최고의 강의를 책으로 만나다

# 자료구조와 알고리즘 with 파이썬



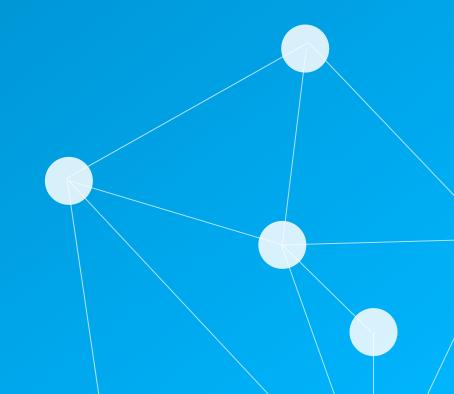
reatest Of All Time 시리즈 | 최영규 지음

수강생이 궁금해하고, 어려워하는 내용을 가장 쉽게 풀어낸 걸작!

\*\*\*\*\*\* \*\*\*\*\* \*\*\*\*\* \*\*\*\*\*\* \*\*\*\*\*\* 선전이 두렵지 않도록 \*\*\*\*\*\* 산세한 코드 설명 \*\*\*\*\*\*\*

ᄉᄮ생능북스

## SW알고리즘개발 7주차



## 4장. 트리



04-1 트리란?

04-2 이진 트리

04-3 이진 트리의 연산

04-4 모스 코드 결정 트리

04-5 수식 트리

## 4.4 모스 코드 결정 트리



- 새뮤얼 모스(Samuel Morse)
  - SOS → ••• --- •••

문자	부호	문자	부호	문자	부호
Α	• -	J	•	S	• • •
В	-•••	K	- • -	Т	_
С	-•-•	L	• - • •	U	• • -
D	-••	М		V	• • • -
E	•	N	-•	W	•
F	• • - •	0		Χ	-••-
G	•	Р	• •	Υ	-•
Н	••••	Q	•-	Z	••
I	• •	R	• - •		

## ASCII 코드 표 (알파벳 ASCII Code Table)

10진수	부호	10진수	부호
065	Α	097	а
066	В	098	b
067	С	099	С
068	D	100	d
069	Е	101	е
070	F	102	f
071	G	103	g
072	Н	104	h
073	I	105	i
074	J	106	j
075	K	107	k
076	L	108	1
077	М	109	m
078	N	110	n
079	0	111	0
080	Р	112	р

081	Q	113	q
082	R	114	r
083	S	115	S
084	Т	116	t
085	U	117	u
086	V	118	٧
087	W	119	W
088	X	120	X
089	Υ	121	у
090	Z	122	Z

#### 문자를 모스 코드로 변환하는 과정: 인코딩

문자에 대응되는 코드를 표에서 찾아 순서대로 출력
 코드 표:

```
table =[('A', '.-'), ('B', '-...'), ('C', '-.-.'), ('D', '-..'), ('E', '.'), ('F', '..-.'), ('G', '--.'), ('H', '....'), ('I', '...'), ('I', '...'), ('J', '.---'), ('K', '-.-'), ('L', '.-..'), ('M', '--'), ('N', '-.'), ('0', '---'), ('P', '.--.'), ('Q', '--.-'), ('R', '.-.'), ('S', '...'), ('T', '-'), ('U', '..-'), ('V', '..-'), ('W', '.--'), ('X', '-..-'), ('Y', '-.--'), ('Z', '--..')]
```

• 인코딩 함수

```
def encode(ch): idx = ord(ch) - ord('A') # 리스트에서 해당 문자의 인덱스 return table[idx][1] # 해당 문자의 모스 부호 반환
```

#### 모스 코드를 문자로 변환하는 과정: 디코딩

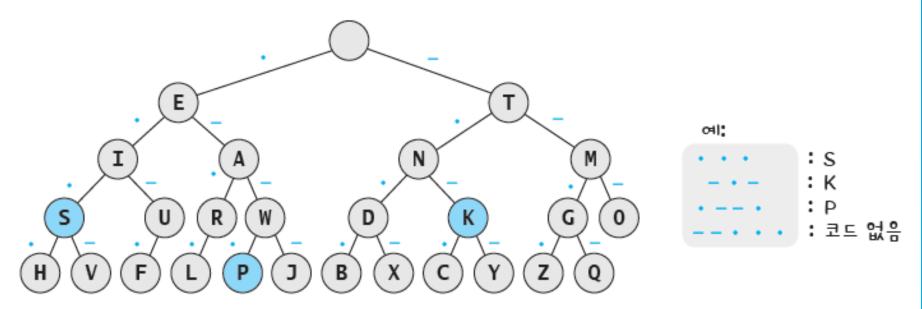
- 모스 코드가 주어졌을 때 해당하는 알파벳을 추출
   표의 모든 항목을 하나씩 검사해야 함 → 비효율적
- 비효율적인 디코딩 함수

```
def decode_simple(morse):
    for tp in table : # 모스 코드 표의 모든 문자에 대해
    if morse == tp[1] : # 찾는 코드와 같으면
    return tp[0] # 그 코드의 문자를 반환
```

