Занин Даниил M32381

Лабораторная работа по теорверу №1.

№3 (Вариант 1)

Условие:
Имеются две независимые серии испытаний Бернулли на n опытов, вероятность успеха каждой - p. S_i - количество успехов в n испытаниях в i-той серии. Найти вероятность $P\left(S_1 = k \mid S_1 + S_2 = m\right)$

Аналитическое решение:
Пусть A: $S_1 = k$

B: $S_1 + S_2 = m$

$P\left(S_1 = k \mid S_1 + S_2 = m\right) = P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ (независимые события)

$P(A \cap B) = P(S_1 = k \cap S_1 + S_2 = m) = P(S_1 = k \cap S_2 = m - k)$

$= P(S_1 = k)P(S_2 = m - k) = \{q = 1 - p\} = C_n^k p^k q^{n-k} C_n^{m-k} p^{m-k} q^{n-m-k}$

$= C_n^k p^m q^{2n-m} C_n^{m-k}$

$P(B) = P\left(S_1 + S_2 = m\right) = C_{2n}^m p^m q^{2n-m}$ (Объединили серии в одну из 2n испытаний ввиду их независимости.)

$$\frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{C_n^k p^m q^{2n-m} C_n^{m-k}}{C_{2n}^m p^m q^{2n-m}} = \frac{C_n^k C_n^{m-k}}{C_{2n}^m}$$

Ответ: $\frac{C_n^k C_n^{m-k}}{C_{2n}^m}$

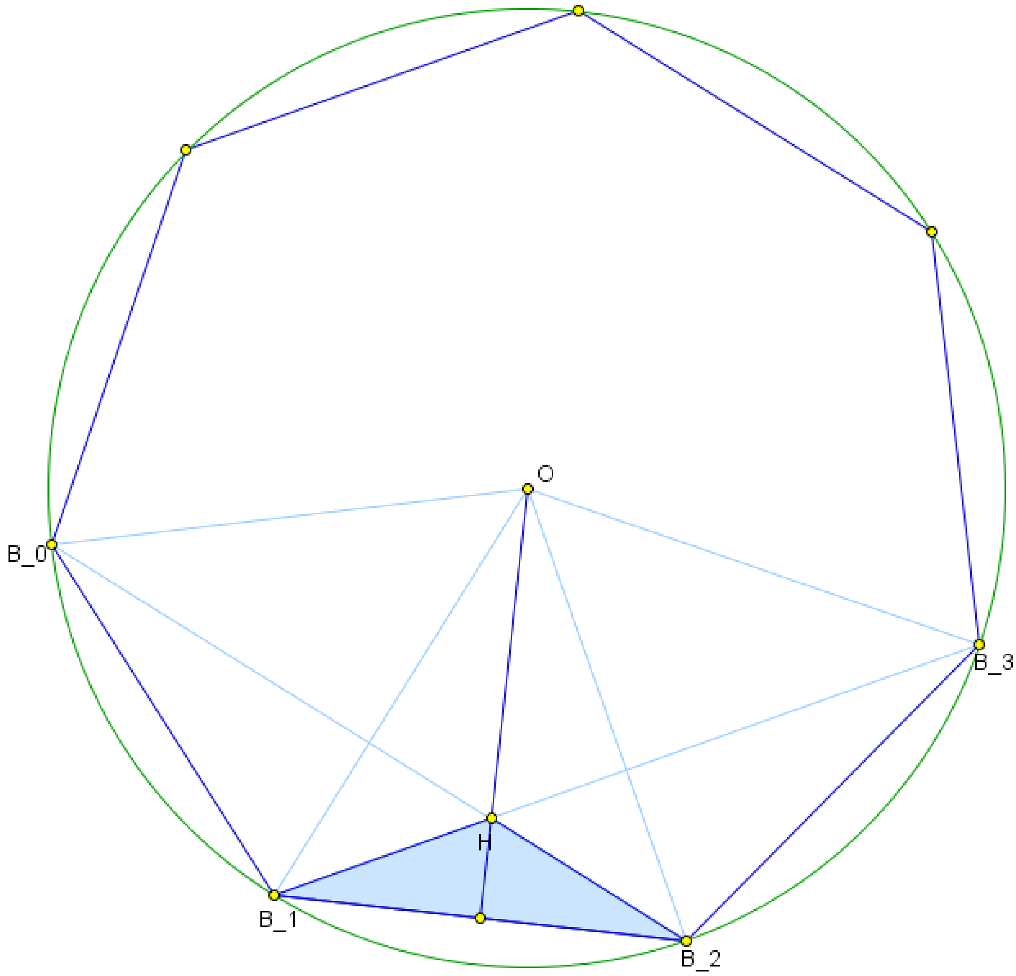
№2 (Вариант 3)

