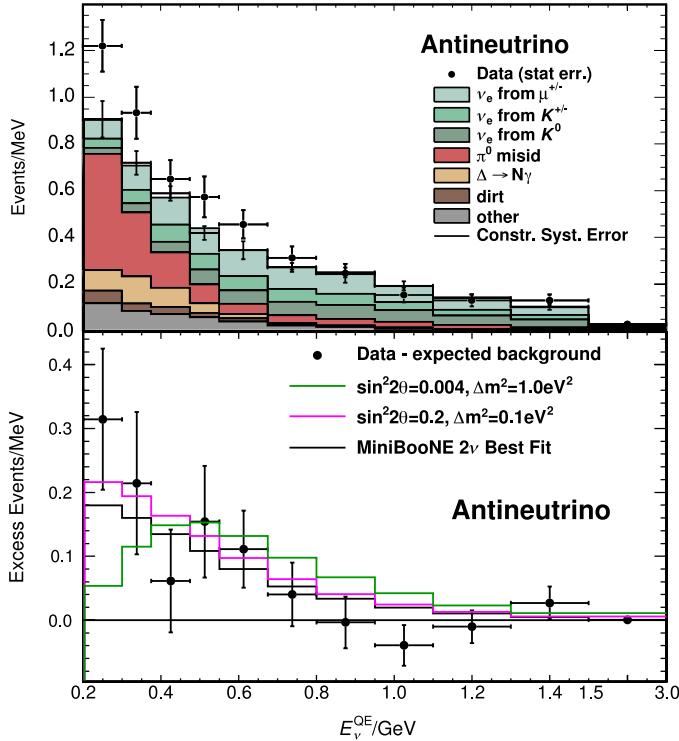
(a) Distribuciones para los datos ν_e CCQE como función de E_ν^{QE} (arriba) y exceso de eventos ν_e (abajo).

(b) Regiones permitidas para oscilaciones de dos neutrinos por MiniBooNE.

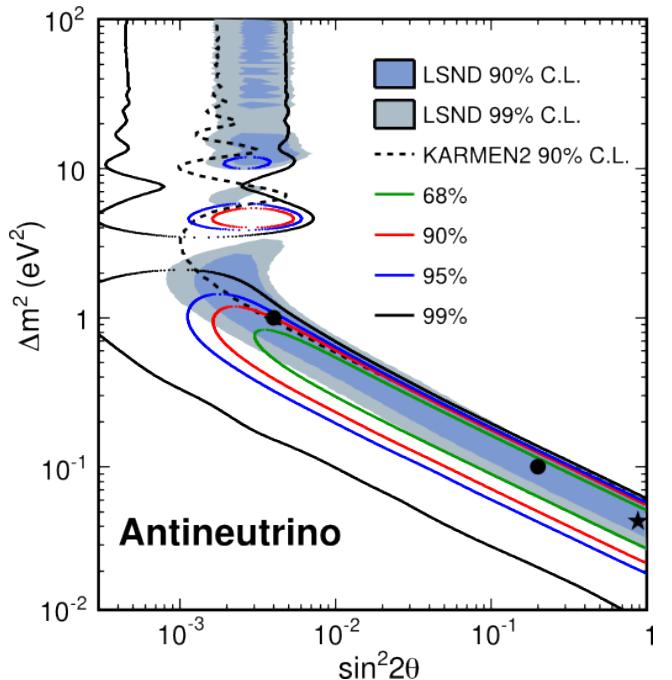
Figura 2.15: Resultados de MiniBooNE en el modo de neutrinos de 2013 [181]. (a) Distribuciones para los datos ν_e CCQE (puntos con error estadístico) y fondo (histograma con error sistemático), como función de E_ν^{QE} (arriba); exceso de eventos ν_e como función de E_ν^{QE} , se muestran los datos (error estadístico y sistemático), la expectación del mejor ajuste y de otro par de puntos muestra (abajo). (b) Regiones permitidas por el experimento MiniBooNE para $E_\nu^{QE} > 200$ MeV dentro de un modelo de oscilaciones de dos neutrinos. Se muestra el límite de exclusión del experimento ICARUS [126] y las regiones permitidas de LSND. La estrella muestra el mejor ajuste de MiniBooNE y los círculos los valores de muestra de la figura de al lado.

todo consistente con el modelo de oscilación de neutrinos y su origen es desconocido, pero queda establecido que no puede adjudicarse a ninguno de los fondos conocidos. Habiendo aumentado la estadística a 6.46×10^{20} POT el exceso en la región de bajas energías es de $128.8 \pm 20.4 \pm 38.3$ eventos, mientras que para 475–1250 MeV se observan 408 de los 385.9 ± 35.7 eventos esperados.

- También en 2009 se reporta el estado de la búsqueda de oscilaciones en el modo de antineutrinos [179]. Con una pequeña muestra de apenas 3.39×10^{20} POT, el experimento en su artículo “Search for Electron Antineutrino Appearance at the $\Delta m^2 \sim 1$ eV² Scale” no observa ningún exceso significativo de eventos, ni para la región de baja energía (200–475 MeV) ni para el resto. Dada la baja estadística, este resultado no es concluyente, la motivación para liberarlo yace en mostrar una comparación con el exceso a bajas energías observado en el modo de neutrinos.
- Sin embargo la situación cambia en 2010, con la publicación [180] “Event Excess in the MiniBooNE Search for $\bar{\nu}_\mu \rightarrow \bar{\nu}_e$ Oscillations” en donde con 5.66×10^{20} POT se reporta la observación de un exceso de 43.2 ± 22.5 eventos para la región completa de energía (200–3 000 MeV), y un exceso de 20.9 ± 14.0 eventos para el rango de energía 475–1250 MeV. En esta búsqueda se observa una gran compatibilidad entre las regiones permitidas de LSND y MiniBooNE.
- Habiendo aumentado la estadística del modo de antineutrinos a 11.27×10^{20} POT se reportan



(a) Distribuciones para los datos $\bar{\nu}_e$ CCQE como función de E_{ν}^{QE} (arriba) y exceso de eventos $\bar{\nu}_e$ (abajo).



(b) Regiones permitidas para oscilaciones de dos neutrinos por MiniBooNE.

Figura 2.16: Resultados de MiniBooNE en el modo de antineutrinos de 2013 [181]. (a) Distribuciones para los datos $\bar{\nu}_e$ CCQE (puntos con error estadístico) y fondo (histograma con error sistemático), como función de E_{ν}^{QE} (arriba); exceso de eventos $\bar{\nu}_e$ como función de E_{ν}^{QE} , se muestran los datos (error estadístico y sistemático), la expectación del mejor ajuste y de otro par de puntos muestra (abajo). (b) Regiones permitidas por el experimento MiniBooNE para $E_{\nu}^{QE} > 200$ MeV dentro de un modelo de oscilación de dos neutrinos. Se muestra el límite de exclusión del experimento KARMEN [124] y las regiones permitidas de LSND. La estrella muestra el mejor ajuste de MiniBooNE y los círculos los valores de muestra de la figura de al lado.

los resultados de la búsqueda de oscilaciones $\bar{\nu}_\mu \rightarrow \bar{\nu}_e$ [181], en el artículo “*Improved Search for $\bar{\nu}_\mu \rightarrow \bar{\nu}_e$ Oscillations in the MiniBooNE Experiment*” publicado a inicios de 2013. Además del incremento de la estadística se hicieron varias mejorías a los análisis y estimación de errores, los cuales también afectan al análisis de neutrinos. En modo de antineutrinos se reporta un exceso de 78.4 ± 28.5 (2.8σ) eventos en el rango de energía 200–1250 MeV y en modo de neutrinos de 162.0 ± 47.8 (3.4σ). El modo de antineutrinos es consistente con un modelo de oscilación de dos neutrinos, además de que las regiones permitidas de oscilación muestran traslape con las de LSND, sin embargo en el modo de neutrinos los datos son marginalmente compatibles con un simple modelo de oscilación de dos neutrinos y la región de compatibilidad con LSND es muy reducida. A la fecha estos son los resultados más recientes en la búsqueda de oscilaciones por aparición y se pueden ver en las figuras 2.15 y 2.16, para el modo de neutrinos y antineutrinos, respectivamente. Cabe mencionar que los datos para este análisis fueron liberados a finales de 2012.

Actualmente MiniBooNE ha sido aprobado para hacer una corrida corta (de seis a diez semanas) para buscar materia oscura [182], en concreto buscará WIMPS (*weakly interacting massive particles*) de masa pequeña producidas en un haz de protones como se predicen en ciertos modelos teóricos recientes.

En 2014 se tendrán los resultados de tal búsqueda. Actualmente la colaboración considera e investiga la posibilidad de agregar centellador orgánico al aceite del tanque, para aumentar la radiación de centelleo en el tanque [183]. Además de la inversión económica, esta nueva implementación requeriría crear un nuevo modelo óptico del detector. La generación de radiación cherenkov sería prácticamente la misma, pero la potenciación de la radiación de centelleo permitiría mejor determinación en los procesos de corriente neutra.

Con el propósito de investigar el exceso de eventos a bajas energías observado por MiniBooNE se propuso el experimento MicroBooNE [184] para medir secciones eficaces en esa región de energía. MicroBooNE construirá y operará una *liquid Argon Time Projection Chamber* (LArTPC) de 170 toneladas en la línea del haz Booster en el mismo Fermilab. El detector sirve como el paso necesario en un programa escalonado hacia la construcción de detectores LArTPC masivos de kilotoneladas.

Capítulo 3

Análisis de oscilaciones

MiniBooNE es un experimento de oscilación de neutrinos, lo que hace es buscar el exceso de $\nu_e(\bar{\nu}_e)$ en un haz primordialmente de $\nu_\mu(\bar{\nu}_\mu)$, es decir, es un experimento de aparición. Sin embargo también cuenta con resultados de desaparición de neutrinos, en § 1.4.7 se explica lo que es un experimento de aparición y desaparición. Este trabajo se limita a los análisis de aparición de neutrinos y antineutrinos únicamente. En esencia, la tarea fundamental de los análisis estadísticos que se hicieron en este trabajo es determinar si la señal observada de $\nu_e(\bar{\nu}_e)$ es consistente con el modelo de oscilaciones de neutrinos en el vacío, $\nu_\mu \rightarrow \nu_e(\bar{\nu}_\mu \rightarrow \bar{\nu}_e)$.

El análisis de datos tiene varias tareas en la física como: estimar (medir) parámetros, cuantificar la incertidumbre de estas estimaciones o probar el alcance al cual las predicciones teóricas se encuentran en concordancia con los datos experimentales. Se debe reconocer el rol fundamental que juega la incertidumbre en la física de partículas elementales: la teoría no es determinista, es decir la mecánica cuántica tiene una naturaleza probabilística; hay errores aleatorios en las mediciones, presentes aún estando exentos de efectos cuánticos; hay cosas que en principio podríamos conocer pero en la práctica no las conocemos, por ejemplo por limitaciones de costo o tiempo. En estas circunstancias la estadística se vuelve una gran herramienta, ya que permite cuantificar las incertidumbres.

Nota: la sección 3.1 no es esencial para entender los resultados de esta tesis. El lector familiarizado con métodos estadísticos puede ir a § 3.2 directamente.

3.1. Nociones de probabilidad y estadística

Desafortunadamente los estadísticos no concuerdan en los principios básicos. A grandes rasgos se puede pensar en dos escuelas: la bayesiana y la frecuentista (o clásica). Los primeros hacen uso del teorema de Bayes [185]. El enfoque bayesiano es más cercano al razonamiento cotidiano, en el cual la probabilidad es interpretada como un *grado de confianza* de que algo pasará o de que un parámetro tendrá un valor dado. El enfoque frecuentista es más cercano al razonamiento científico, en donde la probabilidad significa la frecuencia relativa de que algo pase. Esto la hace más objetiva, ya que puede ser determinada independientemente del observador, pero se restringe a fenómenos repetibles. En particular, se puede definir la probabilidad frecuentista de observar datos (los cuales son aleatorios), pero no para el valor verdadero de un parámetro (el cual es fijo, aún cuando sea desconocido).

En el régimen asintótico, es decir cuando hay muchos datos y las incertidumbres estadísticas son pequeñas comparadas con la frontera física más cercana, los resultados numéricos para la estimación de parámetros y comprobación de hipótesis tienden a ser iguales para los dos enfoques. Sin embargo los resultados exactos para cada enfoque requieren información que no está permitida por el otro enfoque:

- Los resultados frecuentistas exactos requieren como entrada las probabilidades de observar todos los datos, tanto los datos que fueron observados como los que pudieron haber sido observados (simulación).
- Los resultados bayesianos exactos requieren como entrada las creencias previas del físico haciendo el análisis. Lo cual es necesariamente subjetivo y no está permitido en el método frecuentista.

A pesar de que se tiene cierto concepto de la *probabilidad* desde hace mucho, no se desarrolló una teoría matemática apropiada sino hasta 1933 cuando Andrey Kolmogorov publicó sus *Fundamentos de la Teoría de Probabilidad* [186]. En esta teoría la probabilidad es un concepto básico sin definir excepto por el hecho de que debe satisfacer los *axiomas de Kolmogorov*. Pensemos en esta probabilidad abstracta como la *probabilidad matemática*.

Probabilidad matemática. Definimos Ω como el conjunto de todos los posibles “eventos elementales” X_i que son “exclusivos”, la ocurrencia de uno de ellos implica que ninguno de los otros ocurre. Luego definimos la probabilidad de la ocurrencia de X_i , $P(X_i)$, como aquella que obedece los axiomas de Kolmogorov:

$$\begin{aligned} (a) \quad & P(X_i) \geq 0 \text{ para todo } i \\ (b) \quad & P(X_i \cup X_j) = P(X_i) + P(X_j) \\ (c) \quad & \sum_{\Omega} P(X_i) = 1. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Sin embargo para la estadística necesitamos una definición operacional que permita calcular probabilidades, tal definición será más restrictiva pero siempre que satisfaga los axiomas de Kolmogorov su teoría se aplica.

Probabilidad frecuentista. Consideremos un experimento en el cual se observa una serie de eventos, algunos de los cuales son del tipo X . Supongamos que el número total de eventos es N y que el número de eventos tipo X es n . La probabilidad frecuentista de que cualquier evento individual sea de tipo X se puede definir como el límite empírico de la proporción:

$$P(X) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{n}{N} \tag{3.2}$$

La probabilidad frecuentista tiene las siguientes propiedades:

- No se requiere una cantidad infinita de experimentos. En principio, siempre y cuando se puedan hacer más experimentos se puede obtener la precisión requerida.
- Hay una restricción implícita: esta probabilidad solo se puede aplicar a experimentos repetibles.

- A pesar de que ningún experimento puede ser repetido con *exactamente* las mismas condiciones, un físico debe ser capaz de reproducir todas las condiciones *relevantes*. Aún cuando eso sea imposible, debe hacer correcciones que consideren los cambios inevitables. La buena ciencia debe producir resultados reproducibles.

En este trabajo el enfoque que se sigue es el frecuentista, por lo mismo se omitirán los detalles relacionados a la escuela bayesiana. Sin embargo, por completez, se menciona el teorema de Bayes.

El teorema de Bayes: da la relación entre las probabilidades de $P(A)$ y $P(B)$, y las probabilidades condicionales de A dado B y B dado A , $P(A|B)$ y $P(B|A)$, respectivamente. En su forma más común la relación es:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) P(A)}{P(B)}, \quad (3.3)$$

donde $P(A)$ es la probabilidad *a priori*, el grado inicial de creencia en A y $P(A|B)$ la probabilidad *a posteriori*, es el grado de creencia habiendo considerado B .

3.1.1. Estadística a nivel práctico

En la teoría de la probabilidad, en general, se empieza con un problema bien definido y se calculan los posibles resultados de un experimento específico. La estadística trata de resolver el problema inverso de usar los datos para inferir cuales son las leyes relevantes para nuestro experimento. Sin embargo, debe ser claro, que la estadística depende de los resultados de la teoría de probabilidad. Un problema básico que enfrenta un experimental es el de resumir sus datos de forma eficiente, usualmente esto radica en comprobar si los datos son consistentes con una hipótesis dada y usar los datos para determinar los parámetros de un modelo.

Estimación de parámetros: se requiere determinar, de forma eficiente y sin sesgos, el valor de un parámetro y su error. Sin un estimado del error, el experimento no tiene sentido. El error permite determinar la significación o importancia del resultado obtenido. Se dice que la estimación es eficiente si se deriva tanta información como sea posible de los datos. Por su parte si carece de sesgos significa que en promedio el método que usamos nos dará el resultado correcto.

Comprobación de hipótesis: a partir de los datos se pone a prueba una hipótesis sobre el comportamiento que los describe, el resultado de tal prueba debe estar acompañado con una declaración del nivel de confianza que se tiene. Se debe considerar si los datos son compatibles con una hipótesis, no solamente si son incompatibles con la falsedad de tal hipótesis.

Estas dos tareas se encuentran íntimamente relacionadas. Para poder determinar un parámetro se asumen algunas hipótesis como verdaderas; mientras que una hipótesis específica involucra un parámetro cuyo valor requiera ser determinado como parte del procedimiento de comprobación. En lo que nos concierne la estadística es una sirviente de la ciencia, nos interesa obtener las respuestas a nuestros problemas tan pronto como sea posible. No queremos gastar mucho tiempo¹ en un método muy sofisticado para resolver un problema, cuando un método más sencillo es casi tan bueno.

¹Nuestro propio tiempo así como el tiempo de una computadora.

Tipos de errores

Hay dos, fundamentalmente diferentes, tipos de errores asociados con cualquier procedimiento de medición, a saber: errores aleatorios (también llamados estadísticos) y errores sistemáticos. Los primeros vienen de la sencilla incapacidad que tienen los instrumentos de medición de dar mediciones infinitamente certeras, causados por fluctuaciones inherentes e impredecibles en las lecturas de los aparatos de medición. Los otros se encuentran en la índole de las equivocaciones; empujando el resultado siempre en la misma dirección. Usualmente si se identifica la causa de un error sistemático puede ser eliminada, a menos de que haya restricciones adicionales. Para el caso en que no se pueden eliminar, se deben estimar los errores sistemáticos, lo cual solo se puede hacer en el formalismo de la estadística bayesiana.

El error estadístico se reduce al tomar un gran número de mediciones², por lo tanto es una buena práctica repetir las mediciones hasta que el error estadístico tenga un tamaño similar al sistemático. Sin embargo, es primordial saber que las mediciones adicionales no disminuirán el error total por debajo del error sistemático. Un buen físico experimental debe minimizar y estimar de forma realista los errores aleatorios de su aparato experimental, además de reducir el efecto de los errores sistemáticos lo más posible [187].

Distribución normal y su utilidad

La forma general de la distribución gaussiana (también llamada distribución normal) en una variable x es:

$$f = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad (3.4)$$

La curva $f(x)$ es simétrica alrededor del valor $x = \mu$, conocido como la media, en donde f adquiere su máximo valor. El parámetro σ^2 , conocido como *varianza*³, caracteriza el ancho de la distribución y el factor $(\sigma\sqrt{2\pi})^{-1}$ es para normalizar la distribución, es decir: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$. Tal factor también resulta ser el máximo valor. Así pues, conforme σ disminuye la distribución se vuelve más angosta y aumenta su valor máximo. El área fraccionaria debajo de la curva delimitada por $\mu - \sigma \leq x \leq \mu + \sigma$ es 0.68. La función $f(x)$ representa la densidad de probabilidad, es decir, la probabilidad de que se tome un valor en el intervalo $(x, x + dx)$ es $P(x) dx$.

Para poder dar cierto tipo de descripción de una distribución gaussiana hace falta tener medidas del punto en el cual la distribución se centra y de su ancho. Para una muestra de N medidas separadas se define la *media muestral* y la *varianza muestral*:

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^N \frac{x_i}{N}; \quad s^2 = \sum_{i=1}^N \frac{(x_i - \mu)^2}{N} \quad (3.5)$$

Cabe resaltar que, en general, los valores verdaderos de la media, μ , y la varianza, σ^2 , no se conocen.

²Usualmente incrementar el número de medidas en un factor de n disminuirá el error estadístico en un factor de \sqrt{n} .

³A σ se le conoce como desviación estándar.

Así pues, la parte derecha de (3.5) no estima adecuadamente la varianza real, en vez se usa la fórmula:

$$s^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 \quad (3.5')$$

En consecuencia una medida de una cantidad no nos permite estimar la dispersión de valores, si el valor “verdadero” no es conocido. El factor $1/(N-1)$ es necesario para que s^2 sea un estimador imparcial de la varianza de la población σ^2 .

El teorema del límite central nos asegura que si se tiene un conjunto “grande” de n variables independientes x_i con media μ y varianza σ^2 entonces

$$f = \frac{1}{n} \sum x_i \quad (3.6)$$

tiende a una distribución gaussiana⁴ de media μ y varianza σ^2/n . Así pues la distribución de las variables x_i individuales es irrelevante. La única característica importante es que σ^2 debe ser finito. Si las x_i están distribuidas de forma gaussiana, entonces la distribución de la ecuación (3.6) también es gaussiana para todos los valores de $n \geq 1$.

Es común usar las propiedades de las distribuciones normales para interpretar la significación de resultados experimentales. El uso en tal contexto depende de los siguientes supuestos: el valor de la cantidad fue calculado correctamente, la magnitud del error fue calculada correctamente, la forma de la resolución experimental es tal que la aproximación a una gaussiana es razonable.

En una gran variedad de situaciones, el resultado de repetir un experimento muchas veces produce respuestas esparcidas, aproximadamente, a lo largo de una gaussiana; la aproximación se vuelve mejor si los errores individuales que contribuyen a la respuesta final son pequeños. Cuando esto es cierto, no tiene sentido hablar de un “máximo error posible”, ya que, estrictamente, sería infinito, no se podría distinguir un experimento preciso de uno erróneo. Por eso es costumbre citar a σ como la precisión del experimento.

Correlación

Dos variables aleatorias pueden ser tales que tengan cierta tendencia a cambiar juntas, si las variables muestran comportamiento similar se dice que están positivamente correlacionadas. Si por otra parte tienden a mostrar un comportamiento opuesto, están negativamente correlacionadas. Dos variables independientes no tienen correlación. Por comodidad se emplea la notación $\mathcal{E}(y) \equiv \bar{y}$, para el valor esperado de y , i.e. la media de y . La covarianza, es una medida de que tanto cambian dos variables juntas, para dos variables aleatorias reales x y y , la covarianza está dada por⁵:

$$\langle x, y \rangle \equiv \mathcal{E}[(x - \mathcal{E}[x])(y - \mathcal{E}[y])], \quad (3.7)$$

donde queda claro que la varianza es un caso especial de la covarianza, $\sigma_x^2 = \langle x, x \rangle$. De igual forma se verifica la propiedad $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$.

⁴para n pequeño la aproximación es mejor cerca del máximo de la distribución que en las colas.

⁵La notación usual para la covarianza es $\text{cov}(x, y)$, sin embargo para este trabajo se prefiere algo más compacto.

La forma general de la distribución gaussiana en dos variables correlacionadas esta dada por la expresión⁶:

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_x)^2}{\sigma_x^2} + \frac{(y-\mu_y)^2}{\sigma_y^2} - \frac{2\rho(x-\mu_x)(y-\mu_y)}{\sigma_x\sigma_y}\right]\right), \quad (3.8)$$

donde, como se espera, μ_x , σ_x , μ_y , σ_y , son la media de x , la desviación estándar de x , la media de y y la desviación estándar de y , respectivamente. Adicionalmente

$$\rho = \frac{\langle x, y \rangle}{\sigma_x\sigma_y},$$

se conoce como el *coeficiente de correlación* entre x y y , el cual cumple: $|\rho| \leq 1$. La figura 3.1 muestra una representación gráfica de las propiedades relevantes de dos variables correlacionadas. La covarianza entre dos variables se generaliza a n dimensiones con la matriz de covarianza \mathbf{M} , donde una componente en la posición i, j contiene la covarianza entre la variable aleatoria x_i y x_j :

$$M_{ij} \equiv \langle x_i, x_j \rangle \quad (3.9)$$

o de forma equivalente como el valor esperado del producto del vector aleatorio por su transpuesto:

$$\mathbf{M} = \mathcal{E}(\mathbf{x}\mathbf{x}^T) \quad (3.9')$$

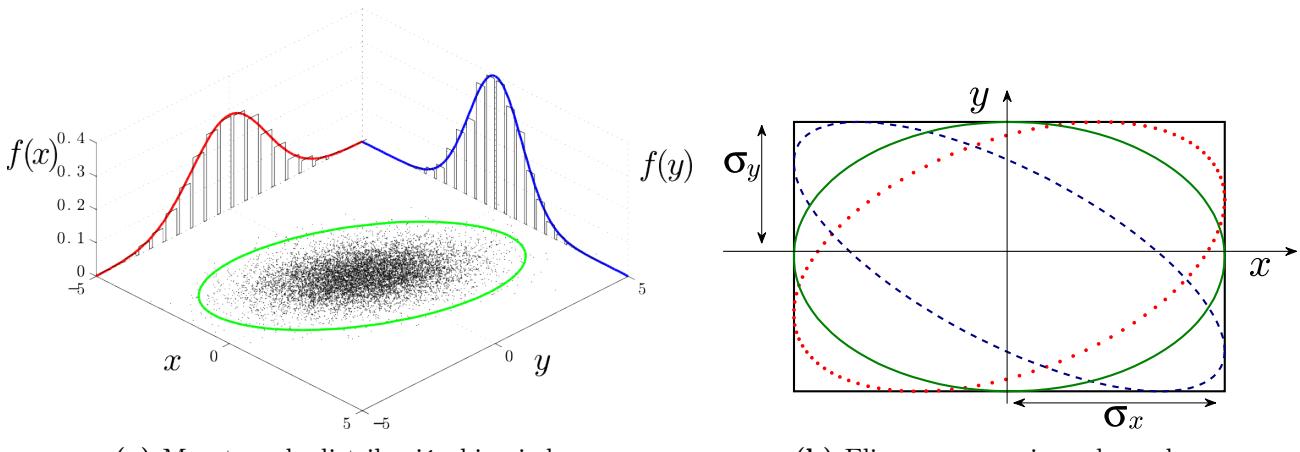


Figura 3.1: Distribución normal bivariada. **(a)** Se grafica una gran cantidad de muestras de una distribución normal multivariada, junto con la elipse de 3σ , las dos distribuciones marginales y los dos histogramas unidimensionales. (μ_x, μ_y) determinan el centro de la elipse en el espacio $x-y$; σ_x y σ_y dan una medida del ancho, la mitad de los lados de un rectángulo que circunscribe a la elipse; el coeficiente de correlación ρ determina la inclinación. **(b)** Dejando fijo σ_x y σ_y se muestran varias elipses: $\rho = 0$, elipse sólida; $\rho > 0$, elipse punteada; $\rho < 0$, elipse con guiones.

⁶ $f(x, y)$ es una densidad de probabilidad. La probabilidad de que x y y se encuentren en el intervalo $(x, x + dx)$ y $(y, y + dy)$ es $P(x, y) dx dy$.

Distribución normal multivariada

Si se tienen n variables aleatorias distribuidas normalmente, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, cuya matriz de covarianza, \mathbf{M} , es *positiva definida*⁷ la función de distribución normal multivariada no degenerada esta dada por:

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \sqrt{|\mathbf{M}|}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})\right), \quad (3.10)$$

donde $\boldsymbol{\mu}$ es el vector de medias y $|\mathbf{M}|$ el determinante de la matriz de covarianza. Para este caso se define la función de verosimilitud por:

$$\mathcal{L}(\bar{\mathbf{x}}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \sqrt{|\mathbf{M}|}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})^T \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})\right), \quad (3.11)$$

ahora $\bar{\mathbf{x}}$ puede depender de uno o más parámetros (en el caso de esta tesis $\sin^2 2\theta$ y Δm^2) y da el valor esperado para cada x_i . Si tomamos el logaritmo natural de la ecuación (3.11) obtenemos:

$$\ln(\mathcal{L}) = -\frac{n}{2}2\pi - \frac{1}{2} \ln(|\mathbf{M}|) - \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})^T \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}),$$

o equivalentemente:

$$-2 \ln(\mathcal{L}) = 2n\pi + \ln(|\mathbf{M}|) + (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})^T \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})$$

En un ajuste de los parámetros se busca la máxima verosimilitud, o equivalentemente para este caso, el mínimo del doble del negativo del logaritmo de la verosimilitud⁸, como el primer término del lado izquierdo de la ecuación pasada es constante puede ser ignorado. Se llega pues a la función que debe ser minimizada para un ajuste:

$$\mathcal{L} \equiv -2 \ln(\mathcal{L}) = \ln(|\mathbf{M}|) + (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})^T \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) \quad (3.12)$$

Veremos que \mathcal{L} tiene una gran utilidad en la determinación de intervalos de confianza de los parámetros de un modelo.

Intervalos y límites

Es común llegar a ideas erróneas sobre intervalos clásicos, provenientes de mal interpretarlos como intervalos bayesianos; por lo tanto una pequeña mención a los intervalos bayesianos esta muy a la orden. Supóngase que se quiere inferir algo sobre el parámetro μ , cuyo valor verdadero μ_v es desconocido. Para eso se hace una sola medida de la observable⁹ x , de tal forma que la función de densidad de probabilidad (f.d.p.) de obtener el valor x que depende del parámetro desconocido μ es conocida: a esta f.d.p. la llamamos $P(x|\mu)$. Después de una sola medida se obtiene x_0 . Al substituir en la f.d.p. tenemos $P(x_0|\mu)$, la cual, ahora, es una función de verosimilitud $\mathcal{L}(x_0|\mu)$. Apliquemos el teorema de Bayes, ecuación (3.3), para el valor verdadero μ_v :

$$P(\mu_v|x_0) = \mathcal{L}(x_0|\mu_v)P(\mu_v)/P(x_0) \quad (3.13)$$

⁷Una matriz real simétrica \mathbf{M} , de $n \times n$ es positiva definida si $\mathbf{z}^T \mathbf{M} \mathbf{z} > 0$; $\{\forall \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{z} \neq \emptyset\}$. A menos de que una variable sea combinación lineal exacta de las otras, las matrices de covarianza siempre son positivas definidas.

⁸Se puede asegurar tal equivalencia por que el logaritmo es una función monótonamente creciente.

⁹A pesar de que seguido sea el caso, x no necesita ser una medida de μ .

Un intervalo bayesiano o “intervalo creíble” $[\mu_1, \mu_2]$ correspondiente a un valor porcentual α de nivel de confianza puede ser construido de la f.d.p. *posteriori* requiriendo que

$$\int_{\mu_1}^{\mu_2} P(\mu_v | x_0) d\mu_v = \alpha. \quad (3.14)$$

Nótese que existe libertad en la elección de μ_1 , dependiendo de si se quiere un límite superior, inferior o un intervalo¹⁰ central.

La construcción de intervalos frecuentistas (o clásicos) de confianza fue definida por Jerzy Neyman [188]. Esta limita a declaraciones derivadas de la f.d.p. $P(x|\mu)$ y provee la opción preferida para presentar resultados de un experimento de forma objetiva. Sin embargo, es crucial no interpretarlos como intervalos bayesianos, es decir como declaraciones sobre $P(\mu_v | x_0)$. Mas bien, un intervalo de confianza $[\mu_1, \mu_2]$ es *miembro de un conjunto*, de tal forma que el conjunto tiene la propiedad que

$$P(\mu \in [\mu_1, \mu_2]) = \alpha. \quad (3.15)$$

Aquí μ_1 y μ_2 son funciones de la observable x , la ecuación (3.15) se refiere a los intervalos de confianza *variables* $[\mu_1, \mu_2]$ de un ensamble de experimentos con μ fijo. Para un conjunto de intervalos de confianza, la ecuación (3.15) se cumple para todos los μ permitidos. En particular, los intervalos contienen a la incógnita fija μ_v , en una fracción α de los experimentos. Esto es completamente diferente a la afirmación bayesiana del grado de creencia de que μ_v esta en $[\mu_1, \mu_2]$ es α .

Si la ecuación (3.15) es satisfecha adecuadamente se dice que el intervalo “cubre” μ con la confianza establecida o, equivalentemente, que el conjunto de intervalos tienen la “cobertura” correcta. Si existe un valor de μ para el cual $P(\mu \in [\mu_1, \mu_2]) < \alpha$, entonces se dice que el intervalo “subcubre” para ese μ , se tiene “subcobertura”. Subcobertura significativa para cualquier μ es una seria falla. Por otra parte si hay un valor de μ para el cual $P(\mu \in [\mu_1, \mu_2]) > \alpha$, entonces se dice que el intervalo “sobrecubre” para ese μ . Se dice que un intervalo es “conservador” si sobrecubre para algunos valores de μ y no subcubre ninguno. Si bien un intervalo conservador no se considera una falla tan grande como la subcobertura, tiene un gran costo: pérdida de la capacidad de rechazar hipótesis falsas.

La figura 3.2 ilustra la construcción de una “banda de confianza”, en una gráfica del parámetro μ contra la cantidad medida x . Para cada valor de μ , se examina $P(x|\mu)$ a lo largo de la línea horizontal a través de μ . Se selecciona un intervalo $[x_1, x_2]$ que es un subconjunto de esta linea tal que

$$P(x \in [x_1, x_2] | \mu) = \alpha. \quad (3.16)$$

A los intervalos $[x_1, x_2]$, se les llama “regiones de aceptación” para ese μ ; en la figura 3.2 se dibujan como segmentos de líneas horizontales. Para especificar de forma única las regiones de aceptación, se deben escoger criterios de selección. Se tiene la libertad de escoger el criterio, siempre y cuando *la elección no esté influenciada por los datos medidos*. Las elecciones más comunes son

$$P(x < x_1 | \mu) = 1 - \alpha, \quad (3.17)$$

que otorga “límites de confianza superiores” (que satisfacen $P(\mu < \mu_2) = 1 - \alpha$), y

$$P(x < x_1 | \mu) = P(x > x_2 | \mu) = (1 - \alpha)/2, \quad (3.18)$$

¹⁰Estos límites e intervalos no se limitan a una sola dimensión y en general describen un volumen n -dimensional.

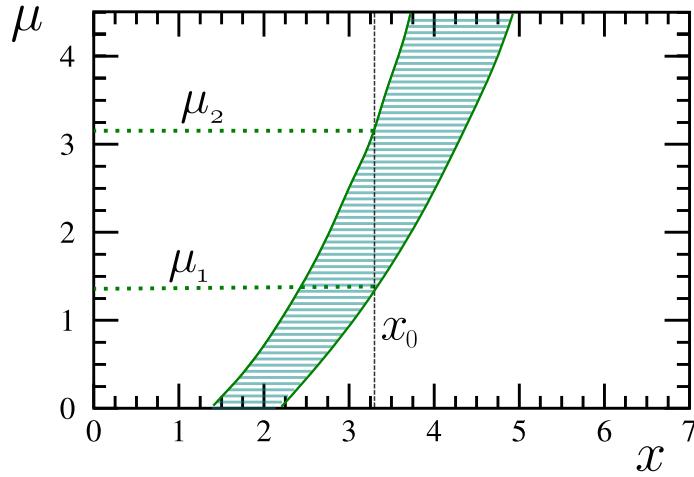


Figura 3.2: Construcción de una banda de confianza genérica y su uso. Para cada valor de μ , se dibuja un intervalo horizontal de aceptación $[x_1, x_2]$ tal que $P(x \in [x_1, x_2] | \mu) = \alpha$. Al hacer un experimento que mide x y obtiene el valor x_0 , se dibuja la línea punteada vertical que pasa por x_0 . El intervalo de confianza $[\mu_1, \mu_2]$ es la unión de todos los valores de μ para los cuales las correspondientes regiones de aceptación son interceptados por la línea vertical.

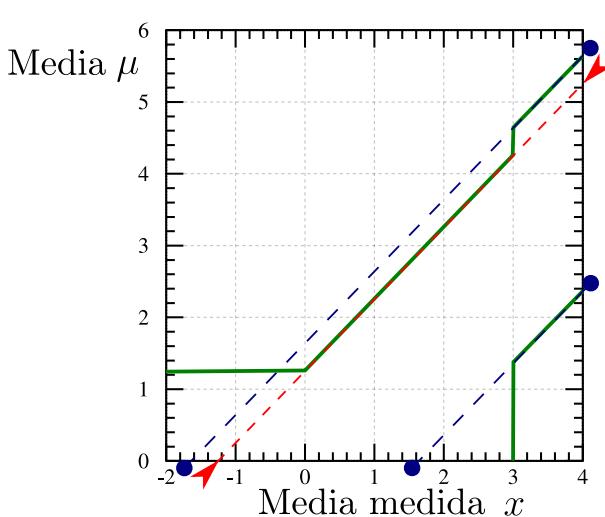
que otorga “intervalos de confianza centrales” (que satisfacen $P(\mu < \mu_1) = P(\mu > \mu_2) = (1 - \alpha)/2$). Para criterios más complicados para la elección de regiones de aceptación que satisfagan la especificación más general de la ecuación (3.16), un principio de ordenamiento necesita especificar que x ’s incluir en la región de aceptación.

La construcción se completa cuando se dibujan regiones de aceptación para cada valor μ . Al hacer un experimento que mide x y obtiene el valor x_0 , se dibuja una línea vertical que pasa por x_0 . El intervalo de confianza es la unión de todos los valores de μ para los cuales los correspondientes intervalos horizontales son interceptados por la línea vertical; típicamente este es simplemente un intervalo conexo $[\mu_1, \mu_2]$, aunque no tiene por qué ser así. Usualmente solo se presentan los extremos. Por construcción, la ecuación (3.15) es satisfecha para todos los μ ; por lo tanto es satisfecha por μ_v , cuyo valor es fijo pero desconocido.

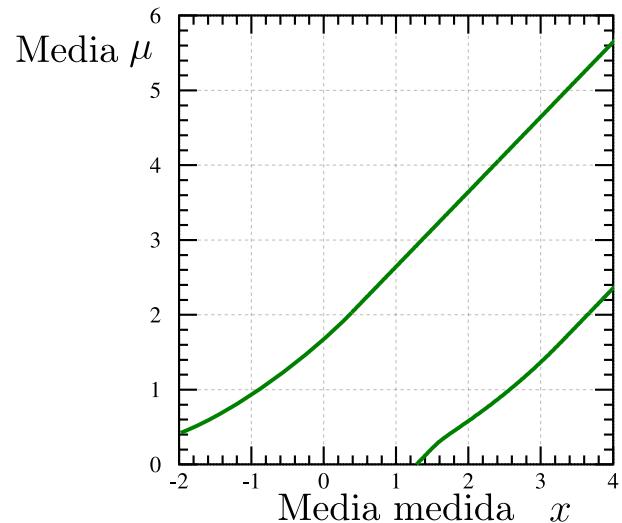
Consideremos el caso de una observable x que es simplemente el valor medido de μ , en un experimento con una resolución gaussiana con desviación unitaria conocida y para el cual solo los valores no negativos están físicamente permitidos (por ejemplo cuando μ es una masa). La figura 3.3a muestra varias bandas de confianza de 90 % N.C. para tal experimento. En línea punteada gris y con flechas en los extremos se muestra la banda que forma el límite superior¹¹, construido usando la ecuación (3.17); con línea punteada gris y con círculos en los extremos se muestra la banda que forma el intervalo de confianza central, construido usando la ecuación (3.18). Estos límites son apropiados *cuando se ha determinado, antes de realizar el experimento, que se publicará un límite superior o un intervalo de confianza central*, respectivamente. Sin embargo, se puede juzgar más sensible decidir, *basándose en los resultados del experimento*, si se debe publicar un límite superior o intervalo de confianza central.

Supongamos que la actitud de un físico con respecto a la publicación de resultados de un experimento diseñado para medir una señal pequeña es: publicar un límite superior si el resultado tiene un nivel de confianza menor a 99 % y un límite central en caso contrario. Esta clase de táctica es llamada “flip-

¹¹La segunda línea de la banda se encuentra en $x = +\infty$.



(a) Bandas de confianza implícitamente usadas.



(b) Bandas de confianza del método F-C.

Figura 3.3: Bandas de confianza de 90 % N.C. para la media de una gaussiana en unidades de la desviación media cuadrática. En la figura (a) se muestra la banda que forma el límite superior, en líneas punteadas y con flechas; la banda que forma el intervalo de confianza central en líneas punteadas y con círculos; y con línea sólida se ven las bandas que forman los intervalos de confianza implícitamente usados cuando la decisión está basada en los datos. En la figura (b) se aprecia la banda de confianza generada con el método de Feldman–Cousins; las cuales varían de forma “suave” entre un límite superior y un intervalo central, decidiendo por si solas qué clase de límite se debe usar; las regiones de aceptación nunca son vacías, lidian de mejor forma con las regiones no físicas y otorgan límites con cobertura correcta.

*flipping*¹² basándose en los datos. Además, cuando se mide un valor negativo para una cantidad físicamente positiva, se puede seguir la estrategia de pretender que se midió el valor cero cuando se cite el intervalo de confianza, lo cual introduce una tendencia conservadora.

En las curvas negras continuas de la figura 3.3a se examina el efecto que tiene tal táctica, exhibiendo las bandas de confianza. Para cada valor medido x se dibuja un segmento vertical $[\mu_1, \mu_2]$ que se citará como un intervalo de confianza. Después se examinará que regiones de aceptación horizontales implican esta colección de intervalos verticales. Por ejemplo, para $\mu = 2.0$, la región de aceptación tiene $x_1 = 2 - 1.28$ y $x_2 = 2 + 1.64$, solamente contiene 85 % de la probabilidad $P(x|\mu)$. Así pues, la ecuación (3.16) no es satisfecha, el intervalo subcubre de forma significativa. Para $1.36 < \mu < 4.28$ la cobertura es de 85 %. Es importante notar que las discontinuidades que tienen las bandas generadas siguiendo la táctica de *flip-flopping*, son ocasionadas precisamente por elegir los intervalos basándose en los resultados.

Insistiendo en la interpretación de los intervalos de confianza pensemos en la situación en que se mide un valor negativo, sin significado físico, para tal valor su intervalo de confianza es muy angosto. Supongamos, como es común, que en tal circunstancia se cita el intervalo de 90 % N.C. a partir del cero, $[0., 0.01]$. Esto no significa que hay una probabilidad de 90 % de encontrar el valor real en el intervalo $[0., 0.01]$, la interpretación bayesiana. Nótese que si uno mide $x < -1.8$ el resultado es insatisfactorio para las bandas en líneas punteadas, tanto para el límite superior como para el intervalo central, a pesar de que sí son intervalos de confianza con correcta interpretación estadística: al dibujar la línea vertical el intervalo de confianza es un conjunto vacío. Una forma alternativa de expresar esta

¹²Una frase usada para referirse a la acción de revertir una postura u opinión, en ocasiones de forma repetida.

situación sería permitir valores de μ no físicos cuando se construyen las bandas de confianza y luego decir que el intervalo de confianza se encuentra completamente contenido en la región no física. Lo cual requiere saber $P(x|\mu)$ para valores de μ no físicos, esto puede generar dificultades conceptuales. Cuando esta situación ocurre *se sabe* que se está en el 10 % del ensamble “equivocado”, al expresar intervalos de 90 % N.C. Se puede dar el resultado incorrecto, y el ensamble de intervalos tendrá la cobertura adecuada, pero no es muy consolador.

La construcción clásica de los intervalos de confianza presenta varios problemas, a saber:

- Los intervalos no dan cobertura correcta una fracción de las veces.
- Por lo menos una fracción de las veces los intervalos de confianza pueden ser conjuntos vacíos.
- Las regiones no físicas no se manejan de forma elegante.
- Los intervalos no varían de forma continua entre límites superiores y intervalos centrales, sino que cambian de forma discontinua dependiendo en la elección.

La figura 3.3b muestra las bandas de confianza que generan los intervalos de confianza del método Feldman–Cousins, el cual lida con los problemas de la construcción clásica de intervalos de confianza antes mencionados. Para valores grandes de x los intervalos de confianza $[\mu_1, \mu_2]$ son los mismos en las dos gráficas de la figura 3.3. Por debajo de $x = 1.28$ la cota inferior del nuevo intervalo de confianza es cero, así que automáticamente hay una transición de intervalos centrales y límites superiores. Por supuesto, no se está obligado a afirmar un descubrimiento no nulo solo por que el 90 % N.C. del intervalo no contiene al cero. Se debe entender que *los intervalos de confianza no indican un grado de creencia*.

El límite superior de 90 % N.C. en $x = 0$ del método F–C es $\mu_2 = 1.64$, que es el límite superior estándar de 95 % N.C. La desviación del límite estándar de 90 % N.C. refleja el hecho que los intervalos proveen cobertura frecuentista solo cuando la decisión de expresar un límite superior no se basa en los datos. El método de F–C repara la subcobertura ocasionada por el *flip-flopping*, tomando el compromiso necesario de aflojar los límites superiores alrededor de $x = 0$. Conforme x disminuye, los límites superiores decrecen de forma asintótica como $1/x$ para valores negativos grandes de x . Se habla con gran detalle de este método en la sección §3.6.

Aproximación parabólica

La función de verosimilitud se acerca a una gaussiana cuando el tamaño de la muestra es grande [189]. Bajo esta condición se obtiene una f.d.p. normalmente distribuida para los parámetros, con un intervalo tipo desviación estándar dado por la disminución de $e^{1/2}$ desde el máximo, para el caso de un solo parámetro. Tal intervalo cubre al parámetro ajustado con una probabilidad de 68 %. Así pues, el logaritmo de la verosimilitud es parabólico y el intervalo de confianza corresponde a la región dentro de la cual se disminuye un valor de $1/2$ desde el máximo. Es una buena práctica ver cual es la forma de la función de verosimilitud, para ver hasta que punto la aproximación parabólica sigue siendo razonable. Es frecuente encontrar declaraciones como “las mediciones excluyen … por cuatro desviaciones estándar”, las cuales deben ser interpretadas con precaución. Ya que, en muchos casos, su validez depende en la suposición de que el logaritmo de la verosimilitud permanece parabólico sobre un amplio rango del espacio. Despreciar el efecto de las colas puede llevar a conclusiones erróneas. En la figura 3.4 se muestran dos funciones de verosimilitud de un experimento de decaimiento en escala logarítmica, las dos son de parámetros equivalentes: la vida media y tasa de descomposición.

Se puede observar la semejanza que guardan con una parábola y el rango en el cual esta semejanza es razonable, también sirven para darse cuenta que verosimilitud se asimila más a una parábola.

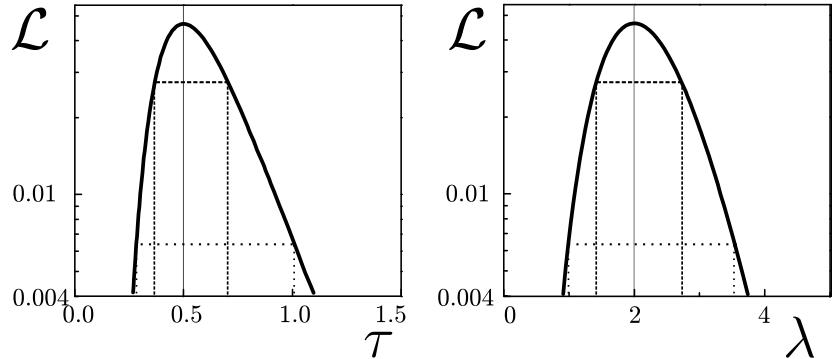


Figura 3.4: Función de verosimilitud para los parámetros vida media y tasa de descomposición en escala logarítmica. A partir del máximo se hacen cortes de $\Delta \ln \mathcal{L} = -1/2$ y $\Delta \ln \mathcal{L} = -2$ para determinar los intervalos de 1σ y 2σ , respectivamente. Para ambos casos la aproximación a una parábola es razonable, sin embargo se prefiere la verosimilitud de la tasa de descomposición para determinar los intervalos ya que es más simétrica.

En general los cortes, a partir del máximo, que determinan el intervalo de confianza están dados por la distribución χ^2 . Definida como

$$\chi_k^2 \equiv \frac{x^{\frac{k}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}}{2^{\frac{k}{2}} \Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} . \quad (3.19)$$

Si se tienen k variables aleatorias independientes x_i , cada una distribuida de forma normal con media μ_i y desviación estándar σ_i^2 , entonces la suma de sus cuadrados se distribuye como una χ^2 de k grados de libertad

$$\chi_k^2 \sim \sum_{i=1}^k \left(\frac{x_i - \mu_i}{\sigma_i} \right)^2 . \quad (3.20)$$

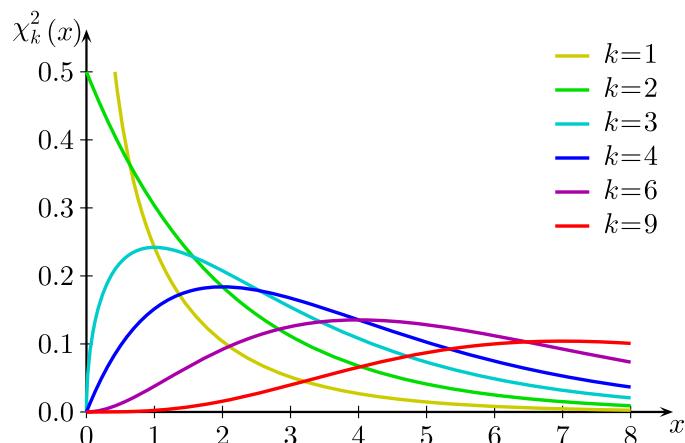


Figura 3.5: Función densidad de probabilidad de χ_k^2 . Curvas de distribuciones para distintos valores de grados de libertad k . La distancia al origen x_α , que contiene una fracción α del área de la curva, determina el corte que se debe hacer para obtener un intervalo de α N.C.

Para determinar el intervalo que cubre el mejor ajuste a $\alpha\%$ de nivel de confianza, se hace una excursión x_α desde el máximo. Donde x_α es la distancia, desde el origen, que contiene una fracción α del área de la curva χ^2_k correspondiente. Usualmente el número de grados de libertad k , es el número de parámetros que se ajustaron.

3.2. Formato y procesamiento de datos liberados por MiniBooNE

En esta sección se menciona cuales fueron los datos utilizados para los distintos análisis y se establece una convención para su uso. Estos se encuentran en línea, en la página del experimento [190, 191, 192, 193, 194, 195] y pueden ser descargados libremente. De igual forma se explicaran los algoritmos que son comunes a todos los análisis. Los histogramas y análisis correspondientes tienen distintos rangos de energía para los eventos observados de ν_e ($\bar{\nu}_e$): 475–3 000 Mev y 200–3 000 MeV, por lo tanto tendrán distinto número de intervalos (*bins*). En la tabla A.2 se presentan los archivos de los cuales provienen algunos de estos datos para el modo de antineutrinos.

- Número de *bins*, n_e , de energía reconstruida¹³ E_ν^{QE} para eventos de ν_e o $\bar{\nu}_e$, $n_e = 11(8)$, para $E > 200$ MeV ($E > 475$ MeV).
- Número de *bins*, n_μ , de energía reconstruida E_ν^{QE} para eventos de ν_μ o $\bar{\nu}_\mu$, $n_\mu = 8$.
- Arreglo unidimensional \mathbf{L}^{ν_e} con los límites de los *bins* en E_ν^{QE} (energía reconstruida del neutrino) para ν_e ($\bar{\nu}_e$ en modo de antineutrinos). Tiene 9 componentes cuando $E > 475$ MeV, es decir, define 8 *bins* y 12 componentes cuando $E > 200$ MeV, define 11 *bins*. Los límites usados fueron: $\mathbf{L}^{\nu_e} = (200, 300, 375, 475, 550, 675, 800, 950, 1100, 1300, 1500, 3000)$. Las tres primeras entradas se omiten para los análisis con $E > 475$ MeV.
- Arreglo unidimensional \mathbf{D}^{ν_e} ($\mathbf{D}^{\bar{\nu}_e}$) de eventos observados ν_e ($\bar{\nu}_e$) por *bin* de E_ν^{QE} . 8 u 11 componentes. Por ejemplo, los datos liberados en 2012 en modo de antineutrinos: $\mathbf{D}^{\bar{\nu}_e} = (122, 70, 65, 43, 57, 39, 37, 23, 26, 26, 43)$.
- Arreglo unidimensional \mathbf{L}^{ν_μ} con los límites de los *bins* en $0 \leq E_\nu^{QE} \leq 1900$ MeV para ν_μ ($\bar{\nu}_\mu$). Los límites que se usados fueron $\mathbf{L}^{\nu_\mu} = (0, 500, 700, 900, 1100, 1300, 1500, 1700, 1900)$.
- Arreglo unidimensional \mathbf{D}^{ν_μ} ($\mathbf{D}^{\bar{\nu}_\mu}$) de eventos observados ν_μ ($\bar{\nu}_\mu$) por *bin* de E_ν^{QE} . Correspondientemente siempre tiene 8 componentes. En 2012, modo de antineutrinos se tuvo $\mathbf{D}^{\bar{\nu}_\mu} = (9481, 13581, 11308, 7667, 4682, 2371, 985, 380)$.
- Arreglo unidimensional \mathbf{B}^{ν_e} ($\mathbf{B}^{\bar{\nu}_e}$) del fondo estimado de candidatos a eventos ν_e ($\bar{\nu}_e$) por *bin* de *enuqe*. 8 u 11 números reales. En 2012 modo de antineutrinos se tuvo $\mathbf{B}^{\bar{\nu}_e} = (90.289907, 53.077595, 57.0988, 32.937945, 43.159072, 34.174322, 36.383542, 28.737807, 28.750297, 20.098079, 42.697791)$.
- Arreglo unidimensional \mathbf{B}^{ν_μ} ($\mathbf{B}^{\bar{\nu}_\mu}$) del estimado de eventos ν_μ ($\bar{\nu}_\mu$) por *bin* de E_ν^{QE} . 8 números reales. En 2012 modo de antineutrinos se tuvo $\mathbf{B}^{\bar{\nu}_\mu} = (9998.9575, 13461.302, 11298.24, 7604.9604, 4331.8869, 2125.5371, 891.22261, 336.98711)$.
- Arreglo bidimensional $\mathbf{M}_{\text{frac}}^{3 \times 3}$ ($\overline{\mathbf{M}}_{\text{frac}}^{3 \times 3}$) de la matriz de covarianza fraccionaria con estructura de 3×3 bloques. A lo largo de la diagonal en intervalo de energía reconstruida: bloque de eventos de transmutación total, bloque del fondo estimado de eventos de ν_e ($\bar{\nu}_e$) y bloque del estimado

¹³ QE se refiere a cuasielástica.

de eventos ν_μ ($\bar{\nu}_\mu$). Los bloques fuera de la diagonal incluyen las correlaciones entre bloques. Incluye la incertidumbre sistemática para las tres muestras y la incertidumbre estadística para el fondo de ν_e ($\bar{\nu}_e$) y la estimación de ν_μ ($\bar{\nu}_\mu$). Dependiendo del rango de energía se tiene una matriz de: $24 \times 24 = (8+8+8) \times (8+8+8)$ o $30 \times 30 = (11+11+8) \times (11+11+8)$ componentes.

