Laboratorijas darba Nr. 1
TAISNSTŪRA IMPULSI AR SAMĒRU VIRS 2. SPEKTRA PLATUMA NOVĒRTĒŠANA.
ATSKAITE

Mārtiņš Dundurs
rect0 grupa, apl. nr.

2018. gada 2. janvārī

1 DARBA MĒRĶI

Šī darba mērķis ir konstruēt divu dažādu taisnstūra signālu ar dažādu samēru grafikus. Kā arī novērtēt taisnstūra signāla ar samēru 8 spektra platumu ar divām metodēm - (1) ar *amplitūdu metodi* un ar (2) *enerģētisko metodi*.

2 TEORĒTISKAIS PAMATOJUMS

Vispirms priekš signālu uzskates mēs konstruējām tos laika domēnā. Mums svarīgi šeit ir fiksēt signāla periodu T, signāla amplitūdu U un signāla samēru, kas norāda par cik reižu impulss ir īsāks kā viss tā periods. Signālu attēlošanai mēs izmantojām `stairs()` funkciju.

2.1 Furjē komplekso koeficientu izvedums

Mūsu tālākais nolūks bija konstruēt attiecīgo signālu spektrus. Lai mēs to varētu izdarīt, mums pietiek atrast Furjē kompleksos koeficientus $\dot{C}_k$ un $\dot{C}_{1k}$ katrai frekvencei, kuru mēs vēlamies attēlot. Lai atrastu Furjē kompleksos koeficientus, mē s izmantosim Furjē kompleksā koeficienta vispārīgo formulu.

$$\boxed{\dot{C}_k = \frac{\Omega}{2\pi}\int_{-\pi/\Omega}^{\pi/\Omega} s(t)e^{-jk\Omega t}dt} \tag{1}$$

Ω ir signāla fundamentālā leņķiskā frekvence: $\Omega = 2\pi/T$. To ievietojot formulā

$$\dot{C}_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} s(t)e^{-jk(2\pi/T)t}dt.$$

Mūsu impulsam ir ne-nulles vērtības tikai laikā no nulles līdz impulsa ilgumam τ

$$\dot{C}_k = \frac{1}{T}\left(\int_{-T/2}^{0} 0e^{-jk(2\pi/T)t}dt + \int_{0}^{\tau} Ue^{-jk(2\pi/T)t}dt + \int_{\tau}^{T/2} 0e^{-jk(2\pi/T)t}dt\right)$$

$$\dot{C}_k = \frac{1}{T}\int_{0}^{\tau} Ue^{-jk(2\pi/T)t}dt\ .$$

Tā kā $\tau = T/r$, kur r - impulsa samērs ar periodu, tad

$$\dot{C}_k = \frac{1}{T}\int_{0}^{T/R} Ue^{-jk(2\pi/T)t}dt = \frac{U}{T}\frac{1}{-jk\frac{2\pi}{T}}e^{-jk\frac{2\pi}{T}t}\Big|_{0}^{T/R} = \frac{U}{-jk2\pi}\left(e^{-jk\frac{2\pi}{r}} - 1\right) =$$

$$= \frac{U}{-jk2\pi}\left(e^{-jk\frac{\pi}{r}}e^{-jk\frac{\pi}{r}} - e^{-jk\frac{\pi}{r}}e^{jk\frac{\pi}{r}}\right) = \frac{U}{-jk2\pi}e^{-jk\frac{\pi}{r}}\left(e^{-jk\frac{\pi}{r}} - e^{jk\frac{\pi}{r}}\right) = \frac{U}{k\pi}e^{-jk\frac{\pi}{r}}\left(\frac{e^{jk\frac{\pi}{r}} - e^{-jk\frac{\pi}{r}}}{j2}\right) =$$

$$= \frac{U}{k\pi}e^{-jk\frac{\pi}{r}}sin(\pi\frac{k}{r}) = \frac{U}{r}e^{-jk\frac{\pi}{r}}\frac{sin(\pi\frac{k}{r})}{\pi\frac{k}{r}} = \frac{U}{r}e^{-jk\frac{\pi}{r}}sinc(\pi\frac{k}{r})$$