A имеет равномерное распределение в правильном n-угольнике. Найти вероятность P_n что точка A находится ближе к границам многоугольника, чем к его диагоналям. Найти числа C, a, что

$P_n = Cn^a(1 + (o(1))$

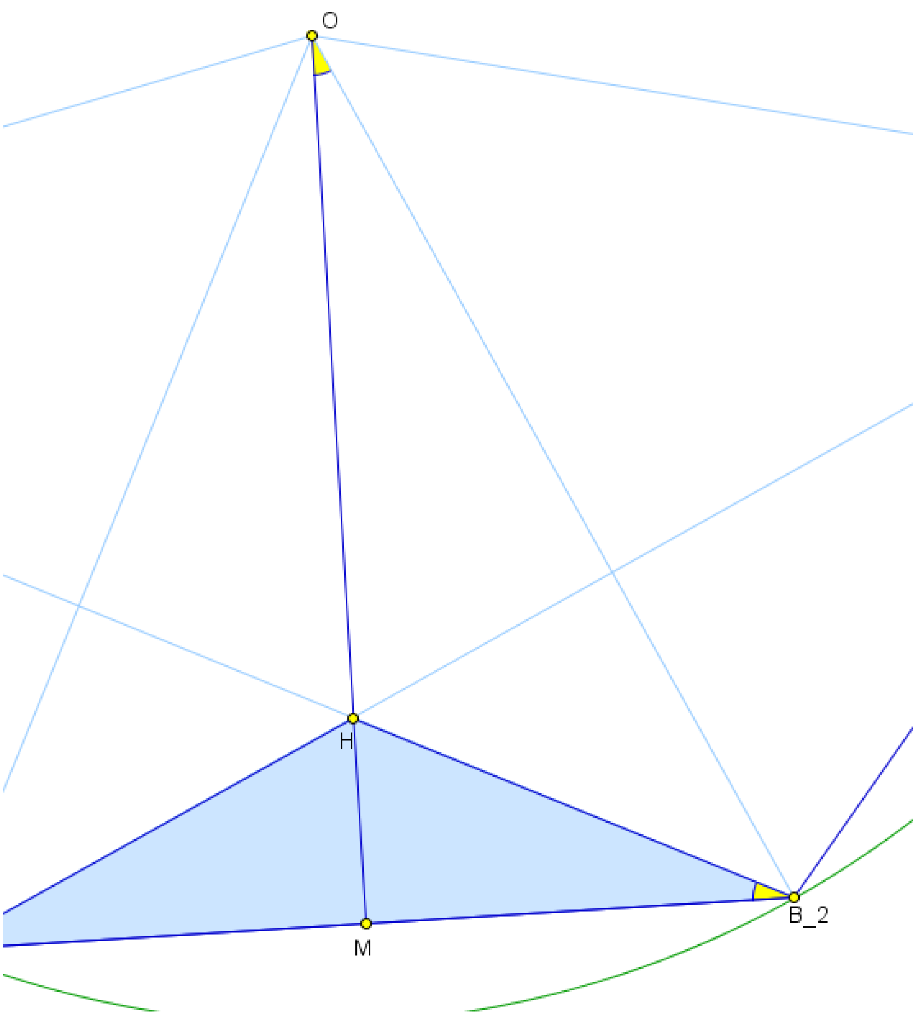
Аналитическое решение:

Пусть O - центр окружности, описанной вокруг правильного n-угольника. С равной вероятностью точка A попадает в каждый треугольник OB_iB_{i+1} где B_i, B_{i+1} - концы i-той стороны исходного прямоугольника. Без потери общности будем считать, что точка находится в треугольнике OB_1B_2



Заметим, что для того, чтобы точка находилась к стороне B_1B_2 ближе, чем к любой из диагоналей, она должна находиться хотя бы в выделенном треугольнике, образованном ближайшими к стороне диагоналями.