- Tupla de eventos MC de transmutación total $\nu_\mu \rightarrow \nu_e$ y/o $\bar{\nu}_\mu \rightarrow \bar{\nu}_e$. Con un renglón por evento y cuatro columnas con la siguiente información:

- Energía reconstruida E_ν^{QE} del neutrino (antineutrino) en MeV.
- Energía verdadera E_ν^V del neutrino (antineutrino) en MeV.
- Distancia verdadera x_ν^V en cm entre el punto de producción y detección del neutrino.
- Peso w para este evento de transmutación total, sin incluir ninguna probabilidad de oscilación en la ponderación y normalizando la ponderación de tal forma que la suma de todos los pesos dividida entre el total de eventos simulados, sea igual al número esperado de eventos de transmutación total a lo largo de E_ν^{QE} .

Los eventos de transmutación total son obtenidos de una predicción del flujo de ν_μ y $\bar{\nu}_\mu$ para la cual las interacciones de neutrinos son generadas asumiendo que el 100 % de los eventos oscilan a ν_e y $\bar{\nu}_e$, en vez de ν_μ y $\bar{\nu}_\mu$, y posteriormente reconstruidas. A partir de esta tupla se puede obtener la señal \mathbf{S}^{ν_e} ($\mathbf{S}^{\bar{\nu}_e}$) para cada *bin* de E_ν^{QE} , es decir la predicción de eventos de $\nu_\mu \rightarrow \nu_e$ ($\bar{\nu}_\mu \rightarrow \bar{\nu}_e$).

Primera observación: en la primera publicación de datos, correspondiente al modo de neutrinos de 2007 [190], no se hacen públicos los datos correspondientes a los ν_μ : eventos observados, fondo estimado, matriz de covarianza, etcétera. Estos datos son analizados usando el método de búsqueda por barrido unidimensional únicamente, en § 3.3 se describe como se hace este análisis y en § 4.1 se encuentran los resultados.

Segunda observación: las simulaciones para generar la matriz de covarianza y la tupla de eventos MC, con la que se genera la estimación de la señal, consideran distintos casos de transmutación total. En algunos casos la simulación contiene simultáneamente la transmutación total de neutrinos y antineutrinos mientras que en otros solo se considera un tipo de transmutación. Tal decisión esta justificada por la composición relativa de $\nu/\bar{\nu}$ para cada modo: en modo de neutrinos la componente de antineutrinos es pequeña mientras que en modo de antineutrinos la componente de neutrinos es grande. Las tablas 2.2a y 2.2b tienen los detalles de la composición del haz. La tabla 3.1 especifica el caso de transmutación total usado en las simulaciones.

	Individual	Combinado
Modo ν	ν oscilan	ν oscilan
	$\bar{\nu}$ no oscilan	$\bar{\nu}$ no oscilan
Modo $\bar{\nu}$	ν no oscilan	ν oscilan
	$\bar{\nu}$ oscilan	$\bar{\nu}$ oscilan

Tabla 3.1: Transmutación permitida en las simulaciones para los distintos análisis.

Construcción de la matriz de covarianza

La matriz de covarianza es liberada por la colaboración lista para usarse, sin embargo conviene tener una idea de como se forma. Los errores sistemáticos asociados con la predicción del flujo de neutrinos, el modelado del detector y las secciones eficaces de los neutrinos son estimados como se describe en [177]. Las incertidumbres sistemáticas en el flujo son determinadas por las incertidumbres de las mediciones de la producción de partículas (§ 2.3.1), las incertidumbres de las secciones eficaces (§ 2.4.1 y § 2.4.2) son determinadas con datos de MiniBooNE y fuentes externas teóricas y experimentales, las incertidumbres del modelo del detector (§ 2.4.3) también están determinadas por datos de MiniBooNE. La matriz de covarianza es una suma de matrices de cada una de las fuentes de incertidumbre:

$$M_{ij} = M_{ij}^{\Phi(\pi^+)} + M_{ij}^{\Phi(\pi^-)} + M_{ij}^{\Phi(K^+)} + M_{ij}^{\Phi(K_L^0)} + M_{ij}^{\text{haz}} + M_{ij}^{\sigma} + M_{ij}^{\text{NC}\pi^0} + M_{ij}^{\text{exteriores}} + M_{ij}^{\text{MO}}, \quad (3.21)$$

cada componente esta asociada a la matriz de covarianza de un conjunto de parámetros de simulación subyacentes, se obtienen al muestrear el espacio de parámetros multivariado gaussiano que implica esta covarianza. Los primeros cuatro términos son de las incertidumbres que provienen del flujo de distintas partículas, luego se tiene la incertidumbre del haz, las secciones eficaces de neutrinos, los eventos de corriente neutra, los eventos que ocurren fuera del tanque y por último el modelo óptico.

Es de mucha utilidad definir al vector de estimación de eventos, $\mathbf{Q}^{3 \times 1}$, compuesto de tres vectores:

$$\mathbf{Q}^{3 \times 1} = (\mathbf{S}^{\nu_e}, \mathbf{B}^{\nu_e}, \mathbf{B}^{\nu_\mu}) \quad (3.22)$$

El vector de estimación de eventos para antineutrinos, $\overline{\mathbf{Q}}^{3 \times 1}$, se define de forma análoga.

La matriz de covarianza fraccionaria $\mathbf{M}_{\text{frac}}^{3 \times 3}$ tiene esa estructura debido a la forma en que se calculan separadamente las incertidumbres de las distintas partes que la componen. Estas partes son: la señal de eventos ν_e , el fondo de eventos ν_e y la estimación de eventos ν_μ , por cada *bin* de E_ν^{QE} . La utilidad de la matriz fraccionaria es que se puede normalizar a cualquier cantidad de POT¹⁴ y ajustarse para que contenga la información de cualquier punto en el espacio de parámetros ($\sin^2 2\theta, \Delta m^2$). Lo primero que se tiene que hacer es construir la matriz total, es decir normalizar la matriz a la cantidad de eventos observados correspondientes al número de POT. Posteriormente se debe juntar la información de las distintas componentes, en la práctica uno no puede diferenciar entre un evento ν_e de señal y uno de fondo, se dice que la matriz se “colapsa”. La matriz total se construye multiplicando a la matriz fraccionaria por el vector de estimación:

$$M_{ij}^{\text{Total}} = \begin{cases} (Q_i^{3 \times 1} Q_j^{3 \times 1}) \cdot M_{ij}^{\text{frac}} + \delta_{ij} S_i^{\nu_e}; & i, j = 1, \dots, n_e \\ (Q_i^{3 \times 1} Q_j^{3 \times 1}) \cdot M_{ij}^{\text{frac}}; & \text{en caso contrario} \end{cases} \quad (3.23)$$

se le suma una contribución de error estadístico, correspondiente a la predicción de los eventos de señal, a los componentes de la diagonal del bloque superior izquierdo¹⁵.

A esta altura la matriz total $\mathbf{M}_{\text{Total}}^{3 \times 3}$, tiene una estructura de 3×3 bloques, de arriba a abajo los bloques de la diagonal tienen la covarianza (sistemática y estadística) de la señal de ν_e , S^{ν_e} ; el fondo

¹⁴Ver sección § 2.1.1.

¹⁵Ver nota 8 del capítulo 1.

de ν_e , \mathcal{B}^{ν_e} ; y la estimación de ν_μ , \mathcal{B}^{ν_μ} . Los bloques fuera de la diagonal tienen las correspondientes correlaciones: $\langle \mathcal{B}^{\nu_e}, \mathcal{S}^{\nu_e} \rangle$, $\langle \mathcal{S}^{\nu_e}, \mathcal{B}^{\nu_e} \rangle$; $\langle \mathcal{B}^{\nu_\mu}, \mathcal{S}^{\nu_e} \rangle$, $\langle \mathcal{S}^{\nu_e}, \mathcal{B}^{\nu_\mu} \rangle$; y $\langle \mathcal{B}^{\nu_\mu}, \mathcal{B}^{\nu_e} \rangle$, $\langle \mathcal{B}^{\nu_e}, \mathcal{B}^{\nu_\mu} \rangle$ ¹⁶.

Para colapsar se suman uno a uno las componentes de los bloques. Se suman las componentes de los 2×2 bloques superiores para formar el bloque superior de la matriz colapsada. Los dos bloques superiores de la última columna, así como los dos primeros bloques de la última fila, se suman para formar los bloques diagonales de la matriz colapsada. El bloque inferior izquierdo se traspasa como esta, para formar el bloque inferior izquierdo de la matriz colapsada. Logrando obtener una matriz simétrica de 2×2 bloques, $\mathbf{M}^{2 \times 2}$. Se puede ver una representación gráfica del proceso de colapso en la figura 3.7. En lo subsecuente se referirá a la matriz de covarianza total colapsada simplemente como la *matriz de covarianza*¹⁷ \mathbf{M} . La matriz de covarianza para antineutrinos, $\bar{\mathbf{M}}$, se construye de forma análoga.

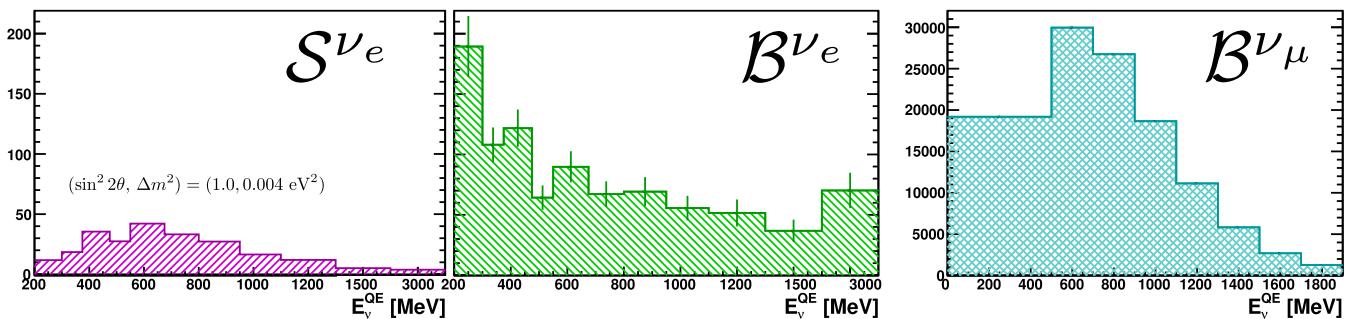


Figura 3.6: Distribuciones de E_ν^{QE} de los datos de señal, fondo de ν_e y estimación de ν_μ . Notar las escalas de las distribuciones: decenas de eventos de señal, cientos de eventos de fondo ν_e y decenas de miles de eventos ν_μ .

$$\mathbf{M}_{\text{Total}}^{3 \times 3} = \left(\begin{array}{ccc|cc} \mathcal{S}^{\nu_e} & \langle \mathcal{S}^{\nu_e}, \mathcal{B}^{\nu_e} \rangle & & \langle \mathcal{S}^{\nu_e}, \mathcal{B}^{\nu_\mu} \rangle & \\ \langle \mathcal{B}^{\nu_e}, \mathcal{S}^{\nu_e} \rangle & \mathcal{B}^{\nu_e} & & \langle \mathcal{B}^{\nu_e}, \mathcal{B}^{\nu_\mu} \rangle & \\ & & \hline \langle \mathcal{B}^{\nu_\mu}, \mathcal{S}^{\nu_e} \rangle & \langle \mathcal{B}^{\nu_\mu}, \mathcal{B}^{\nu_e} \rangle & \mathcal{B}^{\nu_\mu} \end{array} \right) \xrightarrow{\text{colapso}} \left(\begin{array}{c|cc} \mathcal{S}^{\nu_e} + \mathcal{B}^{\nu_e} & \langle \mathcal{S}^{\nu_e}, \mathcal{B}^{\nu_\mu} \rangle & \\ \hline \langle \mathcal{B}^{\nu_\mu}, \mathcal{S}^{\nu_e} \rangle & \langle \mathcal{B}^{\nu_\mu}, \mathcal{B}^{\nu_\mu} \rangle & \mathcal{B}^{\nu_\mu} \\ \hline \langle \mathcal{B}^{\nu_\mu}, \mathcal{B}^{\nu_e} \rangle & & \end{array} \right)$$

Figura 3.7: Matriz de covarianza y su colapso. Multiplicando a la matriz fraccionaria por los vectores correspondientes se obtiene la matriz total, esta tiene 3×3 bloques: los bloques diagonales tienen la incertidumbre de la señal, del fondo y estimación de neutrinos del muón; los bloques fuera de la diagonal tienen las correspondientes correlaciones. En el texto se describe el procedimiento para obtener la matriz total colapsada.

Observación: la matriz de covarianza es simétrica y positiva definida, por lo cual solo hace falta procesar los elementos correspondientes a la diagonal inferior de la misma para realizar todos los análisis que se pretenden hacer, calcular el determinante y la inversa de la matriz. La implementación computacional refleja y aprovecha esta característica. En el apéndice A se habla sobre la implementación computacional y las consideraciones que se tomaron en cuenta.

¹⁶Se reconoce el ligero abuso de notación, pero debe ser claro que $\langle \mathcal{X}, \mathcal{Y} \rangle$ define el bloque que contiene la covarianza entre la matriz de covarianza \mathcal{X} y la matriz de covarianza \mathcal{Y} .

¹⁷Es común ver en la literatura de análisis de datos que también se le llame matriz de error.

De forma similar también se colapsa el vector de estimación, en lo subsecuente \mathbf{Q} se refiere al vector:

$$\mathbf{Q} = ((\mathbf{S}^{\nu_e} + \mathbf{B}^{\nu_e}), \mathbf{B}^{\nu_\mu}) \quad (3.24)$$

En lo subsecuente el vector de datos \mathbf{D} es aquel formado al juntar los vectores de datos de ν_e y ν_μ :

$$\mathbf{D} = (\mathbf{D}^{\nu_e}, \mathbf{D}^{\nu_\mu}). \quad (3.25)$$

Los vectores de estimación de eventos y datos para antineutrinos, $\overline{\mathbf{Q}}$ y $\overline{\mathbf{D}}$, respectivamente, se definen de forma análoga.

3.2.1. Generalidades de los análisis realizados

En este trabajo se analiza el caso de oscilación de dos neutrinos en el vacío, lo cual, como se mencionó antes, es una buena aproximación al caso general. Se transcribe aquí la fórmula de la probabilidad de oscilación para dos neutrinos en el vacío, ver § 1.4.1:

$$P(\nu_\mu \rightarrow \nu_e) = \sin^2 2\theta \sin^2 \left(\frac{1.27 \Delta m^2 L}{E_\nu} \right), \quad (3.26)$$

donde los parámetros libres que debe determinar un experimento de oscilación son: θ y Δm^2 , sin embargo por conveniencia en los ajuste y en la forma de presentar la información el espacio de parámetros es $(\sin^2 2\theta, \Delta m^2)$. Por otra parte nótese la dependencia en el coeficiente $\frac{L}{E_\nu}$, la distancia viajada por los neutrinos entre su energía.

Para los valores de $\Delta m_{21}^2 \sim 10^{-5}$ eV² y $\Delta m_{31}^2 \sim 10^{-3}$ eV², medidos por experimentos solares y atmosféricos (§ 1.4.7), respectivamente, el cociente $L/E \sim 1$ de MiniBooNE satisface:

$$\frac{\Delta m_{31}^2 L}{2E} \ll 1, \quad \frac{\Delta m_{21}^2 L}{2E} \ll 1. \quad (3.27)$$

Adicionalmente, el dominio de escalas de masa observado cumple:

$$\Delta m_{21}^2 \ll \Delta m_{31}^2 \ll \Delta m_{41}^2, \quad (3.28)$$

donde $\Delta m_{41}^2 \sim 1$ eV² sería la diferencia que se tendría si la evidencia de LSND implicara la existencia de algún neutrino estéril. Se puede ver que, como (3.27) y (3.28) se satisfacen, la probabilidad de oscilación de ν_α a ν_β , para el caso de 3 + 1 neutrinos, es:

$$P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta) = \sin^2 2\theta \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{41}^2 L}{4E_\nu} \right), \quad (3.29)$$

es decir, es equivalente a la probabilidad de oscilación de dos neutrinos (1.5), solamente que ahora

$$\sin^2 2\theta = 4 |U_{\alpha 4}|^2 |U_{\beta 4}|^2,$$

con las correspondientes entradas de una matriz de mezcla de 4×4 , U_{e4} y $U_{\mu 4}$. Es decir, el mismo proceso de ajuste para la fórmula de oscilación de dos neutrinos sirve para probar la hipótesis de la oscilación de 3 + 1 neutrinos.

Para todos los análisis que se presentan en este trabajo el espacio de parámetros $(\sin^2 2\theta, \Delta m^2)$ se restringe a la región $[[3 \times 10^{-4}, 1] \times [1 \times 10^{-2} \text{ eV}^2, 1 \times 10^2 \text{ eV}^2]]$. MiniBooNE esta diseñado para buscar oscilaciones a escalas de $\sim 1 \text{ eV}^2$, si bien $\sin^2 2\theta$ esta acotado por $\sin^2 2\theta \leq 1$, puede tener valores menores, por su parte Δm^2 , en principio, puede tener valores más grandes o chicos. Sin embargo es precisamente esta región a la cual es sensible el experimento, por eso es que para los ajustes es suficiente limitarse a esa área. Esta región ha sido dividida en una malla discreta en escala logarítmica de $[190 \times 190]$, con la excepción de los resultados de neutrinos de 2007 cuya malla es de $[200 \times 100]$.

3.3. Método de búsqueda por barrido unidimensional

Con este método se trajeron los resultados de los datos del modo de neutrinos liberados en 2007, los cuales se presentan en § 4.1, y los liberados en 2009, los cuales se presentan en § 4.2. En el primer caso la restricción proveniente de la muestra de ν_μ esta incluida en la predicción de ν_e , mientras que en el segundo caso la restricción se realiza al incluir los datos de ν_μ en el ajuste. En ambos casos el rango de energía es 475–3 000 MeV.

El estadístico usado para este método es una χ^2 , para los datos de 2007, se define como:

$$\chi^2 (\sin^2 2\theta, \Delta m^2) = \sum_{i,j=1}^{n_e} (D_i^{\nu_e} - (B_i^{\nu_e} + S_i^{\nu_e})) \mathbf{M}_{ij}^{-1} (D_j^{\nu_e} - (B_j^{\nu_e} + S_j^{\nu_e})), \quad (3.30)$$

donde \mathbf{D}^{ν_e} es el número observado de eventos candidatos a ν_e solamente, \mathbf{B}^{ν_e} el número de eventos de fondo esperado según la simulación y \mathbf{S}^{ν_e} es el número de eventos de señal predicho; en *bins* de E_ν^{QE} . Todos estos tienen $n_e = 8$ componentes. Por su parte \mathbf{M}^{-1} es la inversa de la matriz de covarianza, evaluada en $(\sin^2 2\theta, \Delta m^2)$ y tiene 8×8 componentes. Recordemos que \mathbf{S}^{ν_e} depende de la fórmula de probabilidad de oscilación, dada por la ecuación (3.26), es decir que también es función de $(\sin^2 2\theta, \Delta m^2)$. Para determinar la señal en cada punto se usa la tupla de eventos MC de transmutación total descrita en § 3.2, la cual cuenta con la información necesaria para generar la distribución de E_ν^{QE} de la señal para cualquier punto del espacio de parámetros. El número de grados de libertad (g.l.) es igual al número de *bins* menos el número de parámetros libres $n_e - 2 = 6$.

Por otra parte la definición que se usó para los datos de 2009, en los cuales se usa el espectro de E_ν^{QE} de los ν_μ como parte del ajuste es:

$$\chi^2 (\sin^2 2\theta, \Delta m^2) = \sum_{i,j=1}^{n_e+n_\mu} (D_i - Q_i) \mathbf{M}_{ij}^{-1} (D_j - Q_j), \quad (3.31)$$

donde el vector \mathbf{D} contiene los datos observados de ν_e y ν_μ , ecuación (3.25), formado al anexar los vectores correspondientes uno al lado del otro; \mathbf{Q} contiene la predicción del número de eventos de fondo más la señal de ν_e en el primer segmento, y la predicción de ν_μ en el segundo segmento, ecuación (3.24). Los vectores \mathbf{D} y \mathbf{Q} tienen $n_e + n_\mu = 8 + 8 = 16$ componentes, por su parte se tienen $n_e + n_\mu - 2 - 1 = 13$ g.l., donde al número de *bins*, además de restarle el número de parámetros, se le quita un grado extra debido a la normalización que da la muestra de ν_μ a la simulación, § 2.4.1. Ahora la matriz de 16×16 , \mathbf{M} , contiene además de las correlaciones entre los *bins* de ν_e , las correlaciones entre los *bins* de ν_μ , y las correlaciones entre los *bins* de ν_e y ν_μ . Esta matriz tiene la estructura de la matriz colapsada de la figura 3.7.

La búsqueda por barrido unidimensional es un método iterativo. Para un valor fijo de $(\Delta m^2)_j$ en el rango de interés $[1 \times 10^{-2} \text{ eV}^2, 1 \times 10^2 \text{ eV}^2]$ se busca el valor de $x^{\{0\}} = (\sin^2 2\theta)^{\{0\}}$ que minimiza¹⁸

$$\chi_j^2 \{0\} \equiv \chi^2(x, (\Delta m^2)_j; \mathbf{M}^{\{0\}}),$$

donde $\mathbf{M}^{\{0\}}$ representa la matriz de covarianza calculada con señal nula. La pareja $(x^{\{0\}}, (\Delta m^2)_j)$ genera la señal usada para recalcular una matriz $\mathbf{M}^{\{1\}}$. A continuación se busca un nuevo valor $x^{\{1\}} = (\sin^2 2\theta)^{\{1\}}$ que minimice

$$\chi_j^2 \{1\} \equiv \chi^2(x, (\Delta m^2)_j; \mathbf{M}^{\{1\}}).$$

Este procedimiento continúa hasta que la diferencia entre los mínimos de iteraciones sucesivas sea menor a una tolerancia de $\varepsilon \sim 1 \times 10^{-2}$, es decir:

$$\left| \chi_j^2 \{k\} - \chi_j^2 \{k-1\} \right| < \varepsilon.$$

La función χ_j^2 , correspondiente a la última iteración, se utiliza para determinar el límite de exclusión en $\sin^2 2\theta$ para el valor $(\Delta m^2)_j$. Para cierto nivel de confianza $X\%$ se obtiene el valor $\sin^2 2\theta_{X\%}$ que satisface¹⁹:

$$\chi_j^2(\sin^2 2\theta_{X\%}) = \chi_j^2 \text{ min} + \Delta\chi^2_{X\%},$$

donde los valores de $\Delta\chi^2_{X\%}$ están dados por una distribución χ^2 de un solo lado y un grado de libertad y se muestran en la tabla 3.2a, ver la definición en (3.19). En la figura 3.8 se muestran las excursiones que se hacen desde el mínimo para obtener los límites de exclusión para un valor determinado de $(\Delta m^2)_j$. Dados los resultados consistentes con una señal nula, se decidió, *a posteriori*, usar tales valores de $\Delta\chi^2$.

$\Delta\chi^2$	Nivel de Confianza (N.C.)		$\Delta\chi^2$	Nivel de Confianza (N.C.)	
1.64	90.00 %	1.28 σ	2.28	68.00 %	0.99 σ
4.00	97.72 %	2.00 σ	4.60	90.00 %	1.64 σ
9.00	99.86 %	3.00 σ	5.99	95.00 %	1.96 σ
—	—	—	9.21	99.00 %	2.57 σ

(a) Valores correspondientes a una distribución χ^2 de un solo lado y un grado de libertad.
 (b) Valores correspondientes a una distribución χ^2 de dos grados de libertad.

Tabla 3.2: Valores de $\Delta\chi^2$ para determinar regiones de confianza. (a) Correspondientes a una distribución χ^2 de un solo lado y un grado de libertad, (b) para una distribución χ^2 de dos grados de libertad.

Habiendo determinado los límites de exclusión se prosigue al siguiente valor $(\Delta m^2)_{j+1}$, con el cual se repite el proceso antes descrito. Esto se hace para todos los valores de $(\Delta m^2)_j$ en la malla. Al tomar la unión de todas las parejas $(\sin^2 2\theta_{X\%}, (\Delta m^2)_j)$ se forma el límite de exclusión de $X\%$ nivel de confianza (N.C.) en el espacio $(\sin^2 2\theta, \Delta m^2)$. Se construyen tantos límites de exclusión como se

¹⁸La búsqueda se hace sobre la malla predefinida de $\sin^2 2\theta$, § 3.2.1.

¹⁹Para obtener $\sin^2 2\theta_{X\%}$ se usa interpolación lineal, por que demostró ser suficientemente buena.

estime conveniente²⁰. El algoritmo 3.1 presenta la forma de implementar el método de la búsqueda por barrido unidimensional.

Observaciones: la iteración cero usa una matriz $\mathbf{M}^{\{0\}}$ con señal nula, es decir la matriz total se construye con un vector $\mathbf{Q}^{3 \times 1 \{0\}} = (\emptyset, \mathbf{B}^{\nu_e}, \mathbf{B}^{\nu_\mu})$. Por su parte la k -ésima iteración usa una matriz $\mathbf{M}^{\{k\}}$, la cual proviene de una matriz total construida con la señal del mejor ajuste de la iteración anterior $\mathbf{S}^{\{k\}}(x^{\{k-1\}}, (\Delta m^2)_j)$, es decir se usa $\mathbf{Q}^{3 \times 1 \{k\}} = (\mathbf{S}^{\{k\}}, \mathbf{B}^{\nu_e}, \mathbf{B}^{\nu_\mu})$ para construir $\mathbf{M}^{\{k\}}$, ver ecuación (3.23).

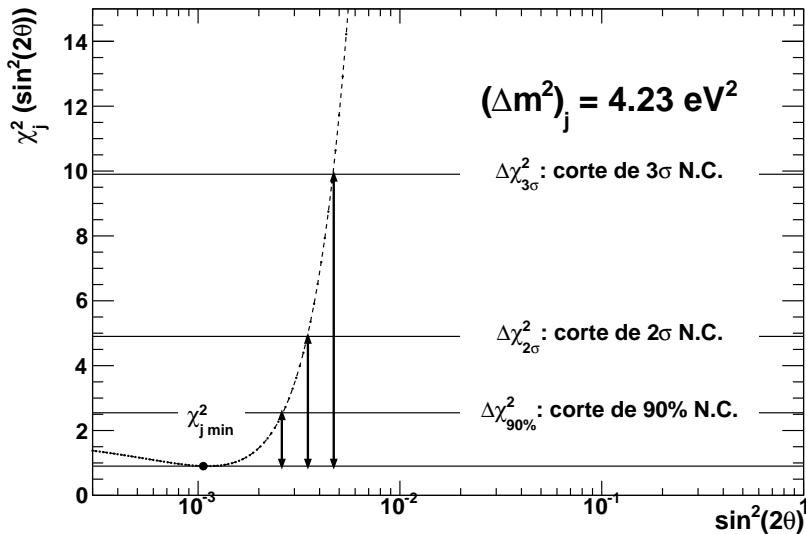


Figura 3.8: Gráfica de $\chi^2_j(\sin^2 2\theta)$ para un valor fijo de $(\Delta m^2)_j$. Excusiones desde $\chi^2_{j \min}$ para determinar los límites de exclusión con el método de la búsqueda por barrido unidimensional. Se muestran 3 cortes, $\Delta\chi^2_{90\%}$, $\Delta\chi^2_{2\sigma}$, y $\Delta\chi^2_{3\sigma}$, con los cuales se determinan los límites de exclusión al $\sin^2 2\theta_{90\%}$, $\sin^2 2\theta_{2\sigma}$, y $\sin^2 2\theta_{3\sigma}$; respectivamente.

Para evaluar los estadísticos correspondientes, ecuaciones (3.30) y (3.31) para los datos de 2007 y 2009, respectivamente, se usa la señal para cada punto $(\sin^2 2\theta, (\Delta m^2)_j)$; $\sin^2 2\theta \in [3 \times 10^{-4}, 1]$, es decir, solo la matriz se mantiene fija. De esa forma la inversión de la matriz, la operación más costosa, solo se hace una vez por iteración. Por la misma razón se está exento de calcular el determinante de la matriz, término faltante en las ecuaciones (3.30) y (3.31) para ser equivalentes a la más general fórmula de verosimilitud (3.12). Usualmente se converge en la segunda o tercera iteración.

La decisión de usar un método de búsqueda por barrido unidimensional esta justificada por que el resultado obtenido es consistente con una señal nula, i.e. con la ausencia de oscilaciones de neutrinos. De forma tal que la dependencia de la χ^2 en los parámetros de oscilación a través \mathbf{M} puede despreciarse. Dada la aparente señal nula, este método permite establecer límites más restrictivos que un barrido bidimensional. El método responde a la pregunta: *Si los datos observados realmente provienen de una señal nula ¿Cuál es el tamaño de la región excluida?* Evidentemente en caso de una señal considerable, este método no es apropiado.

Como se mencionó en §3.1.1, puesto que la decisión de usar un límite superior fue basada en los datos la búsqueda por barrido carece de cobertura correcta, concretamente este método otorga intervalos de

²⁰Conforme se alejan del punto de mejor ajuste, los límites pierden veracidad.

subcobertura. Más aún no es un método robusto, ya que es incapaz de distinguir entre un valor muy probable de Δm^2 y uno poco probable, ya que trabaja para Δm^2 fijos. Implícitamente se considera una aproximación gaussiana lo que permite prescindir de la construcción completa de las regiones de confianza de Neyman. En la sección § 3.6 se compara este método con los demás.

Entrada: Datos y fondo de ν_e y ν_μ (donde aplique), matriz de covarianza fraccionaria y tupla de simulación MC para la señal.

Salida : Tupla con límites de exclusión.

Declaración e inicialización de variables;

```

for  $(\Delta m^2)_j = 1 \times 10^{-2} \text{ eV}^2$  to  $1 \times 10^2 \text{ eV}^2$  do
     $k = 0;$ 
    El siguiente loop es para encontrar la posición y el valor mínimo de  $\chi^2$ , para cada  $(\Delta m^2)_j$ ;
    while  $|\chi_{\min}^{2 \{k\}} - \chi_{\min}^{2 \{k-1\}}| > \varepsilon$  do
        if  $k = 0$  then
             $\mathbf{M}^{\{0\}} \leftarrow \text{Build}(\mathbf{M}_{\text{frac}}, \mathbf{Q}^{3 \times 1 \{0\}}); \backslash\backslash$  matriz de covarianza con señal nula;
            Invert( $\mathbf{M}^{\{0\}}$ );
            for  $x = 3 \times 10^{-4}$  to 1. do
                 $| \text{FindMinimum}(\chi^2 \{0\}(x, (\Delta m^2)_j; \mathbf{M}^{-1 \{0\}}));$ 
            end
             $\rightarrow \chi_{\min}^{2 \{0\}}; \rightarrow x^{\{0\}};$ 
        else
             $\mathbf{M}^{\{k\}} \leftarrow \text{Build}(\mathbf{M}_{\text{frac}}, \mathbf{Q}^{3 \times 1 \{k\}}); \backslash\backslash$  matriz de covarianza con señal de la iteración pasada;
            Invert( $\mathbf{M}^{\{k\}}$ );
            for  $x = 3 \times 10^{-4}$  to 1. do
                 $| \text{FindMinimum}(\chi^2 \{k\}(x, (\Delta m^2)_j; \mathbf{M}^{-1 \{k\}}));$ 
            end
             $\rightarrow \chi_{\min}^{2 \{k\}}; \rightarrow x^{\{k\}};$ 
        end
         $k ++;$ 
    end
     $\rightarrow \chi_j^2;$ 
    Ahora se encuentran los límites de exclusión.;
     $\sin^2 2\theta_{90\%} \leftarrow \text{Interpolate}(\chi_j^2, \chi_{j \min}^2, \Delta\chi_{90\%}^2); \sin^2 2\theta_{2\sigma} \leftarrow \text{Interpolate}(\chi_j^2, \chi_{j \min}^2, \Delta\chi_{2\sigma}^2);$ 
     $\sin^2 2\theta_{3\sigma} \leftarrow \text{Interpolate}(\chi_j^2, \chi_{j \min}^2, \Delta\chi_{3\sigma}^2);$ 
end
     $\Rightarrow$  Tupla con límites de exclusión de 90 %, 2 $\sigma$ , 3 $\sigma$  N.C.;
```

Algoritmo 3.1: Algoritmo del método de la búsqueda por barrido unidimensional.

3.4. Método de búsqueda por barrido bidimensional

En la sección anterior se presentó el análisis de los datos de modo de neutrinos liberados en 2009, en la región de $E_\nu^{QE} \geq 475$ MeV en donde no hay evidencia de un exceso de eventos. Sin embargo en la publicación [178] MiniBooNE presenta evidencia de un exceso de eventos en la región de bajas energías el cual no es compatible con la señal de oscilaciones de LSND. Si uno quisiera interpretar ese exceso en términos de oscilaciones de neutrinos un método más adecuado sería una búsqueda por barrido bidimensional usando el intervalo de $200 \leq E_\nu^{QE} \leq 3000$ MeV. En esta sección se describe este método y los resultados se presentan en § 4.2.

El estadístico usado es una función χ^2 para la cual la matriz de covarianza se cambia iterativamente,

pero se permite que el número de eventos predichos para cada *bin* tome los valores que le corresponden para cada punto del espacio de parámetros:

$$\chi^2 (\sin^2 2\theta, \Delta m^2) = \sum_{i,j=1}^{n_e+n_\mu} (D_i - Q_i) M_{ij}^{-1} (D_j - Q_j), \quad (3.32)$$

aquí, como antes, \mathbf{D} contiene los datos observados de ν_e y ν_μ , ecuación (3.25); \mathbf{Q} contiene la predicción del número de eventos de ν_e (señal más fondo) y ν_μ , ecuación (3.24). Al cubrir todo el rango de energía, \mathbf{D} y \mathbf{Q} tienen $n_e + n_\mu = 11 + 8 = 19$ componentes. De igual forma la matriz de covarianza \mathbf{M} , tiene 19×19 componentes. Ahora los grados de libertad son: $n_e + n_\mu - 2 - 1 = 16$ g.l., una vez más el número efectivo de grados de libertad es el número de *bins*, menos el número de parámetros, menos uno por la normalización que se hace a la simulación con los ν_μ observados.

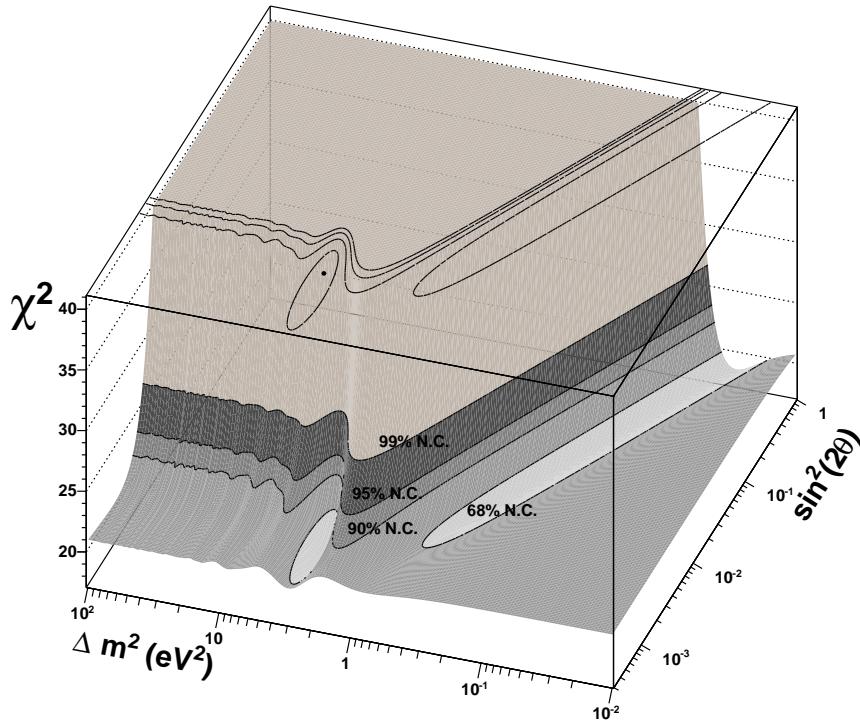


Figura 3.9: Superficie $\chi^2 (\sin^2 2\theta, \Delta m^2)$ con cortes de nivel. Cortes de nivel desde χ^2_{\min} para determinar los contornos de confianza con el método de la búsqueda por barrido bidimensional. En la parte superior se observan las proyecciones del mínimo y de los contornos de 68 %, 90 %, 95 %, 99 % N.C.

Este método es muy similar al de la sección pasada, ya que es un método iterativo, solamente que ahora la búsqueda del mejor ajuste se hace en toda la malla del plano $\sin^2 2\theta - \Delta m^2$. En la iteración cero se empieza con una matriz con señal nula, es decir que solamente contiene información de las correlaciones del fondo de neutrinos del electrón. El método busca el valor de $\mathbf{x}^{\{0\}} = (\sin^2 2\theta, \Delta m^2)^{\{0\}}$ que minimiza

$$\chi^2 \{0\} \equiv \chi^2 (\mathbf{x}; \mathbf{M}^{\{0\}}),$$

una vez más $\mathbf{M}^{\{0\}}$ representa la matriz de covarianza calculada con señal nula. Posteriormente $\mathbf{x}^{\{0\}}$ genera la señal para construir la matriz para la siguiente iteración, $\mathbf{M}^{\{1\}}$. El proceso se detiene cuando

los valores del mejor ajuste de iteraciones sucesivas difieren en menos de una tolerancia de $\varepsilon \sim 1 \times 10^{-4}$, la cual se consigue a la cuarta iteración²¹.

De esta forma en la última iteración se obtiene una superficie χ^2 sobre $(\sin^2 2\theta, \Delta m^2)$ con la cual se determinan los contornos de confianza haciendo cortes de nivel a partir del mínimo χ^2_{\min} . Estos determinan los contornos a diferentes niveles de confianza ($X\% \text{ N.C.}$) sobre $(\sin^2 2\theta, \Delta m^2)$, es decir aquellos puntos que satisfacen:

$$\chi^2(\sin^2 2\theta, \Delta m^2) = \chi^2_{\min} + \Delta\chi^2_X \%,$$

la distancia por encima del mínimo, $\Delta\chi^2_X \%$, a la que se hacen estos cortes esta dada por una distribución χ^2 de dos grados de libertad, ecuación (3.19). Los valores usados se encuentran en la tabla 3.2b. En la figura 3.9 se muestran las excursiones desde el mínimo para determinar los cortes de nivel que forman los contornos. En el algoritmo 3.2 se resume la implementación del método de la búsqueda por barrido bidimensional.

Entrada: Datos y fondo de ν_e y ν_μ , matriz de covarianza fraccionaria y tupla de simulación MC para la señal.

Salida : Tupla con contornos de confianza.

Declaración e inicialización de variables;

$k = 0$;

```

while  $|\chi^2_{\min}^{(k)} - \chi^2_{\min}^{(k-1)}| > \varepsilon$  do
    if  $k = 0$  then
         $\mathbf{M}^{(0)} \leftarrow \text{Build}(\mathbf{M}_{\text{frac}}, \mathbf{Q}^{3 \times 1 \{0\}})$ ; \ matriz de covarianza con señal nula;
         $\text{Invert}(\mathbf{M}^{(0)})$ ;
        for  $x_1 = 3 \times 10^{-4}$  to 1. do
            for  $x_2 = 1 \times 10^{-2} \text{ eV}^2$  to  $1 \times 10^2 \text{ eV}^2$  do
                |  $\text{FindMinimum}(\chi^2_{(0)}(\mathbf{x}; \mathbf{M}^{-1} \{0\}))$ ;
            end
        end
         $\rightarrow \chi^2_{\min}^{(0)}$ ;  $\rightarrow \mathbf{x}^{(0)}$ ;
    else
         $\mathbf{M}^{(k)} \leftarrow \text{Build}(\mathbf{M}_{\text{frac}}, \mathbf{Q}^{3 \times 1 \{k\}})$ ; \ matriz de covarianza con señal de la iteración pasada;
         $\text{Invert}(\mathbf{M}^{(k)})$ ;
        for  $x_1 = 3 \times 10^{-4}$  to 1. do
            for  $x_2 = 1 \times 10^{-2} \text{ eV}^2$  to  $1 \times 10^2 \text{ eV}^2$  do
                |  $\text{FindMinimum}(\chi^2_{(k)}(\mathbf{x}; \mathbf{M}^{-1} \{k\}))$ ;
            end
        end
         $\rightarrow \chi^2_{\min}^{(k)}$ ;  $\rightarrow \mathbf{x}^{(k)}$ ;
    end
     $k++$ ;
end
 $\rightarrow \chi^2(\sin^2 2\theta, \Delta m^2)$ ;  $\rightarrow \chi^2_{\min}$ ;
```

Ahora se encuentran los contornos de confianza.;

$(\sin^2 2\theta, \Delta m^2)_{68\%} \leftarrow \text{Interpolate}(\chi^2, \chi^2_{\min}, \Delta\chi^2_{68\%})$; $(\sin^2 2\theta, \Delta m^2)_{90\%} \leftarrow \text{Interpolate}(\chi^2, \chi^2_{\min}, \Delta\chi^2_{90\%})$;
 $(\sin^2 2\theta, \Delta m^2)_{95\%} \leftarrow \text{Interpolate}(\chi^2, \chi^2_{\min}, \Delta\chi^2_{95\%})$; $(\sin^2 2\theta, \Delta m^2)_{99\%} \leftarrow \text{Interpolate}(\chi^2, \chi^2_{\min}, \Delta\chi^2_{99\%})$;

\Rightarrow Tupla con contornos de confianza de 68%, 90%, 95%, 99% N.C.;

Algoritmo 3.2: Algoritmo del método de la búsqueda por barrido bidimensional.

Observaciones: este método es el que requiere menos operaciones, la construcción e inversión de la matriz de covarianza solamente se hace una vez por iteración, cinco veces en total.

²¹El ajuste que se hace con la matriz nula se considera como la iteración cero.

Nótese que si la matriz \mathbf{M} crece arbitrariamente entonces se puede tener un valor arbitrariamente pequeño para el estadístico χ^2 de la ecuación (3.32), creando un posible sesgo en el ajuste hacia puntos en el espacio de parámetros que carecen de significado físico, es decir deja de importar que $\mathbf{D} - \mathbf{Q} \approx 0$ ya que las componentes de la matriz inversa son muy pequeñas, $M_{ij}^{-1} \ll 1$. Sin embargo en un esquema iterativo se evita calcular la matriz en cada punto, logrando prevenir este comportamiento. Por supuesto, omitir el cálculo de la matriz de covarianza en cada punto, si bien es una aproximación razonable, impide que sea una implementación completamente robusta.

Al permitir que varié tanto $\sin^2 2\theta$ como Δm^2 la búsqueda por barrido bidimensional logra discernir entre valores poco probables de Δm^2 y muy probables, de hecho se consigue obtener la pareja de parámetros que mejor ajusta los datos, corrigiendo el defecto de la búsqueda unidimensional. Al considerar una aproximación gaussiana se prescinde de la necesidad de hacer la construcción completa de Neyman. Desafortunadamente los intervalos generados al cortar con un plano a partir del mínimo la superficie χ^2 tienen regiones de subcobertura y sobrecobertura. En la sección § 3.6 se discute la razón de ese comportamiento y se compara con los demás métodos.

3.5. Método de máxima verosimilitud

Este método es más robusto que los pasados, junto con las mejoras que fue haciendo la colaboración con los años se implementó este método para analizar los datos. La mayoría de los análisis que se presentan en el capítulo 4 se hicieron con este método, las correcciones frecuentistas (de las que se hablará en la siguiente sección) usan este método también. Se repiten los contornos de los datos liberados en 2009 del modo de neutrinos para presentar una comparación entre los distintos métodos, § 4.2. Para los datos publicados del modo de antineutrinos, consistentes con una señal de oscilación, se opta por usar este método (con correcciones frecuentistas) para presentar los resultados, § 4.3. Se estandariza el uso de este método para las publicaciones subsecuentes: neutrinos de 2012, § 4.4; antineutrinos de 2012, § 4.5; y el análisis combinado de neutrinos y antineutrinos de 2012 § 4.6. Todos los análisis que se hacen aquí con este método son para el rango de energías $200 \leq E_\nu^{QE} \leq 3000$ MeV.

El estadístico usado es el doble del negativo del logaritmo de una función de verosimilitud, $\mathcal{L} \equiv -2 \ln(\mathcal{L})$ ecuación (3.12). A diferencia de los métodos pasados, ahora la matriz de covarianza se construye para cada punto en el espacio de parámetros al igual que el número de eventos predichos y se requiere el determinante de la misma:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\sin^2 2\theta, \Delta m^2) &= \ln(|\mathbf{M}|) + \sum_{i,j}^{n_e+n_\mu} (D_i - Q_i) \mathbf{M}_{ij}^{-1} (D_j - Q_j) \\ \mathcal{L}(\sin^2 2\theta, \Delta m^2) &= \ln(|\bar{\mathbf{M}}|) + \sum_{i,j}^{n_e+n_\mu} (\bar{D}_i - \bar{Q}_i) \bar{\mathbf{M}}_{ij}^{-1} (\bar{D}_j - \bar{Q}_j), \end{aligned} \quad (3.33)$$

una vez más, \mathbf{D} ($\bar{\mathbf{D}}$) contiene los datos observados de ν_e ($\bar{\nu}_e$) y ν_μ ($\bar{\nu}_\mu$), ecuación (3.25); \mathbf{Q} ($\bar{\mathbf{Q}}$) contiene la predicción del número de eventos de ν_e ($\bar{\nu}_\mu$) (señal más fondo) y ν_μ ($\bar{\nu}_\mu$), ecuación (3.24); tienen $n_e + n_\mu = 11 + 8 = 19$ componentes. De igual forma la matriz de covarianza \mathbf{M} ($\bar{\mathbf{M}}$), tiene 19×19 componentes. Para los grados de libertad hay que restar el número de parámetros y una unidad más ya que hizo una normalización a los datos: $n_e + n_\mu - 2 - 1 = 16$ g.l. Como ya se mencionó, tanto \mathbf{Q} ($\bar{\mathbf{Q}}$) como \mathbf{M} ($\bar{\mathbf{M}}$) son funciones de $(\sin^2 2\theta, \Delta m^2)$.

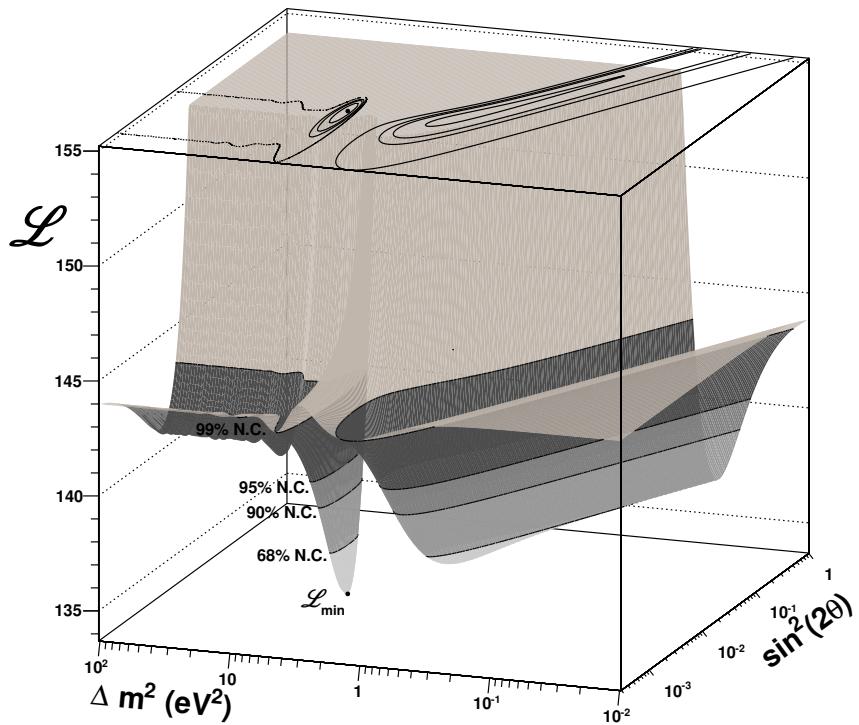


Figura 3.10: Superficie $\mathcal{L}(\sin^2 2\theta, \Delta m^2)$ con cortes de nivel para el método de máxima verosimilitud. Cortes de nivel desde \mathcal{L}_{\min} para determinar los contornos de confianza con el método de la búsqueda por barrido bidimensional. En la parte superior se observan las proyecciones del mínimo y de los contornos de 68 %, 90 %, 95 %, 99 % N.C.

La razón por la cual este método es más robusto que los pasados, es por que incluye la dependencia de los parámetros de oscilación en todas las partes relevantes del estadístico, evitando la necesidad de implementar un proceso iterativo. Al construir la matriz de covarianza y calcular su determinante para cada punto se tiene una mejor estimación de la semejanza de los datos con una predicción teórica. La búsqueda del mejor ajuste se hace en toda la malla del espacio $(\sin^2 2\theta, \Delta m^2)$, es decir se evalúa la ecuación (3.33) en cada punto de la malla y se encuentra el valor mínimo. Es más sencillo de implementar que los métodos pasados, solamente que la cantidad de operaciones es considerablemente mayor. Después de haber evaluado el estadístico en cada punto se obtiene una superficie $\mathcal{L}(\sin^2 2\theta, \Delta m^2)$ y el valor y posición del mejor ajuste, \mathcal{L}_{\min} y $(\sin^2 2\theta, \Delta m^2)_{\min}$. Al igual que el método pasado, los contornos de confianza se determinan haciendo cortes de nivel a partir del mínimo; los puntos que satisfacen:

$$\mathcal{L}(\sin^2 2\theta, \Delta m^2) = \mathcal{L}_{\min} + \Delta \chi^2_{X \%},$$

forman el contorno de $X \%$ N.C. En la tabla 3.2b se encuentran los valores de $\Delta \chi^2_{X \%}$ para determinar los distintos contornos. La figura 3.10 muestra las excursiones desde el mínimo para determinar los cortes de nivel que forman los contornos. El algoritmo 3.3 resume la implementación del método de máxima verosimilitud.

Observaciones: dada la importancia de este método y su aplicación para el método Feldman–Cousins de § 3.6, se hizo un gran esfuerzo para optimizarlo al máximo, consiguiendo que fuera, por mucho, el método más rápido de todos. Se explota al máximo el hecho de que las matrices sean positivas

Entrada: Datos y fondo de ν_e y ν_μ ($\bar{\nu}_e$ y $\bar{\nu}_\mu$), matriz de covarianza fraccionaria y tupla de simulación MC para la señal.

Salida : Tupla con contornos de confianza.

Declaración e inicialización de variables;

```
for  $x_1 = 3 \times 10^{-4}$  to 1. do
    for  $x_2 = 1 \times 10^{-2}$  eV2 to  $1 \times 10^2$  eV2 do
        M(x) ← Build(Mfrac, Q3×1(x));
        Determinant(M);
        Invert(M);
        FindMinimum(L(x; M-1, |M|));
    end
end
→ Lmin;
→ L (sin2 2θ, Δm2);
```

Ahora se encuentran los contornos de confianza.;

```
(sin2 2θ, Δm2)68% ← Interpolate(L, Lmin, Δχ268%);
(sin2 2θ, Δm2)90% ← Interpolate(L, Lmin, Δχ290%);
(sin2 2θ, Δm2)95% ← Interpolate(L, Lmin, Δχ295%);
(sin2 2θ, Δm2)99% ← Interpolate(L, Lmin, Δχ299%);
⇒ Tupla con contornos de confianza de 68%, 90%, 95%, 99% N.C.;
```

Algoritmo 3.3: Algoritmo del método de máxima verosimilitud.

definidas, consiguiendo que el cálculo del determinante sea un paso intermedio natural de la inversión de matrices.

Para este método se está exento de la patología que surge de permitir que la matriz de covarianza tome valores arbitrariamente grandes, lo que generaría una inversa con entradas muy pequeñas, ya que al incluir el término del determinante se penaliza el uso de matrices muy grandes, consiguiendo de forma efectiva balancear la relevancia de la matriz de covarianza en la ecuación (3.33).

Hasta ahora es el método más robusto, permite discernir de forma precisa la pareja de parámetros $(\sin^2 2\theta, \Delta m^2)$ que mejor ajusta los datos. Como antes, se considera una aproximación gaussiana que permite prescindir de conocer las regiones de aceptación con las cuales se obtienen los intervalos de confianza, una simplificación que ayuda considerablemente a simplificar el problema. Sin embargo esta búsqueda global otorga intervalos de sobrecobertura y subcobertura, ocasionados, en esencia, por la forma no lineal de la fórmula de oscilación y la insatisfacción que provocan en las aproximaciones supuestas para la formación de los contornos. En la siguiente sección se discute con más detalle este defecto, la forma de solucionarlo y se comparan los distintos métodos.

En el apéndice A se puede ver el código que realiza el cálculo de la máxima verosimilitud.

3.6. Método frecuentista Feldman–Cousins

En su artículo intitulado “Unified approach to the classical statistical analysis of small signals”, Gary Feldman y Robert Cousins proponen una forma de construir los límites de confianza que unifica la forma de tratar límites superiores, para resultados nulos, e intervalos de confianza de dos lados, para resultados no nulos [196]. Como se vio antes, basarse en los datos para elegir entre un límite superior o un contorno de confianza, lleva a intervalos que tienen un significado probabilístico inadecuado y que frecuentemente son incompatibles. El método Feldman–Cousins (F–C) evita límites de confianza sin sentido físico, evita tendencias conservadoras, desacopla las pruebas de bondad del ajuste de los

intervalos de confianza, da cobertura correcta y es robusto.

