Laboratorijas darba Nr. 2
DISKRĒTIE SIGNĀLI
DISKRĒTĀ FURJĒ TRANSFORMĀCIJA
ATSKAITE

Mārtiņš Dundurs
rect0 grupa, apl. nr.

2018. gada 14. janvārī

1 DARBA MĒRĶI

Mūsu darba mērķis ir konstruēt diskrētu signālu, veikt tā diskrēto Furjē analīzi un rekonstruēt ar diskrēto Furjē sintēzi. Novērot kāda nozīme un efekts uz signālu un spektru ir diskretizācijas frekvences izvēlē.

2 TEORĒTISKAIS PAMATOJUMS

Diskrēto Furjē transformāciju (DFT) mēs varam veikt ar sekojošo izteiksmi

$$\dot{X}_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-jk2\pi\frac{n}{N}} \ . \tag{1}$$

Diskrēto inverso Furjē transformāciju mēs varam veikt ar sekojošu izteiksmi

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} \dot{X}_k e^{jk2\pi\frac{n}{N}} \ . \tag{2}$$

Lai mēs varētu signālu pareizi nolasīt, DFT un rekonstruēt, mums ir jāievēro *Nolašu teorēma* (zināma arī kā *Vitekera-Naikvista-Koteļņikova-Šenona kardinālā interpolācijas teorēma*)

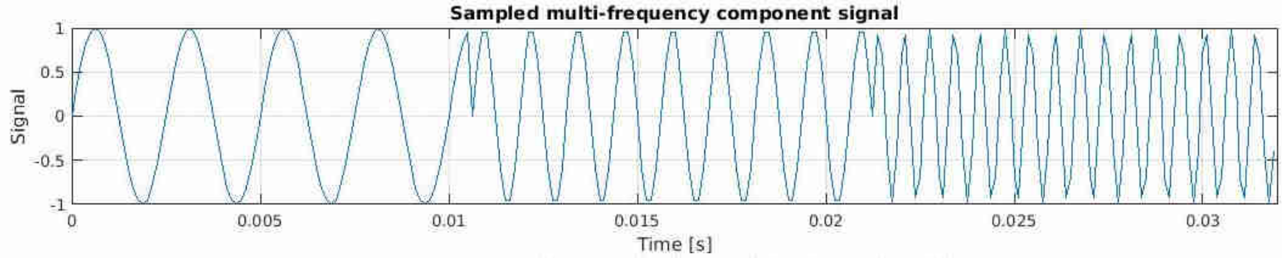
$$F_d \geqslant 2f_{max} \ . \tag{3}$$

Nolašu teorēma mums saka, ka visu informāciju par signālu ar ierobežotu spektru, satur tās signāla vērtības, kas fiksētas noteiktos, vienmērīgi izvietotos laika momentos ar noteiktu soli, jeb frekvenci F_d, kas ir vismaz divreiz lielāka par maximālo signālu sastādošo frekvenci. Jānorāda, ka *nolašu teorēma* nav absolūts nosacījums bezzudumu rekonstrukcijai, bet praksē tas tiek ievērots kā laba vadlīnija un nodrošinājums, lai signāla apstrādē nerastos zudumi.

3 DARBA GAITA

3.1 Signāls laikā

Vispirms mēs konstruējām signālu, kurš sastāv no trim vienam pēc otram sekojošiem signāliem, kuriem katram ir sava frekvence - 0.4, 0.8 un 1.5 kHz. šos signālus veido attiecīgi 85, 85 un 86 nolases. kopā šie signāli veido 256 nolases. šīs nolases tiek iegūtas ar diskretizācijas frekvenci $f_d = 8kHz$. Tātad mēs izdaram 8k nolases sekundē. Lai izdarītu 256 nolases, tas mums aizņems nedaudz vairāk par 30 ms. Rezultātā mēs iegūstam sekojošu signāla diagrammu:



