

Лабораторная работа по теорверу №1.

№3 (Вариант 1)

Условие:

Имеются две независимые серии испытаний Бернулли на n опытов, вероятность успеха каждой - p . S_i - количество успехов в n испытаниях в i -той серии. Найти вероятность $P(S_1 = k | S_1 + S_2 = m)$

Решение:

Пусть $A: S_1 = k$

$B: S_1 + S_2 = m$

$$P(S_1 = k | S_1 + S_2 = m) = P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \text{ (независимые события)}$$

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(S_1 = k \cap S_1 + S_2 = m) = P(S_1 = k \cap S_2 = m - k) \\ &= P(S_1 = k)P(S_2 = m - k) = \{q = 1 - p\} = C_n^k p^k q^{n-k} C_n^{m-k} p^{m-k} q^{n-m-k} \\ &= C_n^k p^m q^{2n-m} C_n^{m-k} \end{aligned}$$

$$P(B) = P(S_1 + S_2 = m) = C_{2n}^m p^m q^{2n-m} \text{ (Объединили серии в одну из } 2n \text{ испытаний ввиду их независимости.)}$$

$$\frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{C_n^k p^m q^{2n-m} C_n^{m-k}}{C_{2n}^m p^m q^{2n-m}} = \frac{C_n^k C_n^{m-k}}{C_{2n}^m}$$

$$\text{Ответ: } \frac{C_n^k C_n^{m-k}}{C_{2n}^m}$$

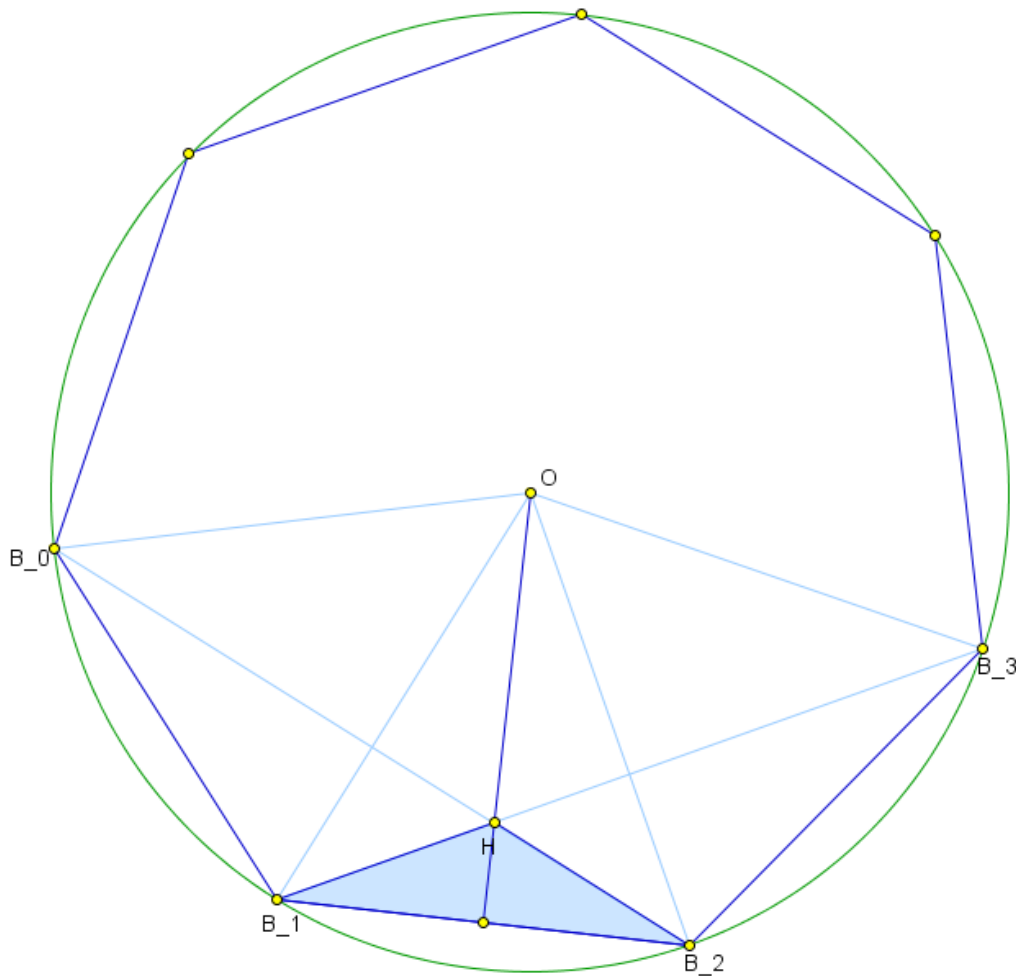
№2 (Вариант 3)