Con este método se vuelven a presentar distintos resultados, desde los datos de 2009. Una vez más se presentan los resultados del modo de neutrinos de los datos publicados en 2009 § 4.2, aún cuando la colaboración no usa este método para el análisis. La primera ocasión que se usa este método por la colaboración, es para los datos del modo de antineutrinos de 2010, los cuales se presentan aquí en § 4.3. Siendo que este es el método más robusto hasta ahora, no se quiere dejar de analizar los datos más recientes con esta maquinaria, es decir lo datos del modo de neutrinos publicados en 2012, presentados en § 4.4, y los datos del modo de antineutrinos también publicados en 2012, presentados en § 4.5. A pesar del gran tiempo de procesamiento que requieren, se decidió usar el método F–C para analizar los datos viejos para tener una comparación con los datos más nuevos. También en el análisis combinado de neutrinos y antineutrinos de los datos de 2012 se usa el método F–C, los resultados se presentan en § 4.5 y en la siguiente sección se hablará sobre este análisis.

El método propuesto por Feldman y Cousins usa la libertad inherente en la construcción de intervalos de Neyman para obtener límites superiores e intervalos de dos lados. Es una elección particular de ordenamiento, basado en el coeficiente de probabilidades

$$R = \frac{P(\mathbf{D}|\mathbf{Q})}{P(\mathbf{D}|\mathbf{Q}_{\min})} , \quad (3.34)$$

donde como antes \mathbf{D} son los eventos observados, \mathbf{Q} es la predicción de eventos y cambia en cada punto $(\sin^2 2\theta, \Delta m^2)$ y, en particular, \mathbf{Q}_{\min} es la predicción en el mejor ajuste.

La región de aceptación para cada punto del plano $\sin^2 2\theta - \Delta m^2$ es calculada realizando simulaciones de Monte Carlo de los resultados de una gran cantidad de experimentos para el conjunto de parámetros físicos desconocidos y el flujo de neutrinos del experimento. Se debe obtener $R_c(\sin^2 2\theta, \Delta m^2)$, tal que una fracción α de los experimentos simulados tengan $R \leq R_c(\sin^2 2\theta, \Delta m^2)$. Después de que los datos son analizados, R para los datos y cada punto en el plano $\sin^2 2\theta - \Delta m^2$, i.e. $R(\mathbf{D} | (\sin^2 2\theta, \Delta m^2))$, es comparado a R_c y la región de aceptación son todos los puntos tales que

$$R(\mathbf{D} | (\sin^2 2\theta, \Delta m^2)) \leq R_c(\sin^2 2\theta, \Delta m^2) . \quad (3.35)$$

Recuérdese que la región de aceptación es un conjunto de intervalos de la variable medida, en este caso para cada punto $(\sin^2 2\theta, \Delta m^2)$ se tiene un región en el espacio de datos y de la dimensión de \mathbf{D} , y el conjunto de esas regiones para cada punto en el espacio $(\sin^2 2\theta, \Delta m^2)$ forma la región de confianza.

En el artículo de Feldman y Cousins [196] se explica con más detalle varias de las fallas de varios de los métodos más populares para generar contornos de confianza. Reiterando, el método de F–C, a diferencia del barrido unidimensional, logra aislar efectivamente el punto de mejor ajuste; los métodos de barrido bidimensional y máxima verosimilitud logran aislar el mejor ajuste sin embargo muestran regiones considerables de subcobertura y sobrecobertura, es decir que los contornos alrededor de puntos de mejor ajuste sobre esas regiones contienen al punto en una proporción de experimentos menor o mayor que la referida. El método de F–C cubre adecuadamente.

A pesar de lo robusto que es el método de la máxima verosimilitud, generar intervalos de confianza cortando la superficie \mathcal{L} con simples planos constantes genera regiones que no tienen cobertura correcta, hay regiones de subcobertura y sobrecobertura. El método F–C provee un mecanismo, basado en primeros principios de estadística frecuentista, para hacer las “correcciones” pertinentes

a estos planos. Es decir los contornos se obtendrán al cortar la superficie \mathcal{L} con una superficie corregida. Con el fin de hacer tales correcciones se tienen que generar distribuciones de “experimentos ficticios”, que permitan estimar cual es el corte apropiado para cada punto en el plano $\sin^2 2\theta - \Delta m^2$. Por ejemplo, para dos grados de libertad el corte de 90 % N.C. es de 4.61 unidades, el cual, para el caso gaussiano lejos de la frontera física, otorga intervalos de confianza con cobertura adecuada. Sin embargo al hacer las correcciones en los análisis hechos en este trabajo, es común observar variaciones desde 2.71 hasta 7.88 unidades para los cortes que generan intervalos con cobertura correcta. Lo que significa es que donde se requieren cortes de 2.71 se están obteniendo regiones de sobrecobertura al cortar con 4.61, y en donde se requiere cortar con 7.88 se obtienen regiones de subcobertura.

Algunos de los efectos que causan la desviación del corte de 4.61 son:

1. Naturaleza sinusoidal de la función de oscilación. La función \mathcal{L} asume una f.d.p. gaussiana, pero la función de oscilación es sinusoidal. Para altos valores de Δm^2 las fluctuaciones pueden causar un mínimo global en una zanja equivocada de la función, incrementando el valor de $\Delta\mathcal{L}$ desde el que sería si solo hubiera una zanja.
2. Regiones unidimensionales. En algunas regiones del plano, la f.d.p. se convierte en unidimensional en vez de ser bidimensional. Por ejemplo, para valores muy bajos de Δm^2 la única cantidad relevante es el número de eventos en el *bin* de menor energía, ya que la probabilidad de oscilación, ecuación (1.6), es proporcional a $1/E^2$ para valores suficientemente pequeños de Δm^2 . Las fluctuaciones en los *bins* de más alta energía no llevan a ninguna interpretación física, así pues se cancelan en el cálculo de $\Delta\mathcal{L}$. En estas regiones el corte que hace falta hacer a la superficie para obtener los contornos con correcta cobertura tiende a ser menor que lo normal.

3.6.1. Implementación del método Feldman–Cousins

En la implementación que se hizo del método F–C en este trabajo, lo primero que se tiene que hacer es generar la superficie

$$\Delta\mathcal{L}(\sin^2 2\theta, \Delta m^2) = \mathcal{L}(\sin^2 2\theta, \Delta m^2) - \mathcal{L}_{\min}, \quad (3.36)$$

la única diferencia entre esta y la que se describe en la sección anterior, ecuación (3.33), es que se le ha restado el valor constante \mathcal{L}_{\min} . Será a esta superficie a la que se la harán correcciones. Se muestra una superficie típica en la figura 3.12b.

La generación de experimentos ficticios²² consiste en generar arreglos de datos $\mathbf{D}_f^{\{p_0\}}$, para cada punto p_0 en el plano $\sin^2 2\theta - \Delta m^2$ que se desee evaluar. Cada uno de estos arreglos tiene la propiedad de ser una fluctuación estadística de la distribución de datos de ν_e y ν_μ en E_ν^{QE} , que el experimento hubiera observado si la pareja de parámetros de oscilación reales fueran p_0 . El proceso a través del cual se generan estos datos ficticios se describe a continuación y es el mismo que se describe en el libro [197]. En esencia es una transformación lineal que genera un vector aleatorio con una estructura de dependencia dada, según lo medido por la matriz de covarianza.

Se quiere generar un vector aleatorio \mathbf{y} de n componentes, con media en cero y matriz de covarianza $\mathbf{M} = \mathcal{E}(\mathbf{y}\mathbf{y}^T)$, ecuación (3.9'). Para lo cual se genera un vector aleatorio \mathbf{x} con n componentes, cada

²²También conocido como “Monte Carlo de juguete”.

una de las cuales tiene su media en cero y varianza unitaria. Luego \mathbf{y} es simplemente

$$\mathbf{y} = \mathbf{h}\mathbf{x},$$

donde \mathbf{h} es una matriz de $n \times n$ no singular. Nótese que

$$\mathcal{E}(\mathbf{y}) = \mathbf{h} \mathcal{E}(\mathbf{x}) = 0,$$

$$\mathcal{E}(\mathbf{y}\mathbf{y}^T) = \mathbf{h} \mathcal{E}(\mathbf{x}\mathbf{x}^T) \mathbf{h}^T = \mathbf{h}\mathbf{h}^T = \mathbf{M}.$$

Como \mathbf{M} es positiva definida⁷ siempre se puede encontrar una matriz triangular inferior no singular \mathbf{h} , que cumpla $\mathbf{h}\mathbf{h}^T = \mathbf{M}$. Ahora el problema se ha transformado en uno de descomponer una matriz simétrica positiva definida \mathbf{M} , en el producto de una matriz triangular inferior y su transpuesta, a esto se le llama factorización de Cholesky. Convenientemente esta matriz de covarianza se construye de igual manera que la de § 3.2. El algoritmo usado para encontrar la matriz triangular inferior es el método de la raíz cuadrada²³, en el cual las componentes de \mathbf{h} son:

$$\begin{aligned} h_{i1} &= M_{i1}/\sqrt{M_{11}} & (1 \leq i \leq n) \\ h_{ii} &= \sqrt{M_{ii} - \sum_{j=1}^{i-1} h_{ij}^2} & (1 \leq i \leq n) \\ h_{ij} &= \frac{M_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} h_{ik}h_{jk}}{h_{jj}} & (1 < j < i \leq n) \\ h_{ij} &= 0 & (i < j \leq n) \end{aligned} \quad (3.37)$$

Por último, para formar los datos ficticios uno debe tomar el vector de estimación de eventos $\mathbf{Q}(\mathbf{p}_0)$, evaluado en el punto \mathbf{p}_0 , como valor central y sumarle el vector fluctuado con las correlaciones correspondientes a ese punto, es decir:

$$\mathbf{D}_f^{\{\mathbf{p}_0\}} = \mathbf{Q}(\mathbf{p}_0) + \mathbf{y} \quad (3.38)$$

Se debe generar un vector \mathbf{y} por cada experimento ficticio que se quiera hacer, n_f experimentos ficticios para cada punto, en los análisis presentados en esta tesis n_f toma valores desde ~ 2000 a ~ 6000 experimentos ficticios. Se deben generar experimentos ficticios para tantos puntos \mathbf{p}_0 como se requiera. El algoritmo 3.4 resume la implementación de la generación de datos ficticios. En el apéndice A se puede ver el código que genera los experimentos ficticios.

Entrada: Matriz de covarianza \mathbf{M} para el punto $\mathbf{p}_0 = (\sin^2 2\theta, \Delta m^2)_0$ y vector de estimación de eventos $\mathbf{Q}(\mathbf{p}_0)$.
Salida : Arreglo de vectores de datos ficticios $\mathbf{D}_f^{\{\mathbf{p}_0\}}$,.

Factorización de la matriz en una triangular inferior.;

```

 $\mathbf{h} \leftarrow \text{getLowerMatrix}(\mathbf{M});$ 
 $\text{for } j = 1 \text{ to } n_e + n_\mu \text{ do}$ 
|  $x_j = \text{normalRandomGenerator}(0,1); \backslash\backslash \text{ media cero, varianza unitaria. ;}$ 
 $\text{end}$ 
 $\mathbf{y} = \mathbf{h}\mathbf{x};$ 
 $\mathbf{D}_f^{\{\mathbf{p}_0\}} = \mathbf{Q}(\mathbf{p}_0) + \mathbf{y};$ 

```

Algoritmo 3.4: Algoritmo para generar datos ficticios $\mathbf{D}_f^{\{\mathbf{p}_0\}}$ en el punto $\mathbf{p}_0 \in \sin^2 2\theta - \Delta m^2$.

Para cada una de las n_f distribuciones de datos falsos de un punto $\mathbf{p}_0 \in \sin^2 2\theta - \Delta m^2$ se efectúa el método de la máxima verosimilitud, es decir se evalúa el estadístico de la sección pasada, el doble del

²³El método usado no es aquel descubierto por André-Louis Cholesky.

negativo del logaritmo de una función de verosimilitud, en cada punto de la malla preestablecida de $190 \times 190 = 36100$. Sin embargo, ahora la ecuación (3.33) no se evalúa con los datos verdaderos sino con las distribuciones de datos falsos $\mathcal{D}_{\mathbf{f} i}^{\{p_0\}}$, $i = 1, \dots, n_f$; donde para cada i -ésimo experimento ficticio se busca el valor mínimo $\mathcal{L}_{\min i}^{\{p_0\}}$, y el valor que adquiere la verosimilitud en el punto \mathbf{p}_0 , $\mathcal{L}_i^{\{p_0\}}(\mathbf{p}_0)$. Una aclaración sobre la notación usada en esta sección: el superíndice $\{p_0\}$ significa que es con la señal de ese punto que se generaron los experimentos ficticios, por otra parte aquí en particular la notación (\mathbf{p}_0) se refiere a que se evalúa la verosimilitud en el punto \mathbf{p}_0 .

En el régimen gaussiano, se puede sustituir la probabilidad de la ecuación (3.35) por la función de verosimilitud $\mathcal{L} = -2 \ln P$, así que la ecuación (3.35) es equivalente a la diferencia que se busca de cada experimento ficticio:

$$\Delta \mathcal{L}_{\mathbf{f} i}^{\{p_0\}} = \mathcal{L}_i^{\{p_0\}}(\mathbf{p}_0) - \mathcal{L}_{\min i}^{\{p_0\}} \quad (3.39)$$

Con los n_f experimentos ficticios se obtiene una distribución de diferencias $\Delta \mathcal{L}_{\mathbf{f} i}^{\{p_0\}}$, $i = 1, \dots, n_f$. Para cada punto \mathbf{p}_0 que se quiera corregir se debe construir una de estas distribuciones. Debido al gran tiempo de cómputo que se requiere, hacer correcciones en toda la malla de $190 \times 190 = 36100$ es impracticable. Por eso se hacen solamente en una “malla reducida” de 63×63 (cada tercer punto) y solamente en los puntos “cercanos” al mejor ajuste, en los distintos análisis la malla reducida tenía desde ~ 2.2 hasta ~ 8.5 miles de puntos. En la figura 3.12a se muestra una de estas distribuciones, para presentarla se ha optado por juntar los datos en *bins* sin embargo el algoritmo no lo requiere y de hecho es mejor no hacerlo así.

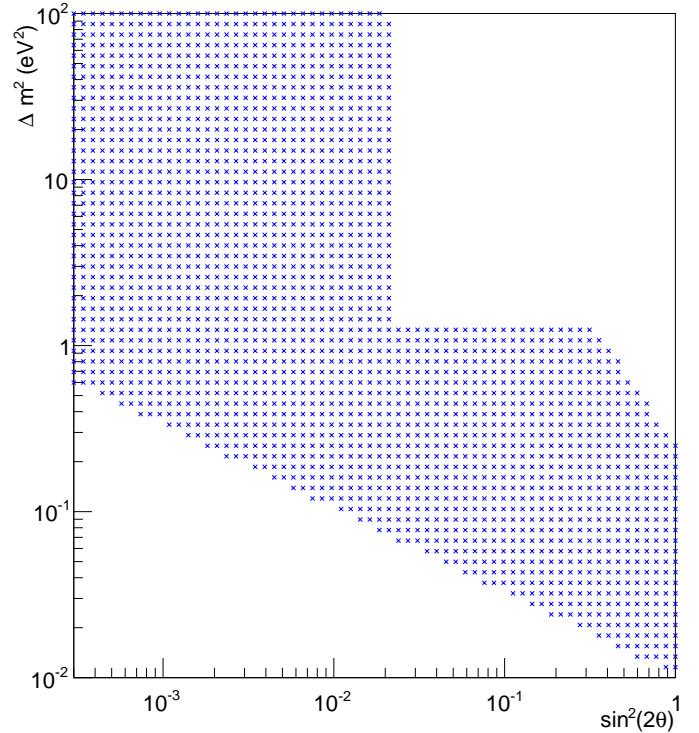
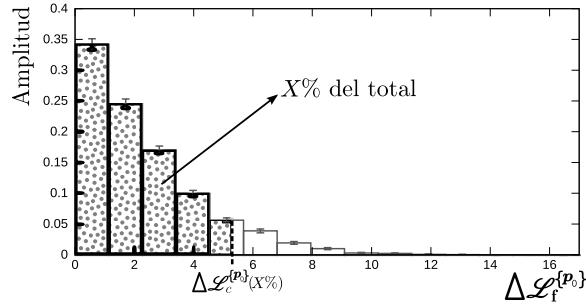
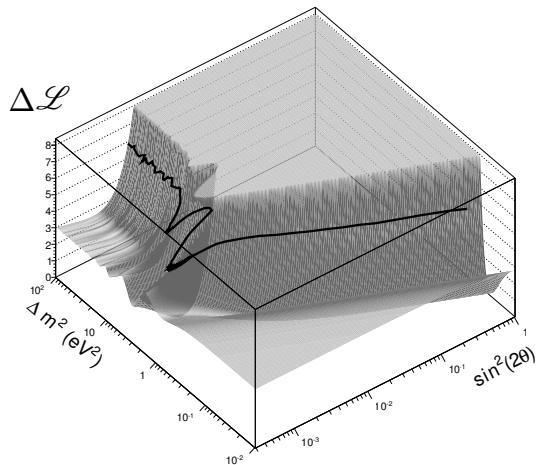


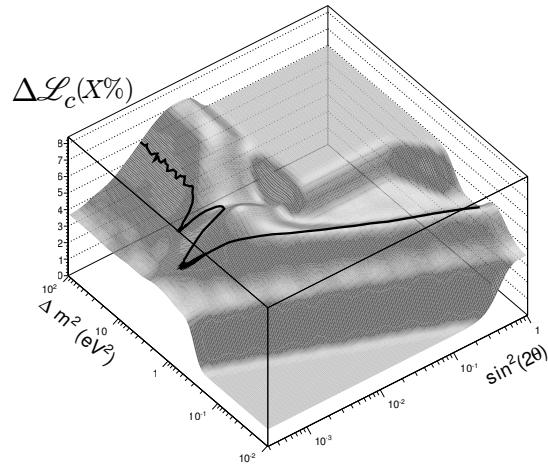
Figura 3.11: Malla reducida en donde se generan experimentos ficticios. Dependiendo de las circunstancias de cada análisis la malla aumenta hacia abajo o se triplica. La malla completa cubre prácticamente todo el espacio.



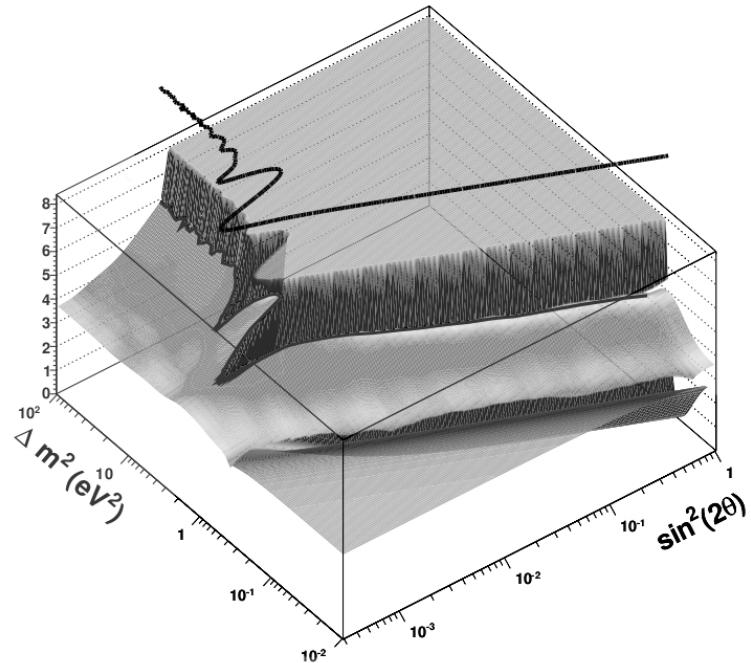
(a) Distribución de diferencias $\Delta \mathcal{L}_f^{\{p_0\}}$.



(b) Superficie $\Delta \mathcal{L}$.



(c) Superficie $\Delta \mathcal{L}_c(X\%)$.



(d) Intersección de las superficies $\Delta \mathcal{L}$ y $\Delta \mathcal{L}_c(X\%)$.

Figura 3.12: Construcción de los intervalos con el método F-C. (a) Para cada punto $p_0 \in \sin^2 2\theta - \Delta m^2$ se construye una distribución $\Delta \mathcal{L}_f^{\{p_0\}}$ y se encuentra el valor $\Delta \mathcal{L}_c^{\{p_0\}}(X\%)$, revisar el texto. (b) Se construye la superficie $\Delta \mathcal{L}$ en cada punto del plano $\sin^2 2\theta - \Delta m^2$. (c) Se construye la superficie $\Delta \mathcal{L}_c(X\%)$, explicación en el texto. (d) La proyección en el plano $\sin^2 2\theta - \Delta m^2$ de la intersección de las dos superficies, curva continua negra superior, forma el intervalo de $X\% \text{ N.C.}$ Se muestra la intersección en las tres gráficas como una curva continua negra.

Posteriormente, para generar las correcciones a cierto nivel de confianza $X\%$, se busca el valor crítico $\Delta\mathcal{L}_c^{\{p_0\}}(X\%)$ en la distribución de diferencias para el cual $X\%$ de la distribución tenga un valor menor o igual. Se debe buscar el valor crítico para cada nivel de confianza distinto. En la figura 3.12a se puede apreciar el área que contiene el $X\%$ de los valores de $\Delta\mathcal{L}_{f_i}^{\{p_0\}}$ y el valor que adquiere $\Delta\mathcal{L}_c^{\{p_0\}}(X\%)$. Al observar la gráfica podría parecer que se está integrando, por lo cual se reitera que $\Delta\mathcal{L}_c^{\{p_0\}}(X\%)$ es el $(n_f \times \frac{X}{100})$ -ésimo valor de la distribución de diferencias. Por ejemplo, si se hicieron 2000 experimentos ficticios, el valor crítico para la corrección de 90% N.C. sería el valor $2000 \times \frac{90}{100} = 1800$ -ésimo, de menor a mayor. Para cada punto p_0 que se quiera corregir se debe encontrar $\Delta\mathcal{L}_c^{\{p_0\}}$, obteniendo al final una superficie sobre el plano $\sin^2 2\theta - \Delta m^2$. En las regiones de baja y alta señal, es decir para la esquina inferior izquierda y superior derecha, se omite la generación de experimentos ficticios ya que son regiones muy lejanas del mejor ajuste o para las cuales el experimento no es muy sensible. En la figura 3.12c se muestra la superficie de valores críticos para el $X\%$ N.C., en la esquina inferior izquierda y en la superior derecha se han puesto valores arbitrarios para presentar las superficies de forma satisfactoria.

La proyección sobre el plano $\sin^2 2\theta - \Delta m^2$ de la intersección de las superficies $\Delta\mathcal{L}$ y $\Delta\mathcal{L}_c^{\{p_0\}}(X\%)$ forma el intervalo de $X\%$ N.C. Con una curva negra se observa tal intersección en las figuras 3.12b y 3.12c. En la figura 3.12d se observa la intersección de ambas superficies ($\Delta\mathcal{L}$ en negro y $\Delta\mathcal{L}_c^{\{p_0\}}(X\%)$ en gris) y hasta arriba la proyección de la intersección.

Existe un método alternativo teóricamente equivalente para generar los contornos a partir de las distribuciones de $\Delta\mathcal{L}_{f_i}^{\{p_0\}}$, $i = 1, \dots, n_f$; sin embargo, a pesar de que al principio se obtenían los contornos de esa forma, al final se descartó porque en la práctica presentaba varios problemas de interpolación que resultaban en contornos de peor calidad visual.

Observaciones: Es factible que el método de Feldman–Cousins sea la mejor receta para producir intervalos de confianza de Neyman. Lidia con fronteras físicas en los parámetros, nunca da intervalos de confianza vacíos y evita el problema de *flip-flopping*. Sin embargo hay ciertas dificultades evidentes:

1. Se quiere enfatizar que el método F–C hace correcciones al método de máxima verosimilitud, el cual se ejecuta en aproximadamente un segundo, pero para construir los intervalos de confianza se requiere ejecutar el programa de la máxima verosimilitud $\sim 4 \times 10^6$ veces. ¡Aproximadamente 48 días de tiempo de cómputo! En vista de esto, hace falta recurrir a maquinaria especializada de cómputo que se encargue de hacer los cálculos lo más rápido posible. En el apéndice B se describe el sistema y uso del *cluster* empleado, por otra parte en el apéndice C se describe una forma novedosa de llevar a cabo los cálculos en un procesamiento paralelo con tarjetas de vídeo.
2. Los errores sistemáticos no se incorporan fácilmente en el procedimiento, básicamente se tienen que marginar con MC.
3. La “paradoja de los números pequeños”. El comportamiento del método F–C para pocos eventos de señal y fondo pequeño es un poco inesperado. Para explicarlo pensemos en dos experimentos, el primero no espera eventos de fondo y el segundo espera 15 eventos; ninguno de los dos observa nada. A 90% N.C. el límite de señal es 2.44 y 0.92, respectivamente. Parecería que el segundo experimento, que anticipaba un gran fondo y no observó nada, da un mejor límite. Solo una gran fluctuación del fondo podría explicar tener 0 eventos cuando se esperaban 15, ¿cómo es que una gran fluctuación en el fondo resultó en un mejor límite a la señal? Para poder evaluar la relevancia de este resultado se recomienda acompañar los resultados con la sensibilidad²⁴ del

²⁴La sensibilidad de un experimento se define como el límite superior promedio que se obtendría de un ensamble de

Entrada: Datos y fondo de ν_e y ν_μ ($\bar{\nu}_e$ y $\bar{\nu}_\mu$), matriz de covarianza fraccionaria y tupla de simulación MC para la señal.

Salida : Tupla con contornos de confianza.

Declaración e inicialización de variables;

Creación de la superficie $\Delta\mathcal{L}(\sin^2 2\theta, \Delta m^2)$ con el método de la máxima verosimilitud;

$\text{likelihoodMethod}(\mathbf{D}) \Rightarrow \Delta\mathcal{L}(\sin^2 2\theta, \Delta m^2)$

Generación de datos ficticios y distribuciones de diferencia, en la malla reducida.;

for $x_1 = 3 \times 10^{-4}$ **to** 1. **do**

for $x_2 = 1 \times 10^{-2}$ eV^2 **to** 1×10^2 eV^2 **do**

for $i = 1$ **to** n_f **do**

$\mathbf{D}_{f,i}^{\{x\}} \leftarrow \text{fakeDataGenerator}(\mathbf{x});$

$\text{likelihoodMethod}(\mathbf{D}_{f,i}^{\{x\}}) \rightarrow \Delta\mathcal{L}_{f,i}^{\{x\}};$

end

Construcción de las superficies de valores críticos.;

$\text{sortMinToMax}(\Delta\mathcal{L}_{f,i}^{\{x\}}, i = 1, \dots, n_f);$

$id68 \leftarrow \text{castInt}(0.68 \times n_f); id90 \leftarrow \text{castInt}(0.90 \times n_f);$

$id95 \leftarrow \text{castInt}(0.95 \times n_f); id99 \leftarrow \text{castInt}(0.99 \times n_f);$

$\Delta\mathcal{L}_c^{\{x\}}(68\%) \leftarrow \Delta\mathcal{L}_{f,id68}^{\{x\}}; \Delta\mathcal{L}_c^{\{x\}}(90\%) \leftarrow \Delta\mathcal{L}_{f,id90}^{\{x\}};$

$\Delta\mathcal{L}_c^{\{x\}}(95\%) \leftarrow \Delta\mathcal{L}_{f,id95}^{\{x\}}; \Delta\mathcal{L}_c^{\{x\}}(99\%) \leftarrow \Delta\mathcal{L}_{f,id99}^{\{x\}};$

end

end

Intersección de las superficies para generar los contornos.;

$(\sin^2 2\theta, \Delta m^2)_{68\%} \leftarrow \text{Intersect}(\Delta\mathcal{L}, \Delta\mathcal{L}_c(68\%)); (\sin^2 2\theta, \Delta m^2)_{90\%} \leftarrow \text{Intersect}(\Delta\mathcal{L}, \Delta\mathcal{L}_c(90\%));$

$(\sin^2 2\theta, \Delta m^2)_{95\%} \leftarrow \text{Intersect}(\Delta\mathcal{L}, \Delta\mathcal{L}_c(95\%)); (\sin^2 2\theta, \Delta m^2)_{99\%} \leftarrow \text{Intersect}(\Delta\mathcal{L}, \Delta\mathcal{L}_c(99\%));$

\Rightarrow Tupla con contornos de confianza de 68%, 90%, 95%, 99% N.C.;

Algoritmo 3.5: Algoritmo del método Feldman–Cousins.

experimento, para los experimentos en cuestión es 2.44 y 4.83. En el segundo experimento el límite es mucho mejor que la sensibilidad, lo que significa que simplemente fue un resultado “afortunado” y que el límite es mucho mejor que lo que merecía ser.

3.7. Análisis combinado de ν y $\bar{\nu}$

Para este análisis se usan los mejores métodos, máxima verosimilitud § 3.5 y las correcciones frequentistas F–C § 3.6, para llevar a cabo un análisis que usa todos los últimos datos disponibles, es decir combina la última publicación de datos del modo de neutrinos con la última publicación de los datos del modo de antineutrinos, a saber los datos publicados en 2012. Los contornos de confianza resultantes se pueden ver en § 4.6.

Una vez más el estadístico usado es la máxima verosimilitud, ecuación (3.33), solo que ahora la suma se extiende sobre los *bins* de neutrinos y antineutrinos

$$\mathcal{L}(\sin^2 2\theta, \Delta m^2) = \ln(|\mathbf{M}|) + \sum_{i,j}^{n_e+n_\mu+\bar{n}_e+\bar{n}_\mu} (D_i - Q_i) \mathbf{M}_{ij}^{-1} (D_j - Q_j); \quad (3.40)$$

experimentos con el fondo esperado y sin señal verdadera, resulta útil para establecer la escala del experimento.

por consiguiente los vectores de datos \mathbf{D} y predicción de eventos \mathbf{Q} tienen $19 + 19 = 38$ componentes; por su parte la matriz de covarianza \mathbf{M} es de 38×38 y debe ser construida, evaluada e invertida para cada punto del espacio $(\sin^2 2\theta, \Delta m^2)$. En este caso el número de grados de libertad es $38 - 2 - 2 = 34$, ya que se le resta el par de normalizaciones que se hacen a cada muestra de datos y otro par de grados de libertad porque el ajuste, como antes, involucra dos parámetros. El aumento en el tamaño de la matriz de covarianza significa un incremento considerable en el tiempo de procesamiento y de la cantidad de operaciones necesarias para realizar la inversión, que aumenta con el cubo del número columnas. Se estima que este aumento oscila entre $4/6n^3 \sim 5/6n^3$ [198].

Con los datos combinados se hicieron correcciones frecuentistas de Feldman–Cousins, § 3.6, una vez más la diferencia es que el estadístico usado es una suma de $n_e + n_\mu + \bar{n}_e + \bar{n}_\mu = 38$, de igual forma las matrices involucradas son más grandes. Pero lo demás se hace de forma análoga: la generación de datos ficticios, la búsqueda del mínimo, la construcción de las distribuciones de diferencias $\Delta \mathcal{L}_{\mathbf{f}}^{\{p_0\}}$, $i = 1, \dots, n_f$; etcétera. Para cada experimento ficticio se busca el mínimo en la malla de 190×190 y, al igual que en los otros casos, las correcciones frecuentistas solo se hacen sobre los puntos de la malla reducida de 63×63 que se encuentran en la región de interés.

Capítulo 4

Resultados

A continuación se presentan las gráficas con los resultados obtenidos: histogramas de los eventos observados y gráficas bidimensionales de los límites impuestos o bien las regiones permitidas para los parámetros de oscilaciones de neutrinos ($\sin^2 2\theta, \Delta m^2$) por MiniBooNE. Una clara señal de oscilación de neutrinos es un exceso consistente de eventos ν_e ($\bar{\nu}_e$), es decir que se vean más de los esperados si no hubiera oscilaciones pero que el excedente no sea tanto que no pueda ser atribuido a oscilaciones.

Uno de los objetivos de esta tesis es reproducir los resultados obtenidos por el experimento MiniBooNE empleando los datos liberados al público, es por eso que, a pesar de contar con más estadística y mejor consticción de errores, se incluyen los resultados de las primeras publicaciones. La metodología para llevar a cabo los análisis por parte de la colaboración también fue mejorando, algunos cambios se pueden percibir para aquellos datos que se analizaron con distintos métodos.

Sin embargo, estos cambios no se deben considerar mejorías por sí solos, sin tener en cuenta los problemas que solucionan. En particular, las correcciones frecuentistas de Feldman–Cousins § 3.6, al método de máxima verosimilitud § 3.5, otorgan regiones más estrechas. Este estrechamiento no debe verse como una mejoría por el simple hecho de que delimita una región más pequeña y, como consecuencia, se obtiene mayor certeza sobre cual es la pareja de parámetros que mejor ajusta el comportamiento observado. La función de las correcciones frecuentistas es la de otorgar cobertura adecuada, muestra la región que puede contener la pareja de parámetros al nivel de confianza estipulado. Es decir, que al repetir el experimento, el resultado obtenido caerá dentro de la región delimitada por las correcciones frecuentistas la fracción de veces correspondiente.

Con el propósito de mostrar el efecto que tiene la alta estadística de ν_μ ($\bar{\nu}_\mu$) en la maquinaria del análisis, se presentan histogramas con errores constreñidos. La justificación de la consticción de los errores así como una explicación detallada del proceso se puede encontrar en el apéndice E. Para llevar acabo los ajustes y encontrar los contornos de confianza no se hizo uso de la consticción de errores, pues la consticción se aplica de manera automática a través del uso combinado de los datos de neutrinos del electrón y muón.

El formato de los datos usados se explica en § 3.2. Excepto para la publicación de neutrinos de 2007 (§ 4.1), en la cual se omite un histograma, los resultados presentados son:

- Histograma de eventos ν_μ ($\bar{\nu}_\mu$) como función de la energía reconstruida E_ν^{QE} , escalados por la energía en MeV. Los puntos con barras representan los datos observados con el correspondiente

error estadístico, imperceptible a nivel práctico. El histograma azul (entrampado cuadriculado) muestra los eventos esperados por la simulación con el correspondiente error constreñido, de igual forma que con los datos, el error es más pequeño que la escala mínima de la gráfica.

- Histograma de eventos ν_e ($\bar{\nu}_e$) como función de la energía reconstruida E_ν^{QE} , escalados por la energía en MeV. Los puntos con barras representan los datos observados con el correspondiente error estadístico. El histograma verde (patrón punteado) muestra el fondo esperado de eventos por la simulación, con el correspondiente error constreñido. Los guiones rosa muestran la señal esperada para el punto de mejor ajuste obtenido.
- Histograma de exceso de eventos ν_e ($\bar{\nu}_e$) como función de la energía reconstruida E_ν^{QE} , escalados por la energía en MeV. Es decir, la diferencia entre los datos (puntos con barras del histograma anterior) y el fondo esperado (histograma de patrón punteado). Los puntos con barras representan el exceso de eventos con el error total. Los guiones rosa muestran la expectativa para el punto de mejor ajuste. En la línea punteada azul se muestra la expectativa de un punto de mejor ajuste de LSND.
- Gráfica bidimensional sobre el espacio de parámetros $(\sin^2 2\theta, \Delta m^2)$ que delimita los límites de exclusión o los contornos de confianza. En cada gráfica se muestran tres o cuatro curvas obtenidas en este trabajo, cada uno especificando el nivel de confianza (N.C.) que denotan. Con un punto negro se muestra el mejor ajuste obtenido en cada caso, también en la gráfica se muestran las coordenadas de este. En regiones sólidas azules se muestran las regiones obtenidas por LSND que permiten la oscilación de neutrinos, la región oscura a 90 % N.C. y la clara a 99 % N.C. En las gráficas se transcribe la χ^2_{\min} , obtenida para el punto de mejor ajuste, y χ^2_{Nulo} , obtenida para el punto nulo, es decir, en ausencia de oscilación de neutrinos; así como el número de grados de libertad (g.l.) y la probabilidad para cada caso.

Todos los histogramas que se presentan a continuación tienen el último *bin*, correspondiente al rango de energía 1500–3000 MeV, comprimido. Esto se hace con la intención de presentar los datos de forma más estética y no tiene relevancia en la maquinaria del análisis. El resto de los *bins* tienen el ancho que les corresponde en la escala de energía que representan.

En todos los casos, el error estadístico mostrado en los datos se define como:

$$\sigma_{i \text{ stat}} = \sqrt{D_i} / \Delta E_\nu^{QE}{}_i, \quad (4.1)$$

donde se dividió entre $\Delta E_\nu^{QE}{}_i \equiv L_{i+1}^{\nu_e (\nu_\mu)} - L_i^{\nu_e (\nu_\mu)}$, el ancho de cada *bin*, para tener en cuenta el escalamiento que se hizo a los datos. Por su parte el error total se define como la suma en cuadraturas del error estadístico y el error constreñido:

$$\sigma_{i \text{ total}} = \sqrt{\sigma_{i \text{ stat}}^2 + \sigma_{i \text{ const}}^2}. \quad (4.2)$$

Al examinar los resultados, presentados al final de este capítulo, se debe **notar**: el modo que representan (neutrinos/antineutrinos), el año en que se publicaron los datos, el rango de energía que se usó, el método utilizado para obtener las regiones de confianza, la probabilidad del mejor ajuste y del punto nulo.

Los resultados obtenidos en esta tesis logran reproducir fielmente a los publicados oficialmente por la colaboración MiniBooNE, a excepción de los contornos con correcciones frequentistas, donde se pueden observar ligeras desviaciones en algunas de las curvas, además los valores de $\chi^2/g.l.$ y probabilidades

de χ^2 en la “región de señal” (200–1 250 MeV) difieren de los reportados en las publicaciones puesto que en los datos liberados se usan intervalos ligeramente distintos para definir la región de señal (200–1 300 MeV), no obstante son consistentes con las diferencias. En el caso de los contornos frecuentistas, ninguna desviación es tan dramática como para considerar que uno u otro resultado están mal, o que los resultados son inconsistentes entre sí. Existen varias sospechas sobre la causa de estas desviaciones, las cuales fueron investigadas a profundidad pero sin éxito. Las principales causas que se consideraron son: diferencias en los algoritmos para la generación de números aleatorios, diferencias en el algoritmo para crear experimentos ficticios, las diferentes resoluciones de las correcciones frecuentistas y la interpolación usada para graficar datos. En § D.4 se comparan los distintos contornos y se discute más al respecto.

La transcripción y descripción del programa que lleva a cabo las correcciones frecuentistas de Feldman–Cousins al método de máxima verosimilitud se encuentra en el apéndice A. Las distintas formas en que se ejecutó, usando un *cluster* administrado por Condor para correr programas en C++ y con tarjetas de vídeo Nvidia para correr programas en CUDA, se encuentran en los apéndices B y C, respectivamente. Aquí se presentan únicamente los resultados obtenidos con CUDA, los resultados obtenidos con Condor son consistentes (estadísticamente equivalentes) pero no se presentan por constricciones de espacio. Todos las gráficas, histogramas e intervalos de confianza, que se presentan a continuación (además de algunas gráficas que se presentaron antes) se hicieron con el programa *ROOT* [199], un entorno orientado a objetos para el análisis de grandes cantidades de datos. Fue desarrollado en CERN y es el remplazo en C++ de PAW. ROOT es muy popular en la comunidad de física de altas energías, es el *caballo de batalla*¹ de todo físico experimental de altas energías. Sin embargo, se elaboraron programas ex profeso para el análisis de datos que establecen los límites de confianza sobre el espacio de parámetros ($\sin^2 2\theta, \Delta m^2$).

4.1. Búsqueda de aparición de ν_e , 2007

El primer artículo que publicó MiniBooNE corresponde al de esta búsqueda de oscilaciones [177], es decir la búsqueda de oscilaciones $\nu_\mu \rightarrow \nu_e$. Los datos así como instrucciones sobre como analizarlos se pueden obtener en línea [190] y corresponden a $(5.58 \pm 0.12) \times 10^{20}$ protones en el blanco (POT, *protons on target*) obtenidos de 2002 a 2004. En esta publicación, el portal no incluye explícitamente los datos de candidatos a eventos ν_μ , sin embargo estos han sido usados por la colaboración para constreñir el histograma de eventos ν_e . Por tal razón no se presenta el correspondiente histograma de eventos observados y esperados de ν_μ . Es importante resaltar que la expectación publicada ha sido normalizada para adecuarse a los datos observados: se observan cerca de 20 % más eventos que los esperados. Hay dos principales fuentes que pueden lograr ese efecto, un error en la normalización del flujo o en la normalización de la sección eficaz, principalmente de la reacción CCQE, sin embargo en este trabajo no se lida con eso. Baste con saber que la correspondiente componente de ν_e es consecuentemente normalizada en el proceso de constrección de las incertidumbres.

En la figura 4.1 se muestran los resultados obtenidos para este análisis. Del lado izquierdo se muestran los histogramas de eventos candidatos a ν_e y de exceso de eventos ν_e , los dos normalizados por la energía. Nótese que no hay un exceso considerable de eventos: para $E_\nu^{QE} > 675$ MeV, los puntos de los datos están esencialmente encima del fondo esperado; a pesar de que para $475 < E_\nu^{QE} < 675$ MeV se observaron más datos que los esperados, sin embargo el error total (estadístico más sistemático) es

¹En la opinión del autor, un caballo modoso, difícil de domar, terco y poco intuitivo. Pero robusto como un elefante.

consistente con tal desviación. Es decir, no hay evidencia de oscilaciones de neutrinos. Del lado derecho de la figura las curvas de colores determinan los límites obtenidos con estos datos, los cuales reiteran lo antes dicho: al nivel de confianza correspondiente, se descarta la posibilidad de oscilaciones en la región superior derecha del espacio ($\sin^2 2\theta, \Delta m^2$). Una interpretación alternativa sería que se permiten las oscilaciones al nivel de confianza citado para cualquier punto en la región inferior izquierda con la misma significación, así pues, el punto nulo es estadísticamente equivalente a cualquier otro punto en esa región. Se observaron un total de 388 candidatos a eventos ν_e y un exceso de $20.19 \pm 19.18 \pm 36.58$ eventos (error estadístico y sistemático respectivamente) en la región de $475 < E_\nu^{QE} < 3000$ MeV, es decir: no se observa un exceso significativo. El mejor ajuste se encuentra en $(0.0011, 4.23 \text{ eV}^2)$, con un valor de $\chi^2/\text{g.l.} = 0.90/6$ lo cual da una probabilidad de 98.9 % para $475 < E_\nu^{QE} < 3000$ MeV, por su parte el ajuste de oscilación para la hipótesis nula tiene un valor de $\chi^2/\text{g.l.} = 1.91/6$ con una probabilidad de 92.8 % en la misma región de energía. El método usado para obtener estos límites es la búsqueda por barrido unidimensional (descrito en § 3.3) estos límites no muestran ninguna diferencia perceptible a los publicados.

En dos tonos de azul se muestran las regiones que permiten oscilaciones por el experimento LSND. Los resultados obtenidos en la búsqueda de oscilaciones $\nu_\mu \rightarrow \nu_e$ por MiniBooNE son incompatibles con los de LSND. Al 90 % N.C. MiniBooNE excluye la región permitida, al mismo nivel de confianza, por LSND. Concluyendo, cualitativamente, que los dos experimentos son incompatibles.

En la región de bajas energías, es decir $E_\nu^{QE} < 475$ MeV, la colaboración observó un exceso de eventos candidatos a ν_e , sin embargo vio que el ruido inducido por ν_μ , parte del cual es difícil de modelar, es grande. Había sospechas bien fundadas sobre la naturaleza de los eventos observados para el rango de bajas energías, a pesar de que no se hallaron problemas con la estimación del fondo para tal rango. Probaron que si el ajuste se hacía a partir de 475 MeV se lograba reducir considerablemente el fondo, con poco impacto en la sensibilidad para el ajuste de oscilaciones. Así pues el ajuste se hizo en el rango $475 < E_\nu^{QE} < 3000$ MeV, sin embargo esta situación cambió con la mejora de la estimación del fondo. De lo cual se habla más en la siguiente sección.

4.2. Búsqueda de aparición de ν_e , 2009

Después de haber hecho una investigación detallada sobre el exceso de eventos de electrón a bajas energías se presenta un nuevo artículo para hablar sobre un “exceso inexplicado de eventos de electrón de un haz de neutrinos de 1 GeV” [178]. Después de varias mejoras a la forma en que se analizaban los datos, se simulaban los fondos y a la reconstrucción de los eventos; así como un incremento de la muestra de datos de 5.58×10^{20} POT a 6.46×10^{20} POT, el exceso de eventos de electrón perduró. En esta ocasión se incluyen los datos a eventos ν_μ , los cuales son usados para la maquinaria del ajuste que otorga los límites de exclusión y para constreñir los errores de los histogramas. Los datos pueden ser adquiridos por quien lo desea en la página del experimento [191].

La figura 4.2 muestra del lado izquierdo y arriba el histograma de eventos ν_μ , izquierda y al centro el histograma de eventos ν_e , izquierda abajo el exceso de eventos ν_e . Obsérvese que los eventos ν_μ y la expectación son notablemente similares, en este caso la diferencia de normalización entre la predicción de ν_μ y los datos corrige automáticamente la predicción de eventos de ν_e a través de los elementos fuera de la diagonal de la matriz de covarianza durante el ajuste.

Se muestra el histograma de eventos ν_e para el rango de energía $475 < E_\nu^{QE} < 3000$ MeV, más adelante se mostrará desde el mínimo de energía. Para estos datos se puede notar, a pesar de su error

asociado, un exceso en el primer *bin*. El resto se encuentran por encima o debajo del fondo esperado, todos consistentes como fluctuaciones. Como antes, los resultados obtenidos son inconsistentes con la oscilación de dos neutrinos en el vacío. En total se observaron 115 472 eventos ν_μ , en la región de señal de $475 < E_\nu^{QE} < 1\,300$ MeV se observaron 420 eventos ν_e , esperando $397.00 \pm 19.92 \pm 30.87$ lo que corresponde a un exceso de 19.92 ± 36.74 eventos, es decir no se observó un exceso apreciable. El mejor ajuste se encuentra en $(0.0009, 3.46 \text{ eV}^2)$, con un valor de $\chi^2/\text{g.l.} = 6.66/14$ lo cual da una probabilidad de 94.70 % para $475 < E_\nu^{QE} < 3\,000$ MeV, por su parte la hipótesis nula tiene un valor de $\chi^2/\text{g.l.} = 8.80/16$ con una probabilidad de 92.16 % en la misma región de energía. El método usado para obtener estos límites es la búsqueda por barrido unidimensional (descrito en § 3.3) para este artículo no se presentaron contornos de confianza, sin embargo al comparar los que se obtuvieron aquí con un trabajo interno [200] no se observan diferencias.

Por completez y con la intención de compararlos con los que se muestran posteriormente se agregan los contornos de confianza obtenidos usando el rango completo de energía $200 < E_\nu^{QE} < 3\,000$ MeV, figura 4.3. Del lado izquierdo se tienen los contornos obtenidos usando el método de búsqueda por barrido bidimensional (descrito en § 3.4), con el cual el mejor ajuste se encuentra en $(0.0017, 3.15 \text{ eV}^2)$. Por otra parte, del lado derecho se tienen los contornos obtenido con el método de máxima verosimilitud (descrita en § 3.5), el mejor ajuste se encuentra en $(0.0015, 3.14 \text{ eV}^2)$. Nótese que para este caso se tiene un contorno cerrado a 68 % N.C. Adicionalmente en la parte izquierda de la figura 4.5 se muestran las correcciones frecuentistas F-C para el método de la máxima verosimilitud (§ 3.6). Por definición, el mejor ajuste y las probabilidades del mejor ajuste y el punto nulo son las mismas que para el método de máxima verosimilitud. Nótese que los límites no excluyen una región tan grande, por ejemplo el contorno de 90 % N.C. excluye, aproximadamente, la región que antes excluía el contorno de 95 % N.C.; más aún la región permitida de 60 % N.C. incluye varias porciones de alta Δm^2 . Se hicieron correcciones en 2 285 puntos distintos, cada uno con $n_f = 2\,048$; en total se corrieron $2\,048 \times 2\,285 = 4\,679\,680$ experimentos ficticios.

El resultado obtenido en el modo de neutrinos, a pesar de las mejoras que se hicieron y del incremento de estadística, sigue siendo inconsistente con lo obtenido por el experimento LSND, las regiones que permiten oscilación por los dos experimentos son, en gran medida, disconexas y a 90 % N.C. MiniBooNE sigue excluyendo la región permitida por LSND. Como se reafirmará con la última publicación de datos, el exceso observado a bajas energías no es del todo consistente con oscilaciones de neutrinos como las de LSND.

4.3. Búsqueda de aparición de $\bar{\nu}_e$, 2010

En 2009 se publica el primer artículo en que la colaboración reporta el estado de la búsqueda de oscilaciones $\bar{\nu}_\mu \rightarrow \bar{\nu}_e$ en un haz de antineutrinos [179], tal reporte no observa ningún exceso significativo de eventos $\bar{\nu}_e$. En esta tesis no se hizo ningún esfuerzo por reproducir los resultados de antineutrinos de este análisis, ya que no son concluyentes dada la baja estadística. Para finales de 2010, después de un incremento de 3.39×10^{20} POT a 5.66×10^{20} POT, MiniBooNE publicó un artículo en el que reporta un exceso de eventos $\bar{\nu}_e$ en la búsqueda de oscilaciones en modo de antineutrinos [180], estos datos provienen de una corrida de 2006 a 2009 y están públicamente disponibles en la página del experimento [192].

Este nuevo resultado, al igual que la versión de 2009, supone que solo hay oscilaciones $\bar{\nu}_\mu \rightarrow \bar{\nu}_e$, asume que la desaparición de $\bar{\nu}_\mu$ es despreciable y que los ν_μ no oscilan (como lo observó el experimento en el

modo de neutrinos). Sin embargo, en la versión estándar del análisis no se considera el exceso a bajas energías observado en el modo de neutrinos para la predicción de antineutrinos². La colaboración determinó que estas simplificaciones podrían cambiar la probabilidad de oscilación $\bar{\nu}_\mu \rightarrow \bar{\nu}_e$ ajustada en un 10 %. Los resultados oficiales analizan oscilaciones en el rango completo de energía $200 < E_\nu^{QE} < 3\,000$ MeV, oscilaciones cuando $E_\nu^{QE} > 475$ MeV y el caso especial de $E_\nu^{QE} > 200$ MeV en el que se substraen los eventos que podrían provenir del exceso a bajas energías observado en el modo de neutrinos. A pesar de que para los otros casos, $E_\nu^{QE} > 475$ MeV y rango total de energía con eventos substraídos, los resultados no son tan estadísticamente significativos; el exceso de eventos permanece. Para este trabajo solo se presentan los resultados para $E_\nu^{QE} > 200$ MeV, en retrospectiva, no tiene mucho sentido desechar la región de bajas energías.

Del lado izquierdo de la figura 4.4 se aprecian los histogramas de datos. En la parte superior se observan los datos de eventos $\bar{\nu}_\mu$ y la expectación de eventos $\bar{\nu}_\mu$, en general la normalización de la estimación requirió un incremento de 13 %, lo cual es compatible con incertidumbre combinada del flujo de neutrinos y secciones eficaces. Los datos son una muestra de 24 771 eventos que pasan los requisitos de selección CCQE de $\bar{\nu}_\mu$. En la parte de abajo se tiene el histograma de eventos $\bar{\nu}_e$ y hasta abajo el exceso de eventos $\bar{\nu}_e$. Ahora se observa un exceso en varios *bins*, en tres de los cuales, es claramente más grande que lo que una fluctuación permitiría. En el rango de $200 < E_\nu^{QE} < 3\,000$ MeV se observaron un total de 277 eventos $\bar{\nu}_e$, la expectación era de $233.74 \pm 15.29 \pm 16.51$ (error estadístico y sistemático), lo que corresponde a un exceso de 43.26 ± 22.50 a 1.9σ . En esta región de energía, estos números coinciden con los publicados [180] que usan la misma región de energía. Se tienen un total de 24 568 eventos $\bar{\nu}_\mu$. Cabe notar que el exceso en $300 < E_\nu^{QE} < 375$ MeV es mayor de lo que se esperaría para la oscilación de neutrinos, sin embargo el resto de los puntos concuerdan mejor: lo que se puede notar al compararlos con el histograma rosa de mejor ajuste. Como es de esperarse, incrementar la estadística ayuda a disminuir las fluctuaciones, lo cual se mostrará en las publicaciones más recientes. A la derecha de la figura 4.4 se encuentran las regiones que permiten oscilaciones $\bar{\nu}_\mu \rightarrow \bar{\nu}_e$ en el experimento MiniBooNE. A diferencia de los análisis pasados, ahora se tiene una mejor concordancia entre MiniBooNE y LSND, a 90 % N.C. MiniBooNE y LSND tienen una amplia región de afinidad y a 99 % N.C. MiniBooNE cubre casi en su totalidad a LSND. Recordemos que LSND era precisamente un experimento de oscilación de neutrinos $\bar{\nu}_\mu \rightarrow \bar{\nu}_e$. El mejor ajuste se encuentra en $(0.0066, 4.42 \text{ eV}^2)$, con un valor de $\chi^2/\text{g.l.} = 12.77/7$ lo cual da una probabilidad de 7.80 % para $200 < E_\nu^{QE} < 1\,300$ MeV, por su parte la hipótesis nula tiene un valor de $\chi^2/\text{g.l.} = 25.40/9$ con una probabilidad de 0.26 % en la misma región de energía. Estos valores son ligeramente distintos a los oficiales, en los cuales se usa la región de señal de 200–1 250 MeV cuyos datos no son públicos. Estas curvas se obtienen con el método de máxima verosimilitud (descrito en § 3.5), los resultados obtenidos en esta tesis y los oficiales son idénticos, dentro del límite de precisión de cálculos de punto flotante. En la parte derecha de la figura 4.5 se encuentran los contornos obtenidos después de las correcciones frequentistas F–C (descrito en § 3.6). Nótese que a pesar de la reducción del tamaño de los contornos, la concordancia entre MiniBooNE y LSND sigue siendo bastante buena. Estos contornos no son idénticos a los oficiales, a saber: la pequeña región de 95 % N.C. alrededor de $\sim 10 \text{ eV}^2$ no aparece en los contornos oficiales y la parte izquierda del contorno de 99 % N.C. es un poco más estrecha. Para cada uno de los 2 199 puntos que se probaron se hicieron $n_f = 2\,048$ experimentos ficticios; en total se corrieron $2\,048 \times 2\,199 = 4\,503\,552$ experimentos ficticios.