Šo izteiksmi mēs izmantosim definējot Furjē rindas kompleksos koeficientus.

```
Ck = U/2*sinc(k/2).*exp(-1i*pi*k/2);
Ck1 = U/PRatio*sinc(k1/PRatio).*exp(-1i*pi*k1/PRatio);
```

Eksponente $e^{-jk\frac{\pi}{r}}$ parāda signāla nobīdi laikā - fāzi. Tās modulis ir 1. Tāpēc mēs varam rakstīt

$$|\dot{\mathbf{C}}_{\mathbf{k}}| = \frac{\mathbf{U}}{\mathbf{r}}\left|\mathbf{sinc}(\pi\frac{\mathbf{k}}{\mathbf{r}})\right| \tag{2}$$

Šo izteiksmi mēs arī izmantosim konstruējot spektra grafiku:

```
stem(k/2,abs(Ck))
stem(k1/PRatio,abs(Ck1),'r')
```

2.2 Signāla spektra platuma novērtēšana ar amplitūdu metodi

Amplitūdu metodes būtība ir salīdzināt spektra amplitūdas ar kādu minimālo amplitūdu, kas norādīs uz spektra platuma robežu. Šī metode ļauj mums spriest par signāla enerģiju, jo apmlitūdas ir kvadrātiski proporcionālas signāla vidējai jaudai

$$P_s = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}|s(t)|^2dt. \tag{3}$$

Šeit mēs pieņemam ka $R = const. = 1\Omega$

2.3 Signāla spektra platuma novērtēšana ar enerģētisko metodi

Mēs vidējo jaudu atrodam pēc formulas (3).

$$P_{vid} = \frac{1}{T}\int_{0}^{\tau}|s(t)|^2dt = \frac{U^2}{T}\tau. \tag{4}$$

Šī vidējā jauda ir vienāda ar vidējo jaudu, to apskatot frekvenču domēnā (no spektra koeficientiem). To izsaka *Parsevāla vienādība*

$$\mathbf{P}_{\mathbf{vid}} = \sum_{\mathbf{k}=-\infty}^{\infty}|\dot{\mathbf{C}}_{\mathbf{k}}|^{\mathbf{2}}$$

Mēs gribam noteikt to frekvenču daļu, kura izdara 90% ($a = 0.9$) ieguldījumu vidējā jaudā. Tā kā vislielāko ieguldījumu jaudā sniegs pirmās frekvences un katra nākamā aizvien mazāku, mēs varam rakstīt

$$aP_{vid} \leqslant |\dot{C}_0|^2 + 2(|\dot{C}_1|^2 + |\dot{C}_2|^2 + ... + |\dot{C}_N|^2) \ . \tag{5}$$

Mūsu kodā šo procedūru izsaka

```
Psig1 = 2*cumsum(abs(Ck1).^2)-abs(Ck1(1))^2;
```

Spektra platums atrodams pēc

$$\Delta F = \frac{N}{T} \ ,$$

bet, tā kā mūsu periods ir $T = 1$, tad spektra platums sakritīs ar koeficienta numuru.