• 개선 방안? 결정 트리를 이용한 디코딩

#### 결정 트리를 이용한 모스 코드의 디코딩

- 결정 트리(decision tree)
  - 여러 단계의 복잡한 조건을 갖는 문제에 대해 조건과 그에 따른 해결방법을 트리 형태로 나타낸 것
- 모스 코드를 위한 결정 트리
  - 최대 트리의 높이 만큼만 비교 → 디코딩이 효율적



#### 결정 트리를 이용한 모스 코드의 디코딩

- 모스 코드를 위한 결정 트리 만들기
  - ① 빈 루트 노드를 만들고 모스 코드표의 각 문자를 하나씩 트리에 추가
  - ② 문자를 추가할 때 루트부터 시작하여 트리를 타고 내려감. 만약 타고 내려갈 자식 노드가 None이면 새로운 노드를 추가하는데, 노드만 추가할 뿐이지 그 노드의 문자는 아직 결정할 수 없음 - 각 모스 코드에 대해, ·이면 왼쪽으로, -이면 오른쪽으로 트리의 노드를 따라 감
  - ③ 마지막 코드의 노드에 도달하면 그 노드에 문자를 할당
- 결정 트리를 이용한 디코딩

```
def decode(root, code):
    node = root # 루트 노드에서 시작
    for c in code : # 각 부호에 대해
        if c == ' · ' : node = node.left # 점(·): 왼쪽으로 이동
        elif c=='-' : node = node.right # 선(-): 오른쪽으로 이동
    return node.data # 문자 반환
```

#### 모스 코드 결정 트리



```
def make_morse_tree():
   root = TNode( None, None, None )
   for tp in table:
      code = tp[1]
                              # 모스 코드
      node = root
      for c in code:
                          # 맨 마지막 문자 이전까지 --> 이동
        if c == '.':
                        # 왼쪽으로 이동
            if node.left == None : #비었으면 빈 노드 만들기
               node.left = TNode (None, None, None)
            node = node.left # 그쪽으로 이동
         elif c == '-' : # 오른쪽으로 이동
            if node.right == None : # 비었으면 빈 노드 만들기
               node.right = TNode (None, None, None)
            node = node.right # 그쪽으로 이동
                    # 코드의 알파벳
      node.data = tp[0]
   return root
```

#### 테스트 프로그램

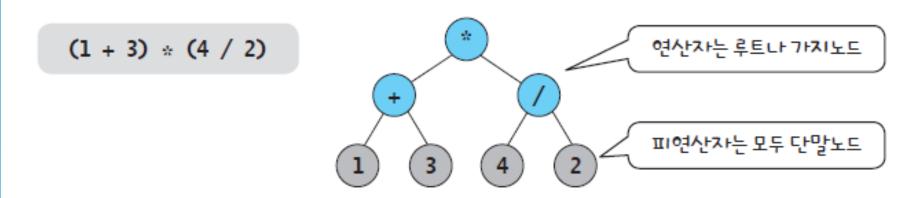


```
str = input("입력 문장 : ")
mlist = []
for ch in str:
                            입력 문자열의 각 문자를 순서 대로
                          ____ 모스코드로 변환하여 리스트에 추가
    code = encode(ch) (
    mlist.append(code)
print("Morse Code: ", mlist)
print("Decoding:", end='')
for code in mlist:
                                           리스트의 모스 코드를 순서 대로 디코딩한
    ch = decode(morseCodeTree, code)
                                         ---- 문자를 화면에 출력
    print(ch, end='')
print()
    🕮 실행 결과
   입력 문장 : GAMEOVER _{A} _{M} _{E} _{O} _{V} _{E} _{R} Morse Code: G ['--.', '--', '--', '--', '---', '---', '---']
    Decoding : GAMEOVER
```

## 4.5 수식 트리



- 수식 트리(Expression Tree)
  - 산술식을 트리 형태로 표현한 이진 트리



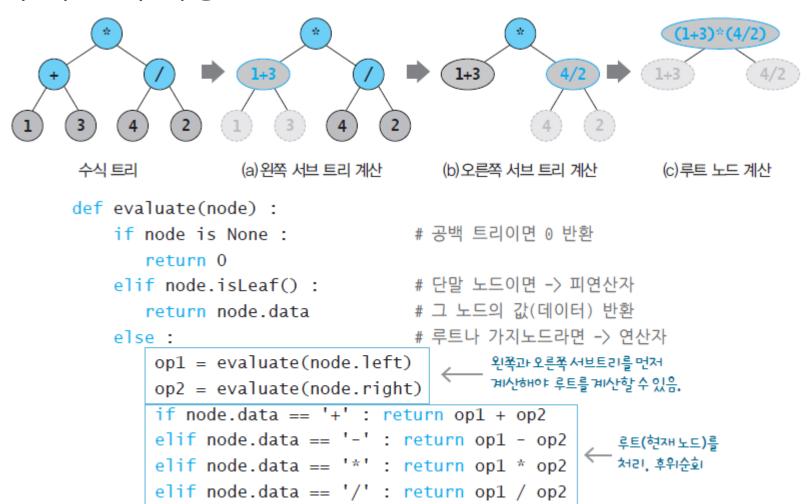
- 수식 트리 만들기
- 수식 트리의 계산

#### 수식 트리의 계산

(1 + 3) \* (4 / 2)