²La colaboración también investiga el efecto que tendría el exceso a bajas energías.

4.4. Búsqueda de aparición de ν_e , 2012–2013

Después de la última publicación de oscilaciones, MiniBooNE continuó tomando más datos en modo de antineutrinos solamente y no hubo más datos de modo de neutrinos, los cuales eran mucho más estadísticamente significativos. Se tomaron datos en modo de neutrinos en dos períodos: 2003–2006 y 2007–2008, los dos alternando con modo de antineutrinos. Se publicaron dos resultados de la búsqueda de aparición de neutrinos, uno en 2007 § 4.1 y el otro en 2009 § 4.2. En 2012 la colaboración vuelve a analizar los datos correspondientes a 6.46×10^{20} POT, pero con varias mejoras. Los principales cambios son:

- Se añadió a la matriz total una matriz correspondiente a la incertidumbre de la normalización y forma del espectro del momento transferido (Q^2) para eventos $CC\pi$ (producción de piones por interacciones de corriente cargada) y una matriz correspondiente a la producción de K^- . Además se usa un nuevo algoritmo para generar la matriz de covarianza asociada a la producción de piones negativos y positivos en el haz y también se añadió el error estadístico debido a la señal.
- Suavizado de las distribuciones usadas para generar algunas de las matrices parciales de covarianza.
- Nuevas restricciones a la producción de mesones K^+ , debidas al experimento SciBooNE [201].
- Ajuste usando el método de máxima verosimilitud, esta es la primera vez que la colaboración publica los resultados del modo de neutrinos usando este robusto método.

Los datos se pueden descargar libremente en la página del experimento [193]. A pesar de no haber sido aceptado para publicación, el artículo [202] contiene valiosa información sobre el ajuste al modo de neutrinos. En la versión aceptada por la revista [181], el análisis al modo de neutrinos pierde cierta relevancia³.

Estos datos solamente fueron analizados usando el método de máxima verosimilitud (§ 3.5) y las correcciones frecuentistas F–C del mismo (§ 3.6. La figura 4.6 presenta ambos. Del lado izquierdo se presentan los contornos que permiten oscilaciones en modo de neutrinos por el experimento MiniBooNE, se debe comparar esta figura a la equivalente del modo de neutrinos pero de 2009, el lado derecho de la figura 4.3. Después de tal comparación queda claro la importancia de las mejorías hechas a las simulaciones y estimación de errores, se pasa de tener un contorno cerrado a 68 % N.C. a tener tres contornos cerrados, permitiendo oscilaciones hasta 95 % N.C. El mejor ajuste se encuentra en el punto $(0.0020, 3.14 \text{ eV}^2)$, en la región de $200 < E_\nu^{QE} < 1300 \text{ MeV}$ tiene un valor de $\chi^2/\text{g.l.} = 16.54/7$ lo cual da una probabilidad de 2.06 %, por su parte la hipótesis nula tiene un valor de $\chi^2/\text{g.l.} = 22.58/9$ con una probabilidad de 0.72 % en la misma región de energía⁴. Con la intención de seguir el contorno de 95 % N.C. se podría extender el análisis para que abarque la región con $\sin^2 2\theta < 3 \times 10^{-4}$; se omite analizar tales parámetros porque se busca ser consistente con el resto de los resultados presentados. Más aún, como se puede comprobar con las correcciones frecuentistas F–C que aparecen del lado derecho de la figura 4.6, esa región está sobrecubierta y en realidad el contorno de 95 % N.C. es más estrecho. El lado izquierdo de la figura 4.5 tiene los contornos equivalentes de la publicación pasada

³Los datos correspondientes a este análisis fueron publicados a finales de 2012, sin embargo el artículo salió hasta 2013.

⁴Los resultados oficiales son: $\chi^2/\text{g.l.} = 13.2/6.8 \rightarrow P = 6.1\%$ para el mejor ajuste y $\chi^2/\text{g.l.} = 22.8/8.8 \rightarrow P = 0.5\%$ para la hipótesis nula; en la región de señal 200–1 250 MeV.

del modo de neutrinos, es decir los que tienen correcciones frecuentistas. También en este caso se puede notar la mejora significativa que otorgan las nuevas estimaciones de los errores.

Dentro del margen de error esperado por la incertidumbre en las operaciones de punto flotante, los contornos obtenidos con el método de máxima verosimilitud, lado izquierdo de la figura 4.6, son idénticos a los oficiales. Las correcciones frecuentistas por su parte, lado derecho de la misma figura, presentan ligeras diferencias; en los análisis que se realizaron en este trabajo el lado izquierdo del contorno de 95 % N.C. es ligeramente más estrecho y la diferencia más notable es que en la publicación oficial el mismo contorno no presenta dos regiones desconexas para $\Delta m^2 > 2 \text{ eV}^2$. Para las correcciones frecuentistas de estos resultados, en buena parte motivado por las diferencias ya mencionadas, se corrieron una gran cantidad de experimentos ficticios. Como se explica en § 3.6, hacer correcciones frecuentistas es muy demandante, por lo mismo solo se hace para algunos puntos, con los cuales se interpola para el resto, o se omite por completo para las regiones que corresponden a la esquina inferior izquierda y superior derecha de la gráfica. Se probaron 7 232 puntos distintos en el espacio de parámetros $(\sin^2 2\theta, \Delta m^2)$, con distintas cantidades de experimentos ficticios, la mayoría solamente con 2 048, pero aquellos puntos que se encontraban en la región dispareja a los resultados oficiales se probaron con $2 048 \times 2 = 4 096$ y hasta con $2 048 \times 3 = 6 144$ experimentos ficticios. En total se corrieron 18 616 320 experimentos ficticios⁵.

Del lado izquierdo de la figura 4.8 se presentan los histogramas del modo de neutrinos. En la parte superior se aprecia el histograma de candidatos a eventos ν_μ normalizado a la energía de cada *bin*, el espectro de ν_μ tiene un máximo alrededor de los 600 MeV y concuerda formidablemente con la expectación (recuérdese que esta ha sido normalizada dentro del rango de incertidumbre aceptado para adaptarse a lo observado). Debajo se encuentran los histogramas de eventos ν_e , a diferencia de los presentados en la figura 4.2, estos incluyen el intervalo de bajas energías. En este par de histogramas se debe apreciar el exceso de eventos, más allá de lo que se esperaría para oscilación de dos neutrinos, de los tres primeros *bins*: ni aún considerando la incertidumbre de cada uno se asemejan al mejor ajuste de oscilaciones (histograma con guiones rosas). Además, en general lo observado por MiniBooNE no guarda semejanza con lo que se hubiera observado si el mejor ajuste fuera aquel encontrado por LSND (histograma con lineas punteadas azules). En el rango de la señal $200 < E_\nu^{QE} < 1300$ MeV, se observaron un total de 964 eventos ν_e , cuando la expectación era de $816.81 \pm 28.58 \pm 40.74$ (error estadístico y sistemático) lo que corresponde a un exceso de 147.19 ± 49.77 eventos ν_e a 3.0σ ⁶. En el rango completo de energía, se observan un total de 115 472 eventos ν_μ y 1 068 eventos ν_e , formando un total de 116 540 candidatos a eventos que pasan los criterios de selección. Tomando en cuenta la cantidad de protones enviados al blanco en modo de neutrinos, en promedio se requieren 5.54×10^{15} protones en el blanco para detectar un neutrino que pase los criterios de selección, es decir, se obtiene un evento que pase todos los criterios cada minuto o par de minutos de haz corriendo.

4.5. Búsqueda de aparición de $\bar{\nu}_e$, 2012–2013

En 2012 la colaboración publica³ un artículo sobre el estatus de la búsqueda de oscilaciones [181], en este muestra los resultados de la búsqueda de modo de neutrinos con la misma estadística que se

⁵De hecho se corrieron muchísimos más, pero debido a algunos errores o por ser consistente con los otros resultados presentados esos experimentos no se usan.

⁶Los resultados oficiales son: 952 eventos ν_e , expectación de $790.1 \pm 28.1 \pm 38.7$ y un exceso de 162.0 ± 47.8 (3.4σ); en la región de señal 200–1 250 MeV.

tenía en la publicación de 2009 pero varias mejorías, los resultados de la búsqueda de antineutrinos contando casi con el doble de estadística y mejorías en la restricción de errores, simulaciones y análisis. Los datos en modo de antineutrinos corresponden a 11.27×10^{20} POT y corresponden al rango completo de energía de $200 < E_\nu^{QE} < 3000$ MeV. Los datos pueden ser descargados de la página del experimento [194]. Los resultados que se presentan aquí corresponden a los de la primera versión del artículo [202], siendo los resultados presentados en la publicación [181] ligeramente distintos, ya que la simulación de la señal usada para esa publicación permite que tanto los neutrinos como antineutrinos oscilen, a diferencia de la simulación usada en la primera versión (y en este trabajo) que no permite que los neutrinos oscilen (ver tabla 3.1). Esos análisis también fueron reproducidos, pero se omiten por restricciones de espacio y porque presentan problemas de interpolación que resultan en contornos de peor calidad visual. Baste saber que usar la otra simulación afecta ligeramente los resultados finales, pero siguen siendo consistentes con los presentados aquí.

Entre las mejoras que se cuentan, hay una mejor determinación del fondo intrínseco de ν_e proveniente del decaimiento de K^+ gracias a las medidas de neutrinos de gran energía hechas por el experimento SciBooNE [201], una mejor determinación de los π^0 de corriente neutra y fondos de eventos externos en modo de antineutrinos debidos al incremento de la estadística en la muestra de datos y el uso de un ajuste de máxima verosimilitud con correcciones frecuentistas.

Para obtener las regiones de confianza que permiten oscilaciones por el experimento MiniBooNE en modo de antineutrinos, figura 4.7, se uso el método de máxima verosimilitud (§ 3.5), parte izquierda de la figura, del cual se hicieron correcciones frecuentistas (§ 3.6), parte derecha de la figura. Este par de gráficas deben ser comparadas con las correspondientes de la publicación de 2010, parte derecha de la figura 4.4 y parte derecha de la figura 4.5, respectivamente. Se debe notar que los contornos actuales no son tan estrechos, en particular el de 99 % N.C., sin embargo el incremento de estadística ha ayudado a disminuir las fluctuaciones, lo que queda claro al observar los contornos de 60 % N.C. del método de máxima verosimilitud. En este modo se puede observar una gran concordancia entre lo obtenido por LSND y MiniBooNE. El mejor ajuste de oscilación en el rango completo de energía se encuentra se encuentra en el punto $(0.8423, 0.05 \text{ eV}^2)$, en la región de $200 < E_\nu^{QE} < 1300$ MeV tiene un valor de $\chi^2/\text{g.l.} = 5.47/7$ lo cual da una probabilidad de 60.30 %, por su parte la hipótesis nula tiene un valor de $\chi^2/\text{g.l.} = 16.78/9$ con una probabilidad de 5.22 % en la misma región de energía⁷. Los contornos frecuentistas muestran ligeras diferencias con los resultados oficiales: la parte izquierda del contorno de 99 % N.C. es ligeramente más estrecho en este trabajo y existen variaciones en las regiones de 95 N.C. para $\Delta m^2 > 10 \text{ eV}^2$, lo cual seguramente es un artificio del método de interpolación usado para graficar. Este fue el primer resultado frecuentista que se obtuvo en este trabajo, por la misma razón una gran cantidad de puntos fueron investigados para estudiar las diferencias que se observaron con los resultados oficiales. Se hicieron correcciones frecuentistas en 8 478 puntos distintos, en la mayoría se corrieron 2 048 experimentos ficticios y en las regiones que mostraban discrepancias se corrieron 4 096 o 6 144; en total se corrieron 23 375 872 experimentos ficticios⁵.

Del lado derecho de la figura 4.8 se presentan los histogramas de datos del modo de antineutrinos para la muestra de 11.27×10^{20} POT. Como antes, en la parte superior se encuentra el histograma de eventos $\bar{\nu}_\mu$, de este es interesante ver que la forma del espectro es bastante similar a su contra parte del modo de neutrinos pero aproximadamente la mitad de altura. Debajo se encuentra las histogramas de los candidatos a eventos $\bar{\nu}_e$, intuitivamente queda claro el efecto que tiene el incremento de la estadística al ver el comportamiento exponencial que siguen los eventos $\bar{\nu}_e$ (en medio), a diferencia

⁷Los resultados oficiales son: $\chi^2/\text{g.l.} = 5.0/7 \rightarrow P = 66\%$ para el mejor ajuste y $\chi^2/\text{g.l.} = 16.6/8.9 \rightarrow P = 5.4\%$ para la hipótesis nula; en la región de señal 200–1 250 MeV.

de la publicación pasada, figura 4.4, en donde algunos puntos del espectro se desvían de la tendencia global. Hasta abajo se observa el exceso de eventos $\bar{\nu}_e$, salvo el *bin* de 200–275, que tiene un exceso ligeramente mayor a lo esperado, y el *bin* de 950–1 100, con una ligera carencia, el comportamiento de los datos es consistente con oscilaciones (guiones rosas). La concordancia con lo que hubiera observado MiniBooNE si el fenómeno estuviera descrito por el mejor ajuste de LSND (líneas punteadas azules) no es tan bueno pero sigue siendo bastante cercano. MiniBooNE observó un total de 482 eventos, con una expectación de $400.64 \pm 20.02 \pm 20.45$ (error estadístico y sistemático) que corresponden a un exceso de 81.36 ± 28.62 eventos $\bar{\nu}_e$ a 2.8σ en la región de señal $200 < E_\nu^{QE} < 1\,300$ MeV⁸. Para el rango completo de energía, en total se observaron un total de 50 455 candidatos a eventos $\bar{\nu}_\mu$ y 551 candidatos a eventos $\bar{\nu}_e$, para un total de 51 006 candidatos a eventos que pasan los criterios de selección. En el modo de antineutrinos se enviaron 11.27×10^{20} protones al blanco, en promedio hacen falta 2.19×10^{20} protones en el blanco para detectar un antineutrino que pase los criterios de selección, cuatro veces más que para el modo de neutrinos.

A esta altura del experimento aumentar la cantidad de datos no otorgaría mucho información, ya que si bien con más datos se conseguiría disminuir el error estadístico no lograría disminuir el error sistemático.

4.6. Búsqueda combinada de aparición de ν_e y $\bar{\nu}_e$, 2012

En agosto de 2012 la colaboración MiniBooNE presenta un análisis combinado de los modos de neutrinos y antineutrinos [202], correspondiente a 6.46×10^{20} POT y 11.27×10^{20} POT respectivamente. Sin embargo, el artículo es rechazado por la futilidad que significa hacer un análisis combinado de dos comportamientos que claramente no son compatibles, injustificando su compatibilidad a pesar del exceso de eventos que ambos ven. En este trabajo se reproducen esos análisis, a pesar de que en la versión final de esa publicación [181], no se hayan presentado.

Las curvas obtenidas que permiten oscilación de neutrinos combinando los datos de neutrinos y antineutrinos se presentan en la figura 4.9. Del lado izquierdo las regiones usando el método de máxima verosimilitud (§ 3.5) y del derecho las obtenidas al hacer correcciones frecuentistas (§ 3.6). Para este resultado la diferencia entre los dos casos es marginal, apenas aumentando ligeramente los contornos. Los datos de neutrinos trasladan las regiones hacia valores más bajos de Δm^2 . Para generar los contornos frecuentistas se probaron 2 208 puntos, la mayoría con 2 048 experimentos ficticios, pero los puntos en donde se observaron diferencias menores se hicieron 4 096; en total se corrieron 5 130 240 experimentos ficticios. El mejor ajuste de oscilación en el rango completo de energía se encuentra se encuentra en el punto $(1.00, 0.038 \text{ eV}^2)$, en la región de $200 < E_\nu^{QE} < 1\,300$ MeV tiene un valor de $\chi^2/\text{g.l.} = 25.42/16$ lo cual da una probabilidad de 6.27 %, por su parte la hipótesis nula tiene un valor de $\chi^2/\text{g.l.} = 48.01/18$ con una probabilidad de 0.01 % en la misma región de energía⁹. Para la región de señal de 200–1 300 MeV se observaron un total de 1446 eventos ν_e y $\bar{\nu}_e$, cuando se esperaban $1206.85 \pm 34.74 \pm 53.41$ (error estadístico y sistemático), lo que equivale a un exceso combinado de 239.15 ± 63.71 eventos a 3.7σ ¹⁰.

⁸Los resultados oficiales son: 478 eventos $\bar{\nu}_e$, expectación de $399.6 \pm 20.0 \pm 20.3$ y un exceso de 78.4 ± 28.5 (2.8σ); en la región de señal 200–1 250 MeV.

⁹Los resultados oficiales son: $\chi^2/\text{g.l.} = 24.7/15.6 \rightarrow P = 6.7\%$ para el mejor ajuste, en la región de señal 200–1 250 MeV. No se tiene información para la hipótesis nula.

¹⁰Los resultados oficiales son: 1430 eventos ν_e y $\bar{\nu}_e$, expectación de $1189.7 \pm 34.5 \pm 52.6$ y un exceso de 240.3 ± 62.9 (3.8σ); en la región de señal 200–1 250 MeV.

Las diferencias que hay entre los contornos oficiales y los obtenidos en esta tesis para las correcciones frecuentistas se encuentran en la parte izquierda de la curva de 3σ N.C.: en este trabajo la hendidura alrededor de 6 eV^2 es más pronunciada y por debajo de 0.5 eV^2 la curva es más estrecha. Para $\Delta m^2 > 8 \text{ MeV}$ también hay diferencias, pero seguramente se deben solamente a artificios de la interpolación.

Las marcadas diferencias en los espectros de ν_e y $\bar{\nu}_e$ no se pueden explicar satisfactoriamente con modelos de $3 + 1$ neutrinos, los tres parámetros de tal formalismo son incapaces de acomodar los distintos comportamientos observados (revisar § 3.2.1). Los modelos con 2 o 3 neutrinos estériles, los cuales cuentan con una fase de violación CP que daría cuenta de los distintos comportamientos, parecen ajustar los datos exitosamente [203].

También se estudió el efecto de las correlaciones entre los neutrinos y antineutrinos en los análisis, anulando los términos correspondientes a esas relaciones. El nivel de confianza al cual se obtienen regiones cerradas disminuye a $\sim 90\%$. Se omiten en la presentación de este trabajo por restricciones de espacio.

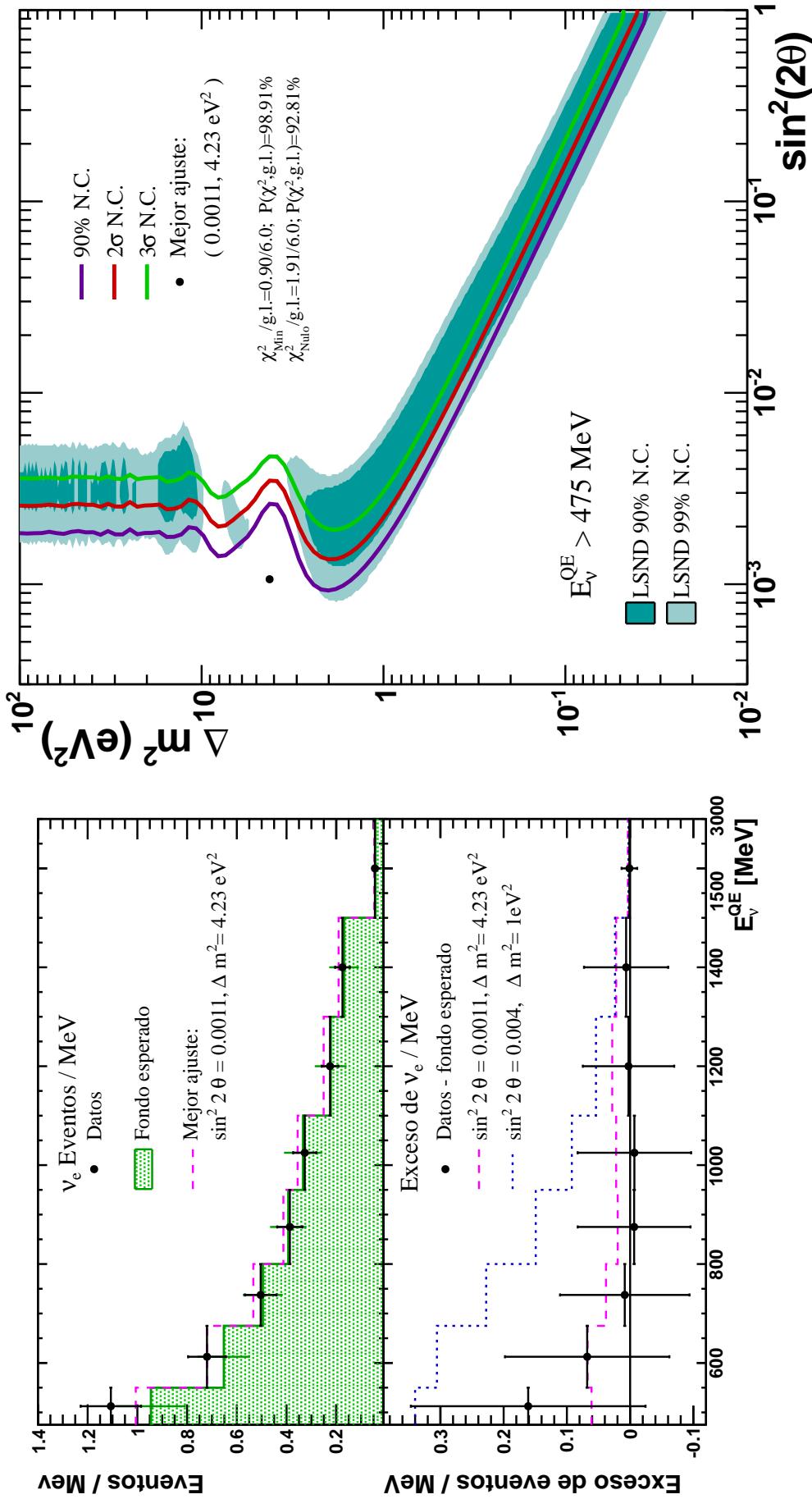


Figura 4.1: Resultados en modo de neutrinos (475–3 000 MeV) datos liberados en 2007 [177, 190]. Arriba Izq.: distribución de E_ν^{QE} para ν_e (datos: puntos con error estadístico), fondo esperado (histogramas con error sistemático) y señal esperada para el punto de mejor ajuste (guiones rosa). Abajo Izq.: exceso de eventos ν_e como función de E_ν^{QE} (puntos con error total) también se muestra la expectativa para el punto de mejor ajuste (guiones rosas) y para el mejor ajuste de LSND (punteada azul). Der.: Límites de exclusión y punto de mejor ajuste, usando el método de búsqueda por barrido unidimensional § 3.3.

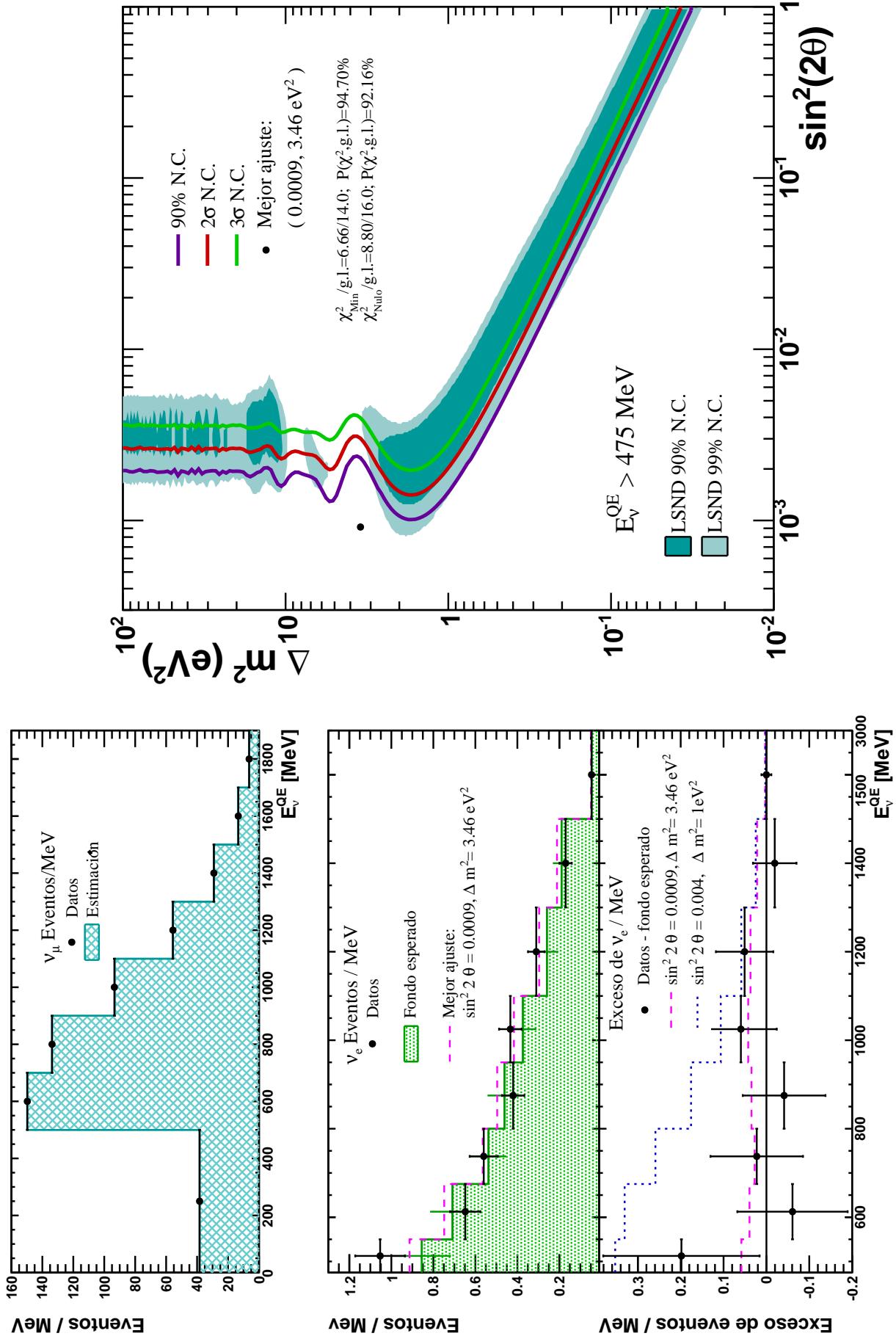


Figura 4.2: Resultados en modo de neutrinos (475–3000 MeV) datos liberados en 2009 [178, 191]. Arriba Izq.: distribución de E_ν^{QE} para ν_μ (datos: puntos con error estadístico) y simulación (histogramas con errores constreñidos). Medio Izq.: distribución de E_ν^{QE} para ν_e (datos: puntos con error estadístico), fondo esperado (histogramas con errores constreñidos) y señal esperada para el punto de mejor ajuste (guiones rosa). Abajo Izq.: exceso de eventos ν_e como función de E_ν^{QE} (puntos con error total) también se muestra la expectativa para el punto de mejor ajuste (guiones rosa) y para el mejor ajuste de LSND (punteada azul). Der.: Límites de exclusión y punto de mejor ajuste, usando el método de búsqueda por barrido unidimensional § 3.3.

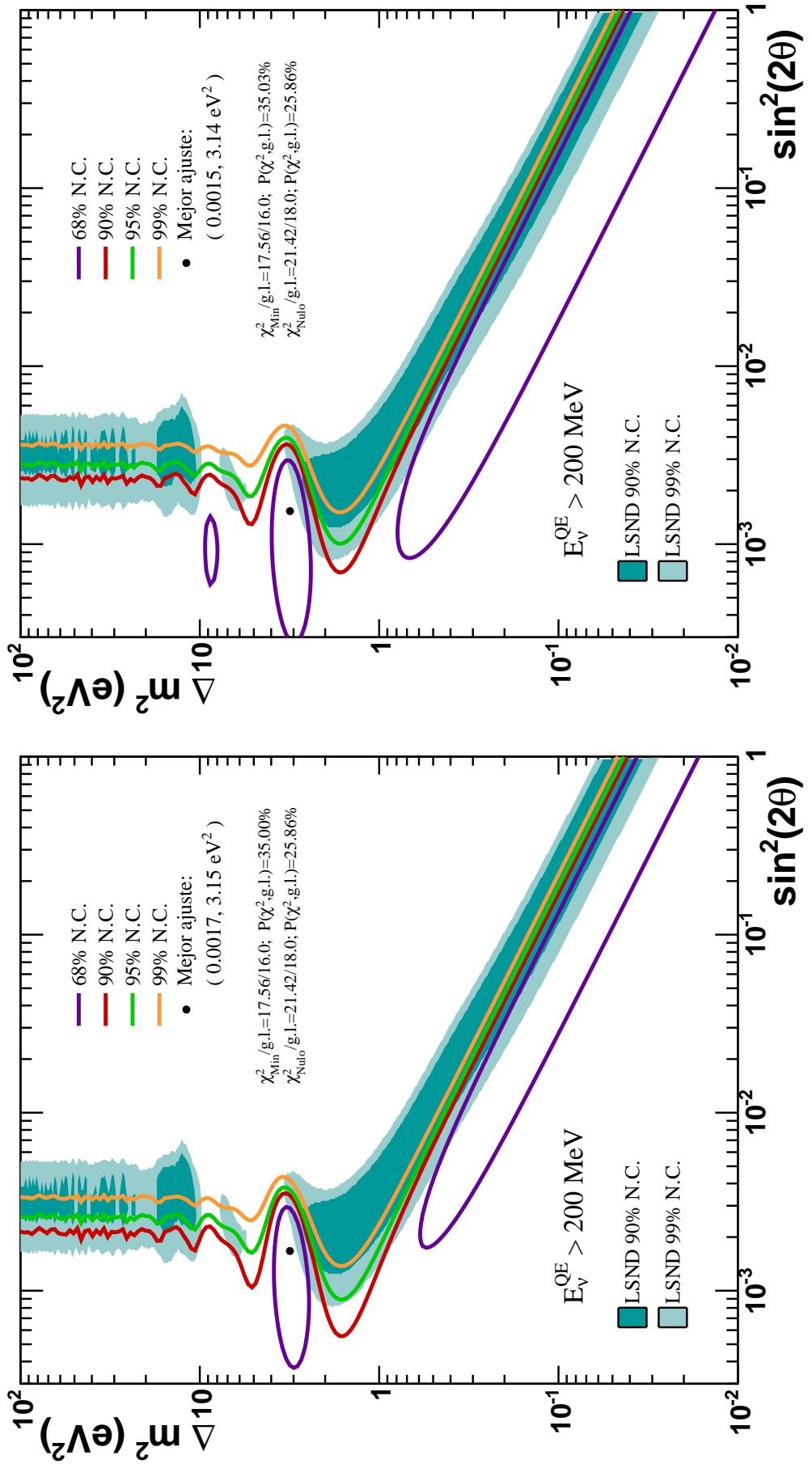


Figura 4.3: Contornos en modo de neutrinos (200–3 000 MeV) datos liberados en 2009 [178, 191]. Izq.: Contornos de confianza y punto de mejor ajuste, usando el método de búsqueda por barrido bidimensional § 3.4. Der.: Contornos de confianza y punto de mejor ajuste, usando el método de máxima verosimilitud § 3.5.

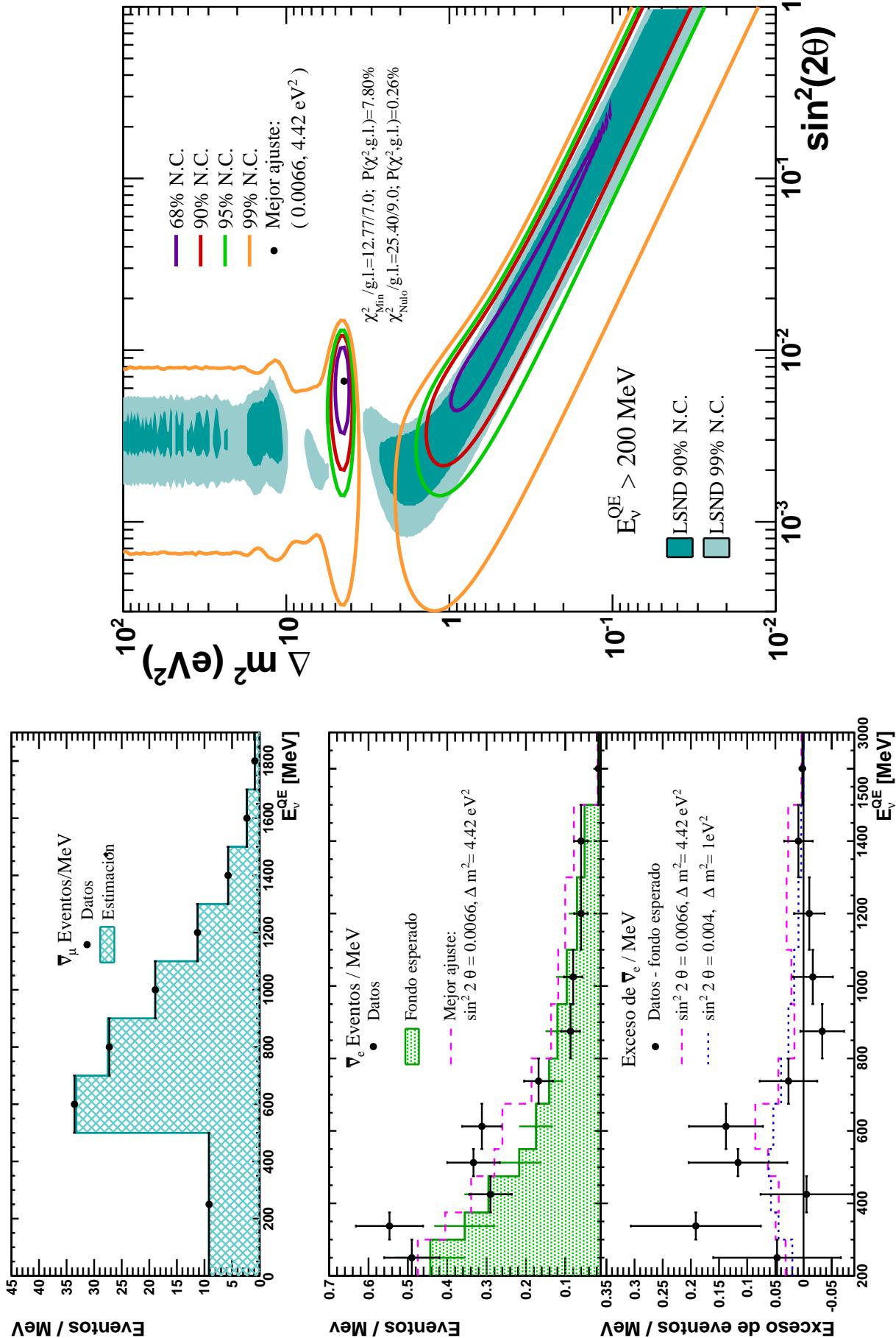


Figura 4.4: Resultados en modo de **antineutrinos** (200–3 000 MeV) datos liberados en 2010 [180, 192]. Arriba Izq.: distribución de E_{ν}^{QE} para $\bar{\nu}_{\mu}$ (datos: puntos con error estadístico) y simulación (histogramas con errores constreñidos). Medio Izq.: distribución de E_{ν}^{QE} para $\bar{\nu}_e$ (datos: puntos con error estadístico), fondo esperado (histogramas con errores constreñidos) y señal esperada para el punto de mejor ajuste (guiones rosa). Abajo Izq.: exceso de eventos $\bar{\nu}_e$ como función de E_{ν}^{QE} (puntos con error total) también se muestra la expectativa para el punto de mejor ajuste (rayas rosas) y para el mejor ajuste de LSND (punteada azul). Der.: Contornos de confianza y punto de mejor ajuste, usando el método de **máxima verosimilitud** § 3.5.

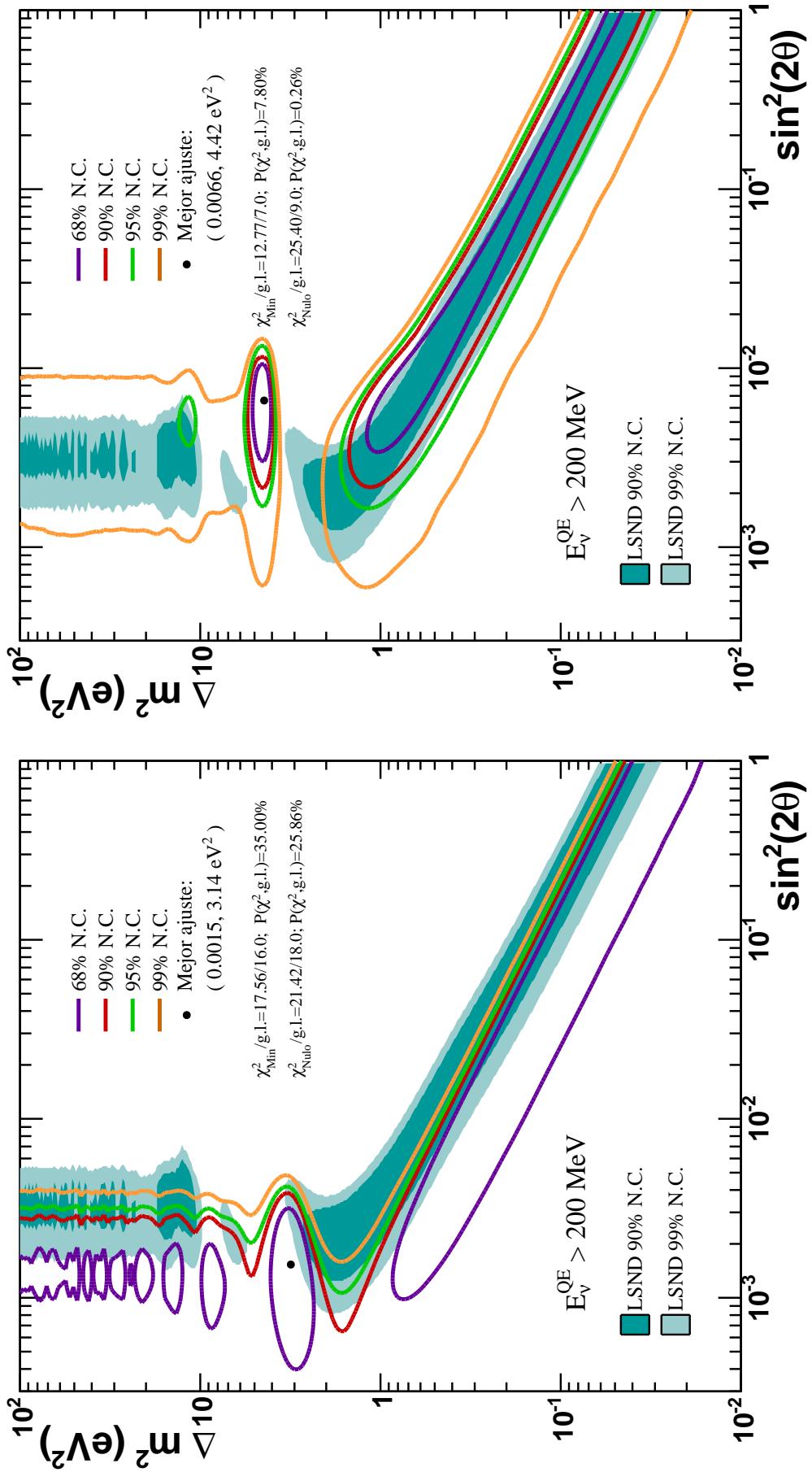


Figura 4.5: Contornos en modo de neutrinos (Izq.) y antineutrinos (Der.) ($200\text{--}3\,000 \text{ MeV}$) datos liberados en 2009 [178, 191] y 2010 [180, 192], respectivamente. Izq.: Contornos de confianza y punto de mejor ajuste para el modo de neutrinos, usando el método **frecuentista** Feldman-Cousins § 3.6. Der.: Contornos de confianza y punto de mejor ajuste para el modo de antineutrinos, usando el método **frecuentista** Feldman-Cousins § 3.6.

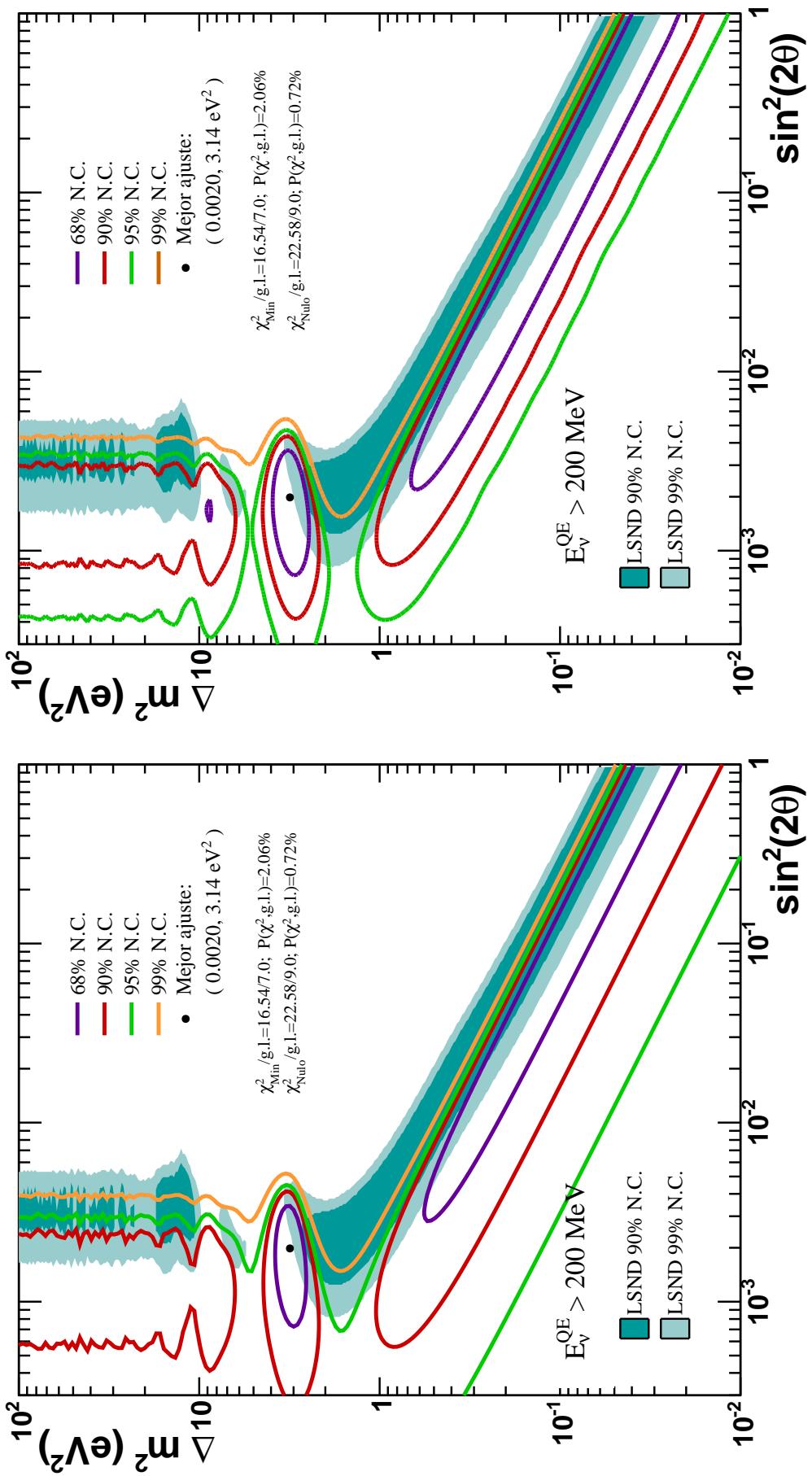


Figura 4.6: Contornos en modo de neutrinos (200 a 3 000 MeV) datos liberados en **2012** [181, 193]. Izq.: Contornos de confianza y punto de mejor ajuste, usando el método de **máxima verosimilitud** § 3.5. Der.: Contornos de confianza y punto de mejor ajuste, usando el método **frecuentista** Feldman–Cousins § 3.6.

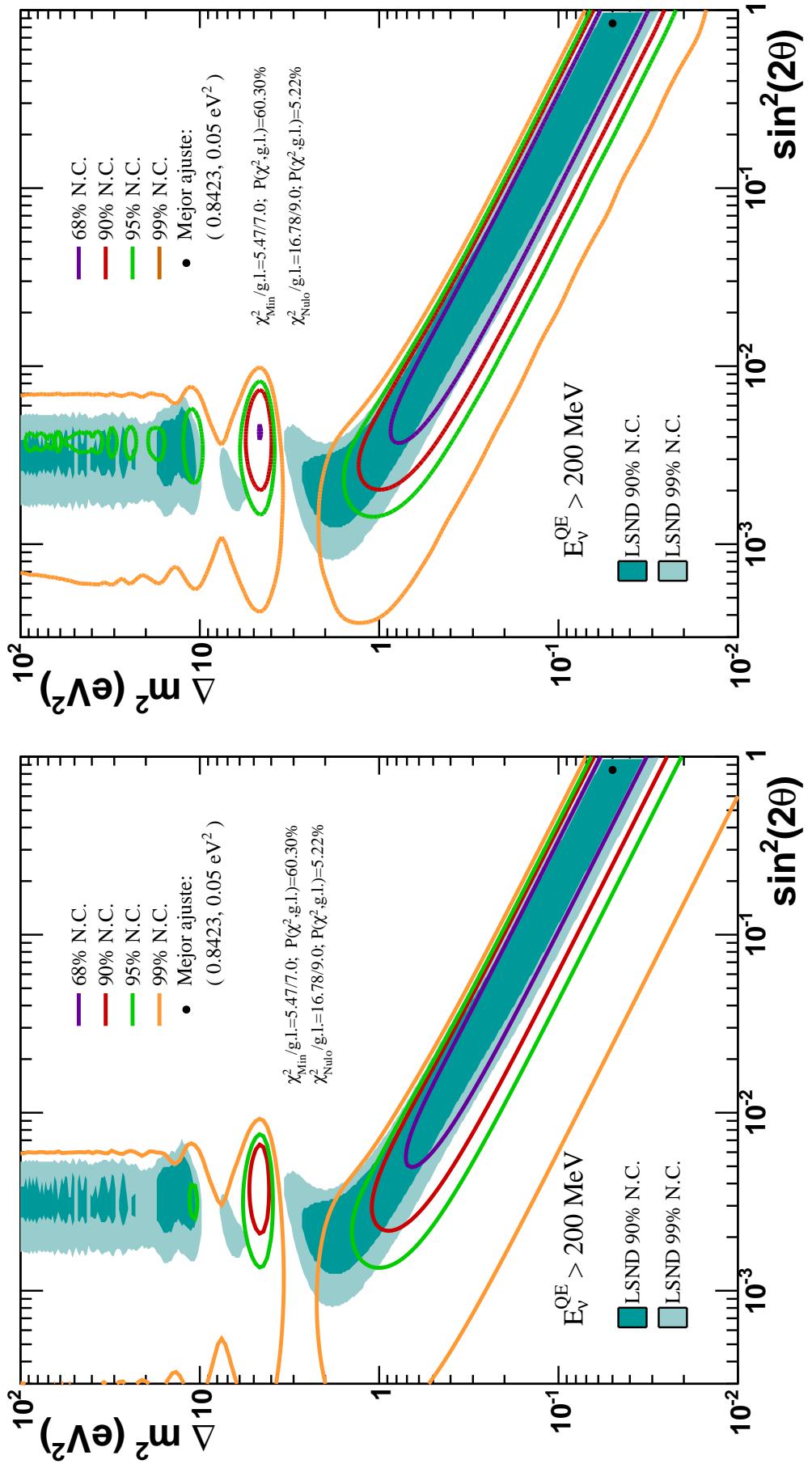


Figura 4.7: Contornos en modo de antineutrinos (200–3 000 MeV) datos liberados en **2012** [181, 194]. Izq.: Contornos de confianza y punto de mejor ajuste, usando el método de máxima verosimilitud § 3.5. Der.: Contornos de confianza y punto de mejor ajuste, usando el método **frequentista** Feldman–Cousins § 3.6.

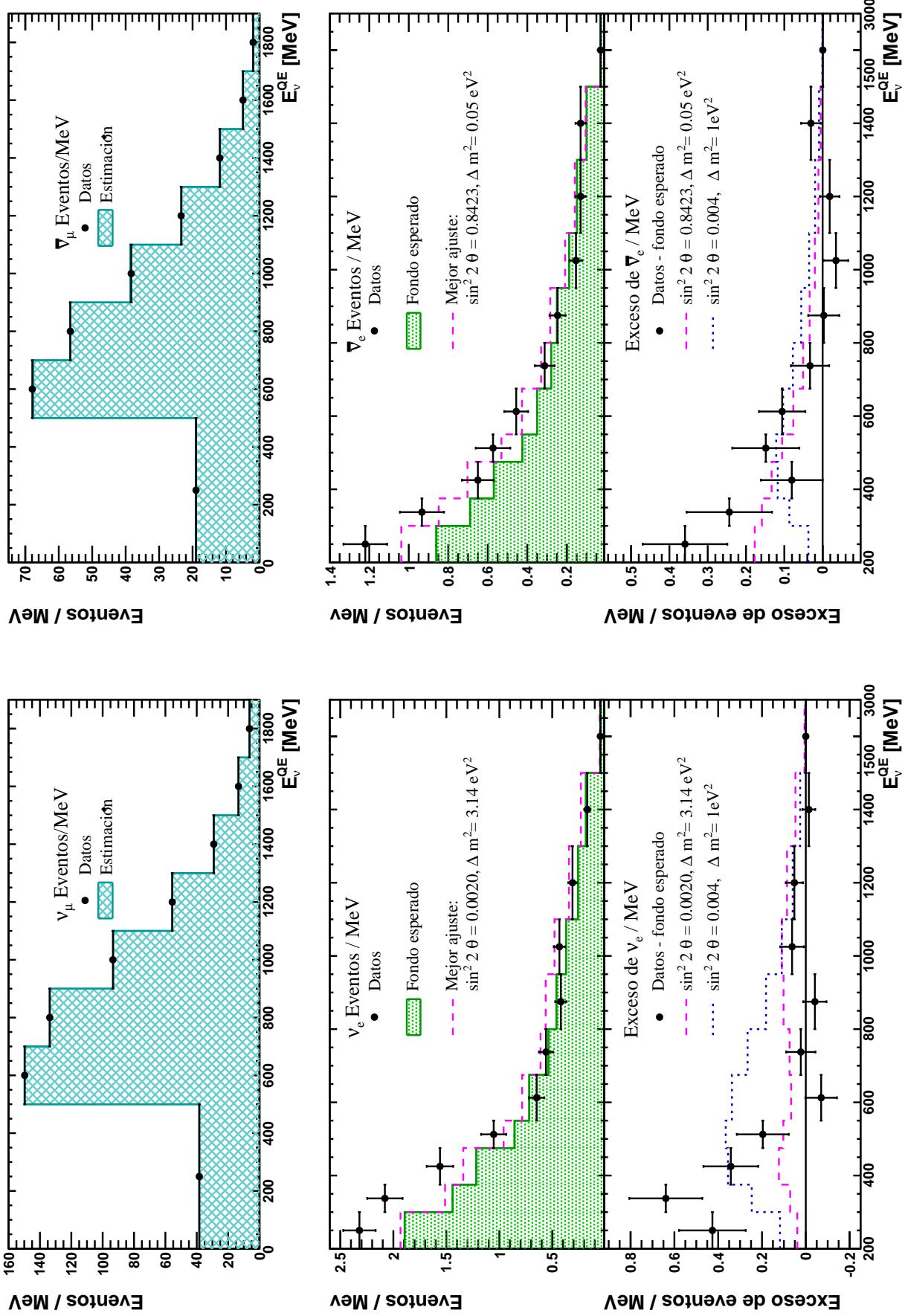


Figura 4.8: Histogramas del modo de neutrinos (Izq.) y antineutrinos (Der.) (200–3000 MeV) datos liberados en 2012. [181, 193, 194]. Arriba: distribución de E_{ν}^{QE} para ν_{μ} (Izq.) y $\bar{\nu}_{\mu}$ (Der.) (datos: puntos con error estadístico) y simulación (histogramas con errores construidos). Medio: distribución de E_{ν}^{QE} para ν_e (Izq.) y $\bar{\nu}_e$ (Der.) (datos: puntos con error estadístico), fondo esperado (histogramas con errores construidos) y señal esperada para el punto de mejor ajuste (guiones rosa). Izq.: exceso de eventos ν_e (Izq.) y $\bar{\nu}_e$ (Der.) como función de E_{ν}^{QE} (puntos con error total) también se muestra la expectativa para el punto de mejor ajuste (guiones rosa) y para el mejor ajuste de LSND (punteada azul).