Найдем площадь треугольника HB_1B_2. Представим его как сумму двух прямоугольных треугольников, разделенных высотой, продолжением OH.



Заметим, что треугольники HB_2M и MOB_2 подобны по трем углам (одна пара углов равна т.к опирается в окружности на одинаковые дуги, а другие углы прямоугольные)
Тогда

$$\frac{MB_2}{MO} = \sqrt{\frac{HMB_2}{OMB_2}}$$

Пусть $B_1B_2 = d$. Тогда

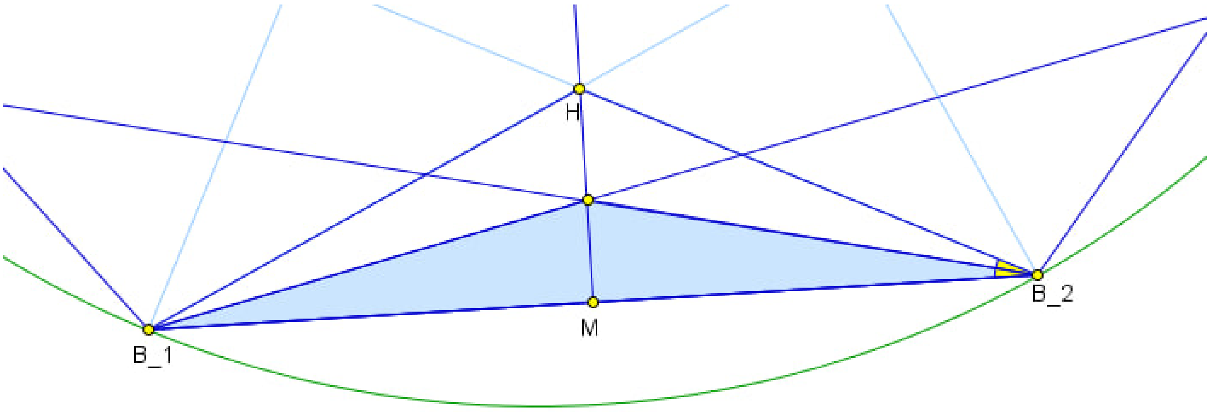
$$MB_2 = \frac{d}{2};\ B_2O = \frac{d}{2\sin\frac{90}{n}}$$

$$OM = B_2O\cos\frac{180}{2n} = \frac{d\cos\frac{90}{n}}{2\sin\frac{90}{n}}$$

$$\sqrt{\frac{HMB_2}{OMB_2}} = \frac{MB_2}{MO} = \left(\frac{\cos\frac{180}{n}}{4\sin\frac{90}{n}}\right)^2 = \left(\frac{1}{4\sin\frac{180}{n}}\right)^2$$

Тогда площадь B_2B_1H равна $S\left(\frac{1}{4\sin\frac{180}{n}}\right)^2$ где S - площадь треугольника

В полученном треугольнике нам подходят только область, ограниченная боковыми биссектрисами (т.к биссектриса - это ГМТ точек равноудаленных от сторон треугольника.)



Проделывая аналогичные рассуждения для данного треугольника, а также треугольника опирающегося на данную хорду находим площадь $B_1XB_2 \ = tg(\frac{180}{n})tg(\frac{180}{2n})S$ где X - точка на прямой HM

Тогда искомая $P_n \ = \ \frac{S\,B_1XB_2}{S\,OB_1B_2} = tg(\frac{180}{n})tg(\frac{180}{2n})$

Через разложение P_n в ряд Тейлора, находим $C \ = \ \frac{\pi}{2};\ n \ = \ -2$

№4

Условие: Рассмотреть схемы Бернулли при n ∈ $\{10,\ 100,\ 1000,\ 10000\}$ и $p \ \in \ \{0.001,\ 0.01,\ 0.1,\ 0.25,\ 0.5\}$ Рассчитать точные вероятности (где это возможно) $P(S_n \ \in \ [n/2 \ -\sqrt{npq},\ n/2 \ + \ \sqrt{npq}]$. S_n - количество успехов в испытаниях. и приближенную с помощью одной из предельных теорем. Сравнить точные и приближенные вероятности.