A имеет равномерное распределение в правильном n -угольнике. Найти вероятность P_n что точка A находится ближе к границам многоугольника, чем к его диагоналям. Найти числа C , а, что

$$P_n = C n^a (1 + o(1))$$

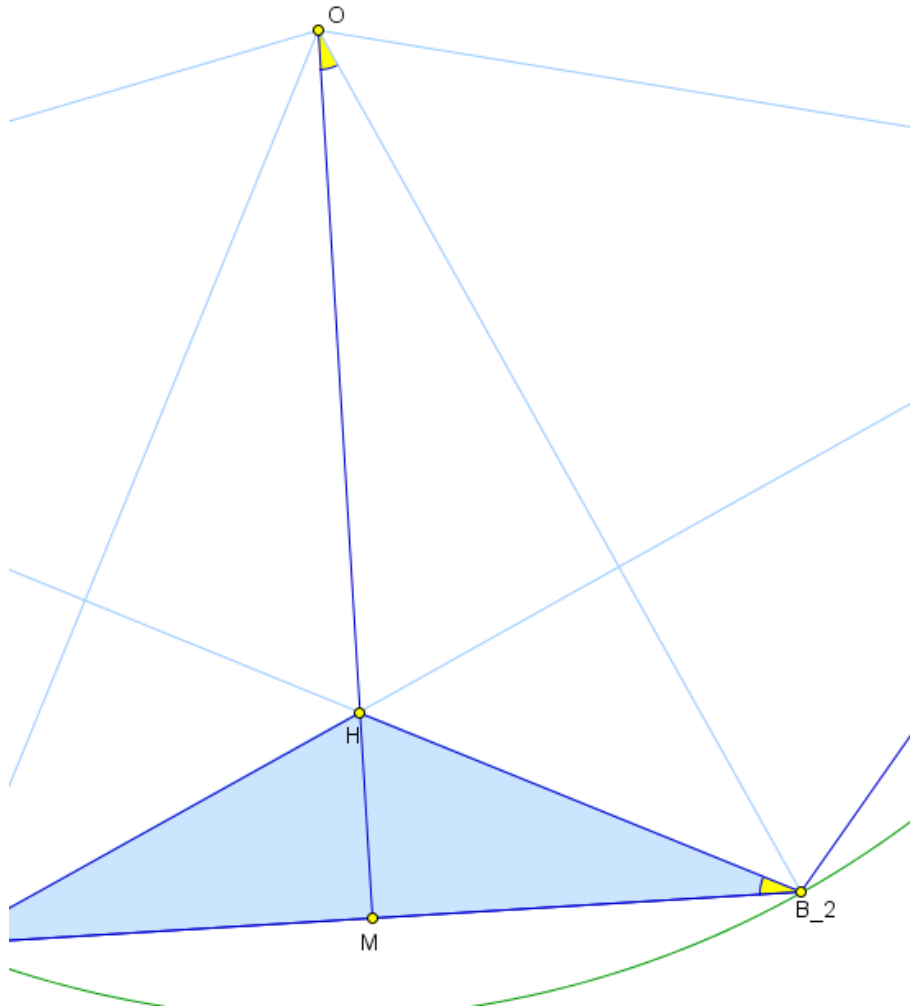
Аналитическое решение:

Пусть O - центр окружности, описанной вокруг правильного n -угольника. С равной вероятностью точка A попадает в каждый треугольник OB_iB_{i+1} где B_i, B_{i+1} - концы i -той стороны исходного многоугольника. Без потери общности будем считать, что точка находится в треугольнике OB_1B_2



Заметим, что для того, чтобы точка находилась к стороне B_1B_2 ближе, чем к любой из диагоналей, она должна находиться хотя бы в выделенном треугольнике, образованном ближайшими к стороне диагоналями.

Найдем площадь треугольника HB_1B_2 . Представим его как сумму двух прямоугольных треугольников, разделенных высотой, продолжением OH .



Заметим, что треугольники HB_2M и OMB_2 подобны по трем углам (одна пара углов равна т.к опирается в окружности на одинаковые дуги, а другие углы прямоугольные)
Тогда