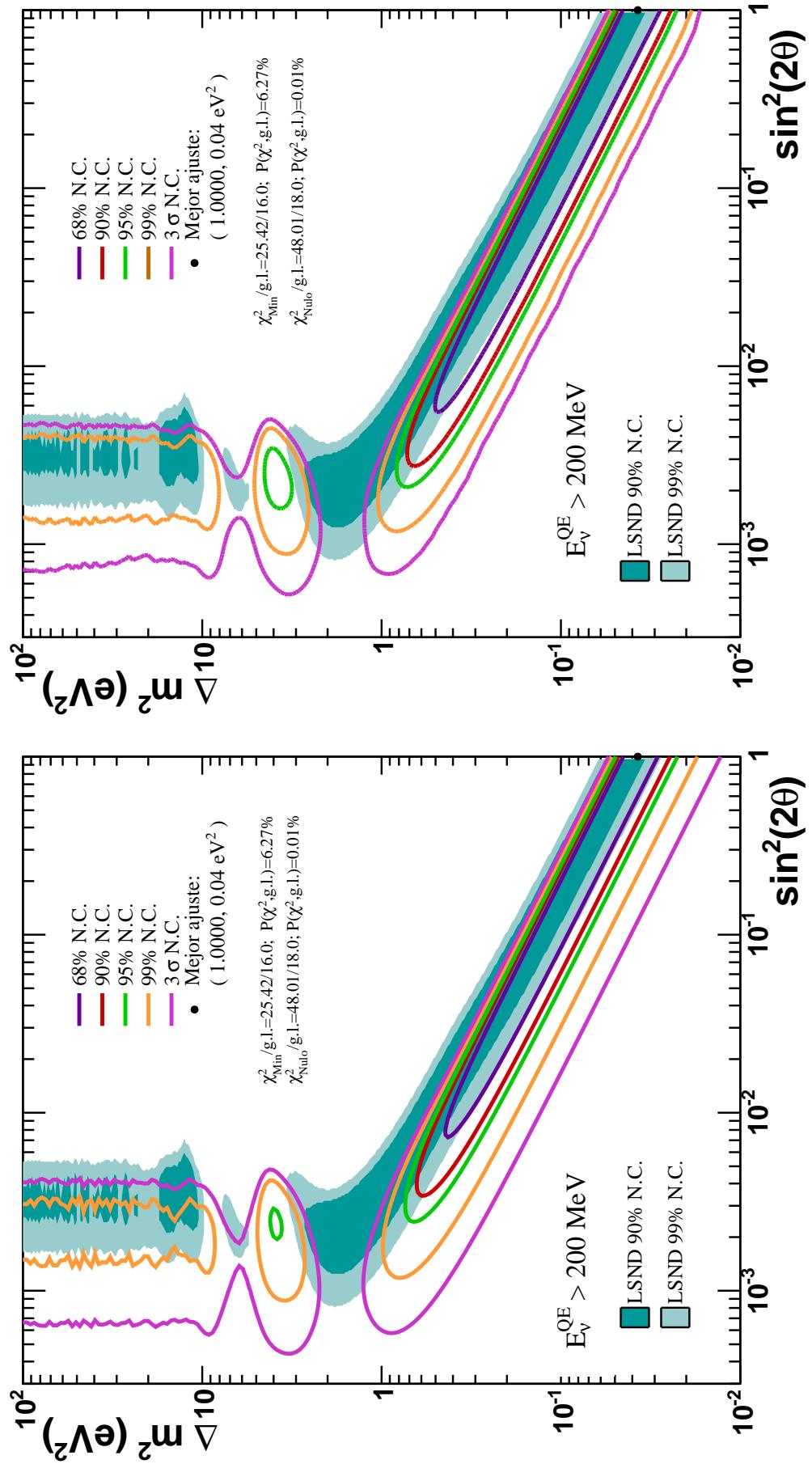


Figura 4.9: Contornos para el análisis combinado de neutrinos y antineutrinos (200–3000 MeV) datos liberados en 2012 [202, 195]. Izq.: Contornos de confianza y punto de mejor ajuste, usando el método de máxima verosimilitud § 3.5 para un análisis combinado § 3.7. Der.: Contornos de confianza y el punto de mejor ajuste, usando el método frecuentista Feldman–Cousins § 3.6 para un análisis combinado § 3.7.

Capítulo 5

Conclusiones

Los experimentos de oscilación de neutrinos solares, atmosféricos, de reactores y de aceleradores han establecido una masa no nula para los neutrinos, así como una mezcla entre ellos. Estas observaciones parecen ser consistentes con el paradigma de tres neutrinos del modelo estándar de partículas elementales. Sin embargo, los anómalos resultados del experimento LSND de los Alamos y MiniBooNE de Fermilab, podría sugerir la existencia de por lo menos un neutrino estéril. Los experimentos de corta distancia con reactores nucleares, muestran una anomalía que también sugiere la existencia de neutrinos estériles. Además, observaciones cosmológicas aún permiten la existencia de un neutrino más. A pesar de todas esas pistas que apuntan al neutrino estéril, todavía hay serias incongruencias y sigue siendo un asunto por resolver que será atendido por varios experimentos en el futuro próximo.

Los neutrinos detectados en el experimento MiniBooNE en Fermilab son generados de la interacción de protones de 8 GeV provenientes del acelerador Booster, estos protones forman mesones que son enfocados por un corno magnético y que decaen, principalmente, en ν_μ (modo de neutrinos). Cambiando la polaridad del corno se obtiene un haz principalmente de $\bar{\nu}_\mu$ (modo de antineutrinos). MiniBooNE es un detector cherenkov esférico de 800 t y 12 m de diámetro, que puede diferenciar sabores de neutrinos (entre ν_e y ν_μ o $\bar{\nu}_e$ y $\bar{\nu}_\mu$). Observar un exceso de eventos ν_e ($\bar{\nu}_e$) por encima de la cantidad de eventos que se esperan ver, es interpretado como una indicación de oscilación de neutrinos. MiniBooNE tomó datos de 2002 hasta 2012 en ambos modos.

El experimento MiniBooNE ha observado en la región de señal de $200 < E_\nu^{QE} < 1250$ MeV un exceso de eventos ν_e en el modo de neutrinos de 162.0 ± 47.8 (3.4σ), así como un exceso de eventos $\bar{\nu}_e$ en el modo de antineutrinos de 78.4 ± 28.5 (2.8σ), pero con marcadas diferencias entre uno y otro. En el modo de antineutrinos los resultados son consistentes con la señal de oscilación de LSND, cumpliendo de esa forma su objetivo principal de mostrar evidencia a favor de la observación de LSND. Interpretar el exceso de eventos observado en modo de neutrinos como un efecto de oscilaciones es desfavorecido y, en realidad, actualmente no existe una buena explicación para tal efecto, el cual debe ser estudiado. Si se insiste en una explicación para ambos efectos, el exceso combinado es de 240.3 ± 62.9 (3.8σ). Adjudicar el comportamiento observado a la existencia de un neutrino estéril adicional esta desfavorecido, ya que en modelos de $3 + 1$ neutrinos no se espera un comportamiento tan distinto entre neutrinos y antineutrinos. Ajustar los datos a un modelo de $3+2$ neutrinos resolvería las tensiones entre el comportamiento de neutrinos y antineutrinos, ya que existe una fase de violación CP que permitiría tales diferencias. Como un experimento de oscilaciones con un único detector, las incertidumbres sistemáticas prácticamente dominan el error total medido, por lo cual más estadística

no añadiría nueva información significativa a la cuestión de oscilaciones. Además de las valiosas observaciones sobre la anomalía LSND, MiniBooNE ha sido un experimento bastante exitoso, entre sus más notables logros están las mediciones de secciones eficaces, cubriendo cerca del 90 % de las interacciones de los neutrinos con energías de ~ 1 GeV.

Utilizando los datos disponibles al público se lograron reproducir la mayoría de los resultados de oscilaciones de MiniBooNE en este trabajo. Se usaron cuatro métodos distintos para reproducir los análisis de la búsqueda de aparición de neutrinos y antineutrinos del electrón. Con la *búsqueda por barrido unidimensional* se analizaron los datos de neutrinos de 2007 y 2009. La *búsqueda por barrido bidimensional* se usó solamente para analizar los datos de neutrinos de 2009. El *método de máxima verosimilitud* fue usado para analizar los datos de neutrinos de 2009, antineutrinos de 2010, para analizar los datos individuales de neutrinos y antineutrinos, así como para hacer el análisis combinado de neutrinos y antineutrinos de 2012. El *método frecuentista de Feldman–Cousins* fue usado para hacer correcciones al método de la máxima verosimilitud, es decir, se usó para los mismos datos que para tal método. Los contornos obtenidos con los tres primeros métodos no muestran ninguna diferencia perceptible con respecto a los oficiales, sin embargo los obtenidos con las correcciones F–C muestran ligeras diferencias en ciertas regiones de los contornos exteriores, muy posiblemente ocasionadas por particularidades de los algoritmos usados para generar experimentos ficticios. De cualquier forma los resultados aquí obtenidos no son contradictorios a los oficiales y de ninguna forma significan una conclusión opuesta.

En el análisis de aparición más reciente, el exceso de eventos calculado en este trabajo fue de 147.19 ± 49.77 eventos ν_e a 2.9σ y 81.36 ± 28.62 eventos $\bar{\nu}_e$ a 2.8σ , para el modo de neutrinos y antineutrinos, respectivamente. En el análisis combinado de neutrinos y antineutrinos se obtuvo un exceso de 239.15 ± 63.71 ν_e y $\bar{\nu}_e$ a 3.7σ . En el mejor ajuste y en el punto nulo se obtuvo $\chi^2/g.l = 16.54/7$ con probabilidad de 2.06 % y $\chi^2/g.l = 22.58/9$ con probabilidad de 0.72 % para el modo de neutrinos, $\chi^2/g.l = 5.47/7$ con probabilidad de 60.30 % y $\chi^2/g.l = 16.78/9$ con probabilidad de 0.05 % para el modo de antineutrinos, y de $\chi^2/g.l = 25.42/16$ con probabilidad de 6.27 % y $\chi^2/g.l = 40.01/18$ con probabilidad de 0.01 % para el análisis combinado. Las diferencias entre estos valores y los oficiales se dan porque públicamente no se tiene acceso a los datos del *bin* que llega a 1 250 MeV, escogido con el objetivo de maximizar la señal, si no que llega hasta 1 300 MeV lo que da origen a ciertas variaciones.

Se escribieron programas ex profeso para llevar a cabo los análisis antes mencionados, así como para procesar los datos, graficarlos y presentarlos. Para ajustar los datos de oscilaciones, se usó un generador de números aleatorios basado en el método de Mersenne Twister escrito por un tercero, todo lo demás fue escrito por el autor. Pensando en maximizar la eficiencia y minimizar el tiempo de cómputo, se puso particular énfasis en el diseño de los programas para hacer el método de la máxima verosimilitud y las correcciones frecuentistas F–C. Se implementó el método frecuentista F–C en un esquema serial en C++, ejecutándose en un *cluster* administrado por el sistema Condor en Fermilab; también se implementó en un esquema de procesamiento en paralelo en CUDA, ejecutándose en tarjetas de vídeo NVIDIA en el IF-UNAM. Obteniendo en ambos casos resultados consistentes entre sí, de la misma forma ambos resultados obtienen diferencias análogas a los resultados oficiales. La implementación en CUDA permite prescindir del numeroso *cluster* de 60 \sim 70 núcleos por un par de tarjetas de vídeo. La ejecución en las tarjetas de vídeo es ~ 24 más rápida que en un procesador estándar, y en total un par de centenas de veces más rápida que los programas oficiales. Este trabajo llena un vacío en la documentación de los análisis de oscilación, verificando que en efecto se puede llegar a los resultados oficiales de MiniBooNE usando los datos liberados, ya que los publicados fueron calculados usando el propio marco de análisis del experimento y deben esperarse algunas diferencias.

Además, corrobora que todo se haya hecho bien: gracias a este trabajo se encontraron dos pequeños errores en los análisis oficiales, ambos fueron notificados y uno de ellos fue consecuentemente corregido por la colaboración para la publicación de 2013.

La utilidad de este trabajo radica en el mejoramiento de las técnicas computacionales, el método frecuentista F–C se ha vuelto en la estrategia cotidiana para una gran cantidad de análisis en la física de altas energías, sobre todo para la física de neutrinos en donde las señales suelen ser pequeñas; y demanda una gran cantidad de poder de cómputo. En vista de que el futuro de la física experimental de neutrinos requerirá ajustes más completos y demandantes, es importante.

El futuro a largo plazo de MiniBooNE es incierto y es probable que pronto será definitivamente apagado. Pensando a largo plazo, la colaboración contempla la posibilidad de agregar centellador orgánico al aceite del tanque, lo cual permitiría disminuir el fondo de interacciones neutras y hacer nuevos estudios de secciones eficaces. A corto plazo, se ha aprobado que MiniBooNE haga una corrida de prueba para buscar WIMPS de masa pequeña, esta nueva búsqueda requirió mejorar el sistema de sincronización temporal entre el blanco y la electrónica del detector, el autor colaboró con miembros de la colaboración en Fermilab para implementar el nuevo sistema. El haz que suministra neutrinos a MiniBooNE se volverá a usar para el experimento MicroBooNE, el cual empezará a tomar datos en 2014 y estudiará a detalle el exceso a bajas energías observado en modo de neutrinos. Inevitablemente estos neutrinos atravesarán el detector MiniBooNE, así pues solamente sería cuestión de mantener el detector prendido para obtener más datos. A MicroBooNE le serviría tener a MiniBooNE prendido como referencia y las precisas mediciones a bajas energías de MicroBooNE ayudarían a disminuir los errores que tiene MiniBooNE.

Aún con el espectacular avance que se ha hecho en los estudios de las oscilaciones de neutrinos, se debe seguir con un extenso y desafiante programa de investigación para: obtener un mejor entendimiento del patrón de oscilaciones y las mezclas de neutrinos, de sus orígenes y del estado de la violación de la simetría CP en el sector de leptones. Particularmente se debe: determinar el signo de Δm_{31}^2 , determinar o constreñir significativamente la escala absoluta de la masa de neutrinos, medir la fase de violación de CP δ , hacer medidas precisas de los ángulos de mezcla y las diferencias de masa, entender de forma fundamental el mecanismo que da masas y mezclas a los neutrinos y a la no conservación de los números leptónicos individuales. Otra de las interrogantes que queda por resolver sobre los neutrinos es si son partículas de Dirac o de Majorana, lo cual no puede ser observado en experimentos de oscilación de neutrinos, la incontrovertible observación del doble decaimiento beta sin neutrinos, establecería que los neutrinos son su propia antipartícula, o sea que son partículas de Majorana. Dependiendo del valor de la violación CP , es posible que los neutrinos sean, por lo menos en parte, causantes de la asimetría materia/antimateria. Además de que podrían ser la partícula (o alguna de las partículas) de la materia oscura, formando en conjunto la llamada “materia oscura caliente”.

A nivel personal, la mayor relevancia que tiene esta tesis se mide en la cantidad de cosas que se aprendieron. A pesar de no ser ajeno a la programación, la gran cantidad de líneas de código que se requirieron escribir para llevar a cabo los análisis y presentarlos de la forma más adecuada (incluido el archivo fuente de este escrito) sirvieron de magnífica práctica para dominar con gran maestría tales habilidades. El tiempo necesario en hacer cualquier programa disminuyó considerablemente conforme la experiencia aumentaba, el autor sabe la importancia que tiene en la ciencia la pericia en el manejo de computadoras y también sabe que las habilidades que se aprendieron en la realización de esta tesis le acompañarán en toda su vida profesional. En particular, el uso de tarjetas gráficas y el computo en paralelo son parte de las herramientas que ofrece el futuro de la computación y tener la capacidad de

usarlas propone nuevas técnicas para la solución de problemas. En un área tan prolífica y dinámica como la física de neutrinos existen una gran cantidad de cosas por aprender, si bien el panorama adquirido no es completo, sí es muy amplio. Mucho énfasis se ha puesto en entender cabalmente y a detalle la estadística involucrada en los análisis, mas que solamente usar las técnicas de forma mecanizada. De forma similar, se hizo un esfuerzo notable por familiarizarse con el experimento, entendiendo los compromisos ineludibles de la labor experimental y la mejor forma de lidiar con ellos, estudiando la gran cantidad de detalles que hacen falta tener presente para operar un experimento de tal magnitud, modesto para el área de altas energías pero suficientemente grande como para que su operación exitosa requiera el esfuerzo constante e incansable de decenas de científicos e ingenieros por más de diez años. Esta tesis trata de reflejar el aprendizaje del autor en todas estas áreas.

Rara vez en la ciencia el camino y los pasos que se deben seguir hacia nuevos descubrimientos es tan claro como ahora. La física de neutrinos es uno de los puentes que hay entre los fenómenos más inmensos, como los grandes eventos astronómicos y cosmológicos, con los más diminutos, como los núcleos atómicos y las partículas elementales. Vivimos en una época en que la luz que arrojan los nuevos descubrimientos rompe con la perspectiva mantenida por mucho tiempo del universo. El descubrimiento de la masa no nula de los neutrinos como consecuencia de las oscilaciones ha jugado un rol fundamental en esta revolución. Los datos recolectados en los experimentos actuales y futuros serán la punta de lanza en la verificación o rectificación de nuestras teorías, en la creación de nuevas teorías o para abrir posibilidades que no han sido imaginadas.

La odisea hacia el entendimiento de los neutrinos y del universo en su conjunto continua. Sin embargo, como la historia de este campo lo ha demostrado tantas veces, lo apasionante de los neutrinos es que se debe esperar lo inesperado.



Apéndice A

El código

Se transcriben las últimas versiones de los códigos que se usaron para llevar a cabo las correcciones frequentistas de Feldman–Cousins del modo de antineutrinos para los datos liberados en agosto de 2012. Para el modo de neutrinos el programa es análogo solo que usando los datos correspondientes. Para el modo combinado $\nu-\bar{\nu}$ se deben usar matrices más grandes y hay que prestar atención en la diagonalización e inversión de las mismas, pero de igual forma el programa es análogo.

En la transcripción del código se muestran explícitamente las funciones escritas *ad hoc*, en la tabla A.1 se resume su uso. De particular importancia son las funciones: `float* choleskyFactor(float matrix[])` y `float* choleskyInverse(float matrix[])` que llevan a cabo el proceso de inversión de matrices. Con la primera función a partir de una matriz hermitiana y positiva definida¹ \mathbf{M} se obtiene una matriz triangular inferior \mathbf{h} que al multiplicarla con su transpuesta se recupera la matriz original: $\mathbf{h} \times \mathbf{h}^T = \mathbf{M}$. Se decidió separar el proceso de inversión en dos etapas para así poder obtener el logaritmo del determinante de la matriz a invertir después de la primera etapa: la suma del logaritmo de los elementos de la traza de la matriz triangular inferior, linea 377 del código A.1. Después la segunda función toma una matriz cholesky triangular inferior y regresa la matriz inversa \mathbf{M}^{-1} . Dado que estas matrices son simétricas basta reservar el arreglo unidimensional `h[NBC*(NBC+1)/2]` para una matriz simétrica de dimensión $\text{NBC} \times \text{NBC}$, para hacer referencia al elemento en el renglón i y la columna j de lo que sería una matriz bidimensional se escribe la dirección unidimensional `[i*(i+1)/2+j]`. Haciendo estos cambios en todo el código se logra una ligera optimización² de $\sim 10\%$ al ahorrar memoria y accesos duplicados innecesarios. Los datos que toman los códigos a la entrada se muestran en la tabla A.2.

Se hizo uso de paqueterías de un tercero para el generador de números pseudo aleatorios (en inglés PRNG) la paquetería en cuestión y las instrucciones sobre su implementación se encuentran en [204]. El PRNG que usa esa paquetería es un *Mersenne Twister*, desarrollado en 1997 por Makoto Matsumoto y Takuji Nishimura [205], se basa en la recurrencia lineal de una matriz sobre un campo binario finito F_2 . Genera rápidamente números pseudo aleatorios de muy alta calidad, diseñado específicamente para rectificar muchas de las fallas encontradas en algoritmos más viejos. La variante usada es la *MT19937* cuya longitud de periodo es de $2^{19937} - 1$; 19937 es un *primo Mersenne*, de donde toma el nombre el algoritmo.

¹Características que por definición cumplen las matrices de covarianza.

²Importante optimización en vista de que se requieren $> 10^{11}$ iteraciones.

³Esta matriz no es la misma que el bloque correspondiente de la matriz combinada. Solo los eventos $\bar{\nu}$ son usados

Nombre de la función	Detalles
<code>float dm2Tic(int index)</code>	Toma un entero entre 0 y 189, regresa la coordenada de Δm^2 correspondiente.
<code>float s2tTic(int index)</code>	Toma un entero entre 0 y 189, regresa la coordenada de $\sin^2 2\theta$ correspondiente.
<code>float s2tTicCU(int index)</code>	Igual que la pasada solo que optimizado para su uso en CUDA.
<code>bool lowerRegion(double x, double y)</code>	Toma las coordenadas de los índices y regresa verdadero si estos se encuentran en la región inferior exenta de calcular correcciones frecuentistas.
<code>bool upperRegion(double x, double y)</code>	Toma las coordenadas de los índices y regresa verdadero si estos se encuentran en la región superior exenta de calcular correcciones frecuentistas.
<code>bool upperSquare(double x, double y)</code>	Toma las coordenadas de los índices y regresa verdadero si estos se encuentran en el cuadrado superior exento de calcular correcciones frecuentistas.
<code>float fileExists(const char *fileName)</code>	Sirve para determinar si un archivo dado ya existe, con el propósito de no sobre escribir archivos.
<code>float* choleskyFactor(float matrix[])</code>	Toma la dirección de una matriz hermitiana y positiva definida M , regresa la dirección de una matriz triangular inferior h , que satisface: $\mathbf{h} \times \mathbf{h}^T = \mathbf{M}$
<code>float* choleskyInverse(float matrix[])</code>	Toma la dirección de una matriz cholesky triangular inferior y regresa la dirección de la inversa de la matriz original \mathbf{M}^{-1}

Tabla A.1: Funciones usadas en los programas.

Encontrar el mejor ajuste para un experimento ficticio dado consiste en calcular el valor de \mathcal{L} sobre el espacio de parámetros $(\sin^2 2\theta, \Delta m^2)$ de $[3 \times 10^{-4}, 1] \times [1 \times 10^{-2}, 1 \times 10^2]$ el cual ha sido dividido en escala logarítmica en una malla de $190 \times 190 = 36\,100$ y de esos valores encontrar el mínimo, lo cual es considerado una *iteración*. Hacer la corrección de un punto en el espacio de parámetros requiere, por lo menos, $n_f = 2048$ iteraciones o “experimentos ficticios”. Esta búsqueda del mínimo se hace de forma exhaustiva, i.e. calculando y probando cada uno de esos valores, no se hicieron intentos por implementar un método de minimización iterativo por dos razones:

- Permitir que el espacio de parámetros tomará valores continuos representa una posible pérdida de eficiencia ya que requeriría que el histograma para la señal⁵ fuera calculado para cada punto. En vez de simplemente cargar el arreglo que contiene los histogramas para cada punto en el espacio de parámetros, ver tabla A.2.

aquí para la parte de la transmutación total de la matriz además de que hubo variaciones adicionales en las simulaciones MC para construir esta matriz. Ver tabla 3.1.

⁴Una discusión sobre el peso de cada evento en la simulación MC se encuentra en Table 2.3

⁵Ver capítulo 3 para más detalles sobre la señal

Nombre del archivo	Contenido y observaciones.
<code>miniboone_nuebardata_lowe.txt</code>	Candidatos observados a eventos $\bar{\nu}_e$ por intervalo de energía reconstruida.
<code>miniboone_numubardata.txt</code>	Candidatos observados a eventos CCQE $\bar{\nu}_\mu$ como función de energía reconstruida (notar que no tiene los mismos intervalos que $\bar{\nu}_e$)
<code>miniboone_nuebarbgr_lowe.txt</code>	Fondo estimado de candidatos a eventos $\bar{\nu}_e$ por intervalo de energía reconstruida.
<code>miniboone_numubar.txt</code>	Estimación de candidatos a eventos CCQE $\bar{\nu}_\mu$ por intervalo de energía reconstruida.
<code>miniboone_full_fractcovmatrix_nubar_lowe.txt</code>	Arreglo bidimensional de la matriz de covarianza fraccionaria para eventos $\bar{\nu}_\mu \rightarrow \bar{\nu}_e$ de transmutación total, fondo estimado de eventos $\bar{\nu}_e$ y estimado de eventos CCQE $\bar{\nu}_\mu$ (tres bloques diagonales lado a lado) por intervalo de energía reconstruida, incluyendo incertidumbre sistemática para las tres muestras e incertidumbre estadística para la estimación de los eventos de fondo de $\bar{\nu}_e$ y CCQE $\bar{\nu}_\mu$. ³
<code>signalsbarSMALL.txt</code>	Arreglo que contiene los histogramas de señal para los 190 valores de Δm^2 . Multiplicando por el valor de $\sin^2 2\theta$ correspondiente, el cual ha sido factorizado en la generación del arreglo; ecuación (1.6), se obtiene la señal para cada punto. Se ha construido a partir de <code>miniboone_numubar_nuebarfullosc_ntuple.txt</code> que contiene 86403 eventos de transmutación total $\bar{\nu}_\mu \rightarrow \bar{\nu}_e$, con información de la energía reconstruida, energía verdadera, distancia recorrida y el peso para cada evento ⁴ . La generación del arreglo de señales permite ahorrar una cantidad enorme de tiempo que se iría en generar las señales para cada punto cada vez que se requieran, es fundamental en la optimización del código.

Tabla A.2: Archivos que toman los programas a la entrada. Los primeros cinco archivos se encuentran en línea, el último fue generado *ex profeso* para estos programas.

- Poner en funcionamiento un método iterativo de minimización representaba un gran reto en la implementación a CUDA.

Sin embargo el autor reconoce que el siguiente paso en la optimización del código y uno necesario en espacios de más de dos dimensiones es la implementación de un algoritmo iterativo para la búsqueda del mínimo.

A.1. Código serial en C++

Una iteración, es decir generar 190×190 matrices, invertir cada una y para cada una calcular \mathcal{L} para así poder encontrar el mejor ajuste toma 1.08 s en un procesador @ 2.53 GHz y ocupa ~ 500 KiB de memoria.

El código escrito en C++ se corrió en *Condor*, más detalles al respecto se encuentran en el apéndice B. En la versión final se hizo que un solo procesador se encargará del cálculo de las correcciones frequentistas de un solo punto. Consecuentemente cada procesador imprime dos archivos: `likelyEff_NuBar2048NF_XXX-YYY.txt` y `fakeExperimentsDistribution_NuBar_2048NF_XXX-YYY.txt` en las carpetas `effectiveLikely` y `fakeDistributions`, respectivamente; XXX y YYY son los índices de 0 a

189 para $\sin^2 2\theta$ y Δm^2 respectivamente, para el punto calculado. Es importante que cada procesador escriba archivos independientes y que luego estos sean recolectados para su análisis, por que a pesar de que es posible que todos los procesadores accedan y escriban en el mismo archivo es común que haya conflictos. El primer archivo almacena la superficie efectiva⁶ $\chi^2_{\mathbf{E}\mathbf{f}}$. El segundo archivo tiene la distribución de experimentos ficticios $\Delta\mathcal{L}_{\mathbf{f}\,i}^{\{p_0\}}$, $i = 1, \dots, n_f$; para un punto $p_0 = (\sin^2 2\theta, \Delta m^2)_0$ con índices XXX y YYY. Se escribió un programa para llevar a cabo el análisis de estas distribuciones, del cual se prescinde aquí.

El código A.1 transcribe la implementación en C++. Las primeras líneas cargan los paquetes necesarios, definen las variables globales y las funciones necesarias. La rutina principal empieza alrededor de la línea 170, en donde se verifica que los argumentos que necesita sean los adecuados, estos se pasan con el *bash script* B.1. Por la línea 220 se empiezan a leer los archivos de datos, a lo largo de esa sección se definen los arreglos que los almacenaran. De la línea 320 a la 435 se construye la superficie $\mathcal{L}(\sin^2 2\theta, \Delta m^2)$ con los datos verdaderos y se escriben al archivo `likelihoodNuBars.txt`, también es aquí que se construye la superficie equivalente $\Delta \mathcal{L}(\sin^2 2\theta, \Delta m^2) = \mathcal{L}(\sin^2 2\theta, \Delta m^2) - \mathcal{L}_{\min}$. Posteriormente empiezan las definiciones para generar los experimentos ficticios. En la línea 450 se corrobora que no se este trabajando con puntos, que por su lejanía del mejor ajuste, se encuentren exentos de calcular correcciones frecuentistas. De ahí hasta la línea 550 se genera el arreglo de vectores ficticios. Alrededor de la línea 560 hasta la 648 se hace la minimización de $\mathcal{L}_F(\sin^2 2\theta, \Delta m^2)$ para cada experimento ficticio, la diferencia entre este bloque y el que esta entre la línea 320 y 435 es que aquí se usan datos ficticios, pero el algoritmo es el mismo. En esta parte es donde se construye la distribución de experimentos ficticios $\Delta \mathcal{L}_{F,i}^{\{p_0\}}$, $i = 1, \dots, n_f$ del punto $p_0 = (\sin^2 2\theta, \Delta m^2)_0$, con la cual se obtiene un punto de la superficie efectiva $\chi^2_{\text{Ef}}(p_0)$.

Código A.1: Código serial en C++ `frequentistFC_NuBar.cpp` para llevar a cabo las correcciones frecuentistas en el modo de antineutrinos.

```
1 #include <iostream>
2 #include <fstream>
3 #include <math.h>
4 #include <stdlib.h>
5 #include <stdio.h>
6 #include <sstream>

7
8
9
10
11 //include " ../ stocc.h"           //random library classes
12 //include <time.h>                //time()
13
14
15
16 //ifndef MULTIFILE_PROJECT
17 // If compiled as a single file then include
18 // these cpp files,
19 // If compiled as a project then compile and
20 // link in these cpp files.
21 // Include code for the chosen random number
22 // generator:
23 #include " ../ mersenne.cpp"
24 #include " ../ stoc1.cpp" // random library
25 // source code
26 #include " ../ userintf.cpp" // define system
27 // specific user interface
28 #endif
```

```

#define NB 11
#define NBmu 8
#define NBT (2*NB+NBmu) //number bins total
#define NBC (NB+NBmu) //number of bins
    collapsed
26 #define N 190 //Grid
#define NF 2048
#define step 3

31 using namespace std;

float dm2Tic(int index){
    float dm2min = 1.e-02;
    float dm2max = 1.e02;
    36 return pow(10, (log10(dm2min) + index*(log10(dm2max)-log10(dm2min))/(N-1)) );
}

float s2tTic(int index){
    float s2tmin = 3.e-04;
    float s2tmax = 1.;

41 return exp10f(log10(s2tmin) + index*(log10(s2tmax)-log10(s2tmin))/(N-1));
}

float s2tTicCU(int index){
    46 return exp10f(-3.522878745f + index
        *(3.522878745f)/(N-1));
}

```

⁶Superficie teóricamente equivalente, pero que en la práctica no es tan fina debido a problemas de interpolación.


```

181
    <189, kk+=step) for the fake
    experiments, only multiples of step."
    << endl;
    exit(1);
}
else{
    kParameter[0] = atoi(argv[1]);
    if(kParameter[0]%step!=0 || kParameter
        [0]<0 || kParameter[0]>189){
        cout << "It needs two arguments: the
        two indexes (k=0,k<189, kk+=step; kk
        =0, kk<189, kk+=step) for the fake
        experiments, only multiples of step
        ." << endl;
        exit(1);
    }
    kParameter[1] = atoi(argv[2]);
    if(kParameter[1]%step!=0 || kParameter
        [1]<0 || kParameter[1]>189){
        cout << "It needs two arguments: the
        two indexes (k=0,k<189, kk+=step; kk
        =0, kk<189, kk+=step) for the fake
        experiments, only multiples of step
        ." << endl;
        exit(1);
    }
}
string strKIndex;
stringstream tempStr;
tempStr << kParameter[0];
strKIndex = tempStr.str();
strKIndex.append("-");
tempStr.str( std::string() );
tempStr.clear();
tempStr << kParameter[1];
strKIndex.append(tempStr.str());
tempStr.str( std::string() );
tempStr.clear();
tempStr << NF;
string name = "effectiveChi2/chi2Eff_NuBar"
    ;
name.append(tempStr.str());
name.append("NF");
name.append(strKIndex);
name.append(".txt");

string nameDistribution =
    fakeDistributions/
    fakeExperimentsDistribution_NuBar_;
nameDistribution.append(tempStr.str());
nameDistribution.append("NF");
nameDistribution.append(strKIndex);
nameDistribution.append(".txt");

cout << "Reading data files.\n" << endl;

float *da_NuebarNumubar_h;
da_NuebarNumubar_h = new float[NBC];
ifstream daNuebarFile ("..../NuBarData/
    miniboone_nuebardata_lowe.txt");
if(daNuebarFile.is_open()){
    for(int i=0; i<NB; i++){
        daNuebarFile >> da_NuebarNumubar_h[i];
    }
    daNuebarFile.close();
}
else{
    <189, kk+=step) for the fake
    experiments, only multiples of step."
    << endl;
    exit(1);
}
236
cout << "Unable to open ../NuBarData/
    miniboone_nuebardata_lowe.txt file" <<
    endl;
exit(1);
}
241
ifstream daNumubarFile ("..../NuBarData/
    miniboone_numubardata.txt");
if(daNumubarFile.is_open()){
    for(int i=0; i<NBmu; i++){
        daNumubarFile >> da_NuebarNumubar_h[i+
            NB];
    }
    daNumubarFile.close();
}
else{
    cout << "Unable to open ../NuBarData/
        miniboone_numubardata.txt file" <<
        endl;
    exit(1);
}
251
float *sgbgNueNumubarSMALL_h;
sgbgNueNumubarSMALL_h = new float[NBC];
ifstream bgNuebarFile ("..../NuBarData/
    miniboone_nuebarbgr_lowe.txt");
if(bgNuebarFile.is_open()){
    for(int i=0; i<NB; i++){
        bgNuebarFile >> sgbgNueNumubarSMALL_h[i
            ];
    }
    bgNuebarFile.close();
}
else{
    cout << "Unable to open ../NuBarData/
        miniboone_nuebarbgr_lowe.txt file" <<
        endl;
    exit(1);
}
266
float *collapsed_SgBgNueNumubarSMALL_h;
collapsed_SgBgNueNumubarSMALL_h = new float
    [NBmu];
ifstream bgNumubarFile ("..../NuBarData/
    miniboone_numubar.txt");
if(bgNumubarFile.is_open()){
    for(int i=0; i<NBmu; i++){
        bgNumubarFile >>
            collapsed_SgBgNueNumubarSMALL_h[i];
        sgbgNueNumubarSMALL_h[i+NB] =
            collapsed_SgBgNueNumubarSMALL_h[i];
    }
    bgNumubarFile.close();
}
else{
    cout << "Unable to open ../NuBarData/
        miniboone_numubar.txt file" << endl;
    exit(1);
}
286
float *fracMat3x3_h;
fracMat3x3_h = new float[NBT*NBT];
ifstream fracMat3x3File ("..../NuBarData/
    miniboone_full_fractcovmatrix_nubar_low
    .txt");
}

```

```

291     if(fracMat3x3File.is_open()){
292         for(int i=0; i<NBT; i++){
293             for(int j=0; j<NBT; j++){
294                 fracMat3x3File >> fracMat3x3_h[ i*NBT+
295                                         j];
296             }
297         }
298         fracMat3x3File.close();
299     }  

300     else{
301         cout << "Unable to open ../NuBarData/
302             miniboone_full_fraetcovmatrix_nubar_lowe
303             .txt file" << endl;
304         exit(1);
305     }
306
307     float *sgNuebar_h;
308     sgNuebar_h = new float[NB*N];
309     ifstream sgNuebarFile ("signalsbarSMALL.txt"
310                           );
311     if(sgNuebarFile.is_open()){
312         for(int kk=0; kk<N; kk++){
313             for(int ii=0; ii<NB; ii++){
314                 sgNuebarFile >> sgNuebar_h[ ii + NB*kk
315                                         ];
316             }
317         }
318         sgNuebarFile.close();
319     }  

320     else{
321         cout << "Unable to open signalsbarSMALL.
322             txt file" << endl;
323         exit(1);
324     }
325
326     cout << "Starting Real Likelihood surface
327             calculation.\n" << endl;
328
329     float deltaLikelyReal[N][N] = {0.};
330     float likelyRealBF = 1e5;
331     int min_position[2];
332
333     float collapsed_SgBgNueNumubar[NBC];
334     float sgbgNueNumubar[NBT];
335     float totMat2x2[NBC*(NBC+1)/2];
336     float detolog;
337     float *lowerMat_h;
338     lowerMat_h = new float[NBC*(NBC+1)/2];
339     float *invMat_h;
340     invMat_h = new float[NBC*(NBC+1)/2];
341
342     for(int i=0; i<NB; i++){
343         sgbgNueNumubar[ i+NB] =
344             sgbgNueNumubarSMALL_h[ i];
345     }
346     for(int i=0; i<NBmu; i++){
347         collapsed_SgBgNueNumubar[ i+NB] =
348             collapsed_SgBgNueNumubarSMALL_h[ i];
349         sgbgNueNumubar[ i+2*NB] =
350             sgbgNueNumubarSMALL_h[ i+NB];
351     }
352
353     . .
354     for(int k = 0; k<N; k++){//s2t
355         for(int kk = 0; kk<N; kk++){//dm2
356
357             for(int i=0; i<NB; i++){
358                 collapsed_SgBgNueNumubar[ i] =
359                     (s2tTic
360                      (k)*sgNuebar_h[ i + NB*kk]) +
361                     sgbgNueNumubarSMALL_h[ i];
362                 sgbgNueNumubar[ i] = s2tTic(k)*
363                     sgNuebar_h[ i + NB*kk];
364             }
365
366             //Total matrix creation and collapsing
367             for(int i=0; i<NB; i++){
368                 for(int j=0; j<i+1; j++){
369                     totMat2x2[ i*(i+1)/2 + j] =
370                         fracMat3x3_h[ i*NBT+j]*
371                         sgbgNueNumubar[ i]*
372                         sgbgNueNumubar[ j] +
373                         fracMat3x3_h[ ( i+NB)*NBT+j]*
374                         sgbgNueNumubar[ i+NB]*
375                         sgbgNueNumubar[ j] +
376                         fracMat3x3_h[ i*NBT+(j+NB)]*
377                         sgbgNueNumubar[ i]*
378                         sgbgNueNumubar[ j+NB] +
379                         fracMat3x3_h[ ( i+NB)*NBT+(j+NB)]
380                         ]*sgbgNueNumubar[ i+NB]*
381                         sgbgNueNumubar[ j+NB];
382
383                     totMat2x2[ i*(i+1)/2 + i] +=
384                         sgbgNueNumubar[ i];
385
386                     for(int i=2*NB; i<NBT; i++){
387                         for(int j=0; j<NB; j++){
388                             totMat2x2[ ( i-NB)*((i-NB)+1)/2 + j] =
389                                 fracMat3x3_h[ i*NBT+j]*
390                                 sgbgNueNumubar[ i]*
391                                 sgbgNueNumubar[ j] +
392                                 fracMat3x3_h[ i*NBT+(j+NB)]*
393                                 sgbgNueNumubar[ i]*
394                                 sgbgNueNumubar[ j+NB];
395
396                         for(int i=2*NB; i<NBT; i++){
397                             for(int j=2*NB; j<i+1; j++){
398                                 totMat2x2[ ( i-NB)*((i-NB)+1)/2 + (j-
399                                     NB)] = fracMat3x3_h[ i*NBT+j]*
400                                     sgbgNueNumubar[ i]*
401                                     sgbgNueNumubar[ j];
402
403                             }
404
405                         lowerMat_h = choleskyFactor(totMat2x2);
406
407                         detolog = 0.;
408                         for(int i=0; i<NBC; i++){
409                             detolog += 2*log(lowerMat_h[ i*(i+1)
410                                         /2+i]);
411                         }
412
413                         invMat_h = choleskyInverse(lowerMat_h);
414
415                         for(int i=0; i<NBC; i++){
416                             for(int j=0; j<i; j++){
417                                 deltaLikelyReal[ k][ kk] += 2*((
418                                     da_NuebarNumubar_h[ i] -
419                                     collapsed_SgBgNueNumubar[ i])*
420                                     invMat_h[ i*(i+1)/2+j]*(
421                                         da_NuebarNumubar_h[ j] -
422                                         collapsed_SgBgNueNumubar[ j]));
423                             }
424
425                         }
426
427                         // Loop trough a variety of values of s2t
428                         // and dm2 using the real
429                         // data and building deltaLikelyReal array

```

```

}
deltaLikelyReal[k][kk] += (
    da_NuebarNumubar_h[i] -
    collapsed_SgBgNueNumubar[i]) *
    invMat_h[i*(i+1)/2+1] *
    da_NuebarNumubar_h[i] -
    collapsed_SgBgNueNumubar[i]);
}

391 deltaLikelyReal[k][kk] += detolog;

if(isnan(deltaLikelyReal[k][kk])){
    cout<< "deltaLikelyReal: "<<
        deltaLikelyReal[k][kk] <<"
        CHANGOS NAN! Index: "<< k <<
        " << kk << endl;
    exit(1);
}

396 if(deltaLikelyReal[k][kk]<likelyRealBF){
    {
        likelyRealBF = deltaLikelyReal[k][kk];
    }
    min_position[0] = k;
    min_position[1] = kk;
}

401 } //for kk<N
} //for k<N

406 cout << fixed << "likelyRealBF\t" <<
    likelyRealBF << endl;
cout << fixed << "s2t\t" << min_position
[0] << "\t" << s2tTic(min_position[0])
<< endl;
cout << fixed << "dm2\t" << min_position[1]
<< "\t" << dm2Tic(min_position[1]) <<
    endl;

411 // Writing ntuple likelihood on a text file
.
// Using the following format:
// (Dm2 (eV2), sin2(2th), -2ln(L))
ofstream myfilentuple ("likelihoodNuBars.
    txt");
416 if (myfilentuple.is_open())
{
    myfilentuple.precision(6);
    for(int kk = 0; kk<N; kk++){
        for(int k = 0; k<N; k++){
            myfilentuple << fixed << dm2Tic(kk
                ) << "\t" << s2tTic(k) << "\t"
                << deltaLikelyReal[k][kk] << "\n"
                ";
            deltaLikelyReal[k][kk] ==
                likelyRealBF;
        }
    }
    myfilentuple.close();
}
431 else cout << "Unable to open file" << endl;
cout << "Printing likelihoodNuBars.txt" <<
    endl;
cout << "________________________________\n" <<
    endl;

436 float epsilon = 1e-8;
float h[NBC][NBC];
float sumh2;
int32_t seed = (int32_t)time(0); // Start
    random seed.
StochasticLib1 sto(seed); // Make instance
    of random library
float fakeVector[NBC];
float fluctuatedVector[NBC];
float gaussRand[NBC];

441
446 int k = kParameter[0];
int kk = kParameter[1];

// It will not try to find anything here.
451 if(lowerRegion(k, kk) || upperRegion(k, kk)
    || upperSquare(k, kk)){
    cout << "I'm in forbidden region!" <<
        endl;
    exit(0);
}

456 for(int i=0; i<NB; i++){
    sgbgNueNumubar[i] = s2tTic(k)*sgNuebar_h[
        i + NB*kk];
    collapsed_SgBgNueNumubar[i] = s2tTic(k)*
        sgNuebar_h[i + NB*kk] +
        sgbgNueNumubarSMALL_h[i];
}

461 // Total matrix creation and collapsing
466 for(int i=0; i<NB; i++){
    for(int j=0; j<i+1; j++){
        totMat2x2[i*(i+1)/2 + j] = fracMat3x3_h[
            i*NBT+j]*sgbgNueNumubar[i]*
            sgbgNueNumubar[j] + fracMat3x3_h[(i
                +NB)*NBT+j]*sgbgNueNumubar[i+NBT]*
            sgbgNueNumubar[j] + fracMat3x3_h[i*NBT+
                (j+NB)]*sgbgNueNumubar[i]*
            sgbgNueNumubar[j+NB] + fracMat3x3_h[
                ((i+NB)*NBT+(j+NB))]*sgbgNueNumubar[
                    i+NB]*sgbgNueNumubar[j+NB];
    }
    totMat2x2[i*(i+1)/2 + i] ==
        sgbgNueNumubar[i];
}

471 for(int i=2*NB; i<NBT; i++){
    for(int j=0; j<NB; j++){
        totMat2x2[(i-NB)*((i-NB)+1)/2 + j] =
            fracMat3x3_h[i*NBT+j]*
            sgbgNueNumubar[i]*sgbgNueNumubar[j] +
            fracMat3x3_h[i*NBT+(j+NB)]*
            sgbgNueNumubar[i]*sgbgNueNumubar[j+
                NB];
    }
}

476 for(int i=2*NB; i<NBT; i++){
    for(int j=2*NB; j<i+1; j++){
        totMat2x2[(i-NB)*((i-NB)+1)/2 + (j-NB)] =
            fracMat3x3_h[i*NBT+j]*
            sgbgNueNumubar[i]*sgbgNueNumubar[j];
    }
}

481 float *da_NuebarNumubarFakes_h;

```

```

da_NuebarNumubarFakes_h = new float [NBC*NF
];
// Calculate the lower triangular matrix
// such that:
// h x (h^T) = totMat2x2
486 for(int i=0; i<NBC; i++){
    if(fabs(totMat2x2[0])>epsilon){
        h[i][0] = totMat2x2[i*(i+1)/2+0]/sqrt(
            totMat2x2[0]);
    }
    else
        h[i][0] = 0.0;
}
491
for(int j=1; j<NBC; j++){
    sumh2 = 0.0;
    for(int jj=0; jj<j; jj++){
        sumh2 += h[j][jj]*h[j][jj];
    }
    h[j][j] = sqrt(totMat2x2[j*(j+1)/2+j]-
        sumh2);
}
496
for(int i=j; i<NBC; i++){
    sumh2 = 0.0;
    for(int ii=0; ii<j; ii++){
        sumh2 += h[i][ii]*h[j][ii];
    }
    if(fabs(h[j][j])>epsilon){
        h[i][j] = (totMat2x2[i*(i+1)/2+j] -
            sumh2) / h[j][j];
    }
    else
        h[i][j] = 0.0;
}
501
for(int i=0; i<NBC; i++){
    for(int j=i+1; j<NBC; j++){
        h[i][j] = 0.0;
    }
}
506
511
516
seed = (int32_t)time(0);
521
// Loop to generate a collection of fake
// vectors.
for(int kkk=0; kkk<NF; kkk++){
    for(int i=0; i<NBC; i++){
        gaussRand[i] = sto.Normal(0,1);
    }
    for(int i=0; i<NBC; i++){
        fakeVector[i] =
            collapsed_SgBgNueNumubar[i];
    }
}
531
// Here we get the vector with
// fluctuations according to the
// covariance matrix. And the new fake
// vector.
for(int i=0; i<NBC; i++){
    fluctuatedVector[i] = 0.0;
    for(int j=0; j<NBC; j++){
        if(j>i){
            break;
        }
        fluctuatedVector[i] += h[i][j]*
            gaussRand[j];
    }
    fakeVector[i] += fluctuatedVector[i];
}
536
541
546
551
556
561
566
571
576
581
586
591
596
601
}
for(int i=0; i<NBC; i++){
    da_NuebarNumubarFakes_h[i+kkk*NBC] =
        fakeVector[i];
}
}
}
cout << "Fake data vector ready." << endl;
cout << "Starting effective likely array
computation" << endl;
cout << "With: " << endl;
cout << "k = " << kParameter[0] << ", kk =
" << kParameter[1] << endl;

float deltaLikelyFakes[NF];
float ratioBiggerTemp;
float da_NuebarNumubarTemp[NBC];
float collapsed_SgBgNueNumubarTemp[NBC];
float sgbgNueNumubarTemp[NBT];
float totMat2x2Temp[NBC*(NBC+1)/2];
float detologTemp;
float likelyTemp;
float likelyBFTemp = 1e8;
float likelyParameterTemp;
float *lowerMatTemp;
float *invMatTemp;

int i, j, l, ll;

for(int kkk=0; kkk<NF; kkk++){
    for(int i=0; i<NBC; i++){
        da_NuebarNumubarTemp[i] =
            da_NuebarNumubarFakes_h[i+NBC*kkk];
    }

    for(int i=0; i<NB; i++){
        sgbgNueNumubarTemp[i+NB] =
            sgbgNueNumubarSMALL_h[i];
    }
    for(int i=0; i<NBmu; i++){
        collapsed_SgBgNueNumubarTemp[i+NB] =
            collapsed_SgBgNueNumubarSMALL_h[i];
        sgbgNueNumubarTemp[i+2*NB] =
            sgbgNueNumubarSMALL_h[i+NB];
    }
    likelyBFTemp = 1e8;
    for(l=0; l<N; l++){
        for(ll=0; ll<N; ll++){
            for(int i=0; i<NB; i++){
                collapsed_SgBgNueNumubarTemp[i] =
                    s2tTicCU(1)*sgNuebar_h[i + NB*
                        l] + sgbgNueNumubarSMALL_h[i
                        l];
                sgbgNueNumubarTemp[i] = s2tTicCU(1)
                    *sgNuebar_h[i + NB*ll];
            }
            for(int i=0; i<NB; i++){
                for(j=0; j<i+1; j++){
}

```

```

totMat2x2Temp[ i*( i+1)/2 + j]=
    fracMat3x3_h[ i*NBT+j ]*
    sgbgNueNumubarTemp[ i ]*
    sgbgNueNumubarTemp[ j ] +
    fracMat3x3_h[ ( i+NB)*NBT+j ]*
    sgbgNueNumubarTemp[ i+NB ]*
    sgbgNueNumubarTemp[ j ] +
    fracMat3x3_h[ i*NBT+( j+NB) ]*
    sgbgNueNumubarTemp[ i ]*
    sgbgNueNumubarTemp[ j+NB ] +
    fracMat3x3_h[ ( i+NB)*NBT+( j+NB) ]*
    sgbgNueNumubarTemp[ i+NB ]*
    sgbgNueNumubarTemp[ j+NB ];
}
totMat2x2Temp[ i*( i+1)/2 + i ] +=
    sgbgNueNumubarTemp[ i ];
}

606   for( i=2*NB; i<NBT; i++){
    for( j=0; j<NB; j++){
        totMat2x2Temp[ ( i-NB )*(( i-NB )+1)/2
            + j]= fracMat3x3_h[ i*NBT+j ]*
        sgbgNueNumubarTemp[ i ]*
        sgbgNueNumubarTemp[ j ] +
        fracMat3x3_h[ i*NBT+( j+NB) ]*
        sgbgNueNumubarTemp[ i ]*
        sgbgNueNumubarTemp[ j+NB ];
    }
}

611   for( i=2*NB; i<NBT; i++){
    for( j=2*NB; j<i+1; j++){
        totMat2x2Temp[ ( i-NB )*(( i-NB )+1)/2
            + ( j-NB ) ] = fracMat3x3_h[ i*
        NBT+j ]*sgbgNueNumubarTemp[ i ]*
        sgbgNueNumubarTemp[ j ];
    }
}

616   lowerMatTemp = choleskyFactor(
    totMat2x2Temp);

621   detologTemp = 0.;

626   for( i=0; i<NBC; i++){
        detologTemp += 2*logf( lowerMatTemp[ i*( i+1)/2+i ] );
    }

631   invMatTemp = choleskyInverse(
    lowerMatTemp);

    likelyTemp = 0.;

636   for( i=0; i<NBC; i++){
        for( j=0; j<i; j++){
            likelyTemp += 2*(
                da_NuebarNumubarTemp[ i ] -
                collapsed_SgBgNueNumubarTemp[ i ])*invMatTemp[ i*( i+1)/2+j ]*(
                da_NuebarNumubarTemp[ j ] -
                collapsed_SgBgNueNumubarTemp[ j ]) );
        }
        likelyTemp += (da_NuebarNumubarTemp
            [ i ] -
            collapsed_SgBgNueNumubarTemp[ i ])*invMatTemp[ i*( i+1)/2+i ]*(
            da_NuebarNumubarTemp[ i ] -
            collapsed_SgBgNueNumubarTemp[ i ] );
    }
}

likelyTemp += detologTemp;

likelyBFTemp = (likelyTemp<
    likelyBFTemp) ? likelyTemp :
    likelyBFTemp;

likelyParameterTemp = (kParameter
    [0]==1 && kParameter[1]==11) ?
    likelyTemp : likelyParameterTemp;

641   } //for ll<N
646   } //for l<N
    deltaLikelyFakes[ kkk ] =
        likelyParameterTemp-likelyBFTemp;
} //for kkk<NF

cout << "Done!" << endl;
ratioBiggerTemp = 0;
for( int kkk=0; kkk<NF; kkk++){
    if( deltaLikelyReal[ kParameter[ 0 ] ][
        kParameter[ 1 ] ]<=deltaLikelyFakes[ kkk ]
    ]){
        ratioBiggerTemp++;
    }
}

651   cout << fixed << dm2Tic(kk) << "\t" <<
    s2tTic(k) << "\t" << -2*log(
        ratioBiggerTemp/NF) << "\t" <<
        ratioBiggerTemp << "\t" << NF << endl;

656   ofstream chi2FrecFCNuBar( name.c_str(), ios
        ::app );
if( chi2FrecFCNuBar.is_open() ){
    chi2FrecFCNuBar << fixed << dm2Tic(
        kParameter[ 1 ]) << "\t" << s2tTic(
        kParameter[ 0 ]) << "\t" << -2*log(
        ratioBiggerTemp/NF) << "\t" <<
        ratioBiggerTemp << "\t" << NF << endl
    ;
    chi2FrecFCNuBar.close();
}
else cout << "Unable to open " << name.
    c_str() << " file" << endl;
cout << "Printing " << name.c_str() <<
    endl;

661   bool itExist = fileExists( nameDistribution.
        c_str() );

666   ofstream fakeDistos( nameDistribution.c_str
        (), ios::app );
if( fakeDistos.is_open() ){
    if( !itExist ){
        fakeDistos << "### k" << "\t" << "kk"
            << endl;
        fakeDistos << "### " << kParameter[ 0 ]
            << "\t" << kParameter[ 1 ] << endl;
        fakeDistos << fixed << s2tTic(
            kParameter[ 0 ]) << "\t" << dm2Tic(
            kParameter[ 1 ]) << endl;
        fakeDistos << fixed << "deltaLikelyReal
            = " << "\t" << deltaLikelyReal[
            kParameter[ 0 ]][ kParameter[ 1 ] ] <<
            endl;
    }
}

671   for( int kkk=0; kkk<NF; kkk++){

```

```

681     fakeDistos << fixed <<
686         deltaLikelyFakes [kkk] << endl;
687     fakeDistos . close ();
688
689 } // int main()
690
691 cout << "Printing " << nameDistribution .
692     c _ str () << endl;
693
694 nameDistribution . erase ( nameDistribution .
695     begin () +59, nameDistribution . end ());
696
697 return 0;
698 } // int main()

```

A.2. Código heterogéneo en CUDA

En *CUDA* no se tiene información detallada sobre el tiempo que tarda una sola iteración, mas bien se cuenta con el tiempo que tarda una ejecución del *kernel*. Se inicializan 128 *blocks* con 96 *threads* cada uno⁷ esta combinación es la que maximiza la eficiencia al maximizar la transferencia de datos. En una ejecución del *kernel* se calculan las correcciones frecuentistas para 6 puntos distintos, es decir se hacen 6×2048 iteraciones las cuales tardan 521.646 s o 8 min y 41 s. Logrando una mejora de $\sim 24 \times$ sobre el rendimiento obtenido en C++. Se uso una tarjeta gráfica *NVIDIA Tesla C2075*, algunas características de la misma se encuentran en la tabla A.3.