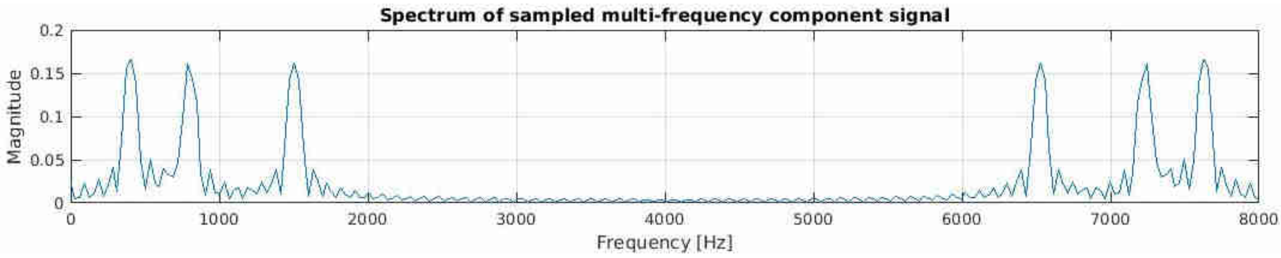
Mēs esam attēlojuši diagrammu tā, lai x-ass reprezentētu laiku sekundēs. To mēs panākam, zīmējot grafiku sekojošā veidā ar n/F_d: `plot(n/Fd,s)`. Lai nodrošinātu, lai grafika x ass būtu pareizajā diapazonā mēs lietojam: `xlim([0 N/Fd]);`

3.2 Signāls frekvenču telpā

DFT mēs realizējam mūsu darbā ar cikla palīdzību. Mūsu signāls `s` ir vektors ar 256 elementiem. Mūsu uzdevums ir pēc būtības veikt signāla `s` $[x(n)]$ konvolūciju ar eksponenti $e^{-jk2\pi\frac{n}{N}}$.

```
for k = 0:N-1
expCoef = exp(-1j*2*pi*n*k/N);
mltSmpl = s.*expCoef;
S(k+1) = sum(mltSmpl)/N;
end
```

Rezultātā mēs iegūstam sekojošu frekvenču spektru.

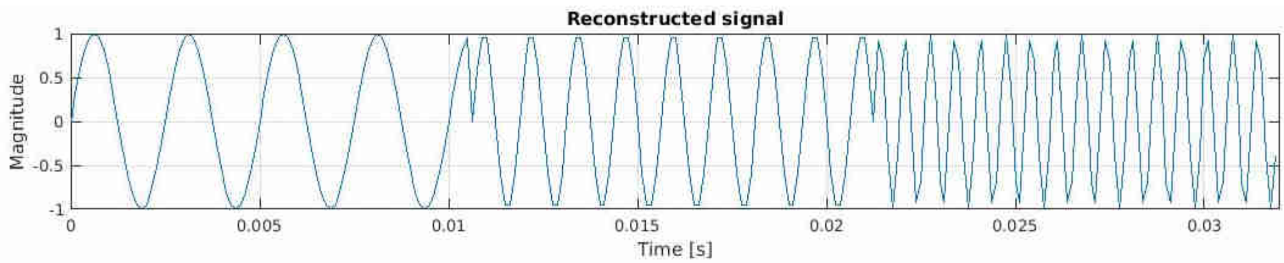


Spektrā mēs redzam trīs izteiktas frekvences, kas atbilst mūsu trīs signālu frekvencēm. Bet tāpēc, ka šo frekvenču signāli ir periodiski tikai noteiktā intervālā un citur ir nulle, proti, tie nav fundamentāli periodiski, tas nozīmē ka mēs katrā šo signālu frekvenču apgabalā redzam neperiodiska signāla spektra ainu.