$$\frac{MB_2}{MO} = \sqrt{\frac{HMB_2}{OMB_2}}$$

Пусть $B_1B_2 = d$. Тогда

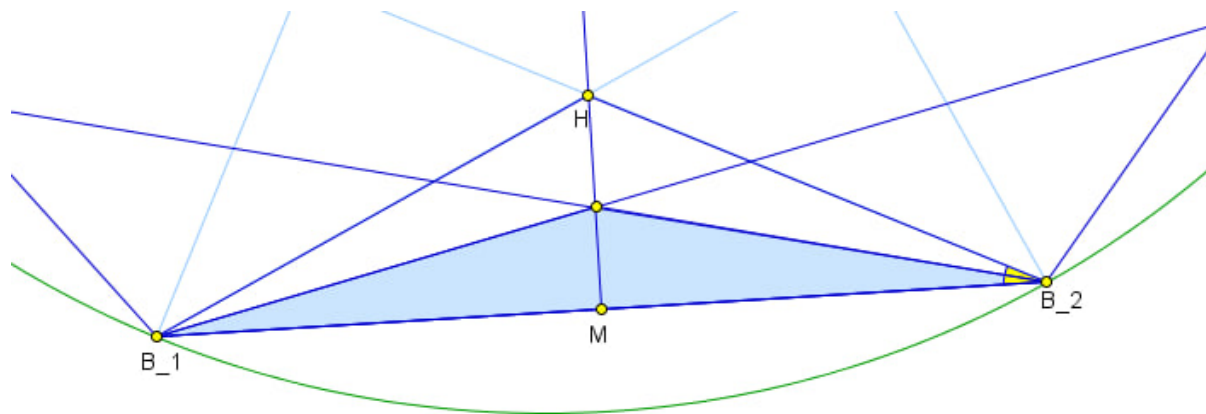
$$MB_2 = \frac{d}{2}; B_2O = \frac{d}{2 \sin \frac{90}{n}}$$

$$OM = B_2O \cos \frac{180}{2n} = \frac{d \cos \frac{90}{n}}{2 \sin \frac{90}{n}}$$

$$\sqrt{\frac{HMB_2}{OMB_2}} = \frac{MB_2}{MO} = \left(\frac{\cos \frac{180}{n}}{4 \sin \frac{90}{n}} \right)^2 = \left(\frac{1}{4 \sin \frac{180}{n}} \right)^2$$

Тогда площадь B_2B_1H равна $S \left(\frac{1}{4 \sin \frac{180}{n}} \right)^2$ где S - площадь треугольника

В полученном треугольнике нам подходят только область, ограниченная боковыми биссектрисами (т.к биссектриса - это ГМТ точек равноудаленных от сторон треугольника.)



Проделявая аналогичные рассуждения для данного треугольника, а также треугольника опирающегося на данную хорду находим площадь

$$B_1XB_2 = tg\left(\frac{180}{n}\right)tg\left(\frac{180}{2n}\right)S \text{ где } X - \text{ точка на прямой } HM$$

$$\text{Тогда искомая } P_n = \frac{S_{B_1XB_2}}{S_{OB_1B_2}} = tg\left(\frac{180}{n}\right)tg\left(\frac{180}{2n}\right)$$

Через разложение P_n в ряд Тейлора, находим $C = \frac{\pi}{2}; n = -2$

№4

Условие: Рассмотреть схемы Бернулли при $n \in \{10, 100, 1000, 10000\}$ и $p \in \{0.001, 0.01, 0.1, 0.25, 0.5\}$ Рассчитать точные вероятности (где это возможно) $P(S_n \in [n/2 - \sqrt{npq}, n/2 + \sqrt{npq}])$. S_n - количество успехов в испытаниях. и приближенную с помощью одной из предельных теорем. Сравнить точные и приближенные вероятности.

№1 (вариант 2)

Условие:

22. Цепь писем. Рассматривается генеральная совокупность, состоящая из $(n+1)$ человек. Человек, которого условимся называть «прародителем», пишет два письма случайно выбранным адресатам, которые образуют «первое поколение». Те в свою очередь делают то же самое, в результате чего образуется «второе поколение». Вообще каждый из людей, входящих в « r -е поколение», посылает два письма случайно выбранным адресатам. Найти вероятность того, что «прародитель» не входит ни в одно из «поколений» с номерами $1, 2, \dots, r$. Найти медиану распределения, предполагая n достаточно большим.

Решение:

Решим следующую задачу для условия, когда на i -том шагу письма отсылаются разным людям, иначе она превращается в непроходимый гроб.

В этом случае, на k -том шагу письма отправляет 2^{k-1} человек, а получает 2^k .

Рассмотрим одного человека, отправляющего письма на предыдущем шаге. Так как он должен был отправить письма всем, кроме первого, вероятность того, что это

произойдет, равна $\left(\frac{n-1}{n}\right)^2$. Так как отправителей у нас 2^{i-1} и отправляют письма они независимо друг от друга, вероятность того, что письмо не дойдет до первого человека

равна $\left(\left(\frac{n-1}{n}\right)^2\right)^{2^{i-1}} = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{2^i}$. Так как это верно на каждом шаге, итоговый ответ

будет выглядеть как $P = \prod_{i=1}^r \left(\frac{n-1}{n}\right)^{2^i} = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{2^{r+1}-1}$