

$$\begin{aligned} \text{a) } \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx \, dx &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (\sin(n+m)x - \sin(n-m)x) \, dx = \\ &= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{n+m} \cos(n+m)x + \frac{1}{n-m} \cos(n-m)x \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0, \end{aligned}$$

если $n-m \neq 0$. Случай, когда $n-m=0$, можно рассмотреть отдельно, и в этом случае, очевидно, вновь приходим к тому же результату.

$$\begin{aligned} \text{b) } \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 mx \, dx &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (1 - \cos 2mx) \, dx = \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{2m} \sin 2mx \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} = \pi. \\ \text{c) } \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx \, dx &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos 2nx) \, dx = \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{2n} \sin 2nx \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} = \pi. \end{aligned}$$

Пример 3. Пусть $f \in \mathcal{R}[-a, a]$. Покажем, что

$$\int_{-a}^a f(x) \, dx = \begin{cases} 2 \int_0^a f(x) \, dx, & \text{если } f \text{ - четная функция,} \\ 0, & \text{если } f \text{ - нечетная функция.} \end{cases}$$

Если $f(-x) = f(x)$, то

$$\begin{aligned} \int_{-a}^a f(x) \, dx &= \int_{-a}^0 f(x) \, dx + \int_0^a f(x) \, dx = \int_a^0 f(-t)(-1) \, dt + \int_0^a f(x) \, dx = \\ &= \int_0^a f(-t) \, dt + \int_0^a f(x) \, dx = \int_0^a (f(-x) + f(x)) \, dx = 2 \int_0^a f(x) \, dx \end{aligned}$$

Если $f(-x) = -f(x)$, то, как видно из тех же выкладок, получим

$$\int_{-a}^a f(x) \, dx = \int_0^a (f(-x) + f(x)) \, dx = \int_0^a 0 \, dx = 0.$$

Пример 4. Пусть f - определенная на всей числовой прямой \mathbb{R} периодическая функция с периодом T , т.е. $f(x+T) = f(x)$ при $x \in \mathbb{R}$.

Если f — интегрируемая на каждом конечном отрезке функция, то при любом $a \in \mathbb{R}$ имеет место равенство

$$\int_a^{a+T} f(x) \, dx = \int_0^T f(x) \, dx,$$

т.е. интеграл от периодической функции по отрезку длины периода T этой функции не зависит от положения отрезка интегрирования на числовой

прямой:

$$\begin{aligned} \int_a^{a+T} f(x) dx &= \int_a^0 f(x) dx + \int_0^T f(x) dx + \int_T^{a+T} f(x) dx = \\ &= \int_0^T f(x) dx + \int_a^0 f(x) dx + \int_0^a f(t+T) \cdot 1 dt = \\ &= \int_0^T f(x) dx + \int_a^0 f(x) dx + \int_0^a f(t) dt = \int_0^T f(x) dx. \end{aligned}$$

Мы сделали замену $x = t + T$ и воспользовались периодичностью функции $f(x)$.

Пример 5. Пусть нам нужно вычислить интеграл $\int_0^1 \sin x^2 dx$, например, с точностью до 10^{-2} .

Мы знаем, что первообразная $\int \sin x^2 dx$ (интеграл Френеля) не выражается в элементарных функциях, поэтому использовать формулу Ньютона—Лейбница здесь в традиционном смысле нельзя.

Поступим иначе. Исследуя в дифференциальном исчислении формулу Тейлора, мы в качестве примера (см. гл. V, §3, пример 11) нашли, что на отрезке $[-1, 1]$ с точностью до 10^{-3} имеет место равенство

$$\sin x \approx x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 =: P(x).$$

Но если $|\sin x - P(x)| < 10^{-3}$ на отрезке $[-1, 1]$, то верно также, что $|\sin x^2 - P(x^2)| < 10^{-3}$ при $0 \leq x \leq 1$.

Следовательно,

$$\left| \int_0^1 \sin x^2 dx - \int_0^1 P(x^2) dx \right| \leq \int_0^1 |\sin x^2 - P(x^2)| dx < \int_0^1 10^{-3} dx < 10^{-3}.$$

Таким образом, для вычисления интеграла $\int \sin x^2 dx$ с нужной точностью достаточно вычислить интеграл $\int_0^1 P(x^2) dx$. Но

$$\begin{aligned} \int_0^1 P(x^2) dx &= \int_0^1 \left(x^2 - \frac{1}{3!}x^6 + \frac{1}{5!}x^{10} \right) dx = \\ &= \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3!7}x^7 + \frac{1}{5!11}x^{11} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{3!7} + \frac{1}{5!11} = 0,310 \pm 10^{-3}, \end{aligned}$$

поэтому

$$\int \sin x^2 dx = 0,310 \pm 2 \cdot 10^{-3} = 0,31 \pm 10^{-2}.$$

Пример 6. Величина $\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ называется *интегральным средним значений функции на отрезке* $[a, b]$.

Пусть f — определенная на \mathbb{R} и интегрируемая на любом отрезке функция.

Построим по f новую функцию

$$F_\delta(x) = \frac{1}{2\delta} \int_{x-\delta}^{x+\delta} f(t) dt,$$

значение которой в точке x есть интегральное среднее значений f в δ -окрестности точки x .

Покажем, что функция $F_\delta(x)$ (называемая *усреднением* f) более регулярна по сравнению с f . Точнее, если f интегрируема на любом отрезке $[a, b]$, то $F_\delta(x)$ непрерывна на \mathbb{R} , а если $f \in C(\mathbb{R})$, то $F_\delta(x) \in C^1(\mathbb{R})$.

Проверим сначала непрерывность функции $F_\delta(x)$:

$$|F_\delta(x+h) - F_\delta(x)| = \frac{1}{2\delta} \left| \int_{x+\delta}^{x+\delta+h} f(t) dt + \int_{x-\delta+h}^{x-\delta} f(t) dt \right| \leq \frac{1}{2\delta} (C|h| + C|h|) = \frac{C}{\delta} |h|,$$

если $|f(t)| \leq C$, например, в 2δ -окрестности точки x и $|h| < \delta$. Из этой оценки, очевидно, следует непрерывность функции $F_\delta(x)$.

Если же $f \in C(\mathbb{R})$, то по правилу дифференцирования сложной функции

$$\frac{d}{dx} \int_a^{\varphi(x)} f(t) dt = \frac{d}{d\varphi} \int_a^{\varphi} f(t) dt \cdot \frac{d\varphi}{dx} = f(\varphi(x)) \varphi'(x),$$

поэтому из записи

$$F_\delta(x) = \frac{1}{2\delta} \int_a^{x+\delta} f(t) dt - \frac{1}{2\delta} \int_a^{x-\delta} f(t) dt$$

получаем, что

$$F'_\delta(x) = \frac{f(x+\delta) - f(x-\delta)}{2\delta}.$$

Функцию $F_\delta(x)$ после замены $t = x+u$ переменной интегрирования можно записать в виде

$$F_\delta(x) = \frac{1}{2\delta} \int_{-\delta}^{\delta} f(x+u) du.$$

Если $f \in C(\mathbb{R})$, то, применяя первую теорему о среднем, находим, что

$$F_\delta(x) = \frac{1}{2\delta} f(x+\tau) \cdot 2\delta = f(x+\tau),$$