CUDA Driver Version / Runtime Version	5.0 / 5.0
CUDA Capability Major/Minor version number:	2.0
Total amount of global memory:	5375 MBytes (5636292608 bytes)
(14) Multiprocessors \times (32) CUDA Cores/MP:	448 CUDA Cores
GPU Clock rate:	1147 MHz (1.15 GHz)
Memory Clock rate:	1566 Mhz
Memory Bus Width:	384-bit
Total amount of constant memory:	65536 bytes
Total number of registers available per block:	32768
Warp size:	32
Maximum number of threads per multiprocessor:	1536
Maximum number of threads per block:	1024
Maximum sizes of each dimension of a block:	1024 \times 1024 \times 64
Maximum sizes of each dimension of a grid:	65535 \times 65535 \times 65535
Maximum memory pitch:	2147483647 bytes
Concurrent copy and kernel execution:	Yes with 2 copy engine(s)
Run time limit on kernels:	No

Tabla A.3: Especificaciones de la tarjeta NVIDIA Tesla C2075.

Así como esta el código no es capaz de ejecutarse en cualquier tarjeta gráfica, ya que requiere 115 MB de memoria⁸. Se uso una tarjeta dedicada a hacer cálculos por lo cual ha sido liberada de procesar los gráficos de la computadora en que se encuentra conectada y no tiene un tiempo límite de ejecución. Portar el código a una tarjeta con tiempo límite de ejecución o que no disponga de tanta memoria requiere que la cantidad de operaciones que lleva a cabo el *kernel* sea disminuida.

⁷Se define manualmente la cantidad de *threads*, los *blocks* quedan entonces definidos. Ver la línea 567 del código A.2

⁸Memoria de la tarjeta gráfica

A pesar de que el código en CUDA sigue un esquema heterogéneo, con ciertas operaciones ejecutadas de forma serial y otras de forma paralela, se reconoce que no se ha maximizado del todo esta característica y no se ha hecho ningún esfuerzo en mantener el procesador del CPU ocupado mientras ocurre la ejecución del *kernel*.

Para compilar se usa el compilador *nvcc* de CUDA con la opción de máxima optimización: **-O3**⁹. Además se usa la opción **-ptxas-options=-v** para obtener información sobre la cantidad de registros que usa el programa, esto con el objetivo de encontrar la combinación de *threads* y *blocks* que maximizan la *ocupación*: 192 y 128, respectivamente. Como ya se menciono antes se eligió maximizar la transferencia de datos, por que aún cuando el rendimiento en los dos casos (maximizando la ocupación y maximizando la transferencia de datos) es esencialmente idéntico maximizar la ocupación limita la cantidad de registros de los que se dispone.

```
$ nvcc frequentistFC_NuBar.cu -o freqDev1 --ptxas-options=-v -O3
```

Para ejecutar los programas se uso el comando *nohup* para que corrieran sin necesidad de mantener la conexión con la computadora anfitrion:

```
$ nohup time ./freqDev1 0 1 > run1.out 2> run1.err < /dev/null &
```

La información que se imprime a la pantalla es almacenada en el archivo **run1.out** y la información sobre el estado final de la ejecución, por ejemplo el tiempo que tardó la ejecución o la señal con la que acabó o fue interrumpida, es almacenada en el archivo **run1.err**

Dado que es una tarjeta la que se encarga de hacer todos los análisis solamente se imprime un archivo de la superficie efectiva χ^2_{Ef} , **likelyEff_NuBar2048NF.txt**. Al igual que en el programa serial se imprime un archivo para cada distribución de $\Delta\mathcal{L}_{\text{f}}^{(p_0)}$, $i = 1 \dots n_{\text{f}}$ y se sigue la misma notación. El programa que analiza estas distribuciones es el mismo que en el caso serial.

Código A.2: Código en CUDA **frequentistFC_NuBar.cu** para llevar a cabo las correcciones frecuentistas en el modo de antineutrinos.

```
4 #include <cuda.h>
#include <iostream>
#include <cstdlib>
4 #include <fstream>
#include <math.h>
#include <sstream>

9 #include " ../../stocc.h" //Define random
library classes
#include <time.h> //Define time()

14 #ifndef MULTIFILE_PROJECT
// If compiled as a single file then include
// these cpp files,
// If compiled as a project then compile and
link in these cpp files.
14 // Include code for the chosen random number
generator:
#include " ../../mersenne.cpp"
#include " ../../stoc1.cpp" //Random library
```

```
19
source code
#include " ../../userintf.cpp" //Define system
specific user interface
#endif

#define NB 11
#define NBmu 8
#define NBT (2*NB+NBmu) //Number bins total
#define NBC (NB+NBmu) //Number of bins
collapsed
24 #define N 190 //Grid
#define NF 2048 //Number of fake experiments
2^11
#define SM 6 //Streaming Multiprocesors (?)
#define step 3 //likelyeff grid steps

29 #define CUDA_CALL(x) do { if((x) !=
cudaSuccess) {
printf("Error at %s:%d\n", __FILE__,
__LINE__);
return EXIT_FAILURE;} } while(0)

34 using namespace std;
```

⁹Esta opción solo optimiza la parte serial del código.

```

void cudaSafeCall( cudaError_t error, char*
    message){
    if(error!=cudaSuccess) { fprintf(stderr, "
        ERROR: %s : %s\n", message, error);
        exit(-1); }

39 }

    --host-- float dm2Tic(int index){
    float dm2min = 1.e-02;
    float dm2max = 1.e02;
    return pow(10, (log10(dm2min) + index*( log10(dm2max)-log10(dm2min))/(N-1) ) );
}

44

    --host-- float s2tTic(int index){
    float s2tmin = 3.e-04;
    float s2tmax = 1.;

49     return exp10f(log10(s2tmin) + index*(log10(
        s2tmax)-log10(s2tmin))/(N-1));
}

54

    --device-- float s2tTicCU(int index){
    return exp10f(-3.522878745f + index
        *(3.522878745f)/(N-1));
}

59

    --host-- bool lowerRegion(double x, double y)
    {
        double x1 = 0;
        double y1 = 78;
        double x2 = 180;
        double y2 = 0;
        if(((y2-y1)/(x2-x1))*(x-x1)+y1) > y ){
            return true;
        }
        else
            return false;
    }

69

    --host-- bool upperRegion(double x, double y)
    {
        double x1 = 93;
        double y1 = 190;
        double x2 = 190;
        double y2 = 60;
        if(((y2-y1)/(x2-x1))*(x-x1)+y1) < y ){
            return true;
        }
        else
            return false;
    }

79

    --host-- bool upperSquare(double x, double y)
    {
        if(x>94 && y > 94)
            return true;
        else
            return false;
    }

89 }

    --host-- bool fileExists(const char *fileName
    ){
        ifstream infile(fileName);
        return infile.good();
    }

94

```

99 //Declaring constant memory

104 --constant-- float collapsed_SgBgNueNumubarSMALL[NBmu];
--constant-- float sgbgNueNumubarSMALL[NBC];
--constant-- float fracMat3x3[NBT*NBT];
--constant-- float sgNuebar[NB*N];

109 --host-- device float* choleskyFactor(

114 float matrix[]){
float epsilon = 1e-8;
float sumh2;
float h[NBC*(NBC+1)/2];
// Calculate the lower triangular matrix
such that:
// $h x (h^T) = matrix$

119 for(int i=0; i<NBC; i++){
 if(fabs(matrix[0])>epsilon){
 h[i*(i+1)/2] = matrix[i*(i+1)/2 + 0]/
 sqrt(matrix[0]);
 }
 else
 h[i*(i+1)/2] = 0.0;
}

124 for(int j=1; j<NBC; j++){
 sumh2 = 0.0;
 for(int jj=0; jj<j; jj++){
 sumh2 += h[j*(j+1)/2+jj]*h[j*(j+1)/2+jj];
 }
 h[j*(j+1)/2+j] = sqrt(matrix[j*(j+1)/2 + j]-sumh2);
}

129 for(int i=j; i<NBC; i++){
 sumh2 = 0.;
 for(int ii=0; ii<j; ii++){
 sumh2 += h[i*(i+1)/2+ii]*h[j*(j+1)/2+ii];
 }
 if(fabs(h[j*(j+1)/2+j])>epsilon){
 h[i*(i+1)/2+j] = (matrix[i*(i+1)/2 + j] - sumh2) / h[j*(j+1)/2+j];
 }
 else
 h[i*(i+1)/2+j] = 0.;
}

134 for(int i=0; i<NBC; i++){
 for(int j=0; j<=i; j++){
 matrix[i*(i+1)/2 + j] = h[i*(i+1)/2+j];
 }
}

144 return &matrix[0];
}

149 // On the input it takes a lower cholesky
triangular matrix.
// On the output it returns the inverse of
the total matrix.
--host-- device float* choleskyInverse(

154 float matrix[]){
float hInv[NBC][NBC];
float x[NBC];
// Here it gets the inverse of the cholesky
matrix
for(int j=0; j<NBC; j++){

159	<pre> for(int i=0; i<NBC; i++){ if(i==j){ x[i] = 1; } else x[i] = 0; for(int jj=0; jj<i; jj++){ x[i] -= matrix[i*(i+1)/2 + jj]*x[jj]; } x[i] /= matrix[i*(i+1)/2 + i]; hInv[i][j] = x[i]; } } </pre>	219	<pre> for(ll=0; ll<N; ll++){ for(i=0; i<NB; i++){ collapsed_SgBgNueNumubar[i] = (s2tTicCU(1)*sgNuebar[i + NB*ll]) + sgbgNueNumubarSMALL[i]; sgbgNueNumubar[i] = s2tTicCU(1)* sgNuebar[i + NB*ll]; } } </pre>
164	<pre> x[i] -= matrix[i*(i+1)/2 + jj]*x[jj]; } x[i] /= matrix[i*(i+1)/2 + i]; hInv[i][j] = x[i]; } } // Here it gets the inverse of the total // matrix for(int i=0; i<NBC; i++){ for(int j=0; j<NBC; j++){ matrix[i*(i+1)/2 + j] = 0; for(int jj=0; jj<NBC; jj++){ matrix[i*(i+1)/2 + j] += hInv[jj][i]* hInv[jj][j]; } } } return &matrix[0]; } </pre>	224	<pre> for(i=0; i<NB; i++){ for(j=0; j<i+1; j++){ totMat2x2[i*(i+1)/2 + j] = fracMat3x3[i*NBT+j]* sgbgNueNumubar[i]* sgbgNueNumubar[j] + fracMat3x3[(i+NB)*NBT+j]* sgbgNueNumubar[i+NB]* sgbgNueNumubar[j+NB] + fracMat3x3[(i+NB)*NBT+(j+NB)]* sgbgNueNumubar[i+NB]* sgbgNueNumubar[j+NB] + fracMat3x3[(i+NB)*NBT+(j+NB)]* sgbgNueNumubar[i+NB]* sgbgNueNumubar[j+NB]; } totMat2x2[i*(i+1)/2 + i] += sgbgNueNumubar[i]; } } </pre>
174	<pre> --global void fakeExperiments(float * da_NuebarNumubarFakes, float * deltaLikelyFakes , int *kParameter) { int tid; tid = blockDim.x * blockIdx.x + threadIdx.x ; if(tid<NF*SM){ float da_NuebarNumubar[NBC]; for(int i=0; i<NBC; i++){ da_NuebarNumubar[i] = da_NuebarNumubarFakes[i+NBC*tid]; } float collapsed_SgBgNueNumubar[NBC]; float sgbgNueNumubar[NBT]; float totMat2x2[NBC*(NBC+1)/2]; float detolog; float likelyTemp; float likelyBF = 1e8; float likelyParameter; float *lowerMat; float *invMat; </pre>	229	<pre> for(i=2*NB; i<NBT; i++){ for(j=0; j<NB; j++){ totMat2x2[(i-NB)*((i-NB)+1)/2 + j] = fracMat3x3[i*NBT+j]* sgbgNueNumubar[i]* sgbgNueNumubar[j] + fracMat3x3[i*NBT+(j+NB)]* sgbgNueNumubar[i]* sgbgNueNumubar[j+NB]; } } } </pre>
184	<pre> int i,j , l , ll; int kTest = kParameter[tid/NF]/1000; int kkTest = kParameter[tid/NF]%1000; for(i=0; i<NB; i++){ sgbgNueNumubar[i+NB] = sgbgNueNumubarSMALL[i]; } for(i=0; i<NBmu; i++){ collapsed_SgBgNueNumubar[i+NB] = collapsed_SgBgNueNumubarSMALL[i]; sgbgNueNumubar[i+2*NB] = sgbgNueNumubarSMALL[i+NB]; } for(l=0; l<N; l++){ </pre>	234	<pre> for(i=2*NB; i<NBT; i++){ for(j=2*NB; j<i+1; j++){ totMat2x2[(i-NB)*((i-NB)+1)/2 + (j-NB)] = fracMat3x3[i*NBT+j]* sgbgNueNumubar[i]* sgbgNueNumubar[j]; } } } </pre>
189	<pre> lowerMat = choleskyFactor(totMat2x2); detolog = 0.; for(i=0; i<NBC; i++){ detolog += 2*logf(lowerMat[i*(i+1)/2+i]); } </pre>	244	<pre> invMat = choleskyInverse(lowerMat); likelyTemp = 0.; for(i=0; i<NBC; i++){ for(j=0; j<i; j++){ likelyTemp += 2*(((da_NuebarNumubar[i] - collapsed_SgBgNueNumubar[i])* invMat[i*(i+1)/2+j]*((da_NuebarNumubar[j] - collapsed_SgBgNueNumubar[j]))) </pre>
194	<pre> sgbgNueNumubar[i+NB]; } } } } </pre>	239	<pre> da_NuebarNumubar[i] = da_NuebarNumubar[i+NB]; } } } </pre>
199	<pre> sgbgNueNumubar[i+2*NB]; } } } </pre>	249	<pre> da_NuebarNumubar[i+2*NB]; } } } </pre>
204	<pre> sgbgNueNumubar[i+NB]; } } } </pre>	249	<pre> da_NuebarNumubar[i+NB]; } } } </pre>
209	<pre> sgbgNueNumubar[i+NB]; } } } </pre>	254	<pre> da_NuebarNumubar[i+NB]; } } } </pre>
214	<pre> sgbgNueNumubar[i+2*NB]; } } } </pre>		

```

259         }
        likelyTemp += (da_NuebarNumubar[i] -
                      collapsed_SgBgNueNumubar[i]) *
                      invMat[i*(i+1)/2+i] *
                      (da_NuebarNumubar[i] -
                      collapsed_SgBgNueNumubar[i]);
    }
    likelyTemp += detolog;

    likelyBF = (likelyTemp<likelyBF) ?
                likelyTemp : likelyBF;

264    likelyParameter = (kTest==1 && kkTest
                         ==11) ? likelyTemp :
                         likelyParameter;

    } //for ll<N
} //for l<N
deltaLikelyFakes[tid] = likelyParameter-
                      likelyBF;
} //if tid<NF*SM

} //KERNEL: fakeExperiments()

274 int main(int argc, char *argv[]){
    int modulusThree, index;
    string strIndex;
    stringstream fileIndex;

    if(argc==1){
        cout << "It needs two arguments
                  modulusThree (0,1,2) and the run
                  number" << endl;
        exit(1);
    }
    else{
        modulusThree = atoi(argv[1]);
        if(modulusThree!=0 && modulusThree!=1 &&
           modulusThree!=2){
            cout << "modulusThree needs to be 0, 1
                      or 2" << endl;
            exit(1);
        }
        index = atoi(argv[2]);
        fileIndex << index;
        strIndex = fileIndex.str();
    }

    string strNF;
    stringstream out;
    out << NF;
    strNF = out.str();
    string name = "chi2Eff_NuBar";
    name.append(strNF);
    name.append("NF_");
    name.append(strIndex);
    name.append("Run.txt");
}

309    string nameDistribution =
        fakeDistributions/
        fakeExperimentsDistribution_NuBar_;
    nameDistribution.append(strNF);
    nameDistribution.append("NF_");
    string strKIndex, strKKIndex;

```

```

319    // //Select best device to run on
    // int num_devices, device;
    // CUDA_CALL(cudaGetDeviceCount(&
    // num_devices));
    // if (num_devices > 1) {
    //     int max_multiprocessors = 0,
    //         max_device = 0;
    //     for (device = 0; device < num_devices;
    //         device++) {
    //         cudaDeviceProp properties;
    //         CUDA_CALL(cudaGetDeviceProperties(&
    // properties, device));
    //         if (max_multiprocessors < properties
    //             .multiProcessorCount) {
    //             max_multiprocessors = properties.
    //             multiProcessorCount;
    //             max_device = device;
    //         }
    //     }
    //     CUDA_CALL(cudaSetDevice(max_device));
    //     cout << "I'm running in device: " <<
    //         max_device << endl;
    // }
    cout << "I'm running in device: " << 1 <<
    endl;
    cudaSafeCall(cudaSetDevice(1), "cudaSetDevice");

324
329
334
339
344
349
354
359
364
369

```

```

    // Capture the start time
    float elapsedTime;
    cudaEvent_t start, stop;
    CUDA_CALL(cudaEventCreate(&start));
    CUDA_CALL(cudaEventCreate(&stop));
    CUDA_CALL(cudaEventRecord(start, 0));

    cout << "Reading data files." << endl;

    float *da_NuebarNumubar_h;
    da_NuebarNumubar_h = new float[NBC];
    ifstream daNuebarFile("../NuBarData/
                           miniboone_nuebardata_lowe.txt");
    if(daNuebarFile.is_open()){
        for(int i=0; i<NB; i++){
            daNuebarFile >> da_NuebarNumubar_h[i];
        }
        daNuebarFile.close();
    }
    else{
        cout << "Unable to open ../NuBarData/
                  miniboone_nuebardata_lowe.txt file" <<
                  endl;
        exit(1);
    }

    ifstream daNumubarFile("../NuBarData/
                           miniboone_numubardata.txt");
    if(daNumubarFile.is_open()){
        for(int i=0; i<NBmu; i++){
            daNumubarFile >> da_NuebarNumubar_h[i+
                                         NB];
        }
        daNumubarFile.close();
    }
    else{
        cout << "Unable to open ../NuBarData/
                  miniboone_numubardata.txt file" <<
                  endl;
        exit(1);
    }
}

```

```

374     float *sgbgNueNumubarSMALL_h;
sgbgNueNumubarSMALL_h = new float [NBC];
ifstream bgNuebarFile ("../NuBarData/
    miniboone_nuebarbgr_lowe.txt");
if(bgNuebarFile.is_open()){
    for(int i=0; i<NB; i++){
        bgNuebarFile >> sgbgNueNumubarSMALL_h[i];
    }
    bgNuebarFile.close();
}
else{
    cout << "Unable to open ../NuBarData/
        miniboone_nuebarbgr_lowe.txt file" <<
        endl;
    exit(1);
}

384     float *collapsed_SgBgnueNumubarSMALL_h;
collapsed_SgBgnueNumubarSMALL_h = new float
    [NBmu];
ifstream bgNumubarFile ("../NuBarData/
    miniboone_numubar.txt");
if(bgNumubarFile.is_open()){
    for(int i=0; i<NBmu; i++){
        bgNumubarFile >>
            collapsed_SgBgnueNumubarSMALL_h[i];
        sgbgNueNumubarSMALL_h[i+NB] =
            collapsed_SgBgnueNumubarSMALL_h[i];
    }
    bgNumubarFile.close();
}
else{
    cout << "Unable to open ../NuBarData/
        miniboone_numubar.txt file" << endl;
    exit(1);
}

399     float *fracMat3x3_h;
fracMat3x3_h = new float [NBT*NBT];
ifstream fracMat3x3File ("../NuBarData/
    miniboone_full_fractcovmatrix_nubar_lowe
    .txt");
if(fracMat3x3File.is_open()){
    for(int i=0; i<NBT; i++){
        for(int j=0; j<NBT; j++){
            fracMat3x3File >> fracMat3x3_h[i*NBT+
                j];
        }
    }
    fracMat3x3File.close();
}
else{
    cout << "Unable to open ../NuBarData/
        miniboone_full_fractcovmatrix_nubar_lowe
        .txt file" << endl;
    exit(1);
}

414     float *sgNuebar_h;
sgNuebar_h = new float [NB*N];
ifstream sgNuebarFile ("signalsbarSMALL.txt
    ");
if(sgNuebarFile.is_open()){
    for(int kk=0; kk<N; kk++){
        for(int ii=0; ii<NB; ii++){
            sgNuebarFile >> sgNuebar_h[ii + NB*kk];
        }
    }
    sgNuebarFile.close();
}

424
429
434
439
444
449
454
459
464
469
474
479
484
489
494
499
504
509
514
519
524
529
534
539
544
549
554
559
564
569
574
579
584
589
594
599
604
609
614
619
624
629
634
639
644
649
654
659
664
669
674
679
684
689
694
699
704
709
714
719
724
729
734
739
744
749
754
759
764
769
774
779
784
789
794
799
804
809
814
819
824
829
834
839
844
849
854
859
864
869
874
879
884
889
894
899
904
909
914
919
924
929
934
939
944
949
954
959
964
969
974
979
984
989
994
999
1004
1009
1014
1019
1024
1029
1034
1039
1044
1049
1054
1059
1064
1069
1074
1079
1084
1089
1094
1099
1104
1109
1114
1119
1124
1129
1134
1139
1144
1149
1154
1159
1164
1169
1174
1179
1184
1189
1194
1199
1204
1209
1214
1219
1224
1229
1234
1239
1244
1249
1254
1259
1264
1269
1274
1279
1284
1289
1294
1299
1304
1309
1314
1319
1324
1329
1334
1339
1344
1349
1354
1359
1364
1369
1374
1379
1384
1389
1394
1399
1404
1409
1414
1419
1424
1429
1434
1439
1444
1449
1454
1459
1464
1469
1474
1479
1484
1489
1494
1499
1504
1509
1514
1519
1524
1529
1534
1539
1544
1549
1554
1559
1564
1569
1574
1579
1584
1589
1594
1599
1604
1609
1614
1619
1624
1629
1634
1639
1644
1649
1654
1659
1664
1669
1674
1679
1684
1689
1694
1699
1704
1709
1714
1719
1724
1729
1734
1739
1744
1749
1754
1759
1764
1769
1774
1779
1784
1789
1794
1799
1804
1809
1814
1819
1824
1829
1834
1839
1844
1849
1854
1859
1864
1869
1874
1879
1884
1889
1894
1899
1904
1909
1914
1919
1924
1929
1934
1939
1944
1949
1954
1959
1964
1969
1974
1979
1984
1989
1994
1999
2004
2009
2014
2019
2024
2029
2034
2039
2044
2049
2054
2059
2064
2069
2074
2079
2084
2089
2094
2099
2104
2109
2114
2119
2124
2129
2134
2139
2144
2149
2154
2159
2164
2169
2174
2179
2184
2189
2194
2199
2204
2209
2214
2219
2224
2229
2234
2239
2244
2249
2254
2259
2264
2269
2274
2279
2284
2289
2294
2299
2304
2309
2314
2319
2324
2329
2334
2339
2344
2349
2354
2359
2364
2369
2374
2379
2384
2389
2394
2399
2404
2409
2414
2419
2424
2429
2434
2439
2444
2449
2454
2459
2464
2469
2474
2479
2484
2489
2494
2499
2504
2509
2514
2519
2524
2529
2534
2539
2544
2549
2554
2559
2564
2569
2574
2579
2584
2589
2594
2599
2604
2609
2614
2619
2624
2629
2634
2639
2644
2649
2654
2659
2664
2669
2674
2679
2684
2689
2694
2699
2704
2709
2714
2719
2724
2729
2734
2739
2744
2749
2754
2759
2764
2769
2774
2779
2784
2789
2794
2799
2804
2809
2814
2819
2824
2829
2834
2839
2844
2849
2854
2859
2864
2869
2874
2879
2884
2889
2894
2899
2904
2909
2914
2919
2924
2929
2934
2939
2944
2949
2954
2959
2964
2969
2974
2979
2984
2989
2994
2999
3004
3009
3014
3019
3024
3029
3034
3039
3044
3049
3054
3059
3064
3069
3074
3079
3084
3089
3094
3099
3104
3109
3114
3119
3124
3129
3134
3139
3144
3149
3154
3159
3164
3169
3174
3179
3184
3189
3194
3199
3204
3209
3214
3219
3224
3229
3234
3239
3244
3249
3254
3259
3264
3269
3274
3279
3284
3289
3294
3299
3304
3309
3314
3319
3324
3329
3334
3339
3344
3349
3354
3359
3364
3369
3374
3379
3384
3389
3394
3399
3404
3409
3414
3419
3424
3429
3434
3439
3444
3449
3454
3459
3464
3469
3474
3479
3484
3489
3494
3499
3504
3509
3514
3519
3524
3529
3534
3539
3544
3549
3554
3559
3564
3569
3574
3579
3584
3589
3594
3599
3604
3609
3614
3619
3624
3629
3634
3639
3644
3649
3654
3659
3664
3669
3674
3679
3684
3689
3694
3699
3704
3709
3714
3719
3724
3729
3734
3739
3744
3749
3754
3759
3764
3769
3774
3779
3784
3789
3794
3799
3804
3809
3814
3819
3824
3829
3834
3839
3844
3849
3854
3859
3864
3869
3874
3879
3884
3889
3894
3899
3904
3909
3914
3919
3924
3929
3934
3939
3944
3949
3954
3959
3964
3969
3974
3979
3984
3989
3994
3999
4004
4009
4014
4019
4024
4029
4034
4039
4044
4049
4054
4059
4064
4069
4074
4079
4084
4089
4094
4099
4104
4109
4114
4119
4124
4129
4134
4139
4144
4149
4154
4159
4164
4169
4174
4179
4184
4189
4194
4199
4204
4209
4214
4219
4224
4229
4234
4239
4244
4249
4254
4259
4264
4269
4274
4279
4284
4289
4294
4299
4304
4309
4314
4319
4324
4329
4334
4339
4344
4349
4354
4359
4364
4369
4374
4379
4384
4389
4394
4399
4404
4409
4414
4419
4424
4429
4434
4439
4444
4449
4454
4459
4464
4469
4474
4479
4484
4489
4494
4499
4504
4509
4514
4519
4524
4529
4534
4539
4544
4549
4554
4559
4564
4569
4574
4579
4584
4589
4594
4599
4604
4609
4614
4619
4624
4629
4634
4639
4644
4649
4654
4659
4664
4669
4674
4679
4684
4689
4694
4699
4704
4709
4714
4719
4724
4729
4734
4739
4744
4749
4754
4759
4764
4769
4774
4779
4784
4789
4794
4799
4804
4809
4814
4819
4824
4829
4834
4839
4844
4849
4854
4859
4864
4869
4874
4879
4884
4889
4894
4899
4904
4909
4914
4919
4924
4929
4934
4939
4944
4949
4954
4959
4964
4969
4974
4979
4984
4989
4994
4999
5004
5009
5014
5019
5024
5029
5034
5039
5044
5049
5054
5059
5064
5069
5074
5079
5084
5089
5094
5099
5104
5109
5114
5119
5124
5129
5134
5139
5144
5149
5154
5159
5164
5169
5174
5179
5184
5189
5194
5199
5204
5209
5214
5219
5224
5229
5234
5239
5244
5249
5254
5259
5264
5269
5274
5279
5284
5289
5294
5299
5304
5309
5314
5319
5324
5329
5334
5339
5344
5349
5354
5359
5364
5369
5374
5379
5384
5389
5394
5399
5404
5409
5414
5419
5424
5429
5434
5439
5444
5449
5454
5459
5464
5469
5474
5479
5484
5489
5494
5499
5504
5509
5514
5519
5524
5529
5534
5539
5544
5549
5554
5559
5564
5569
5574
5579
5584
5589
5594
5599
5604
5609
5614
5619
5624
5629
5634
5639
5644
5649
5654
5659
5664
5669
5674
5679
5684
5689
5694
5699
5704
5709
5714
5719
5724
5729
5734
5739
5744
5749
5754
5759
5764
5769
5774
5779
5784
5789
5794
5799
5804
5809
5814
5819
5824
5829
5834
5839
5844
5849
5854
5859
5864
5869
5874
5879
5884
5889
5894
5899
5904
5909
5914
5919
5924
5929
5934
5939
5944
5949
5954
5959
5964
5969
5974
5979
5984
5989
5994
5999
6004
6009
6014
6019
6024
6029
6034
6039
6044
6049
6054
6059
6064
6069
6074
6079
6084
6089
6094
6099
6104
6109
6114
6119
6124
6129
6134
6139
6144
6149
6154
6159
6164
6169
6174
6179
6184
6189
6194
6199
6204
6209
6214
6219
6224
6229
6234
6239
6244
6249
6254
6259
6264
6269
6274
6279
6284
6289
6294
6299
6304
6309
6314
6319
6324
6329
6334
6339
6344
6349
6354
6359
6364
6369
6374
6379
6384
6389
6394
6399
6404
6409
6414
6419
6424
6429
6434
6439
6444
6449
6454
6459
6464
6469
6474
6479
6484
6489
6494
6499
6504
6509
6514
6519
6524
6529
6534
6539
6544
6549
6554
6559
6564
6569
6574
6579
6584
6589
6594
6599
6604
6609
6614
6619
6624
6629
6634
6639
6644
6649
6654
6659
6664
6669
6674
6679
6684
6689
6694
6699
6704
6709
6714
6719
6724
6729
6734
6739
6744
6749
6754
6759
6764
6769
6774
6779
6784
6789
6794
6799
6804
6809
6814
6819
6824
6829
6834
6839
6844
6849
6854
6859
6864
6869
6874
6879
6884
6889
6894
6899
6904
6909
6914
6919
6924
6929
6934
6939
6944
6949
6954
6959
6964
6969
6974
6979
6984
6989
6994
6999
7004
7009
7014
7019
7024
7029
7034
7039
7044
7049
7054
7059
7064
7069
7074
7079
7084
7089
7094
7099
7104
7109
7114
7119
7124
7129
7134
7139
7144
7149
7154
7159
7164
7169
7174
7179
7184
7189
7194
7199
7204
7209
7214
7219
7224
7229
7234
7239
7244
7249
7254
7259
7264
7269
7274
7279
7284
7289
7294
7299
7304
7309
7314
7319
7324
7329
7334
7339
7344
7349
7354
7359
7364
7369
7374
7379
7384
7389
7394
7399
7404
7409
7414
7419
7424
7429
7434
7439
7444
7449
7454
7459
7464
7469
7474
7479
7484
7489
7494
7499
7504
7509
7514
7519
7524
7529
7534
7539
7544
7549
7554
7559
7564
7569
7574
7579
7584
7589
7594
7599
7604
7609
7614
7619
7624
7629
7634
7639
7644
7649
7654
7659
7664
7669
7674
7679
7684
7689
7694
7699
7704
7709
7714
7719
7724
7729
7734
7739
7744
7749
7754
7759
7764
7769
7774
7779
7784
7789
7794
7799
7804
7809
7814
7819
7824
7829
7834
7839
7844
7849
7854
7859
7864
7869
7874
7879
7884
7889
7894
7899
7904
7909
7914
7919
7924
7929
7934
7939
7944
7949
7954
7959
7964
7969
7974
7979
7984
7989
7994
7999
8004
8009
8014
8019
8024
8029
8034
8039
8044
8049
8054
8059
8064
8069
8074
8079
8084
8089
8094
8099
8104
8109
8114
8119
8124
8129
8134
8139
8144
8149
8154
8159
8164
8169
8174
8179
8184
8189
8194
8199
8204
8209
8214
8219
8224
8229
8234
8239
8244
8249
8254
8259
8264
8269
8274
8279
8284
8289
8294
8299
8304
8309
8314
8319
8324
8329
8334
8339
8344
8349
8354
8359
8364
8369
8374
8379
8384
8389
8394
8399
8404
8409
8414
8419
8424
8429
8434
8439
8444
8449
8454
8459
8464
8469
8474
8479
8484
8489
8494
8499
8504
8509
8514
8519
8524
8529
8534
8539
8544
8549
8554
8559
8564
8569
8574
8579
8584
8589
8594
8599
8604
8609
8614
8619
8624
8629
8634
8639
8644
8649
8654
8659
8664
8669
8674
8679
8684
8689
8694
8699
8704
8709
8714
8719
8724
8729
8734
8739
8744
8749
8754
8759
8764
8769
8774
8779
8784
8789
8794
8799
8804
8809
8814
8819
8824
8829
8834
8839
8844
8849
8854
8859
8864
8869
8874
8879
8884
8889
8894
8899
8904
8909
8914
8919
8924
8929
8934
8939
8944
8949
8954
8959
8964
8969
8974
8979
8984
8989
8994
8999
9004
9009
9014
9019
9024
9029
9034
9039
9044
9049
9054
9059
9064
9069
9074
9079
9084
9089
9094
9099
9104
9109
9114
9119
9124
9129
9134
9139
9144
9149
9154
9159
9164
9169
9174
9179
9184
9189
9194
9199
9204
9209
9214
9219
9224
9229
9234
9239
9244
9249
9254
9259
9264
9269
9274
9279
9284
9289
9294
9299
9304
9309
9314
9319
9324
9329
9334
9339
9344
9349
9354
9359
9364
9369
9374
9379
9384
9389
9394
9399
9404
9409
9414
9419
9424
9429
9434
9439
9444
9449
9454
9459
9464
9469
9474
9479
9484
9489
9494
9499
9504
9509
9514
9519
9524
9529
9534
9539
9544
9549
9554
9559
9564
9569
9574
9579
9584
9589
9594
9599
9604
9609
9614
9619
9624
9629
9634
9639
9644
9649
9654
9659
9664
9669
9674
9679
9684
9689
9694
9699
9704
9709
9714
9719
9724
9729
9734
9739
9744
9749
9754
9759
9764
9769
9774
9779
9784
9789
9794
9799
9804
9809
9814
9819
9824
9829
9834
9839
9844
9849
9854
9859
9864
9869
9874
9879
9884
9889
9894
9899
9904
9909
9914
9919
9924
9929
9934
9939
9944
9949
9954
9959
9964
9969
9974
9979
9984
9989
9994
9999

```

```

    totMat2x2[(i-NB)*((i-NB)+1)/2 + j] =
        fracMat3x3_h[i*NBT+j]*sgbgNueNumubar[i]*
        sgbgNueNumubar[j] +
        fracMat3x3_h[i*NBT+(j+NB)]*sgbgNueNumubar[i]*
        sgbgNueNumubar[j+NB];
    }
}
for(int i=2*NB; i<NBT; i++){
    for(int j=2*NB; j<i+1; j++){
        totMat2x2[(i-NB)*((i-NB)+1)/2 + (j-
        NB)] = fracMat3x3_h[i*NBT+j]*sgbgNueNumubar[i]*
        sgbgNueNumubar[j];
    }
}
lowerMat_h = choleskyFactor(totMat2x2);
detolog = 0.;
for(int i=0; i<NBC; i++){
    detolog += 2*log(lowerMat_h[i*(i+1)/2+i]);
}
invMat_h = choleskyInverse(lowerMat_h);
for(int i=0; i<NBC; i++){
    for(int j=0; j<i; j++){
        deltaLikelyReal[k][kk] += 2*((da_NuebarNumubar_h[i] -
        collapsed_SgBgNueNumubar[i]) * invMat_h[i*(i+1)/2+j] * (da_NuebarNumubar_h[j] -
        collapsed_SgBgNueNumubar[j]));
    }
    deltaLikelyReal[k][kk] += (da_NuebarNumubar_h[i] -
    collapsed_SgBgNueNumubar[i]) * invMat_h[i*(i+1)/2+i] * (da_NuebarNumubar_h[i] -
    collapsed_SgBgNueNumubar[i]);
}
deltaLikelyReal[k][kk] += detolog;
if(isnan(deltaLikelyReal[k][kk])){
    cout<< "deltaLikelyReal: "<<
        deltaLikelyReal[k][kk] <<
        CHANGOS NAN! Index: "<< k <<
        " << kk << endl;
    exit(1);
}
if(deltaLikelyReal[k][kk]<likelyRealBF){
    {
        likelyRealBF = deltaLikelyReal[k][kk];
        min_position[0] = k;
        min_position[1] = kk;
    }
}
//for kk<N
//for k<N
cout << fixed << "likely_min " <<
    likelyRealBF << endl;
cout << fixed << "s2t " << min_position[0] <<
    "\t" << s2tTic(min_position[0]) <<
    endl;
519
524
529
534
539
544
549
554
559
cout << fixed << "dm2 " << min_position[1] <<
    "\t" << dm2Tic(min_position[1]) <<
    endl;
// Writing ntuple likelihood on a text file
// Using the following format:
// (dm2 (eV2), sin2(2th), -2ln(L))
ofstream myfilentuple ("likelihoodNuBars.txt");
if (myfilentuple.is_open())
{
    myfilentuple.precision(6);
    for(int kk = 0; kk<N; kk++){
        for(int k = 0; k<N; k++){
            myfilentuple << fixed << dm2Tic(kk) <<
                "\t" << s2tTic(k) << "\t" <<
                deltaLikelyReal[k][kk] << "\n";
            deltaLikelyReal[k][kk] -=
            likelyRealBF;
        }
    }
    myfilentuple.close();
}
else cout << "Unable to open file" << endl;
cout << "Printing likelihoodNuBars.txt" <<
    endl;
cout << "-----\n" << endl;
float *deltaLikelyFakes_h;
deltaLikelyFakes_h = new float[NF*SM];
int collapsed_SgBgNueNumubarSMALL_buffSize =
    sizeof(float)*NBmu;
int sgbgNueNumubarSMALL_buffSize = sizeof(
    float)*NBC;
int fracMat3x3_buffSize = sizeof(float)*NBT *
    NBT;
int sgNuebar_buffSize = sizeof(float)*NB*N;
//Device allocations
float *deltaLikelyFakes_d;
int deltaLikelyFakes_buffSize = sizeof(
    float)*NF*SM;
CUDA_CALL(cudaMalloc((void**) &
    deltaLikelyFakes_d,
    deltaLikelyFakes_buffSize));
float *da_NuebarNumubarFakes_d;
int da_NuebarNumubarFakes_buffSize = sizeof(
    float)*NF*SM*NBC;
CUDA_CALL(cudaMalloc((void**) &
    da_NuebarNumubarFakes_d,
    da_NuebarNumubarFakes_buffSize));
int *kParameter_d;
int kParameter_buffSize = sizeof(int)*SM;
CUDA_CALL(cudaMalloc((void**) &kParameter_d,
    kParameter_buffSize));
//Constant memory allocations
CUDA_CALL(cudaMemcpyToSymbol(
    collapsed_SgBgNueNumubarSMALL,
    collapsed_SgBgNueNumubarSMALL_h,
    collapsed_SgBgNueNumubarSMALL_buffSize));
CUDA_CALL(cudaMemcpyToSymbol(

```

```

564
    sgbgNueNumubarSMALL,
    sgbgNueNumubarSMALL_h,
    sgbgNueNumubarSMALL_buffSize));
CUDA_CALL(cudaMemcpyToSymbol(fracMat3x3,
    fracMat3x3_h, fracMat3x3_buffSize));
CUDA_CALL(cudaMemcpyToSymbol(sgNuebar,
    sgNuebar_h, sgNuebar_buffSize));

569
int nThreads = 96;
int nBlocks = (NF*SM + nThreads - 1)/
    nThreads;

cout << "nThreads = " << endl;
cout << "nBlocks = " << endl << nBlocks <<
    endl;

574
double epsilon = 1e-8;
double h[NBC][NBC];
double sumh2;
int32_t seed = (int32_t)time(0); //Start
    random seed.
StochasticLib1 sto(seed); // Make instance
    of random library
double fakeVector[NBC];
double fluctuatedVector[NBC];
double gaussRand[NBC];

584
float *da_NuebarNumubarFakes_h;
da_NuebarNumubarFakes_h = new float[NBC*NF*
    SM];

float ratioBigger;
int s;
int sOld = 0;
int *kParameter_h; //Hardware dependent
kParameter_h = new int[SM];

594
// Loop trough a variety of values of s2t
// and dm2 to generate the
// effective likely array.
for(int k = modulusThree; k<N; k+=step){

    limitExceeded:
    for(int kk = modulusThree; kk<N; kk+=step
        ){

            // It will not try to find anything
            // here.
            if(lowerRegion(k, kk) || upperRegion(k,
                kk) || upperSquare(k, kk)){
                continue;
            }

            604
            s = sOld;
            while(s<SM){

                if(k>=N){
                    kk = N;
                    goto limitExceededTwice;
                }

                609
                if(kk>=N){
                    sOld = s;
                    k += step;
                    goto limitExceeded;
                }

                // It will not try to find anything
                614
                615
                616
                617
                618
                619
                620
                621
                622
                623
                624
                625
                626
                627
                628
                629
                630
                631
                632
                633
                634
                635
                636
                637
                638
                639
                640
                641
                642
                643
                644
                645
                646
                647
                648
                649
                650
                651
                652
                653
                654
                655
                656
                657
                658
                659
                660
                661
                662
                663
                664
                665
                666
                667
                668
                669
                670
                671
                672
                673
                674
                675
                676
                677
                678
                679
                680
                681
                682
                683
                684
                685
                686
                687
                688
                689
                690
                691
                692
                693
                694
                695
                696
                697
                698
                699
                700
                701
                702
                703
                704
                705
                706
                707
                708
                709
                710
                711
                712
                713
                714
                715
                716
                717
                718
                719
                720
                721
                722
                723
                724
                725
                726
                727
                728
                729
                730
                731
                732
                733
                734
                735
                736
                737
                738
                739
                740
                741
                742
                743
                744
                745
                746
                747
                748
                749
                750
                751
                752
                753
                754
                755
                756
                757
                758
                759
                760
                761
                762
                763
                764
                765
                766
                767
                768
                769
                770
                771
                772
                773
                774
                775
                776
                777
                778
                779
                780
                781
                782
                783
                784
                785
                786
                787
                788
                789
                790
                791
                792
                793
                794
                795
                796
                797
                798
                799
                800
                801
                802
                803
                804
                805
                806
                807
                808
                809
                810
                811
                812
                813
                814
                815
                816
                817
                818
                819
                820
                821
                822
                823
                824
                825
                826
                827
                828
                829
                830
                831
                832
                833
                834
                835
                836
                837
                838
                839
                840
                841
                842
                843
                844
                845
                846
                847
                848
                849
                850
                851
                852
                853
                854
                855
                856
                857
                858
                859
                860
                861
                862
                863
                864
                865
                866
                867
                868
                869
                870
                871
                872
                873
                874
                875
                876
                877
                878
                879
                880
                881
                882
                883
                884
                885
                886
                887
                888
                889
                890
                891
                892
                893
                894
                895
                896
                897
                898
                899
                900
                901
                902
                903
                904
                905
                906
                907
                908
                909
                910
                911
                912
                913
                914
                915
                916
                917
                918
                919
                920
                921
                922
                923
                924
                925
                926
                927
                928
                929
                930
                931
                932
                933
                934
                935
                936
                937
                938
                939
                940
                941
                942
                943
                944
                945
                946
                947
                948
                949
                950
                951
                952
                953
                954
                955
                956
                957
                958
                959
                960
                961
                962
                963
                964
                965
                966
                967
                968
                969
                970
                971
                972
                973
                974
                975
                976
                977
                978
                979
                980
                981
                982
                983
                984
                985
                986
                987
                988
                989
                990
                991
                992
                993
                994
                995
                996
                997
                998
                999
                1000
                1001
                1002
                1003
                1004
                1005
                1006
                1007
                1008
                1009
                1010
                1011
                1012
                1013
                1014
                1015
                1016
                1017
                1018
                1019
                1020
                1021
                1022
                1023
                1024
                1025
                1026
                1027
                1028
                1029
                1030
                1031
                1032
                1033
                1034
                1035
                1036
                1037
                1038
                1039
                1040
                1041
                1042
                1043
                1044
                1045
                1046
                1047
                1048
                1049
                1050
                1051
                1052
                1053
                1054
                1055
                1056
                1057
                1058
                1059
                1060
                1061
                1062
                1063
                1064
                1065
                1066
                1067
                1068
                1069
                1070
                1071
                1072
                1073
                1074
                1075
                1076
                1077
                1078
                1079
                1080
                1081
                1082
                1083
                1084
                1085
                1086
                1087
                1088
                1089
                1090
                1091
                1092
                1093
                1094
                1095
                1096
                1097
                1098
                1099
                1100
                1101
                1102
                1103
                1104
                1105
                1106
                1107
                1108
                1109
                1110
                1111
                1112
                1113
                1114
                1115
                1116
                1117
                1118
                1119
                1120
                1121
                1122
                1123
                1124
                1125
                1126
                1127
                1128
                1129
                1130
                1131
                1132
                1133
                1134
                1135
                1136
                1137
                1138
                1139
                1140
                1141
                1142
                1143
                1144
                1145
                1146
                1147
                1148
                1149
                1150
                1151
                1152
                1153
                1154
                1155
                1156
                1157
                1158
                1159
                1160
                1161
                1162
                1163
                1164
                1165
                1166
                1167
                1168
                1169
                1170
                1171
                1172
                1173
                1174
                1175
                1176
                1177
                1178
                1179
                1180
                1181
                1182
                1183
                1184
                1185
                1186
                1187
                1188
                1189
                1190
                1191
                1192
                1193
                1194
                1195
                1196
                1197
                1198
                1199
                1200
                1201
                1202
                1203
                1204
                1205
                1206
                1207
                1208
                1209
                1210
                1211
                1212
                1213
                1214
                1215
                1216
                1217
                1218
                1219
                1220
                1221
                1222
                1223
                1224
                1225
                1226
                1227
                1228
                1229
                1230
                1231
                1232
                1233
                1234
                1235
                1236
                1237
                1238
                1239
                1240
                1241
                1242
                1243
                1244
                1245
                1246
                1247
                1248
                1249
                1250
                1251
                1252
                1253
                1254
                1255
                1256
                1257
                1258
                1259
                1260
                1261
                1262
                1263
                1264
                1265
                1266
                1267
                1268
                1269
                1270
                1271
                1272
                1273
                1274
                1275
                1276
                1277
                1278
                1279
                1280
                1281
                1282
                1283
                1284
                1285
                1286
                1287
                1288
                1289
                1290
                1291
                1292
                1293
                1294
                1295
                1296
                1297
                1298
                1299
                1300
                1301
                1302
                1303
                1304
                1305
                1306
                1307
                1308
                1309
                1310
                1311
                1312
                1313
                1314
                1315
                1316
                1317
                1318
                1319
                1320
                1321
                1322
                1323
                1324
                1325
                1326
                1327
                1328
                1329
                1330
                1331
                1332
                1333
                1334
                1335
                1336
                1337
                1338
                1339
                1340
                1341
                1342
                1343
                1344
                1345
                1346
                1347
                1348
                1349
                1350
                1351
                1352
                1353
                1354
                1355
                1356
                1357
                1358
                1359
                1360
                1361
                1362
                1363
                1364
                1365
                1366
                1367
                1368
                1369
                1370
                1371
                1372
                1373
                1374
                1375
                1376
                1377
                1378
                1379
                1380
                1381
                1382
                1383
                1384
                1385
                1386
                1387
                1388
                1389
                1390
                1391
                1392
                1393
                1394
                1395
                1396
                1397
                1398
                1399
                1400
                1401
                1402
                1403
                1404
                1405
                1406
                1407
                1408
                1409
                1410
                1411
                1412
                1413
                1414
                1415
                1416
                1417
                1418
                1419
                1420
                1421
                1422
                1423
                1424
                1425
                1426
                1427
                1428
                1429
                1430
                1431
                1432
                1433
                1434
                1435
                1436
                1437
                1438
                1439
                1440
                1441
                1442
                1443
                1444
                1445
                1446
                1447
                1448
                1449
                1450
                1451
                1452
                1453
                1454
                1455
                1456
                1457
                1458
                1459
                1460
                1461
                1462
                1463
                1464
                1465
                1466
                1467
                1468
                1469
                1470
                1471
                1472
                1473
                1474
                1475
                1476
                1477
                1478
                1479
                1480
                1481
                1482
                1483
                1484
                1485
                1486
                1487
                1488
                1489
                1490
                1491
                1492
                1493
                1494
                1495
                1496
                1497
                1498
                1499
                1500
                1501
                1502
                1503
                1504
                1505
                1506
                1507
                1508
                1509
                1510
                1511
                1512
                1513
                1514
                1515
                1516
                1517
                1518
                1519
                1520
                1521
                1522
                1523
                1524
                1525
                1526
                1527
                1528
                1529
                1530
                1531
                1532
                1533
                1534
                1535
                1536
                1537
                1538
                1539
                1540
                1541
                1542
                1543
                1544
                1545
                1546
                1547
                1548
                1549
                1550
                1551
                1552
                1553
                1554
                1555
                1556
                1557
                1558
                1559
                1560
                1561
                1562
                1563
                1564
                1565
                1566
                1567
                1568
                1569
                1570
                1571
                1572
                1573
                1574
                1575
                1576
                1577
                1578
                1579
                1580
                1581
                1582
                1583
                1584
                1585
                1586
                1587
                1588
                1589
                1590
                1591
                1592
                1593
                1594
                1595
                1596
                1597
                1598
                1599
                1600
                1601
                1602
                1603
                1604
                1605
                1606
                1607
                1608
                1609
                1610
                1611
                1612
                1613
                1614
                1615
                1616
                1617
                1618
                1619
                1620
                1621
                1622
                1623
                1624
                1625
                1626
                1627
                1628
                1629
                1630
                1631
                1632
                1633
                1634
                1635
                1636
                1637
                1638
                1639
                1640
                1641
                1642
                1643
                1644
                1645
                1646
                1647
                1648
                1649
                1650
                1651
                1652
                1653
                1654
                1655
                1656
                1657
                1658
                1659
                1660
                1661
                1662
                1663
                1664
                1665
                1666
                1667
                1668
                1669
                1670
                1671
                1672
                1673
                1674
                1675
                1676
                1677
                1678
                1679
                1680
                1681
                1682
                1683
                1684
                1685
                1686
                1687
                1688
                1689
                1690
                1691
                1692
                1693
                1694
                1695
                1696
                1697
                1698
                1699
                1700
                1701
                1702
                1703
                1704
                1705
                1706
                1707
                1708
                1709
                1710
                1711
                1712
                1713
                1714
                1715
                1716
                1717
                1718
                1719
                1720
                1721
                1722
                1723
                1724
                1725
                1726
                1727
                1728
                1729
                1730
                1731
                1732
                1733
                1734
                1735
                1736
                1737
                1738
                1739
                1740
                1741
                1742
                1743
                1744
                1745
                1746
                1747
                1748
                1749
                1750
                1751
                1752
                1753
                1754
                1755
                1756
                1757
                1758
                1759
                1760
                1761
                1762
                1763
                1764
                1765
                1766
                1767
                1768
                1769
                1770
                1771
                1772
                1773
                1774
                1775
                1776
                1777
                1778
                1779
                1780
                1781
                1782
                1783
                1784
                1785
                1786
                1787
                1788
                1789
                1790
                1791
                1792
                1793
                1794
                1795
                1796
                1797
                1798
                1799
                1800
                1801
                1802
                1803
                1804
                1805
                1806
                1807
                1808
                1809
                1810
                1811
                1812
                1813
                1814
                1815
                1816
                1817
                1818
                1819
                1820
                1821
                1822
                1823
                1824
                1825
                1826
                1827
                1828
                1829
                1830
                1831
                1832
                1833
                1834
                1835
                1836
                1837
                1838
                1839
                1840
                1841
                1842
                1843
                1844
                1845
                1846
                1847
                1848
                1849
                1850
                1851
                1852
                1853
                1854
                1855
                1856
                1857
                1858
                1859
                1860
                1861
                1862
                1863
                1864
                1865
                1866
                1867
                1868
                1869
                1870
                1871
                1872
                1873
                1874
                1875
                1876
                1877
                1878
                1879
                1880
                1881
                1882
                1883
                1884
                1885
                1886
                1887
                1888
                1889
                1890
                1891
                1892
                1893
                1894
                1895
                1896
                1897
                1898
                1899
                1900
                1901
                1902
                1903
                1904
                1905
                1906
                1907
                1908
                1909
                1910
                1911
                1912
                1913
                1914
                1915
                1916
                1917
                1918
                1919
                1920
                1921
                1922
                1923
                1924
                1925
                1926
                1927
                1928
                1929
                1930
                1931
                1932
                1933
                1934
                1935
                1936
                1937
                1938
                1939
                1940
                1941
                1942
                1943
                1944
                1945
                1946
                1947
                1948
                1949
                1950
                1951
                1952
                1953
                1954
                1955
                1956
                1957
                1958
                1959
                1960
                1961
                1962
                1963
                1964
                1965
                1966
                1967
                1968
                1969
                1970
                1971
                1972
                1973
                1974
                1975
                1976
                1977
                1978
                1979
                1980
                1981
                1982
                1983
                1984
                1985
                1986
                1987
                1988
                1989
                1990
                1991
                1992
                1993
                1994
                1995
                1996
                1997
                1998
                1999
                2000
                2001
                2002
                2003
                2004
                2005
                2006
                2007
                2008
                2009
                2010
                2011
                2012
                2013
                2014
                2015
                2016
                2017
                2018
                2019
                2020
                2021
                2022
                2023
                2024
                2025
                2026
                2027
                2028
                2029
                2030
                2031
                2032
                2033
                2034
                2035
                2036
                2037
                2038
                2039
                2040
                2041
                2042
                2043
                2044
                2045
                2046
                2047
                2048
                2049
                2050
                2051
                2052
                2053
                2054
                2055
                2056
                2057
                2058
                2059
                2060
                2061
                2062
                2063
                2064
                2065
                2066
                2067
                2068
                2069
                2070
                2071
                2072
                2073
                2074
                2075
                2076
                2077
                2078
                2079
                2080
                2081
                2082
                2083
                2084
                2085
                2086
                2087
                2088
                2089
                2090
                2091
                2092
                2093
                2094
                2095
                2096
                2097
                2098
                2099
                2100
                2101
                2102
                2103
                2104
                2105
                2106
                2107
                2108
                2109
                2110
                2111
                2112
                2113
                2114
                2115
                2116
                2117
                2118
                2119
                2120
                2121
                2122
                2123
                2124
                2125
                2126
                2127
                2128
                2129
                2130
                2131
                2132
                2133
                2134
                2135
                2136
                2137
                2138
                2139
                2140
                2141
                2142
                2143
                2144
                2145
                2146
                2147
                2148
                2149
                2150
                2151
                2152
                2153
                2154
                2155
                2156
                2157
                2158
                2159
                2160
                2161
                2162
                2163
                2164
                2165
                2166
                2167
                2168
                2169
                2170
                2171
                2172
                2173
                2174
                2175
                2176
                2177
                2178
                2179
                2180
                2181
                2182
                2183
                2184
                2185
                2186
                2187
                2188
                2189
                2190
                2191
                2192
                2193
                2194
                2195
                2196
                2197
                2198
                2199
                2200
                2201
                2202
                2203
                2204
                2205
                2206
                2207
                2208
                2209
                2210
                2211
                221
```

```

    }

664   for(int j=1; j<NBC; j++){
    sumh2 = 0.0;
    for(int jj=0; jj<j; jj++){
        sumh2 += h[j][jj]*h[j][jj];
    }
    h[j][j] = sqrt(totMat2x2[j*(j+1)/2+j]-sumh2);

669   for(int i=j; i<NBC; i++){
    sumh2 = 0.0;
    for(int ii=0; ii<j; ii++){
        sumh2 += h[i][ii]*h[j][ii];
    }
    if(fabs(h[j][j])>epsilon){
        h[i][j] = (totMat2x2[i*(i+1)/2+j] - sumh2) / h[j][j];
    }
    else
        h[i][j] = 0.0;
    }

674   for(int i=0; i<NBC; i++){
    for(int j=i+1; j<NBC; j++){
        h[i][j] = 0.0;
    }
}

679   seed = (int32_t)time(0);

689   // Loop to generate a collection of
        // fake vectors.
    for(int kkk=0; kkk<NF; kkk++){
        for(int i=0; i<NBC; i++){
            gaussRand[i] = sto.Normal(0,1);
        }

        for(int i=0; i<NBC; i++){
            fakeVector[i] =
                collapsed_SgBgNueNumubar[i];
        }

        // Here we get the vector with
        // fluctuations according to the
        // covariance matrix. And the new
        // fake vector.
        for(int i=0; i<NBC; i++){
            fluctuatedVector[i] = 0.0;
            for(int j=0; j<NBC; j++){
                if(j>i){
                    break;
                }
                fluctuatedVector[i] += h[i][j]*
                    gaussRand[j];
            }
            fakeVector[i] += fluctuatedVector
                [i];
        }

        for(int i=0; i<NBC; i++){
            da_NuebarNumubarFakes_h[i+kkk*NBC
                +s*NBC*NF] = fakeVector[i];
        }

714   //for kkk<NF
    kParameter_h[s] = k*1000 + kk;
    s++;
}