3.3 Signāla rekonstrukcija

Signāla rekonstrukciju mēs veicam ar inverso DFT.

```
for k = 0:N-1
expCoef = exp(1j*2*pi*n*k/N);
mltSmpl = S.*expCoef;
sback(k+1) = sum(mltSmpl);
end
```



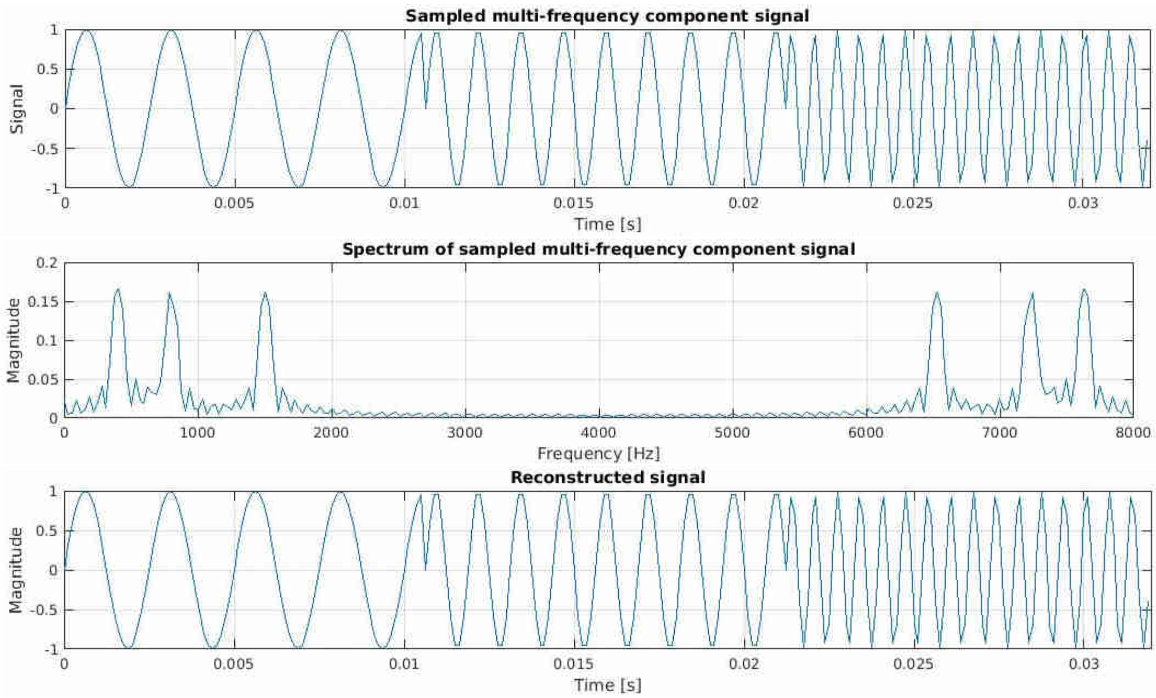
Redzam, ka esam atguvuši oriģinālo signālu bez zudumiem. Tā ir konsekvence tam, ka ir ievērota *nolašu teorēma*. Nākošajos soļos mēs redzēsim, kā to pašu spektra ainu ir iespējams iegūt arī pārkāpjot *nolašu teorēmu*.

3.4 *Nolašu teorēmas* pārkāpšana

Nākamais darba solis bija atrast tādas signāla komponenšu frekvences, kuras pārkāpj *nolašu teorēmas* nosacījumu, bet tomēr ļauj iegūt tādu pašu signāla attēlu un arī spektrālo ainu. To mēs varam panākt izvēloties sekojošas frekvences:

$$f = f_0 + mF_d \ , \ m \in \mathbb{Z} \tag{4}$$

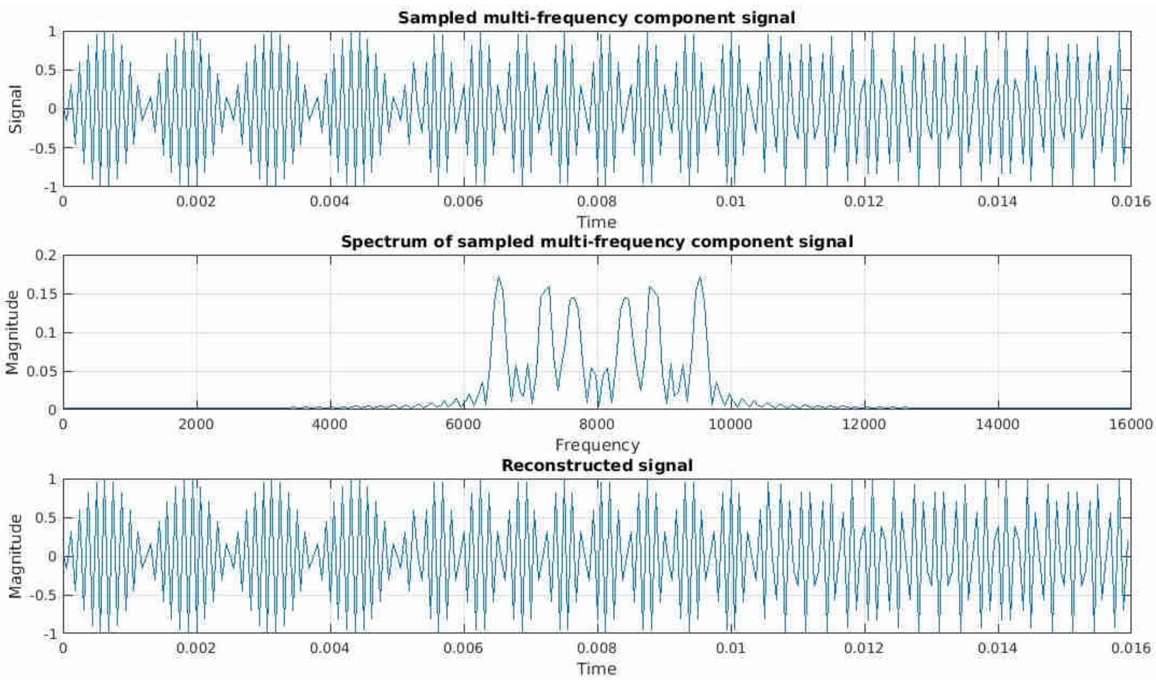
kur f_0 ir mūsu sākotnējā signāla frekvence. Singāla, tā spektra un rekonstrukcijas aina pie šāda nosacījuma nemainās, kaut arī būtībā signāls nu jau ir pa visam cits.