3 DARBA REZULTĀTI

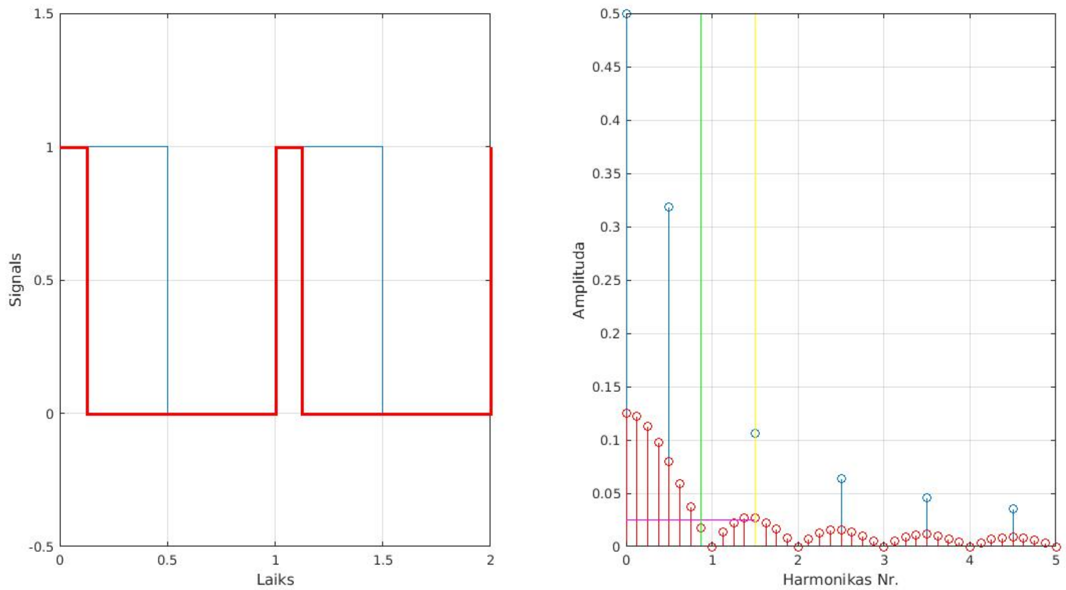

Figure 1: Taisnstūra signāls laika un frekvences domēnā

Mūsu programma izvada:

```
Amplitude method, max(k) = 12
Energy method, max(k) = 7
```

Tātad pēc amplitūdu metodes mūsu spekrta platums ir 12 harmonikas, bet pēc enerģijas metodes - 7.

4 SECINĀJUMI

Mēs šajā darbā esam konstruējuši divu dažādu taisnstūra signālu ar dažādiem samēriem laika grafikus un arī spektra sadalījumu. Mēs redzam, ka taisnstūra impulsam, kuram ir mazāks platums attiecībā pret tā periodu, spektrālā aina sāk atgādināt aperiodiska signāla spektrālā blīvuma raksturu.

Tāpat mēs novērtējām mūsu šaurākā signāla spektra platumu ar divām metodēm - ar amplitūdu metodi un enerģētisko metodi. Izmantojot amplitūdu metodi, mēs noteicām pēdējo koeficientu, kura amplitūda pārsniedz 20% no amplitūdas koeficientam ar maksimālo amplitūdu. Mūsu programma šo spektra platumu atrada kā 12.

Pēc enerģētiskās metodes mūsu uzdevums bija atrast spektra platumu tam pašam signāla, kurā sakoncentrēti 90% no signāla enerģijas. Mēs izmantojām *Parsevāla vienādību* un *Beseļa nevienādību* un noteicām, ka šāda enerģijas proporcija būs sakoncentrēta 7 koeficientu spektrā.

5 PIELIKUMS

Pielikumā fails lab01.m

```
clc, clear

N = 5;
U = 1;

PRatio = 8;
a0 = 0.2;
a1 = 0.9;

T = 1;
Timp = T/PRatio;

k = 0:2*N;
Ck = U/2*sinc(k/2).*exp(-1i*pi*k/2);

k1 = 0:PRatio*N;
Ck1 = U/PRatio*sinc(k1/PRatio).*exp(-1i*pi*k1/PRatio);

%% Draw plots of individual variants

% Plot both signals
subplot(121);
t1 = [0 T/2 T T+T/2 2*T];
t2 = [0 Timp T T+Timp 2*T];
signals = [U 0 U 0 U];
stairs(t1,signals), hold on
stairs(t2,signals,'r','linewidth',2), hold off
grid on, ylim([-U/2 3*U/2])
xlabel('Laiks'); ylabel('Signals');

% Plot both spectrums
subplot(122), stem(k/2,abs(Ck)), hold on
stem(k1/PRatio,abs(Ck1),'r'), hold off
grid on, xlabel('Harmonikas Nr.'); ylabel('Amplituda');

%% Calculate effective spectrum bandwidth

% Amplitude method
maxVal = max(abs(Ck1));
kA = k1(abs(Ck1) > a0*maxVal);
disp(['Amplitude method, max(k) = ' num2str(kA(end))]);
hold on,
plot([1 1]*kA(end)/PRatio,[0 U/2],'y');
plot([0 kA(end)/PRatio],a0*maxVal*[1 1],'m');

% Average power method
Pavg = U^2*Timp/T;
Psig1 = 2*cumsum(abs(Ck1).^2)-abs(Ck1(1))^2;
kP = k1(Psig1 > a1*Pavg);
disp(['Energy method, max(k) = ' num2str(kP(1))]);
plot([1 1]*kP(1)/PRatio,[0 U/2], 'g'), hold off;
```