```

664	724	729	if (s==SM){ sOld = 0; } else { kk += step; } //while s<SM
669			limitExceededTwice:
674			cudaSafeCall(cudaMemcpy(da_NuebarNumubarFakes_d, da_NuebarNumubarFakes_h, da_NuebarNumubarFakes_buffSize, cudaMemcpyHostToDevice), " cudaMemcpy"); cudaSafeCall(cudaMemcpy(kParameter_d, kParameter_h, kParameter_buffSize, cudaMemcpyHostToDevice), " cudaMemcpy");
679	734		cout << "\n\n\nLaunching kernel" << endl; cout << "With: " << endl; for (s=0; s<SM; s++){ cout << "k = " << kParameter_h[s] /1000 << ", kk = " << kParameter_h[s]%1000 << endl; } fakeExperiments<<<nThreads, nBlocks>>>(da_NuebarNumubarFakes_d, deltaLikelyFakes_d, kParameter_d);
689	739		cudaSafeCall(cudaMemcpy(deltaLikelyFakes_h, deltaLikelyFakes_d, deltaLikelyFakes_buffSize, cudaMemcpyDeviceToHost), " cudaMemcpy");
694	744		cout << "Done!" << endl;
699			ofstream chi2FrecFCuBar (name.c_str(), ios::app); if (chi2FrecFCuBar.is_open()){ for (int s=0; s<SM; s++){ ratioBigger = 0; for (int i=0; i<NF; i++){ if (deltaLikelyReal[kParameter_h[s] /1000][kParameter_h[s] %1000]<=deltaLikelyFakes_h[i +s*NF]){ ratioBigger++; } } cout << fixed << dm2Tic(kParameter_h[s]%1000) << "\t" << s2tTic(kParameter_h[s]/1000) << "\t" << -2*log(ratioBigger/ NF) << "\t" << ratioBigger << "\t" << NF << endl; chi2FrecFCuBar << fixed << dm2Tic(kParameter_h[s]%1000) << "\t" << s2tTic(kParameter_h[s]/1000) << "\t" << -2*log(ratioBigger/ NF) << "\t" << ratioBigger << "\t" << NF << endl; } chi2FrecFCuBar.close(); }
709	749	754	
714	759		
719			

```

else cout << "Unable to open " << name.
    c_str() << " file" << endl;
cout << "Printing " << name.c_str() <<
    endl;

764 for(int s=0; s<SM; s++){
    out.str( std::string() );
    out.clear();
    out << kParameter_h[s]/1000;
    strKIndex = out.str();
    nameDistribution.append(strKIndex);
    nameDistribution.append("-");
    out.str( std::string() );
    out.clear();
    out << kParameter_h[s]%1000;
    strKKIndex = out.str();
    nameDistribution.append(strKKIndex);
    nameDistribution.append(".txt");

    bool itExist = fileExists(
        nameDistribution.c_str());
779
    ofstream fakeDistos (nameDistribution
        .c_str(), ios::app);
    if(fakeDistos.is_open()){
        if(!itExist){
            fakeDistos << "### k" << "\t" <<
                "kk" << endl;
            fakeDistos << "### " <<
                kParameter_h[s]/1000 << "\t"
                << kParameter_h[s]%1000 <<
                endl;
            fakeDistos << fixed << s2tTic(
                kParameter_h[s]/1000) << "\t"
                " << dm2Tic(kParameter_h[s
                ]%1000) << endl;
            fakeDistos << "deltaLikelyReal =
                " << "\t" << deltaLikelyReal [
                kParameter_h[s]/1000][
                kParameter_h[s]%1000] << endl
                ;
    }
784
    for(int i=0; i<NF; i++){
        fakeDistos << deltaLikelyFakes_h [
            i+s*NF] << endl;
    }
794
}
fakeDistos.close();
}
else cout << "Unable to open " <<
    nameDistribution.c_str() << "
    file" << endl;
cout << "Printing " <<
    nameDistribution.c_str() << endl;

799 nameDistribution.erase (
    nameDistribution.begin() +59,
    nameDistribution.end());
}

//Get stop time, and display the timing
//results
CUDA_CALL(cudaEventRecord(stop, 0));
CUDA_CALL(cudaEventSynchronize(stop));
CUDA_CALL(cudaEventElapsedTime(&
    elapsed, start, stop));
cout << "Time to generate: " <<
    elapsed << " ms" << endl;
cout << int(elapsed)/60000 << " min
    , " << int(elapsed/1000)%60 <<
    " sec " << endl;
CUDA_CALL(cudaEventRecord(start, 0));

804
}//for kk<N
}//for k<N

809
CUDA_CALL(cudaFree(da_NuebarNumubarFakes_d));
CUDA_CALL(cudaFree(deltaLikelyFakes_d));

814
delete [] da_NuebarNumubar_h;
delete [] da_NuebarNumubarFakes_h;
delete [] sgbgNueNumubarSMALL_h;
delete [] collapsed_SgBgNueNumubarSMALL_h;
delete [] fracMat3x3_h;
delete [] sgNuebar_h;
delete [] deltaLikelyFakes_h;

819
return 0;
} //int main()
824

```

Apéndice B

Condor

Condor (actualmente conocido como *HTCondor*) es un sistema de *software* computacional de alto rendimiento para la distribución gruesa de tareas computacionales intensivas paralelas [206]. Se puede usar para administrar la carga de trabajo en un clúster dedicado de computadoras o para mandar trabajos a computadoras de escritorio ociosas. Es desarrollado por el equipo Condor en la universidad de Wisconsin-Madison y sigue la filosofía de código abierto.

Condor cuenta con un mecanismo de cola de tareas, una política de horarios, esquema de prioridades, monitoreo y administración de recursos entre otras funcionalidades. Los usuarios mandan sus tareas a Condor, estos se colocan en la cola de tareas y Condor decide cuando y donde se correrán, registra el progreso de las tareas e informa al usuario tras la finalización de la tarea. Cada estación de trabajo conectada al Condor *pool* corre un *daemon* que observa el *I/O* de los usuarios y la carga del CPU. A una estación que se encuentra ociosa por cierto tiempo se le asigna una tarea de la cola, la cual correrá hasta que el *daemon* detecte un golpe de teclado, movimiento del ratón o demasiado uso del CPU ajeno a Condor (por ejemplo cuando un usuario se conecta a través de ssh a su computadora para mandar trabajos). En ese momento se genera un *ticket* con el estado y progreso de la tarea y esta es removida de la estación de trabajo y se manda de vuelta a la cola de tareas donde será reasignada a otra computadora.

B.1. Uso de Condor en el *pool* de MiniBooNE

En el desarrollo de esta tesis fue fundamental el uso de Condor, ya que permitió lograr las primeras versiones de los análisis. Inclusive con las versiones finales y más optimizadas del código el tiempo necesario de cómputo es de más de mil horas por cada análisis, muchas más para el análisis combinado. MiniBooNE cuenta con un clúster dedicado al análisis de datos de ~ 80 núcleos, con velocidades entre 2.3 y 2.5 GHz. La disponibilidad de los mismos es variable y, en general, para hacer los análisis no se dispuso de más de 70 de ellos simultáneamente (posiblemente por que el resto no era compatible con la arquitectura del programa).

Además de estar registrado en Fermilab como investigador visitante, se requirió una cuenta en el *FNALU*, el *Unix cluster* central para Fermilab. Así como una cuenta de *kerberos* del Fermilab y una

computadora *kerberizada* para hacer accesos remotos al *FNAL Realm*.¹ Una vez que el administrador del *pool* de MiniBooNE te da de alta como usuario de ese *pool* puedes mandar tareas a Condor.

Trabajando remotamente, es decir en una computadora ajena al *pool* de MiniBooNE, se debe conseguir un *ticket* de kerberos. En una terminal se pone el siguiente comando y se introduce el *password* solicitado:

```
$ kinit -A user_name@FNAL.GOV
Password for user_name@FNAL.GOV:
```

Con un *ticket* válido (los *tickets* expiran después de 24 horas) se puede accesar a cualquier máquina del *pool*, eso se hace mediante *Secure Shell* (ssh)

```
$ ssh -Y -l user_name computer_name.fnal.gov
```

Es importante que al finalizar una sesión de trabajo se destruya el *ticket* para inhabilitar accesos espurios.

```
$ kdestroy
```

Una vez conectado se mandan los datos que se analizaran así como el código fuente del programa que llevará a cabo el cómputo. Antes de mandar trabajos se realizan distintas pruebas para revisar que el programa consiga acceso a los datos que necesita y que no haya ningún problema de compatibilidad. La versión del compilador *gcc* disponible en el *pool* difiere de la versión con la cual se escribieron los programas. La versión que se uso es la 4.5.1, para cargarla se usa el comando:

```
$ setup gcc v4_5_1
```

Posteriormente se compila usando la opción de máxima optimización: la instrucción **-O3**. Con lo cual se logra una mejora en el rendimiento de $\sim 3\times$. La introducción de dichas *flags* produjo *bugs* en ciertas funciones, estos se resolvieron cambiando la redacción del código. Se comprobó que el resultado obtenido con y sin instrucciones de optimización fuera estrictamente el mismo.

```
$ g++ frecuentistFC_NuBar.cpp -o frecuentistFC_NuBar -O3
```

Mandar una tarea al *pool* se hace con:

```
$ boone-jobsub frecuentistFC_NuBar
```

Por cada tarea que se manda a Condor se generan cinco archivos. El nombre de estos archivos se forma anexando al nombre del ejecutable la fecha y hora en que fueron mandadas las tareas y un número único. Pensando en que se mandó la tarea **frecuentistFC_NuBar** el cuatro de noviembre de 1970 a las 12:34:42. Los archivos que se generan son:

- **frecuentistFC_NuBar_19701104_123442_1.cmd**: Archivo que describe propiedades de Condor específicas del ejecutable.

¹En la red hay instrucciones sobre como kerberizar computadoras para que sean compatibles con Fermilab [207]

- **frequentistFC_NuBar_19701104_123442_1.err**: Contiene cualquier señal de error que mande la ejecución.
- **frequentistFC_NuBar_19701104_123442_1.log**: Bitácora que contiene información detallada sobre la ejecución; dirección IP de la máquina perteneciente al *pool* desde la cual se manda el ejecutable, dirección IP de la máquina que lo ejecuta, tiempo que tarda, memoria que se aloja, etcétera.
- **frequentistFC_NuBar_19701104_123442_1.out**: Aquí se guarda la salida a la pantalla del ejecutable.
- **frequentistFC_NuBar_19701104_123442_1.sh**: bash script ejecution wrapper.

Una vez la tarea se ha completado Condor manda un correo al correo asociado a la cuenta de FNALU informando el termino de la ejecución. Detallando la fecha y hora en que fue mandada la tarea y cuando se terminó su ejecución, el tiempo que tomó, la señal de error que se registró, el tamaño de la memoria virtual usada y otros parámetros comunes. Con el propósito de administrar y monitorear el progreso de las tareas los siguientes comandos resultan útiles:

- **condor_q -global**: Para revisar la lista de tareas, se obtiene información sobre todas las tareas; las que se encuentran en espera, detenidas, ejecutándose. Se obtiene el nombre del dueño de cada tarea, un número con el cual se identifica cada una, la fecha en que fue mandada y el tiempo de ejecución entre otras cosas.
- **condor_q -submitter user_name**: Se obtiene la lista de tareas y sus atributos que mandó el usuario *user_name*.
- **condor_hold <ID #>**: Para detener así como evitar que empiece la ejecución de una tarea. Como argumento se debe poner el número de identidad de la tarea que se deseé detener.
- **condor_release <ID #>**: Permite que una tarea detenida pueda ser puesta de vuelta en la cola de espera. Como argumento se debe poner el número de identidad de la tarea que se deseé liberar.
- **condor_rm <ID #>**: Se usa para quitar una tarea de la cola. De igual forma se debe poner el número que identifica a la tarea en cuestión.

En el recuadro B.1 se encuentra transcrita el *bash script* usado para automatizar el envío de tareas. Como argumento toma un archivo en el que se encuentran los índices de las coordenadas que se requieren calcular. Para evitar conflictos en la escritura cada ejecutable escribe en su propio archivo de salida.

Código B.1: *Bash script* “submitting.sh” para mandar tareas al *pool*.

```
#!/bin/bash
EXEC_FILE=$1
PARAM_POINTS_FILE=$2

cat $PARAM_POINTS_FILE | while read LINE ; do
    echo 'n' | boone-jobsub $EXEC_FILE $LINE
done
```

Apéndice C

Implementación en un esquema de procesamiento en paralelo con CUDA

La Arquitectura Unificada de Dispositivos de Cómputo, **CUDA** por sus siglas en inglés *Compute Unified Device Architecture* es una plataforma de computación en paralelo y un modelo de programación creado por la compañía **NVIDIA** e implementado por las unidades gráficas de procesamiento, **GPU** por sus siglas en inglés *Graphics Processing Units*, que producen [209].

Los microprocesadores basados en una sola unidad central de procesamiento llevaron un rápido incremento en el rendimiento y reducción de precios en los programas computacionales por más de dos décadas. Estos procesadores dieron miles de millones de operaciones de punto flotante por segundo (GFLOPS) a las computadoras de escritorio y decenas de millones de GFLOPS a los servidores clúster. Este implacable crecimiento en el rendimiento ha permitido que las aplicaciones de *software* den mayor funcionalidad, que tengan mejor interfaz para el usuario y que generen más resultados útiles. Los usuarios por su parte solicitan aún más mejoras una vez que se acostumbran a las ya obtenidas, generando así un ciclo positivo para la industria de computo [210].

Durante esta racha la mayoría de los desarrolladores de *software* contaron con las mejoras en el *hardware* para incrementar la velocidad de sus programas. Sin embargo esta racha se ha frenado desde 2003 debido a problemas con el consumo de energía y a la disipación de calor, limitando el incremento de la frecuencia del reloj y el nivel de actividades productivas que pueden ser realizadas en el periodo de un CPU. Los productores de microprocesadores han cambiado a modelos en los que se usan múltiples unidades de procesamiento, conocidos como procesadores multinúcleo, en cada chip para incrementar el poder de procesamiento. Este cambio ha ejercido un impacto tremendo en la comunidad de desarrolladores de *software* [211].

Tradicionalmente la mayoría de las aplicaciones son escritas como programas secuenciales, como las describiera John von Neumann en su reporte seminal de 1945 [212]. La ejecución de estos programas puede ser entendida por un humano pasando secuencialmente a través del código. La expectativa de que un programa corra más rápido con cada nueva generación de microprocesadores ya no es estrictamente válida. Un programa secuencial solo correrá en uno de los núcleos de un procesador, el cual no se volverá significativamente más rápido que lo que se usa hoy en día.

Las aplicaciones que continuarán gozando de mejoras de rendimiento con cada nueva generación de microprocesadores son los programas paralelos, en los cuales múltiples hilos (*threads*) de ejecución

cooperan para completar el trabajo más rápidamente. Se ha referido a este nuevo, dramáticamente remontado, incentivo para el desarrollo de programas en paralelo como la “revolución de concurrencia” [211]. Programar en paralelo no es nuevo, la comunidad de computo de alto rendimiento ha estado desarrollando programas paralelos por décadas. Estos programas corrían en costosas computadoras de gran escala. Solo unas cuantas aplicaciones elite justifican el uso de estos costos aparatos, limitando la práctica computo paralelo a un reducido número de desarrolladores. Ahora que todos los microprocesadores son computadoras paralelas, el número de aplicaciones que deben ser desarrolladas como programas en paralelo ha incrementado dramáticamente. Ahora hay una gran necesidad para que los desarrolladores de *software* aprendan programación en paralelo.

CUDA le da a los desarrolladores acceso al conjunto de instrucciones virtuales y a la memoria de los elementos de computación en paralelo de los GPU's, usando CUDA los GPU's se vuelven accesibles para ser usados para cálculos como CPU's. A diferencia de los CPU's, los GPU's tienen una arquitectura en paralelo de la cantidad de datos que se pueden transferir que enfatiza la ejecución de muchos *threads* lentamente, en vez de ejecutar un solo *thread* muy rápidamente. Se puede acceder a la plataforma de CUDA a través de una variedad de librerías y compiladores, existen extensiones de C/C++ y Fortran que permiten hacer uso de las capacidades de las tarjetas de vídeo. Propulsado por la sumamente demandante industria de videojuegos, las tarjetas de vídeo, usadas para generar los gráficos de una computadora, han logrado salirse del mercado que las vio nacer y se han logrado usar de forma exitosa para acelerar en un orden de magnitud o más aplicaciones de biología computacional, criptografía, simulaciones de fluidos o mecánica cuántica.

C.1. Descripción de la paralelización

La paralelización de este análisis se hizo de forma “expedita”, en general la forma más sencilla de paralelizar un algoritmo es forzar que la paralelización ocurra en algún bucle. Con eso en mente se reconocen tres niveles (de mayor a menor) en los cuales se puede implementar la paralelización:

- Cada *thread* calcula todos los experimentos ficticios para cada punto del espacio de parámetros. Para lo cual se deben de lanzar tantos *threads* como puntos se quieran probar y cada *thread* hará un total de n_f iteraciones, es decir $n_f \times 190 \times 190$ inversiones de matrices. Haciendo 2000 experimentos ficticios, son más 72 millones de inversiones, muchísimos cálculos para un solo *thread*. La memoria se saturaría por completo.
- Cada *thread* calcula un experimento ficticio. Se deben lanzar tantos *threads* como experimentos ficticios. En este esquema, cada *thread* invierte 36 100 matrices, lo cual requiere una cantidad de memoria que exige una tarjeta de vídeo muy robusta.
- Cada *thread* calcula un valor de \mathcal{L} de un experimento ficticio, se requieren lanzar $190 \times 190 = 36\,100$ *threads* y cada uno invertirá una matriz.

Paralelizar en el nivel superior no es posible ya que requiere muchísima más memoria que la que cuenta cualquier tarjeta de vídeo actual. Paralelizar en el nivel inferior no es tan eficiente, ya que se hacen muy pocos cálculos para la cantidad de datos transferidos a la tarjeta: idealmente uno quiere reducir el número de veces que se transfieren datos a la tarjeta, ya que es un proceso lento. Es decir, en cada transmisión de datos se quieren hacer muchas cuentas. Es común que mientras menor sea el nivel en que se paralelice, mayor será el esfuerzo para pasar el código serial a código paralelo. En

este trabajo en particular es cierto, el nivel de paralelización que se escogió es el intermedio, todos los algoritmos relevantes (colapso e inversión de matrices, generación de datos ficticios, búsqueda de mínimo) son los mismos que en el caso serial. La dificultad de hacer el programa paralelo está en la gestión de las distintas tareas, la transferencia de datos entre el CPU y el GPU y los lanzamientos de *threads*.

El *kernel*¹ está diseñado para que cada *thread* lleve a cabo un experimento ficticio, pero también está diseñado para que en cada llamada al *kernel* se puedan correr los experimentos ficticios de más de un punto, usualmente se hacían los experimentos ficticios de 3 a 12 puntos en cada llamada al *kernel*. La cantidad de puntos que cada llamada efectuará es fácilmente modificable en el programa, está puesto de tal forma que sea fácil obtener la ocupación total de todos los *threads*.

En esencia lo que hace el programa es: generar datos ficticios de forma serial para todos los experimentos ficticios que requiera una llamada al *kernel*, mandar esos datos al GPU, llamar al *kernel* en donde se harán todos los experimentos ficticios, transferir al CPU el resultado de cada experimento ficticio. Esto se hace para todos los puntos en la malla reducida en que se quieran correcciones frecuentistas.

La memoria que usa la tarjeta de vídeo es la *global* (la más lenta) y *constante* (rápida). Se obtendrían serias ventajas si se lograra implementar un programa que haga uso de la memoria *compartida* o de *textura*, pero si es que es posible se tendría que cambiar el modelo de paralelización radicalmente.

Hay una gran cantidad de mejoras que se pueden hacer al programa, desde implementar algoritmos de inversión más eficientes y que requieran menos memoria, hasta cambiar el nivel de paralelización y el tipo de memoria que se usa. Comentando al respecto:

- No se reconoce un esquema, sencillo o complicado de programar, en el cual se pueda hacer uso de la memoria compartida o de textura de forma útil.
- Posterior a la realización de los análisis, el autor dio con un algoritmo más eficiente para realizar la inversión de matrices [198], este otorga una mejoría de $\sim 30\%$ en cada iteración del código serial. Hace falta probar que este nuevo algoritmo sea estable y robusto, tanto de forma serial como paralela. Es una mejoría sencilla bastante prometedora para el esquema paralelo, porque reduce el uso de operaciones lentas.
- Con el objetivo de permitir que estos análisis se puedan hacer en tarjetas más modestas o tarjetas que no estén dedicadas a hacer análisis (es decir que tengan que ocuparse de los gráficos de una computadora), hace falta agregar “descansos” al *kernel* o que varios *threads* se ocupen de una iteración simultáneamente (una mezcla entre el nivel intermedio e inferior de paralelización que se mencionaron antes), la primera opción es más fácil de implementar, la segunda no tanto.
- Mantener al CPU trabajando mientras corre el GPU, actualmente el CPU lanza el *kernel* y espera ocioso a que este acabe, momento en el cual hace más operaciones y lanza otro *kernel*.

Sin embargo, actualmente ya se tiene un rendimiento de ~ 25 veces más rápido que el esquema completamente serial, lo que es un logro notable.

¹Conjunto de operaciones que se hacen en el GPU de forma paralela.

Apéndice D

Pruebas misceláneas del método Feldman–Cousins

Se hicieron varias pruebas para comprobar el funcionamiento adecuado de todos los pasos del algoritmo que se usó, así como para investigar la posibilidad de nuevas formas de hacer los análisis. A continuación se mencionan algunas.

D.1. Posición de los mínimos en los experimentos ficticios

Se hizo con el objetivo de ver si era posible limitar el espacio de la búsqueda del punto de mejor ajuste en cada experimento ficticio. De esa forma se disminuiría el tiempo de cómputo. Sin embargo se observó que a pesar de que hay ciertas tendencias estas no son generales y se concluyó que restringir la búsqueda a solo una sección del ya restringido espacio de parámetros introduciría un sesgo en el análisis.

Sin embargo estas pruebas muestran sugerencias sobre la posible selección de la posición de una adivinanza inicial para aquellos algoritmos minimizadores que requieran una. La figura D.1 muestra la posición de los mínimos en $(\sin^2 2\theta, \Delta m^2)$ y el punto usado para generar los experimentos ficticios.

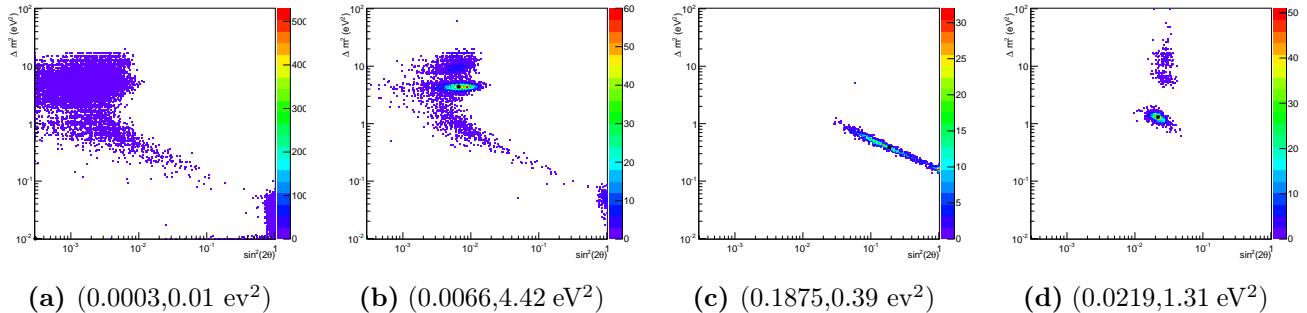


Figura D.1: Posiciones de los mínimos de los experimentos ficticios. Con el punto negro se generaron los experimentos ficticios (se muestra la coordenada debajo de cada figura), en escala de colores esta la cantidad de veces que un mínimo se obtuvo en cada coordenada.

D.2. Generación de matrices de covarianza con los vectores de experimentos falsos

Una de las pruebas que se hizo para determinar si el generador de experimentos ficticios estaba funcionando fue generar matrices de covarianza con los vectores de experimentos ficticios, ecuación (3.9). Al comparar la matriz de covarianza generada con experimentos ficticios y la matriz colapsada a partir de los datos reales, ver § 3.2, se requería que el error fraccionario entrada por entrada fuera del orden del error estadístico, es decir el inverso de la raíz del número de experimentos ficticios. Después de probar con varios algoritmos para generar números aleatorios se escogió el *Mersenne Twister* [205].

D.3. Contornos obtenidos con Condor y CUDA

Los contornos que se presentan en el capítulo 4 se hicieron analizando los datos con CUDA, sin embargo también se hicieron con Condor, de hecho las primeras versiones fueron efectuadas con Condor. En la figura D.2 se muestran los contornos del modo de antineutrinos de 2012 obtenidos tanto con Condor como con CUDA, nótese que los contornos de 68 % y 90 % N.C. son idénticos y que las diferencias en los contornos de 95 % (en la parte superior) y 99 % (del lado izquierdo) son menores.

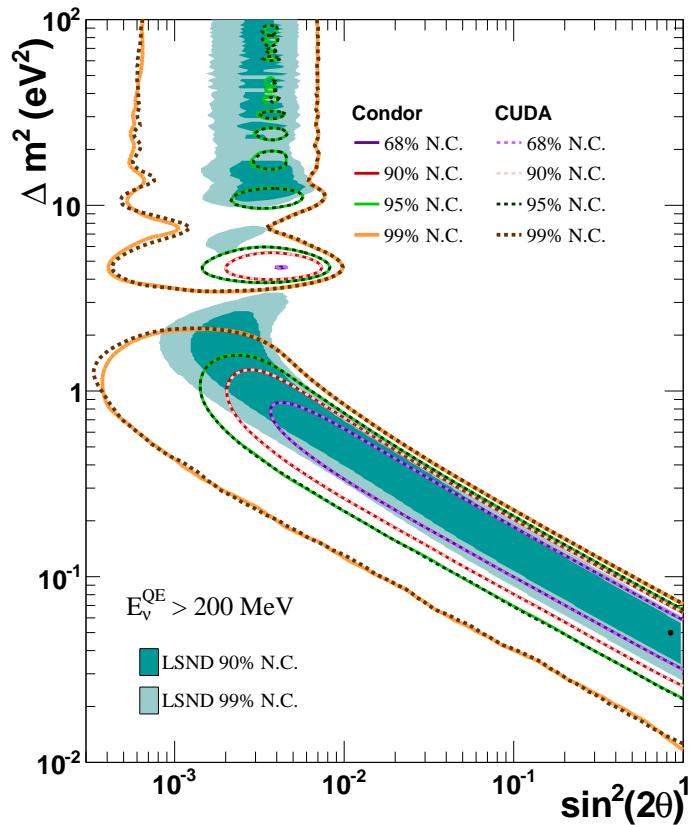


Figura D.2: Comparación entre Condor (línea sólida) y CUDA (línea punteada). Se muestran los contornos del modo de antineutrinos de 2012 solamente, pero todos muestran un comportamiento semejante.

D.4. Diferencias con los contornos oficiales

En su mayoría, los contornos oficiales fueron reproducidos en este trabajo. Casi todos los contornos que fueron presentados son idénticos, sin embargo en todos los resultados frecuentistas se observan algunas diferencias en los contornos exteriores. En la figura D.3 se comparan los contornos.

Además de una búsqueda extensiva de errores en todo el código se hicieron varias pruebas para tratar de determinar la fuente de las diferencias.

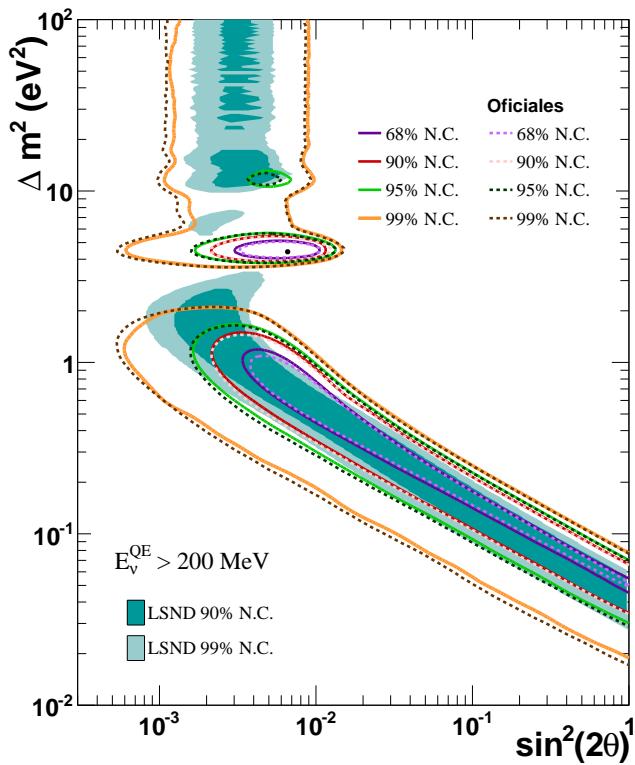
D.4.1. PRNG alternativo

Como ya se mencionó el generador de números aleatorios (*pseudo random number generator*, PRNG) para generar los experimentos ficticios fue el *Mersenne Twister* que se puede descargar de [204]. Una de las sospechas que se tenía sobre las causas que originaban las diferencias en los contornos frecuentistas oficiales y los obtenidos en esta tesis era el PRNG. Se lanzaron nuevas corridas usando la función implementada por defecto en C para generar números aleatorios, `rand()`, y una transformación *Box–Muller*¹. Los contornos obtenidos con este PRNG alternativo son notablemente más burdos, sin embargo son equivalentes a los obtenidos con el *Mersenne Twister*. A pesar de ser más burdos siguen siendo más estrechos que los oficiales.

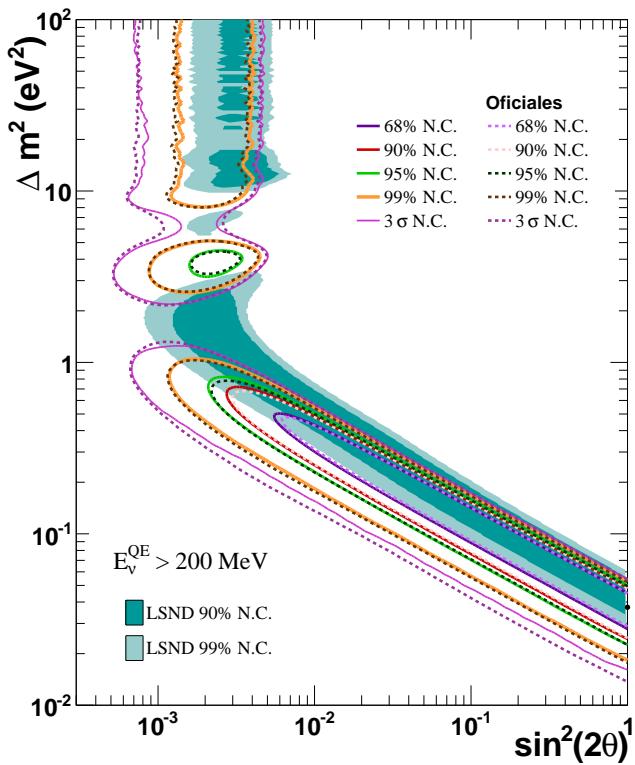
D.4.2. Baja y alta señal

Pensando que las diferencias con los contornos oficiales se debían a una propagación sistemática del error en los cálculos de punto flotante, se investigó el efecto que tendría alterar el peso de la señal en la generación de experimentos ficticios. Así pues, se hicieron análisis en los cuales los experimentos ficticios fueron generados con un aumento de 0.1% en la señal y con una disminución de 0.001%. En ambos casos los contornos obtenidos fueron sumamente distintos, muchísimo más estrechos. La prueba no logró concluir nada.

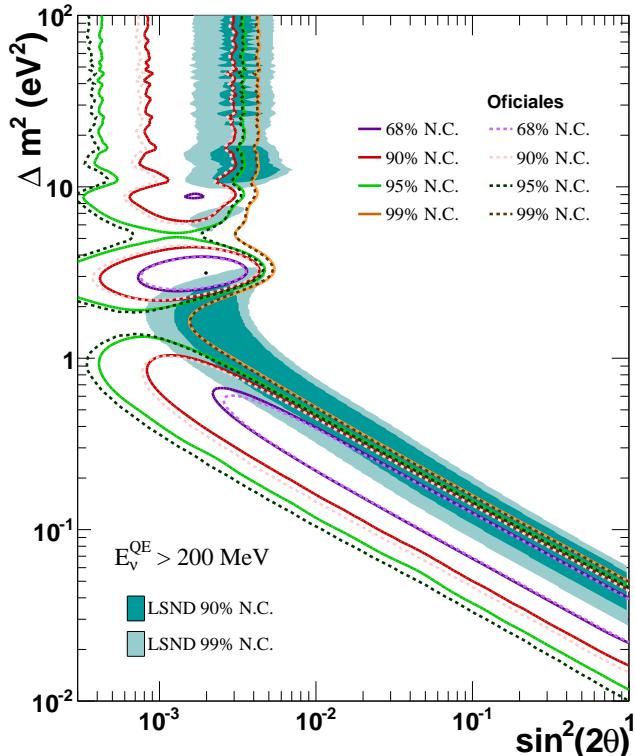
¹Una combinación definitivamente inferior a la usada.



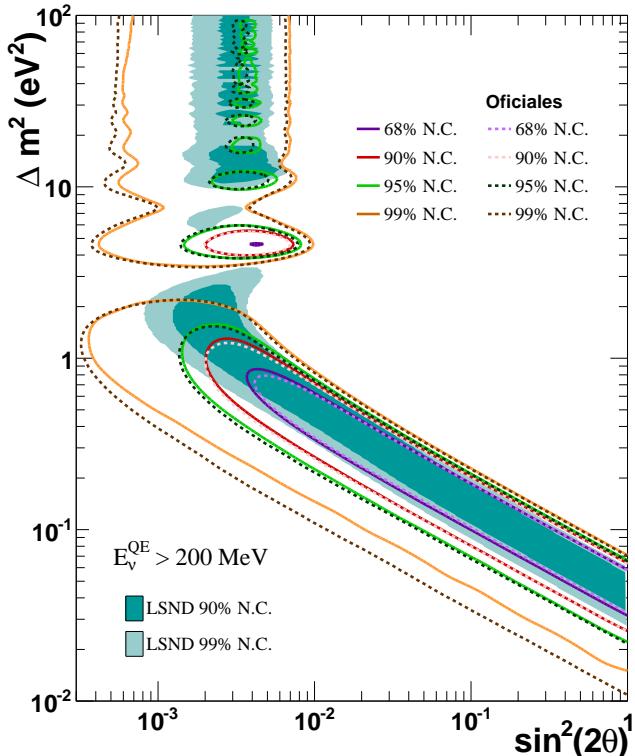
(a) Antineutrinos 2010.



(b) Combinado 2012.



(c) Neutrinos 2012.



(d) Antineutrinos 2012.

Figura D.3: Comparación con los contornos oficiales.

Apéndice E

Constricción de los errores

Además de constreñir la magnitud de las incertidumbres en el número de eventos ν_e ($\bar{\nu}_e$), la distribución de evento observados ν_μ ($\bar{\nu}_\mu$) y las correlaciones entre las dos muestras proveen una forma de corregir la forma y normalización de la distribución predicha de ν_e ($\bar{\nu}_e$). A pesar de que no se aplique una corrección a la distribución de ν_e ($\bar{\nu}_e$), la presencia de los términos fuera de la diagonal en la verosimilitud \mathcal{L} (3.12) permiten soluciones en que los *bins* de ν_e ($\bar{\nu}_e$) y ν_μ ($\bar{\nu}_\mu$) muestren discrepancias similares con respecto a los datos, como podría ser una normalización residual entera más grande que las barras de error, mientras que da un valor aceptable de *like*. Como resultado, un exceso de eventos en la distribución de ν_e ($\bar{\nu}_e$) solo sera atribuido a una señal de oscilación si es más grande que las diferencias que pueden ser tomadas en cuenta a través de las correlaciones entre ν_μ/ν_e ($\bar{\nu}_\mu/\bar{\nu}_e$), es decir, un exceso de eventos ν_μ ($\bar{\nu}_\mu$) se verá reflejado como un exceso ν_e ($\bar{\nu}_e$) y este último exceso no necesariamente significa una señal de oscilación.

E.1. Construcción de la restricción de errores

Pensemos solamente en una χ^2 , como la de la ecuación (3.31), para calcular explícitamente como sería la corrección equivalente, se puede intentar resolver para el número de eventos en la distribución ν_e y ν_μ que minimizan la siguiente función χ^2 :

$$\chi^2 = \sum_{i,j=1}^{n_e+n_\mu} \Delta_i M_{ij}^{-1} \Delta_j + \sum_k \frac{(F_k - D_k)^2}{D_k}, \quad \frac{\partial \chi^2}{\partial F_i} = 0;$$

donde \mathbf{D} es el vector de datos, \mathbf{F} es el vector de datos ajustados, $\Delta_i = F_i - Q_i$ es la diferencia entre el número ajustado de eventos y la predicción MC y como antes \mathbf{M} la matriz de covarianza. El conjunto de ecuación que se necesitan resolver son:

$$\frac{\partial \chi^2}{\partial F_i} = 2 \sum_{i,j=1}^{n_e+n_\mu} M_{ij}^{-1} \Delta_j + 2 \frac{(F_i - D_i) \delta_{i(bin \ n_\mu)}}{D_i} = 0, \quad (E.1)$$

donde $\delta_{i(bin \ n_\mu)}$ cuando i es un *bin* de ν_μ y cero de otra forma. Al definir la matriz B_{ij}^{-1} como sigue:

$$B_{ij}^{-1} = \begin{cases} M_{ij}^{-1}; & i \leq n_e \text{ o } j \leq n_e \\ M_{ij}^{-1} + \frac{1}{D_i}; & i > n_e \text{ y } j > n_e \end{cases} \quad (E.2)$$

se puede escribir la ecuación (E.1) de la siguiente forma:

$$\sum_j B_{ij}^{-1} F_j = \sum_j M_{ij}^{-1} Q_j + \frac{D_i \delta_{i(bin \ n_\mu)}}{D_i}. \quad (\text{E.3})$$

La solución de este conjunto de ecuaciones es

$$F_i = \sum_k B_{ik} \left(\sum_j M_{kj}^{-1} Q_j + \delta_{k(bin \ n_\mu)} \right) \quad (\text{E.4})$$

y la matriz de covarianza para los valores F_i esta dada por

$$B_{ij} = \langle \delta F_i \delta F_j \rangle. \quad (\text{E.5})$$

Los errores contenidos en la matriz B_{ij} han sido efectivamente constreñidos por el alto número de eventos en los *bins* de la distribución de ν_μ . Las transformaciones en las ecuaciones (E.2) y (E.4) son usadas para presentar los resultados de las distribuciones ajustadas y constreñir las barras de error, sin embargo no son parte de la maquinaria de ajuste. De forma intuitiva se puede pensar que las reducidas barras de error sobre la distribución ν_μ otorgan un peso más fuerte en el ajuste, en la figura E.1 se puede observar la disminución de las barras de error en la muestra de $\bar{\nu}_\mu$, también hay ligeras diferencias en las posiciones de los histogramas, sin embargo son prácticamente imperceptibles.

A modo de ejemplo se muestra ahora de forma analítica como los eventos ν_μ constriñen a los eventos ν_e , con el ejemplo más sencillo posible de un *bin* de ν_e y un *bin* de ν_μ . En tal circunstancia se tienen la incertidumbre estadística σ_{ν_e} y σ_{ν_μ} en el número de eventos en la muestras de eventos ν_e y ν_μ , respectivamente; la incertidumbre sistemática δ_{ν_e} y δ_{ν_μ} de cada muestra; y la correlación ρ entre la incertidumbre sistemática de ambas muestras. Así la matriz de error para el sistema puede ser escrita como:

$$\mathbf{E}_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} \sigma_{\nu_e}^2 + \delta_{\nu_e}^2 & \rho \delta_{\nu_e} \delta_{\nu_\mu} \\ \rho \delta_{\nu_e} \delta_{\nu_\mu} & \sigma_{\nu_\mu}^2 + \delta_{\nu_\mu}^2 \end{pmatrix} \quad (\text{E.6})$$

Definiendo $\alpha_{\nu_e} = \sigma_{\nu_e}/\delta_{\nu_e}$ y $\alpha_{\nu_\mu} = \sigma_{\nu_\mu}/\delta_{\nu_\mu}$, la inversa de la matriz de error es

$$\mathbf{E}_{2 \times 2}^{-1} = \frac{1}{(\alpha_{\nu_e}^2 + 1)(\alpha_{\nu_\mu}^2 + 1) - \rho^2} \begin{pmatrix} \frac{\alpha_{\nu_\mu}^2 + 1}{\delta_{\nu_e}^2} & \frac{-\rho}{\delta_{\nu_e} \delta_{\nu_\mu}} \\ \frac{-\rho}{\delta_{\nu_e} \delta_{\nu_\mu}} & \frac{\alpha_{\nu_e}^2 + 1}{\delta_{\nu_\mu}^2} \end{pmatrix} \quad (\text{E.7})$$

Por su parte para la χ^2 , si s es el número de eventos de oscilación en la muestra de ν_e , Δ_{ν_e} y Δ_{ν_μ} son las respectivas diferencias entre los eventos observados y esperados para las distintas muestras, entonces la χ^2 se puede escribir en forma vectorial como

$$\chi^2 = (\Delta_{\nu_e} - s \ \Delta_{\nu_\mu}) \mathbf{E}_{2 \times 2}^{-1} \begin{pmatrix} \Delta_{\nu_e} - s \\ \Delta_{\nu_\mu} \end{pmatrix}$$

al desarrollar se obtiene

$$\chi^2 = \frac{1}{(\alpha_{\nu_e}^2 + 1)(\alpha_{\nu_\mu}^2 + 1) - \rho^2} \times \quad (\text{E.8})$$

$$\times \left[(\alpha_{\nu_\mu}^2 + 1) \frac{(\Delta_{\nu_e} - s)^2}{\delta_{\nu_e}} - 2\rho \frac{\Delta_{\nu_\mu}(\Delta_{\nu_e} - s)}{\delta_{\nu_e} \delta_{\nu_\mu}} + (\alpha_{\nu_e}^2 + 1) \frac{\Delta_{\nu_\mu}^2}{\delta_{\nu_\mu}^2} \right] \quad (\text{E.9})$$

Diferenciando esta última expresión con respecto a s e igualando con cero produce el mejor ajuste para los eventos de señal:

$$s = \Delta_{\nu_e} \left[1 - \frac{\rho}{\alpha_{\nu_\mu}^2 + 1} \frac{\Delta_{\nu_\mu}/\delta_{\nu_\mu}}{\Delta_{\nu_e}/\delta_{\nu_e}} \right] \quad (\text{E.10})$$

además, al tomar el doble de la inversa de la segunda derivada se obtiene la incertidumbre en el número de eventos de señal

$$\delta_s^2 = \sigma_{\nu_e}^2 + \left[1 - \frac{\rho^2}{\alpha_{\nu_\mu}^2 + 1} \right] \delta_{\nu_e}^2 \quad (\text{E.11})$$

Hay dos importantes casos extremos que notar de las ecuaciones (E.10) y (E.11):

- Si no hay correlación entre los *bins* de ν_e y ν_μ ($\rho = 0$), o si la muestra de ν_μ tiene una gran incertidumbre estadística ($\alpha_{\nu_\mu} \rightarrow \infty$) entonces la señal extraída y su incertidumbre es $\Delta_{\nu_e} \pm \sqrt{\sigma_{\nu_e}^2 + \delta_{\nu_e}^2}$.
- Si los ν_e y ν_μ están completamente correlacionados ($\rho = 1$) y la muestra de ν_e tiene incertidumbre estadística despreciable ($\alpha_{\nu_\mu} = 0$), la señal extraída y su incertidumbre es $\Delta_{\nu_e} \left(1 - \frac{\Delta_{\nu_\mu}/\delta_{\nu_\mu}}{\Delta_{\nu_e}/\delta_{\nu_e}} \right) \pm \sigma_{\nu_e}$.

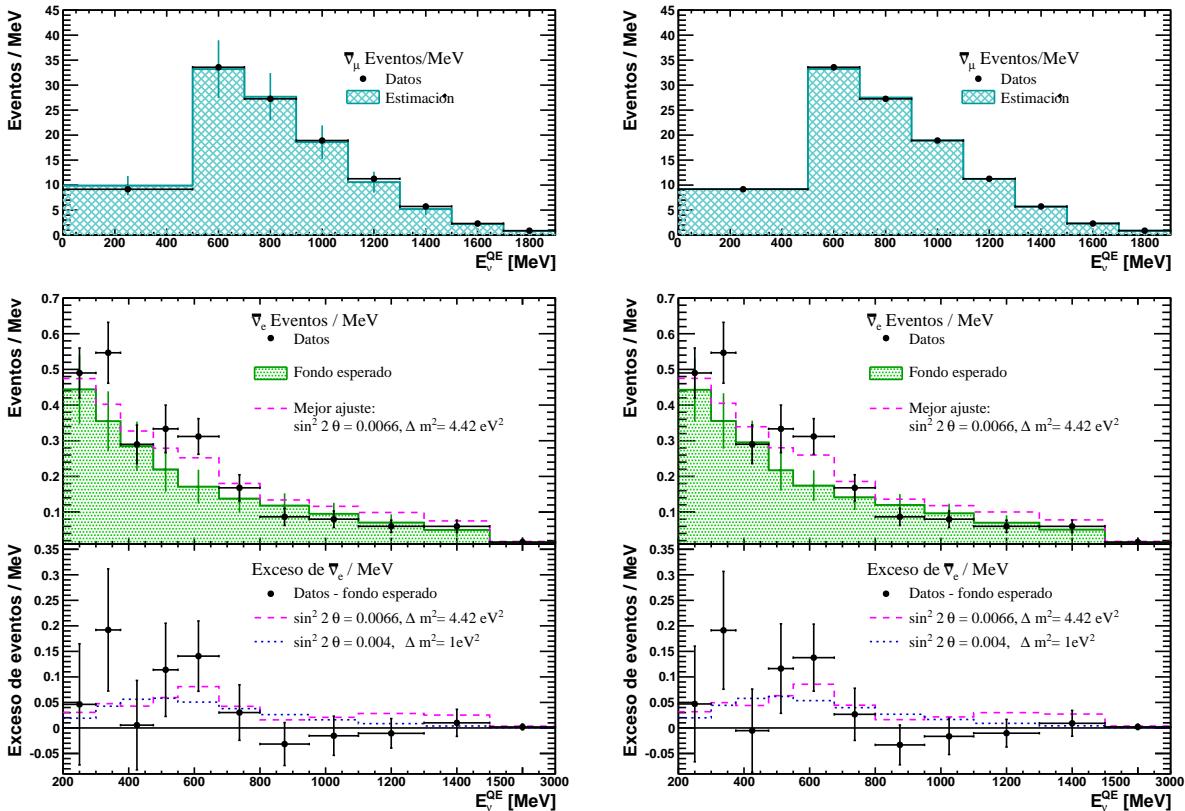


Figura E.1: Comparación de histogramas con errores sin constreñir y constreñidos. Datos de 2010 del modo de antineutrinos. A la izquierda se muestran los histogramas sin constreñir y a la derecha con el error constreñido. La constrección de los errores para los $\bar{\nu}_\mu$ es notable, el efecto en los otros histogramas es humilde.

Apéndice F

Fibra óptica en el RWM

Como una oportunidad para conocer el experimento MiniBooNE en persona, a algunos de sus colaboradores, la forma en la que se trabajaba y el laboratorio Fermilab, el autor de esta tesis viajó a Estados Unidos para hacer una corta estancia de investigación del 20 de marzo al 7 de mayo de 2012. Además de trabajar en los análisis de datos que ya se discutieron, se implementó y se empezó la caracterización de una fibra óptica que serviría para ayudar en la sincronización temporal de los eventos. Este trabajo se hizo en colaboración con los investigadores del laboratorio de *Los Alamos*: Dr. Žarko Pavlović y Dr. Richard Van de Water.

La señal del RWM en MiniBooNE

El *Resistive Wall Monitor* (RWM) es una bobina de alambre localizada en el edificio MI12, debajo de la tierra y un par de metros antes del blanco en el eje del haz. Fue instalado entre 2001 y 2002 y ha estado en operación desde entonces. Justo antes de impactar el blanco de Be, los protones inducen una señal en esta espira. El primer *bunch* de protones, con 6×10^{10} protones, dispara la electrónica en MI12 y de ahí viaja un pulso cuadrado por un cable hacia el edificio del detector.

En el detector se almacena la señal cuadrada que viajó desde MI12 por el cable de cobre (*copper wire first hit*, CW1). Esta misma señal rebota de vuelta hacia MI12 al llegar al extremo del cable, el cual está terminado con una resistencia¹. En MI12 rebota por segunda ocasión y por segunda ocasión se dirige hacia el detector. En el detector se almacena la señal del cable de cobre que viajó por segunda vez (*copper wire second hit*, CW2). Nótese que esta señal viajó la distancia entre MI12 y el detector un total de tres veces. En la figura F.1 se resume el esquema de operación del RWM. Hay otros sistemas usados para monitorear la posición y el ancho del haz de protones.

Se hace esto con el objetivo de tener en cuenta los cambios en el tiempo de propagación debido a cambios en la constante dieléctrica y el tamaño del cable, como resultado de cambios en la temperatura. Al tomar la diferencia de tiempos entre la primera y segunda señal se puede calcular la velocidad de propagación en cualquier momento. Con la velocidad de propagación y la etiqueta de tiempo de la primera señal se puede calcular con precisión la hora a la cual los protones pasan por el RWM. Tener una mejor resolución de tiempo ayuda a discriminar eventos de corriente neutra, en particular π^0 .

¹Este rebote es análogo al que haría una onda mecánica al llegar a un pared.

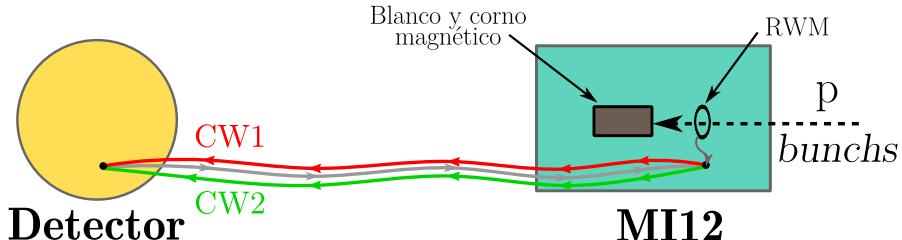


Figura F.1: Esquema de operación del RWM. Los *bunchs* de protones provenientes del Booster atraviesan el RWM antes de impactar el blanco de Be. Una señal viaja de MI12 al detector a través de un cable de cobre, en el detector se almacena esta señal (CW1). Rebota en el detector y otra vez en MI12 para ser almacenada por segunda ocasión en el detector (CW2). De ida y vuelta viaja a través del mismo cable.