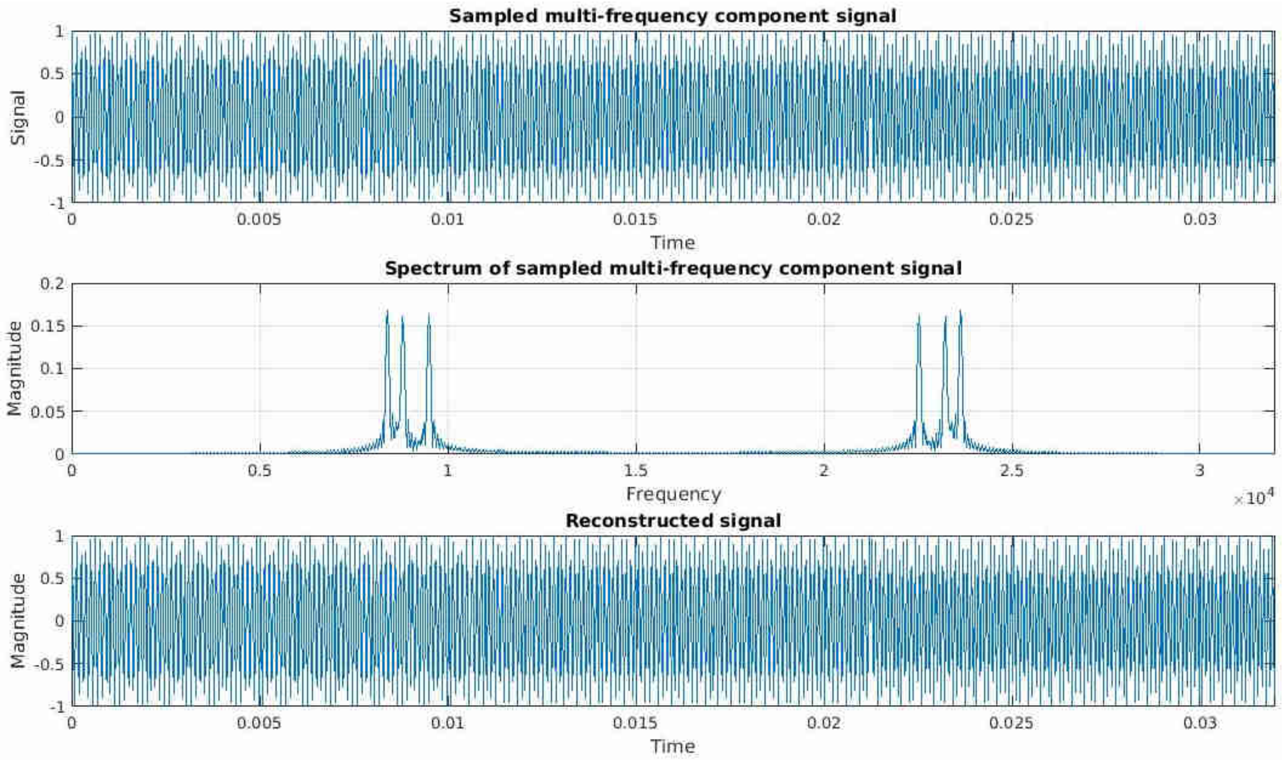
3.5 Diskretizācijas frekvences maiņa

Nākamajā darba solī mēs izmanījām diskretizācijas frekvenci uz divreiz lielāku. Tagad neizpildās nedz nosacījums (4), nedz arī *nolašu teorēma*. Rezultātā mūsu signāls vairs netiek pareizi nolasīts. Tomēr nepareizā signāla rekonstrukcija notiek veiksmīgi.

Mēs redzam, ka signāls ar izmainīto diskretizācijas frekvenci $F_d = 16k$, vairs netiek pareizi nolasīts, jo tā frekvence vairs nav saskaņota ar diskretizācijas frekvenci. Tomēr DFT pareizi iegūst signāla spektru.



Lai atgūtu signāla spektru pareizajā spektra daļā - kreisajā, mums oriģinālā diskretizācijas frekvence ir jāpalielina 4 reizes.



4 SECINĀJUMI

Šajā darbā mēs parādījām, ka DFT ļauj iegūt signāla spektru un inversā DFT ļauj oriģinālo signālu rekonstruēt bez zudumiem, ja tiek ievērota *nolašu teorēma*. Mēs redzējām, ka praktiski darbojas (4) nosacījums. T.n. ka diskrēta signāla spektrs ir periodisks un nav nozīmes vai šim signālam frekvence būs f_0 vai $f_0 + F_d$. Jānorāda arī ka to pašu spektrālo ainu varam signālam iegūt arī $f = F_d - f_0$ gadījumā, tomēr tad mēs redzētu fāzes maiņu laika apgabalā. Katrā ziņā atpazīt no spektra ainas šādu frekvences izmaiņu iespējams, kad palielinam diskretizācijas frekvenci. Mēs varam iegūt jaunā signāla ar frekvencēm par vienu frekvenču periodu uz priekšu frekvenču ainu iegūt pareizajā - kreisajā spektra pusē, ja palielinam oriģinālo diskretizācijas frekvenci 4 reizes.

5 PIELIKUMĀ

Faili:

```
lab02.m
lab02_fedit.m
lab02_1600.m
lab02_4uzd_a.m
```