Sean t_1 la etiqueta de tiempo para CW1, t_2 la etiqueta de tiempo para CW2, $t_{\text{viaje}} = d/v$ el tiempo que toma la señal para viajar de MI12 al detector y t la etiqueta de tiempo de interés, aquella asociada al paso de los protones por el RWM. Insistiendo, t_{viaje} cambia con las variaciones de temperatura.

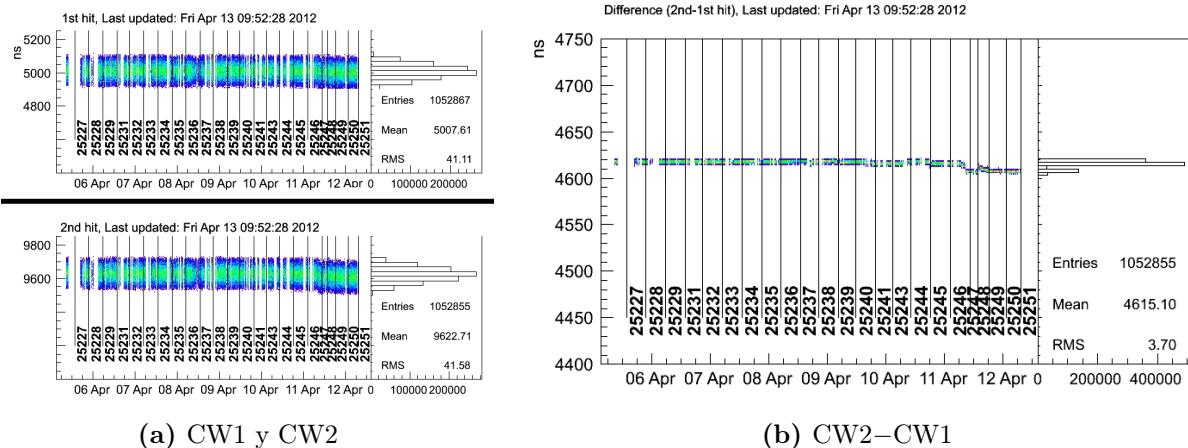
Así pues: $t = t_1 - t_{\text{viaje}}$; notemos que $t_2 - t_1 = \frac{2d}{v} = 2t_{\text{viaje}}$. Implícitamente se acepta que la variación en la temperatura, y por lo mismo la variación en la velocidad de propagación, es despreciable en el intervalo de tiempo que le toma a la señal dar dos vueltas. Al remplazar el tiempo de viaje se obtiene:

$$t = t_1 - \frac{t_2 - t_1}{2} \quad (\text{F.1})$$

El RWM es capaz de producir una señal para cada *bunch* de protones en el *spill*, pero solo se dispara en el primer *bunch* del *spill* ya que la estructura del haz de protones es muy estable y se conoce suficientemente bien como para reconstruir los otros *bunchs*, en § 2.1.1 se habla sobre la estructura del haz de protones. Esta señal analógica, la que inducen los protones en la espira, es discriminada y convertida en un pulso cuadrado en cajas NIM (*Nuclear Instrumentation Module*) en el edificio del blanco, MI12. El pulso cuadrado viaja por un cable de cobre al edificio del detector, ahí después de ser discriminado, se almacena y rebota al MI12. El umbral del discriminador en el detector es suficientemente bajo como para permitir el paso de la atenuada señal reflejada, pero suficientemente alto como para prohibir la entrada de una señal que haya rebotado más veces. A pesar de que los datos del RWM no entran directamente en los análisis, permitieron verificar el funcionamiento de muchas cosas: ver que se pueden relacionar los eventos de neutrinos en el detector a cada *bunch* (revisar § 2.1.1) de protones y comprobar que el pulso de corriente que fluye a través del corno magnético es esencialmente estático a la escala del tiempo del paso de protones.

Inconvenientes con el RWM: A pesar de que es un sistema robusto que permite notar pequeñas variaciones, es muy susceptible a perturbaciones externas. Mover, conectar y desconectar cables suele tener efectos inesperados en las diferencias de tiempo. Más aún, un alambre de cobre de más de 500 m de largo actúa como antena y durante las tormentas eléctricas suele haber variaciones en los tiempos. En el pasado se tuvieron serios problemas con esto, parte de la electrónica resultó dañada por culpa de las altas corrientes que se inducían. Para evitar más daños se instaló un circuito op-amp en cada uno de los extremos del cable para que actuaran como fusibles, una fuerte tormenta eléctrica quemaría tales circuitos pero no componentes importantes o caras. Sin embargo, la señal del RWM se pierde hasta que alguien reemplace el circuito quemado. No todas las tormentas queman los circuitos, pero es común que una tormenta de menor intensidad cause desplazamientos en las etiquetas de tiempo, tal

conducta no tiene otra explicación que un mal funcionamiento del op-amp. Si bien se sigue teniendo la señal del RWM, esta ya no es del todo confiable. La figura F.2 muestra los histogramas de los tiempos registrados por el RWM y que se muestran en línea². En la figura F.2a se muestran los histogramas de los tiempos registrados de CW1 y CW2, su variación oscila de 30 a 40 ns, dominada por fluctuaciones del Booster. Mientras que la figura F.2b muestra la diferencia de tiempos, en esta figura se pueden notar las pequeñas variaciones que la diferencia de tiempo atraviesa, variaciones no del todo esperadas. Es importante notar que como estas variaciones son menores a 15 ns no son perceptibles en las otras dos gráficas.



(a) CW1 y CW2

(b) CW2–CW1

Figura F.2: Gráficas en línea del RWM. En el eje horizontal se tiene la fecha y un número que identifica la corrida a la que se relacionan, en el eje vertical se grafica la etiqueta de tiempo.

Nuevo sistema con fibra óptica

Con la intención de lidiar con tales inconvenientes se instaló un nuevo sistema para remplazar el cable de cobre con una fibra óptica. Ya que se espera que el tiempo de propagación de las señales sea más estable puesto que la fibra es menos susceptible a las variaciones de temperatura, la atenuación de la señal es despreciable y no sería afectada por los truenos ya que es un dieléctrico. Se tendió una fibra óptica que conectaba MI12 con el detector, la señal que generaban los protones al pasar por el RWM era separada en una componente que viajaba por el cable, como antes se venía haciendo, y otra componente que viajaba por la fibra hasta el detector, en donde se almacenaba (*fiber optics*, FO). Dada la supuesta baja susceptibilidad de la fibra a los cambios de temperatura, no se requería rebotar señales. Se omiten los detalles de tal implementación ya que a final de cuentas tuvo que cambiarse. Una vez conectada la fibra y habiendo configurado los sistemas de adquisición de datos, se procedió a probar el nuevo sistema, comparándolo con el ya existente que usaba el cable de cobre. Varios defectos surgieron.

Bulito: Se observó un ligero exceso de eventos cuando se tomaba la diferencia entre los tiempos del cable de cobre y la fibra óptica. Por ejemplo cuando se toma la diferencia FO-CW1 la mayoría de los eventos tienen una diferencia de 3.1μ , sin embargo hay una cantidad considerable 15 ns después. No se puede atribuir este comportamiento a ninguna de las muestras, CW1, CW2 o FO; ya que todas tienen una dispersión mayor. Tampoco es razonable pensar que este comportamiento es

²Solo accesibles por la colaboración.

una fluctuación estadística. La figura F.3a muestra un bulto estandar. Después se encontró la razón de este comportamiento: uno de los discriminadores estaba siendo disparado en la parte posterior (descendente) del pulso. Tal pulso dura unos cuantos microsegundos, la parte creciente del pulso es estable (≤ 1 ns) y se llega al máximo en unos cuantos picosegundos, sin embargo el extremo descendiente lleva varios nanosegundos en llegar al mínimo y no siempre lo hace de la misma forma.

Corrimientos: Una lección que se aprendió es que se requiere conectar a la fibra óptica en un modulo reservado. Colaboradores del experimento *SciBath* trabajaban con la señal del RWM mientras se determinaba la configuración del *hardware* y se hacían pruebas, cada vez que empezaban a recolectar datos se conectaban a la señal del RWM. La bitácora que mantenían de sus actividades fue de gran ayuda para determinar que los corrimientos de tiempo se debían a ellos, como se muestra en la figura F.3b.

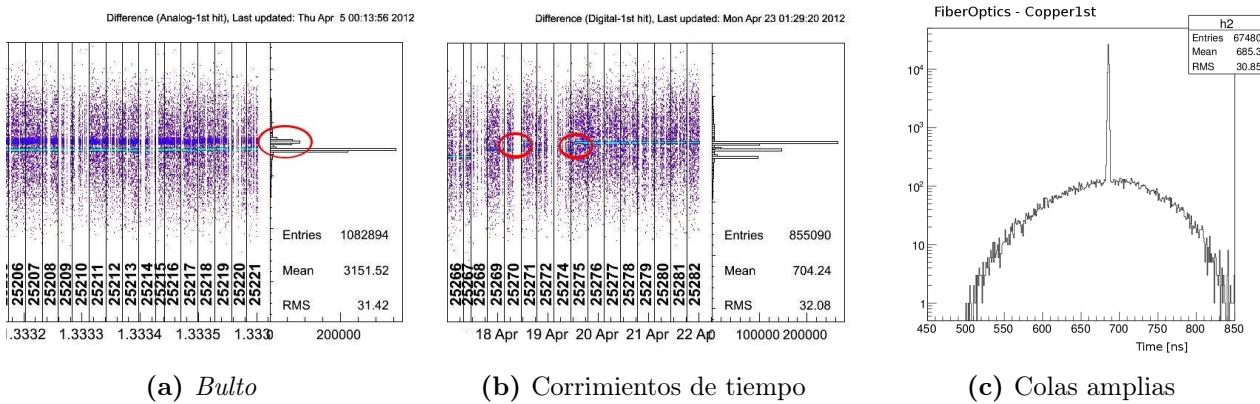


Figura F.3: Defectos en el sistema con fibra óptica.

Colas amplias: Al comparar los tiempos entre la fibra y el cobre, o entre los dos distintos canales en que se conectaba la fibra, se podía ver una dispersión alrededor de la media de 100 ns. Este problema es despreciable en un histograma lineal, pero al graficar en escala logarítmica se puede observar una fracción de 5 % a 10 % fuera del pico central, como lo muestra la figura F.3c. Este problema no se pudo resolver, pero todo parecía indicar a que tenía que ver con los módulos que almacenaban la señal de la fibra óptica.

Desafortunadamente, un par de días antes de concluida la estancia, un trueno quemó el discriminador encargado de separar la señal de la fibra y el cable de cobre. Lo que hizo que trabajar a distancia se volviera mucho más complicado. Después de que se reparó el sistema surgieron nuevos comportamientos anómalos, los cuales ya no podían ser investigados remotamente. Después de que se rechazó la primera solicitud de la colaboración para la búsqueda de materia oscura, la implementación de la fibra óptica entró en hiato. El trabajo que se llevó a cabo en Fermilab no fue suficiente para lograr implementar un sistema de sincronización de tiempo completamente funcional, pero fue útil como parte del proceso necesario de instrumentación. Al final, el mecanismo del sistema que fue instalado cambió, pero se basó en una propuesta que surgió de este trabajo.

Una componente importante del análisis es el uso del tiempo de sincronización con respecto al haz, lo cual se lograba con la alta estadística de datos ν_μ ($\bar{\nu}_\mu$). Dado que el experimento planea hacer una búsqueda de materia oscura en la cual la gran mayoría de los neutrinos estarán ausentes, hace falta un mecanismo que permita sincronizar precisamente los eventos con respecto a la llegada del haz.

Bibliografía

- [1] W. Pauli, “Carta sin publicar a la sociedad de física de Tubinga,” diciembre 1930.
- [2] L. M. Brown, “The idea of the neutrino,” *Physics Today*, vol. 31, no. 9, pp. 23–28, 1978.
- [3] J. Chadwick, “The intensity distribution in the magnetic spectrum of beta particles from radium (B + C),” *Verh. Phys. Gesell.*, vol. 16, pp. 383–391, 1914.
- [4] J. Chadwick, “The Existence of a Neutron,” *Proceedings of the Royal Society of London. Series A*, vol. 136, no. 830, pp. 692–708, 1932.
- [5] E. Fermi, “Versuch einer Theorie der β -Strahlen. I,” *Zeitschrift für Physik*, vol. 88, pp. 161–177, 1934.
- [6] K. C. Wang, “A Suggestion on the Detection of the Neutrino,” *Phys. Rev.*, vol. 61, pp. 97–97, Jan 1942.
- [7] K. Zuber, *Neutrino Physics*. Taylor & Francis, second ed., 2011.
- [8] G. W. Rodeback & J. S. Allen, “Neutrino Recoils Following the Capture of Orbital Electrons in A^{37} ,” *Phys. Rev.*, vol. 86, pp. 446–450, May 1952.
- [9] R. Davis, “Attempt to Detect the Antineutrinos from a Nuclear Reactor by the $Cl^{37}(\bar{\nu}, e^-)A^{37}$ Reaction,” *Phys. Rev.*, vol. 97, pp. 766–769, Feb 1955.
- [10] C. S. Wu, E. Ambler, R. W. Hayward, D. D. Hoppes, & R. P. Hudson, “Experimental Test of Parity Conservation in Beta Decay,” *Phys. Rev.*, vol. 105, pp. 1413–1415, Feb 1957.
- [11] R. L. Garwin, L. M. Lederman, & M. Weinrich, “Observations of the Failure of Conservation of Parity and Charge Conjugation in Meson Decays: the Magnetic Moment of the Free Muon,” *Phys. Rev.*, vol. 105, pp. 1415–1417, Feb 1957.
- [12] M. Goldhaber, L. Grodzins, & A. W. Sunyar, “Helicity of Neutrinos,” *Phys. Rev.*, vol. 109, pp. 1015–1017, Feb 1958.
- [13] G. Danby *et al.*, “Observation of High-Energy Neutrino Reactions and the Existence of Two Kinds of Neutrinos,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 9, pp. 36–44, Jul 1962.
- [14] S. Weinberg, “A model of leptons,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 19, pp. 1264–1266, Nov 1967.
- [15] F. Hasert *et al.*, [Gargamelle] , “Search for elastic muon-neutrino electron scattering,” *Physics Letters B*, vol. 46, no. 1, pp. 121 – 124, 1973.
- [16] F. Hasert *et al.*, [Gargamelle] , “Observation of neutrino-like interactions without muon or electron in the Gargamelle neutrino experiment,” *Nuclear Physics B*, vol. 73, no. 1, pp. 1 – 22, 1974.
- [17] F. Hasert *et al.*, [Gargamelle] , “Observation of neutrino-like interactions without muon or electron in the Gargamelle neutrino experiment,” *Physics Letters B*, vol. 46, no. 1, pp. 138 – 140, 1973.
- [18] G. Arnison *et al.*, “Experimental observation of lepton pairs of invariant mass around $95 \text{ GeV}/c^2$ at the CERN SPS collider,” *Physics Letters B*, vol. 126, no. 5, pp. 398 – 410, 1983.
- [19] G. Arnison *et al.*, “Experimental observation of isolated large transverse energy electrons with associated missing energy at $s = 540 \text{ GeV}$,” *Physics Letters B*, vol. 122, no. 1, pp. 103 – 116, 1983.
- [20] P. Bagnaia *et al.*, “Evidence for $Z^0 \rightarrow e^+e^-$ at the CERN $p\bar{p}$ collider,” *Physics Letters B*, vol. 129,

no. 1–2, pp. 130 – 140, 1983.

- [21] M. Banner *et al.*, “Observation of single isolated electrons of high transverse momentum in events with missing transverse energy at the CERN $p\bar{p}$ collider,” *Physics Letters B*, vol. 122, no. 5–6, pp. 476 – 485, 1983.
- [22] M. L. Perl *et al.*, “Evidence for Anomalous Lepton Production in $e^+ - e^-$ Annihilation,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 35, pp. 1489–1492, Dec 1975.
- [23] S. Abachi *et al.*, [D0], “Observation of the Top Quark,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 74, pp. 2632–2637, Apr 1995.
- [24] F. Abe *et al.*, [CDF], “Observation of Top Quark Production in $\bar{p}p$ Collisions with the Collider Detector at Fermilab,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 74, pp. 2626–2631, Apr 1995.
- [25] K. Kodama *et al.*, [DONUT], “Observation of tau neutrino interactions,” *Physics Letters B*, vol. 504, no. 3, pp. 218 – 224, 2001.
- [26] J. A. Bagger, “Precision electroweak measurements on the Z resonance,” *Physics Reports*, vol. 427, no. 5–6, pp. 257 – 454, 2006.
- [27] D. DeCamp *et al.*, “Determination of the number of light neutrino species,” *Physics Letters B*, vol. 231, no. 4, pp. 519 – 529, 1989.
- [28] B. Pontecorvo, “Mesonium and anti-mesonium,” *Sov.Phys.JETP*, vol. 6, p. 429, 1957.
- [29] T. Lee, R. Oehme, & C.-N. Yang, “Remarks on Possible Noninvariance Under Time Reversal and Charge Conjugation,” *Phys.Rev.*, vol. 106, pp. 340–345, 1957.
- [30] T. Lee & C. Wu, “Weak Interactions: Decays of neutral K mesons,” *Ann.Rev.Nucl.Part.Sci.*, vol. 16, pp. 511–590, 1966.
- [31] Z. Maki, M. Nakagawa, & S. Sakata, “Remarks on the Unified Model of Elementary Particles,” *Progress of Theoretical Physics*, vol. 28, pp. 870–880, Nov. 1962.
- [32] B. Pontecorvo, “Neutrino Experiments and the Problem of Conservation of Leptonic Charge,” *Soviet Journal of Experimental and Theoretical Physics*, vol. 26, p. 984, May 1968.
- [33] R. Davis, D. S. Harmer, & K. C. Hoffman, “Search for Neutrinos from the Sun,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 20, pp. 1205–1209, May 1968.
- [34] V. Gribov & B. Pontecorvo, “Neutrino astronomy and lepton charge,” *Physics Letters B*, vol. 28, no. 7, pp. 493 – 496, 1969.
- [35] Y. Fukuda *et al.*, [Super-Kamiokande], “Evidence for Oscillation of Atmospheric Neutrinos,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 81, pp. 1562–1567, Aug 1998.
- [36] Q. R. Ahmad *et al.*, [SNO], “Measurement of the Rate of $\nu_e + d \rightarrow p + p + e^-$ Interactions Produced by 8B Solar Neutrinos at the Sudbury Neutrino Observatory,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 87, p. 071301, Jul 2001.
- [37] Q. R. Ahmad *et al.*, [SNO], “Direct Evidence for Neutrino Flavor Transformation from Neutral-Current Interactions in the Sudbury Neutrino Observatory,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 89, p. 011301, Jun 2002.
- [38] L. Wolfenstein, “Neutrino oscillations in matter,” *Phys. Rev. D*, vol. 17, pp. 2369–2374, May 1978.
- [39] S. Mikheev & A. Y. Smirnov, “Resonance Amplification of Oscillations in Matter and Spectroscopy of Solar Neutrinos,” *Sov.J.Nucl.Phys.*, vol. 42, pp. 913–917, 1985.
- [40] J. Beringer *et al.*, [Particle Data Group], “Review of particle physics,” *Phys. Rev. D*, vol. 86, p. 010001, Jul 2012.
- [41] J. A. Formaggio & G. P. Zeller, “From eV to EeV: Neutrino cross sections across energy scales,” *Rev. Mod. Phys.*, vol. 84, pp. 1307–1341, Sep 2012.
- [42] G. Bellini *et al.*, [Borexino], “Observation of geo-neutrinos,” *Physics Letters B*, vol. 687, no. 4–5, pp. 299 – 304, 2010.
- [43] G. Bellini *et al.*, [Borexino], “Measurement of geo-neutrinos from 1353 days of Borexino,” *Phys.Lett.*, vol. B722, pp. 295–300, 2013.

- [44] Kamland Collaboration *et al.*, **[KamLAND]** , “Partial radiogenic heat model for Earth revealed by geoneutrino measurements,” *Nature Geoscience*, vol. 4, pp. 647–651, Sept. 2011.
- [45] A. Gando *et al.*, **[KamLAND]** , “Reactor On-Off Antineutrino Measurement with KamLAND.” arXiv:1303.4667, 2013.
- [46] M. G. Aartsen *et al.*, **[IceCube]** , “First Observation of PeV-Energy Neutrinos with IceCube,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 111, p. 021103, Jul 2013.
- [47] P. Ade *et al.*, **[Planck]** , “Planck 2013 results. XVI. Cosmological parameters.” arXiv:1303.5076, 2013.
- [48] E. Komatsu *et al.*, **[WMAP]** , “Seven-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Cosmological Interpretation,” *Astrophys.J.Suppl.*, vol. 192, p. 18, 2011.
- [49] G. Mangano & P. D. Serpico, “A robust upper limit on from bbn, circa 2011,” *Physics Letters B*, vol. 701, no. 3, pp. 296 – 299, 2011.
- [50] N. Cabibbo, “Unitary Symmetry and Leptonic Decays,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 10, pp. 531–533, Jun 1963.
- [51] M. Kobayashi & T. Maskawa, “CP-Violation in the Renormalizable Theory of Weak Interaction,” *Progress of Theoretical Physics*, vol. 49, pp. 652–657, Feb. 1973.
- [52] E. Akhmedov & A. Smirnov, “Paradoxes of neutrino oscillations,” *Physics of Atomic Nuclei*, vol. 72, no. 8, pp. 1363–1381, 2009.
- [53] Janet Conrad, “Explain it in 60 seconds: Neutrino mixing.” <http://www.symmetrymagazine.org/article/may-2005/explain-it-in-60-seconds>.
- [54] D. Groom *et al.*, **[Particle Data Group]** , “Review of Particle Physics,” *The European Physical Journal*, vol. C15, pp. 1+, 2000.
- [55] V. N. Aseev *et al.*, **[Troitsk]** , “Upper limit on the electron antineutrino mass from the Troitsk experiment,” *Phys. Rev. D*, vol. 84, p. 112003, Dec 2011.
- [56] G. Drexlin, **[KATRIN]** , “KATRIN: Direct measurement of a sub-eV neutrino mass,” *Nucl.Phys.Proc.Suppl.*, vol. 145, pp. 263–267, 2005.
- [57] K. Assamagan *et al.*, “Upper limit of the muon-neutrino mass and charged-pion mass from momentum analysis of a surface muon beam,” *Phys. Rev. D*, vol. 53, pp. 6065–6077, Jun 1996.
- [58] R. Barate *et al.*, **[ALEPH]** , “An Upper limit on the tau-neutrino mass from three-prong and five-prong tau decays,” *Eur.Phys.J.*, vol. C2, pp. 395–406, 1998.
- [59] G. L. Fogli *et al.*, “Observables sensitive to absolute neutrino masses. ii,” *Phys. Rev. D*, vol. 78, p. 033010, Aug 2008.
- [60] C. Giunti, “No effect of Majorana phases in neutrino oscillations,” *Physics Letters B*, vol. 686, no. 1, pp. 41 – 43, 2010.
- [61] J. N. Bahcall, A. M. Serenelli, & S. Basu, “New Solar Opacities, Abundances, Helioseismology, and Neutrino Fluxes,” *Astrophys.J.*, vol. 621, pp. L85–L88, Mar. 2005.
- [62] B. Cleveland *et al.*, “Measurement of the solar electron neutrino flux with the Homestake chlorine detector,” *Astrophys.J.*, vol. 496, pp. 505–526, 1998.
- [63] J. Abdurashitov *et al.*, **[SAGE]** , “Solar neutrino flux measurements by the Soviet-American Gallium Experiment (SAGE) for half the 22 year solar cycle,” *J.Exp.Theor.Phys.*, vol. 95, pp. 181–193, 2002.
- [64] W. Hampel *et al.*, **[GALLEX]** , “GALLEX solar neutrino observations: Results for GALLEX IV,” *Phys.Lett.*, vol. B447, pp. 127–133, 1999.
- [65] M. Altmann *et al.*, **[GNO]** , “Complete results for five years of GNO solar neutrino observations,” *Phys.Lett.*, vol. B616, pp. 174–190, 2005.
- [66] Y. Fukuda *et al.*, **[Kamiokande]** , “Solar neutrino data covering solar cycle 22,” *Phys.Rev.Lett.*, vol. 77, pp. 1683–1686, 1996.
- [67] Y. Fukuda *et al.*, **[Super-Kamiokande]** , “Measurements of the solar neutrino flux from Super-Kamiokande’s first 300 days,” *Phys.Rev.Lett.*, vol. 81, pp. 1158–1162, 1998.

- [68] J. N. Bahcall, N. A. Bahcall, & G. Shaviv, “Present status of the theoretical predictions for the Cl-36 solar neutrino experiment,” *Phys.Rev.Lett.*, vol. 20, pp. 1209–1212, 1968.
- [69] J. N. Bahcall, “Solar neutrinos. I: Theoretical,” *Phys.Rev.Lett.*, vol. 12, pp. 300–302, 1964.
- [70] B. Aharmim *et al.*, [**SNO**], “Combined analysis of all three phases of solar neutrino data from the sudbury neutrino observatory,” *Phys. Rev. C*, vol. 88, p. 025501, Aug 2013.
- [71] H. Sekiya for the Super-Kamiokande Collaboration, “Solar neutrino analysis of Super-Kamiokande.” arXiv:1307.3686, 2013.
- [72] K. Abe *et al.*, [**Super-Kamiokande**], “Solar neutrino results in Super-Kamiokande-III,” *Phys.Rev.*, vol. D83, p. 052010, 2011.
- [73] G. Bellini *et al.*, [**Borexino**], “First evidence of *pep* solar neutrinos by direct detection in borexino,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 108, p. 051302, Feb 2012.
- [74] V. Lozza, [**SNO+**], “Scintillator phase of the SNO+ experiment,” *J.Phys.Conf.Ser.*, vol. 375, p. 042050, 2012.
- [75] M. Wurm *et al.*, “The next-generation liquid-scintillator neutrino observatory LENA,” *Astroparticle Physics*, vol. 35, no. 11, pp. 685 – 732, 2012.
- [76] F. Reines *et al.*, “Evidence for High-Energy Cosmic-Ray Neutrino Interactions,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 15, pp. 429–433, Aug 1965.
- [77] C. Achar *et al.*, “Detection of muons produced by cosmic ray neutrinos deep underground,” *Physics Letters*, vol. 18, no. 2, pp. 196 – 199, 1965.
- [78] M. Aglietta *et al.*, [**NUSEX**], “Experimental study of atmospheric neutrino flux in the NUSEX experiment,” *Europhys.Lett.*, vol. 8, pp. 611–614, 1989.
- [79] K. Daum *et al.*, [**Frejus**], “Determination of the atmospheric neutrino spectra with the Frejus detector,” *Z.Phys.*, vol. C66, pp. 417–428, 1995.
- [80] Y. Fukuda *et al.*, [**Kamiokande**], “Atmospheric muon-neutrino / electron-neutrino ratio in the multiGeV energy range,” *Phys.Lett.*, vol. B335, pp. 237–245, 1994.
- [81] R. Becker-Szendy *et al.*, [**IMB**], “The Electron-neutrino and muon-neutrino content of the atmospheric flux,” *Phys.Rev.*, vol. D46, pp. 3720–3724, 1992.
- [82] Y. Ashie *et al.*, [**Super-Kamiokande**], “A Measurement of atmospheric neutrino oscillation parameters by Super-Kamiokande I,” *Phys.Rev.*, vol. D71, p. 112005, 2005.
- [83] J. Hosaka *et al.*, [**Super-Kamiokande**], “Three flavor neutrino oscillation analysis of atmospheric neutrinos in Super-Kamiokande,” *Phys.Rev.*, vol. D74, p. 032002, 2006.
- [84] M. C. Sanchez *et al.*, [**Soudan 2**], “Measurement of the L/E distributions of atmospheric neutrinos in Soudan 2 and their interpretation as neutrino oscillations,” *Phys.Rev.*, vol. D68, p. 113004, 2003.
- [85] M. Ambrosio *et al.*, [**MACRO**], “Matter effects in upward going muons and sterile neutrino oscillations,” *Phys.Lett.*, vol. B517, pp. 59–66, 2001.
- [86] P. Adamson *et al.*, [**MINOS**], “Measurement of neutrino and antineutrino oscillations using beam and atmospheric data in minos,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 110, p. 251801, Jun 2013.
- [87] S. Fukuda *et al.*, [**Super-Kamiokande**], “Tau neutrinos favored over sterile neutrinos in atmospheric muon-neutrino oscillations,” *Phys.Rev.Lett.*, vol. 85, pp. 3999–4003, 2000.
- [88] K. Abe *et al.*, [**Super-Kamiokande**], “A Measurement of the Appearance of Atmospheric Tau Neutrinos by Super-Kamiokande,” *Phys.Rev.Lett.*, vol. 110, p. 181802, 2013.
- [89] Y. Ashie *et al.*, [**Super-Kamiokande**], “Measurement of atmospheric neutrino oscillation parameters by Super-Kamiokande I,” *Phys. Rev. D*, vol. 71, p. 112005, Jun 2005.
- [90] P. Adamson *et al.*, [**MINOS**], “Measurement of the neutrino mass splitting and flavor mixing by MINOS,” *Phys.Rev.Lett.*, vol. 106, p. 181801, 2011.
- [91] M. Aartsen *et al.*, [**IceCube**], “Measurement of Atmospheric Neutrino Oscillations with IceCube,” *Phys. Rev. Lett.* 111,, vol. 081801, 2013.

- [92] S. K. Agarwalla, S. Choubey, & A. Raychaudhuri, “Neutrino mass hierarchy and with a magic baseline beta-beam experiment,” *Nuclear Physics B*, vol. 771, no. 1–2, pp. 1 – 27, 2007.
- [93] K. Abe *et al.*, “Letter of Intent: The Hyper-Kamiokande Experiment — Detector Design and Physics Potential —.” arXiv:1109.3262, 2011.
- [94] W. Winter, “Neutrino mass hierarchy determination with IceCube-PINGU,” *Phys.Rev.*, vol. D88, p. 013013, 2013.
- [95] G. Zacek *et al.*, **[CALTECH-SIN-TUM]** , “Neutrino Oscillation Experiments at the Gosgen Nuclear Power Reactor,” *Phys.Rev.*, vol. D34, pp. 2621–2636, 1986.
- [96] G. Vidyakin *et al.*, “Limitations on the characteristics of neutrino oscillations,” *JETP Lett.*, vol. 59, pp. 390–393, 1994.
- [97] B. Achkar *et al.*, **[Bugey]** , “Search for neutrino oscillations at 15, 40 and 95 meters from a nuclear power reactor at Bugey,” *Nuclear Physics B*, vol. 434, no. 3, pp. 503 – 532, 1995.
- [98] M. Apollonio *et al.*, **[CHOOZ]** , “Limits on neutrino oscillations from the CHOOZ experiment,” *Phys.Lett.*, vol. B466, pp. 415–430, 1999.
- [99] M. Apollonio *et al.*, **[CHOOZ]** , “Search for neutrino oscillations on a long baseline at the CHOOZ nuclear power station,” *Eur.Phys.J.*, vol. C27, pp. 331–374, 2003.
- [100] F. Boehm *et al.*, **[Palo Verde]** , “Final results from the Palo Verde neutrino oscillation experiment,” *Phys.Rev.*, vol. D64, p. 112001, 2001.
- [101] A. Piepke, **[KamLAND]** , “KamLAND: A reactor neutrino experiment testing the solar neutrino anomaly,” *Nucl.Phys.Proc.Suppl.*, vol. 91, pp. 99–104, 2001.
- [102] F. An *et al.*, **[Daya Bay]** , “Improved Measurement of Electron Antineutrino Disappearance at Daya Bay,” *Chin. Phys.*, vol. C37, p. 011001, 2013.
- [103] F. Ardellier *et al.*, **[Double Chooz]** , “Double Chooz: A Search for the neutrino mixing angle theta(13).” arXiv:hep-ex/0405032, 2006.
- [104] J. Ahn *et al.*, **[RENO]** , “RENO: An Experiment for Neutrino Oscillation Parameter θ_{13} Using Reactor Neutrinos at Yonggwang.” arXiv:1003.1391, 2010.
- [105] X. Guo *et al.*, **[Daya-Bay]** , “A Precision measurement of the neutrino mixing angle θ_{13} using reactor antineutrinos at Daya-Bay.” arXiv:hep-ex/0701029, 2007.
- [106] S. Ahn *et al.*, **[K2K]** , “Detection of accelerator produced neutrinos at a distance of 250-km,” *Phys.Lett.*, vol. B511, pp. 178–184, 2001.
- [107] M. Ahn *et al.*, **[K2K]** , “Measurement of Neutrino Oscillation by the K2K Experiment,” *Phys.Rev.*, vol. D74, p. 072003, 2006.
- [108] E. Ables *et al.*, **[MINOS]** , “P-875: A Long baseline neutrino oscillation experiment at Fermilab,” tech. rep., Fermi National Accelerator Laboratory, 1995.
- [109] P. Adamson *et al.*, **[MINOS]** , “Electron neutrino and antineutrino appearance in the full MINOS data sample,” *Phys.Rev.Lett.*, vol. 110, p. 171801, 2013.
- [110] M. Guler *et al.*, **[OPERA]** , “OPERA: An appearance experiment to search for $\nu_\mu \rightarrow \nu_\tau$ oscillations in the CNGS beam. Experimental proposal,” tech. rep., Organisation européenne pour la recherche nucléaire, 2000.
- [111] F. Arneodo *et al.*, **[ICARUS]** , “The ICARUS experiment: A Second generation proton decay experiment and neutrino observatory at the Gran Sasso Laboratory.” arXiv:hep-ex/0103008, 2001.
- [112] K. Abe *et al.*, **[T2K]** , “The T2K Experiment,” *Nucl.Instrum.Meth.*, vol. A659, pp. 106–135, 2011.
- [113] D. Ayres *et al.*, **[NO ν A]** , “NO ν A: Proposal to build a 30 kiloton off-axis detector to study $\nu_\mu \rightarrow \nu_e$ oscillations in the NuMI beamline,” tech. rep., Fermi National Accelerator Laboratory, 2004.
- [114] U. Kose for the OPERA Collaboration, **[OPERA]** , “Study of Neutrino Oscillations in the OPERA Experiment.” arXiv:1305.2513, 2013.
- [115] K. Abe *et al.*, **[T2K Collaboration]** , “Measurement of Neutrino Oscillation Parameters from Muon Neutrino Disappearance with an Off-axis Beam.” arXiv:1308.0465, 2013.

- [116] Y. Itow. Proceedings of the 25th International Conference on Neutrino Physics and Astrophysics (Neutrino 2012), Kyoto, Japan, June 2012. To be published.
- [117] K. Abe *et al.*, [**T2K**], “First Muon-Neutrino Disappearance Study with an Off-Axis Beam,” *Phys. Rev.*, vol. D85, p. 031103, 2012.
- [118] G. Mention *et al.*, “Reactor antineutrino anomaly,” *Phys. Rev. D*, vol. 83, p. 073006, Apr 2011.
- [119] TPC-Paris, *Sterile Neutrinos*, December 2012.
- [120] J. N. Abdurashitov *et al.*, [**SAGE**], “Measurement of the solar neutrino capture rate with gallium metal. iii. results for the 2002–2007 data-taking period,” *Phys. Rev. C*, vol. 80, p. 015807, Jul 2009.
- [121] W. Hampel *et al.*, [**GALLEX**], “Final results of the ^{51}Cr neutrino source experiments in GALLEX,” *Physics Letters B*, vol. 420, no. 1–2, pp. 114 – 126, 1998.
- [122] M. A. Acero, C. Giunti, & M. Laveder, “Limits on $\nu(e)$ and anti- $\nu(e)$ disappearance from Gallium and reactor experiments,” *Phys. Rev.*, vol. D78, p. 073009, 2008.
- [123] C. Giunti & M. Laveder, “Statistical Significance of the Gallium Anomaly,” *Phys. Rev.*, vol. C83, p. 065504, 2011.
- [124] B. Armbruster *et al.*, [**KARMEN**], “Upper limits for neutrino oscillations $\bar{\nu}_\mu \rightarrow \nu_{\text{ebar}}$ from muon decay at rest,” *Phys. Rev. D*, vol. 65, p. 112001, Jun 2002.
- [125] N. Agafonova *et al.*, [**OPERA**], “Search for $\nu_\mu \rightarrow \nu_e$ oscillations with the OPERA experiment in the CNGS beam,” *JHEP*, vol. 1307, p. 004, 2013.
- [126] M. Antonello *et al.*, [**ICARUS**], “Experimental search for the “LSND anomaly” with the ICARUS detector in the CNGS neutrino beam,” *Eur. Phys. J.*, vol. C73, p. 2345, 2013.
- [127] K. Abazajian *et al.*, “Light Sterile Neutrinos: A White Paper.” arXiv:1204.5379, 2012.
- [128] Borexino Collaboration, “SOX: Short distance neutrino Oscillations with BoreXino.” arXiv:1304.7721, Apr. 2013.
- [129] A. Gando *et al.*, “White paper: CeLAND - Investigation of the reactor antineutrino anomaly with an intense ^{144}Ce - ^{144}Pr antineutrino source in KamLAND.” arXiv:1309.6805, 2013.
- [130] U. Kose, “NESSiE: The Experimental Sterile Neutrino Search in Short-Base-Line at CERN.” arXiv:1304.7127, Apr. 2013.
- [131] A. Adelmann *et al.*, “Cost-effective Design Options for IsoDAR.” arXiv:1210.4454, 2012.
- [132] D. Adey *et al.*, [**nuSTORM**], “nuSTORM - Neutrinos from STORed Muons: Proposal to the Fermilab PAC,” tech. rep., Fermi National Accelerator Laboratory, 2013.
- [133] G. Tzanankos *et al.*, [**MINOS+**], “MINOS+: a Proposal to FNAL to run MINOS with the medium energy NuMI beam,” tech. rep., Fermi National Accelerator Laboratory, 2011.
- [134] A. Porta, [**Nucifer**], “Reactor neutrino detection for non proliferation with the Nucifer experiment,” *J. Phys. Conf. Ser.*, vol. 203, p. 012092, 2010.
- [135] W. C. Louis, “The LSND and KARMEN Neutrino Oscillation Experiments,” in *Neutrino Oscillations: Present Status and Future Plans* (J. Thomas & P. Vahle, eds.), ch. 7, World Scientific Publishing Company, 2008.
- [136] C. Athanassopoulos *et al.*, [**LSND**], “The liquid scintillator neutrino detector and LAMPF neutrino source,” *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment*, vol. 388, no. 1–2, pp. 149 – 172, 1997.
- [137] A. Aguilar *et al.*, [**LSND**], “Evidence for neutrino oscillations from the observation of $\bar{\nu}_e$ appearance in a $\bar{\nu}_\mu$ beam,” *Phys. Rev. D*, vol. 64, p. 112007, Nov 2001.
- [138] E. D. Church, K. Eitel, G. B. Mills, & M. Steidl, “Statistical analysis of different $\bar{\nu}_\mu \rightarrow \bar{\nu}_e$ searches,” *Phys. Rev. D*, vol. 66, p. 013001, Jun 2002.
- [139] A. A. Aguilar-Arevalo, *An improved Neutrino Oscillations Analysis of the MiniBooNE Data.* PhD thesis, Columbia University, 2008.
- [140] G. S. Karagiorgi, *Searches for New Physics at MiniBooNE: Sterile Neutrinos and Mixing Freedom.* PhD

thesis, Columbia University, 2010.

- [141] E. Church *et al.*, “A proposal for an experiment to measure $\nu_\mu \rightarrow \nu_e$ oscillations and ν_μ disappearance at the Fermilab Booster: **BooNE**,” FERMILAB-PROPOSAL-0898, Fermi National Accelerator Laboratory, 1997.
- [142] I. Stancu *et al.*, **[BooNE]** , “Technical Design Report for the 8GeV Beam.” <http://www-boone.fnal.gov/publicpages/8gevtdr2.0.ps.gz>, 2001.
- [143] T. Kobilarcik, J. Devaoy, & C. Moore, “Automatic Beam Correction,” in *Particle Accelerator Conference*, 2003.
- [144] I. Stancu *et al.*, **[BooNE]** , “The MinooNE Detector Technical Design Report.” <http://www-boone.fnal.gov/publicpages/detectortdr.ps.gz>, 2001.
- [145] A. A. Aguilar-Arevalo *et al.*, **[MiniBooNE]** , “The MiniBooNE detector,” *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment*, vol. 599, no. 1, pp. 28 – 46, 2009.
- [146] L. Bartozsek, “Bartozsek Engineering.” <http://www.bartoszekeng.com>.
- [147] L. Bugel & M. Sorel, “Magnetic Field Measurements for the MiniBooNE Prototype Horn,” MiniBooNE Technical Note 34, Fermi National Accelerator Laboratory, 2001.
- [148] CERN Program Library Long Writeup W5013, “GEANT Detector and Simulation Tool,” 1993.
- [149] R. Nelson, “Constraining the kaon content in the MiniBooNE secondary beam with the Little Muon Counter,” *AIP Conf. Proc.*, vol. 842, pp. 831–833, 2006.
- [150] P. A. Cherenkov, “Visible emission of clean liquids by action of γ radiation,” *Doklady Akademii Nauk SSSR*, vol. 2, 1934.
- [151] Hamamatsu, “Hamamatsu Photonics.” www.hamamatsu.com.
- [152] G. Davison, “Ludox ®, silica colloidal.” <http://www.gracedavison.com/products/ludox/overview.htm>.
- [153] I. Stancu, “Gain Calibration and the Speed of Light from Low Intensity Laser Runs,” MiniBooNE Technical Note 63, Fermi National Accelerator Laboratory, 2002.
- [154] R. Imlay, B. Metcalf, G. Schofield, M. Sung, & W. M., “Study of the Angular Reconstruction of Muons in MiniBooNE Using the Muon Tracker,” MiniBooNE Technical Note 99, Fermi National Accelerator Laboratory, 2003.
- [155] R. Imlay, B. Metcalf, S. Ouedraogo, M. Sung, & M. Wascko, “Energy Calibration of Stopping Muons in MiniBooNE Using the Muon Tracker and Cubes,” MiniBooNE Technical Note 106, Fermi National Accelerator Laboratory, 2003.
- [156] A. A. Aguilar-Arevalo *et al.*, **[MiniBooNE]** , “Measurement of ν_μ and $\bar{\nu}_\mu$ induced neutral current single π^0 production cross sections on mineral oil at $E_\nu \sim \mathcal{O} (1 \text{ GeV})$,” *Phys. Rev. D*, vol. 81, p. 013005, Jan 2010.
- [157] Y. Liu & I. Stancu, “The MiniBooNE Charge Likelihoods and Light Scattering in Michel Electron Events,” MiniBooNE Technical Note 126, Fermi National Accelerator Laboratory, 2004.
- [158] S. Agostinelli *et al.*, “Geant4—a simulation toolkit,” *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment*, vol. 506, no. 3, pp. 250 – 303, 2003.
- [159] M. Sorel, *Search for Sterile Neutrinos Using the MiniBooNE Beam*. PhD thesis, Columbia University, 2005.
- [160] CERN, “Cern program library.” <http://cernlib.web.cern.ch/cernlib/>.
- [161] D. C. Carey, K. Brown, & F. Rothacker, “Third order TRANSPORT with MAD input: A Computer program for designing charged particle beam transport systems,” SLAC Report, SLAC, 1998.
- [162] A. A. Aguilar-Arevalo *et al.*, **[MiniBooNE]** , “Neutrino flux prediction at MiniBooNE,” *Phys. Rev. D*, vol. 79, p. 072002, Apr 2009.
- [163] D. Casper, “The nuance neutrino physics simulation, and the future,” *Nuclear Physics B - Proceedings*

Supplements, vol. 112, no. 1–3, pp. 161 – 170, 2002.

- [164] R. Smith & E. Moniz, “Neutrino reactions on nuclear targets,” *Nuclear Physics B*, vol. 101, no. 2, pp. 547 –, 1972.
- [165] C. Llewellyn Smith, “Neutrino Reactions at Accelerator Energies,” *Phys.Rept.*, vol. 3, pp. 261–379, 1972.
- [166] A. A. Aguilar-Arevalo *et al.*, [**MiniBooNE**], “Measurement of the neutrino component of an antineutrino beam observed by a nonmagnetized detector,” *Phys. Rev. D*, vol. 84, p. 072005, Oct 2011.
- [167] D. Rein & L. M. Sehgal, “Neutrino-excitation of baryon resonances and single pion production,” *Annals of Physics*, vol. 133, no. 1, pp. 79 – 153, 1981.
- [168] Z. Djurcic *et al.*, “Measurement of the Rate of NC π^0 Production at MiniBooNE,” MiniBooNE Technical Note 194, Fermi National Accelerator Laboratory, 2007.
- [169] A. A. Aguilar-Arevalo *et al.*, [**MiniBooNE**], “First Observation of Coherent π^0 Production in Neutrino Nucleus Interactions with $E_\nu < 2$ GeV,” *Physics Letters B*, vol. 664, no. 1–2, pp. 41 – 46, 2008.
- [170] R. Brun, F. Bruyant, M. Maire, A. McPherson, & P. Zanarini, “GEANT3,” 1987. Revised version.
- [171] C. Zeitnitz & T. Gabriel, “The GEANT-CALOR interface and benchmark calculations of ZEUS test calorimeters,” *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment*, vol. 349, no. 1, pp. 106 – 111, 1994.
- [172] H.-J. Yang, “Measurement of Dirt Events,” MiniBooNE Technical Note 203, Fermi National Accelerator Laboratory, 2006.
- [173] B. C. Brown, S. Maza, A. Pla-Dalmau, & H. A. Tanaka, “Studies of the Optical Properties of Marcol 7 Mineral Oil,” MiniBooNE Technical Note 145, Fermi National Accelerator Laboratory, 2004.
- [174] R. B. Patterson, *A Search for Muon Neutrino to Electron Neutrino Oscillations At $\Delta m^2 > 0.1\text{eV}^2$* . PhD thesis, Princeton University, Nov 2007.
- [175] B. T. Fleming *et al.*, “Photomultiplier tube testing for the MiniBooNE experiment,” *Nuclear Science, IEEE Transactions on*, vol. 49, no. 3, pp. 984–988, 2002.
- [176] R. Patterson *et al.*, “The extended-track event reconstruction for MiniBooNE,” *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment*, vol. 608, no. 1, pp. 206 – 224, 2009.
- [177] A. A. Aguilar-Arevalo *et al.*, [**MiniBooNE**], “Search for Electron Neutrino Appearance at the $\Delta m^2 \sim 1$ eV² Scale,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 98, p. 231801, Jun 2007.
- [178] A. A. Aguilar-Arevalo *et al.*, [**MiniBooNE**], “Unexplained Excess of Electronlike Events from a 1-GeV Neutrino Beam,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 102, p. 101802, Mar 2009.
- [179] A. A. Aguilar-Arevalo *et al.*, [**MiniBooNE**], “Search for Electron Antineutrino Appearance at the $\Delta m^2 \sim 1$ eV² Scale,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 103, p. 111801, Sep 2009.
- [180] A. A. Aguilar-Arevalo *et al.*, [**MiniBooNE**], “Event Excess in the MiniBooNE Search for $\bar{\nu}_\mu \rightarrow \bar{\nu}_e$ Oscillations,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 105, p. 181801, Oct 2010.
- [181] A. A. Aguilar-Arevalo *et al.*, [**MiniBooNE**], “Improved Search for $\bar{\nu}_\mu \rightarrow \bar{\nu}_e$ Oscillations in the Mini-BooNE Experiment,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 110, p. 161801, Apr 2013.
- [182] A. A. Aguilar-Arevalo *et al.*, [**MiniBooNE**], “Low Mass WIMP Searches with a Neutrino Experiment: A Proposal for Further MiniBooNE Running.” arXiv:1211.2258, 2012.
- [183] A. A. Aguilar-Arevalo *et al.*, [**MiniBooNE**], “Letter of Intent: A new investigation of $\nu_\mu \rightarrow \nu_e$ oscillations with improved sensitivity in an enhanced MiniBooNE experiment,” tech. rep., Fermi National Accelerator Laboratory, 2012.
- [184] H. Chen *et al.*, [**MicroBooNE**], “Proposal for a New Experiment Using the Booster and NuMI Neutrino Beamlines: MicroBooNE,” fermilab-proposal-0974, Fermi National Accelerator Laboratory, 2007.
- [185] F. James, *Statistical methods in experimental physics*. World Scientific, second ed., 2006.
- [186] A. N. Kolmogorov, *Foundations of the Theory of Probability*. Chelsea Publishing Company, second

english ed., 1956.

- [187] L. Lyons, *Statistics for nuclear and particle physicist*. Cambridge University Press, first ed., 1986.
- [188] J. Neyman, “Outline of a theory of statistical estimation based on the classical theory of probability,” *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, vol. 236, no. 767, pp. 333–380, 1937.
- [189] G. Bohm & G. Zech, *Introduction to Statistics and Data Analysis for Physicists*. DESY, first ed., 2010.
- [190] MiniBooNE, “Data Release for A. A. Aguilar-Arevalo *et al.*, “A Search for Electron Neutrino Appearance at the $\Delta m^2 \sim 1 \text{ eV}^2$ Scale.”” http://www-boone.fnal.gov/for_physicists/data_release/nue/.
- [191] MiniBooNE, “Data Release for A. A. Aguilar-Arevalo *et al.*, “Unexplained Excess of Electron-Like Events From a 1 GeV Neutrino Beam.”” http://www-boone.fnal.gov/for_physicists/data_release/lowe/.
- [192] MiniBooNE, “Data Release for A. A. Aguilar-Arevalo *et al.*, “Event Excess in the MiniBooNE Search for $\bar{\nu}_\mu \rightarrow \bar{\nu}_e$ Oscillations.”” http://www-boone.fnal.gov/for_physicists/data_release/nuebar2010/.
- [193] MiniBooNE, “Data Release for A. A. Aguilar-Arevalo *et al.*, “A Combined $\nu_\mu \rightarrow \nu_e$ and $\bar{\nu}_\mu \rightarrow \bar{\nu}_e$ Oscillation Analysis of the MiniBooNE Excesses.”” http://www-boone.fnal.gov/for_physicists/data_release/nue_nuebar_2012/numode.html#fit200.
- [194] MiniBooNE, “Data Release for A. A. Aguilar-Arevalo *et al.*, “A Combined $\nu_\mu \rightarrow \nu_e$ and $\bar{\nu}_\mu \rightarrow \bar{\nu}_e$ Oscillation Analysis of the MiniBooNE Excesses.”” http://www-boone.fnal.gov/for_physicists/data_release/nue_nuebar_2012/nubarmode.html#fit200.
- [195] MiniBooNE, “Data Release for A. A. Aguilar-Arevalo *et al.*, “A Combined $\nu_\mu \rightarrow \nu_e$ and $\bar{\nu}_\mu \rightarrow \bar{\nu}_e$ Oscillation Analysis of the MiniBooNE Excesses.”” http://www-boone.fnal.gov/for_physicists/data_release/nue_nuebar_2012/combined.html#fit200.
- [196] G. J. Feldman & R. D. Cousins, “Unified approach to the classical statistical analysis of small signals,” *Phys. Rev. D*, vol. 57, pp. 3873–3889, Apr 1998.
- [197] L. Devroye, *Non-Uniform Random Variate Generation*. Springer-Verlag, first ed., 1986.
- [198] A. Krishnamoorthy & D. Menon, “Matrix inversion using cholesky decomposition,” *CoRR*, vol. abs/1111.4144, 2011.
- [199] R. Brun & F. Rademakers, “ROOT — An object oriented data analysis framework,” *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment*, vol. 389, no. 1–2, pp. 81 – 86, 1997. New Computing Techniques in Physics Research.
- [200] Low E. Group, “Studies and Oscillation Fits with the New All-Hadronic Monte Carlo,” MiniBooNE Technical Note 254, Fermi National Accelerator Laboratory, 2008.
- [201] G. Cheng *et al.*, [**SciBooNE**], “Measurement of K^+ production cross section by 8 gev protons using high-energy neutrino interactions in the scibooone detector,” *Phys. Rev. D*, vol. 84, p. 012009, Jul 2011.
- [202] A. A. Aguilar-Arevalo *et al.*, [**MiniBooNE**], “A Combined $\nu_\mu \rightarrow \nu_e$ and $\bar{\nu}_\mu \rightarrow \bar{\nu}_e$ Oscillation Analysis of the MiniBooNE Excesses.” arXiv:1207.4809, 2012.
- [203] J. M. Conrad, W. C. Louis, & M. H. Shaevitz, “The LSND and MiniBooNE Oscillation Searches at High Δm^2 ,” *Ann.Rev.Nucl.Part.Sci.*, vol. 63, p. 45, 2013.
- [204] F. Agner, “Pseudo random number generators.” <http://www.agner.org/random/>.
- [205] M. Matsumoto & T. Nishimura, “Mersenne twister: a 623-dimensionally equidistributed uniform pseudo-random number generator,” *ACM Trans. Model. Comput. Simul.*, vol. 8, pp. 3–30, Jan. 1998.
- [206] D. Thain, T. Tannenbaum, & M. Livny, “Distributed computing in practice: the Condor experience,” *Concurrency and Computation: Practice and Experience*, vol. 17, no. 2-4, pp. 323–356, 2005.
- [207] Fermilab, “Configuring kerberos on newer Linux distributions.” <http://fermilinux.fnal.gov/documentation/security/kerberos-newer-linux/>.
- [208] J. Sanders & E. Kandrot, *CUDA by Example: An Introduction to General-Purpose GPU Programming*. Addison-Wesley Professional, first ed., 2010.
- [209] NVIDIA, “Nvidia corporation.” http://www.nvidia.com/object/cuda_home_new.html.

- [210] D. B. Kirk & W. W. Hwu, *Programming Massively Parallel Processors: A Hands-on Approach*. Morgan Kaufmann, first ed., 2010.
- [211] H. Sutter & J. Larus, “Software and the Concurrency Revolution,” *Queue*, vol. 3, pp. 54–62, Sept. 2005.
- [212] J. Neumann, “First draft of a report on the EDVAC,” tech. rep., Moore School of Electrical Engineering University of Pennsylvania, 1945.
- [213] A. A. Aguilar-Arévalo & V. Sandberg, “Event Logging of Beam Timing and Cable Propagation Delay Measurements with the BooNE Data Acquisition System,” MiniBooNE Technical Note 4, Fermi National Accelerator Laboratory, 1998.