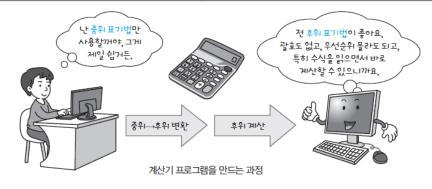
• 후위 순회 사용



#### 수식의 표현 방법



전위(prefix)	중위(infix)	후위(postfix)		
<b>연산자</b> 피연산자1 피연산자2	피연산자1 <b>연산자</b> 피연산자2	피연산자1 피연산자2 <b>연산자</b>		
+ A B	A + B	A B +		
+ 5 * A B	5 + A * B	5 A B * +		



#### • 후위 표기의 장점

- 괄호를 사용하지 않아도 계산 순서를 알 수 있다.
- 수식을 읽으면서 바로 계산 중위표기는 괄호와 연산자의 우선 순위때문에 식을 끝까지 읽은 다음에야 계산할 수 있음
- 연산자의 우선순위를 생각할 필요가 없음. 식 자체에 우선 순 위가 이미 포함

#### 후위 표기 식으로 수식 트리 만들기



- 맨 뒤에서 앞으로 읽으면서 노드을 생성하고, 재귀적으로 자식 노드를 채워 감
- 오른쪽 자식이 먼저 왼쪽이 그 다음에 처리

return BTNode(float(token))

- 입력 수식 : 후위 표기 수식 (예:13 + 42 / \*)
- 루트 노드 반환

```
token = expr.pop()

if token in "+-*/" :

node = BTNode(token)
node.right= buildETree(expr)
node.left = buildETree(expr)
return node

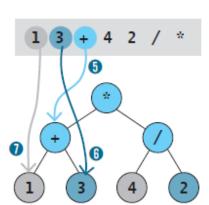
else :

pop()으로맨뒤의 요소를 꺼냄.

전산자이면 노드를 만들고, 오른쪽과
은 왼쪽순으로 서브트리를 순환호출을 이용해만듦.
마지막으로 노드 반환.

피연산자이면 단말노드이므로 노드를
```

만들어 바로 반화



## 예: 후위 표기 식으로 수식 트리 만들기 🔭



- 후위표기 수식: 13 + 42/\*
- 첫 번째 연산: \*. \*는 두 개의 피연산자를 필요. 이 연산자는 트리의 루트 노드가 되며, 오른쪽과 왼쪽 자식을 차례로 채워가게 됨
- 2. 두 번째 연산 : /. \*의 오른쪽 자식 노드를 찾기 위해 왼쪽으로 이동하여 / 처리. / 는 두 개의 피연산자가 필요
- 3. 세 번째 연산: 2 . /의 오른쪽 피연산자는 2. 이 값은 리프노드로 삽입
- 4. 네 번째 연산: 4 . /의 왼쪽 피연산자는 4. 이 값은 리프노드로 삽입. 즉 /의 왼쪽 자식 트리 완성
- 5. 다섯 번째 연산: + . \* 연산자의 왼쪽 피연산자를 찾기 위해 + 연산 를 처리. + 연산자는 두 개의 피연산자을 필요로하며, 트리의 왼쪽 서브트리의 루트가 됨
- 6. 여섯 번째 연산: 3. + 연산자의 오른쪽 피연산자는 3. 리프노드로 삽입
- 7. 일곱 번째 연산: 1. + 연산자의 왼쪽 피연산자는 1. 리프노드로 삽입



#### 수식 트리 순회:

- 전위 순회 (Preorder): \* + 1 3 / 4 2
- 중위 순회 (Inorder): 1 + 3 \* 4 / 2
- 후위 순회 (Postorder): 1 3 + 4 2 / \*

#### 중위표기 수식을 후위표기 수직으로 변환



#### 1. 연산자 우선순위 정의

- +, -: 우선 순위 1
- \*, / : 우선 순위 2
- 괄호(와): 우선 순위 3

#### 2. 알고리즘

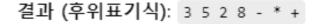
- **출력 리스트** (후위표기식을 저장)
- 스택 (연산자와 괄호를 임시로 저장)
- 단계 1: 수식을 왼쪽에서 오른쪽으로 차례대로 한 토큰씩 읽기
- 단계 2: 각 토큰에 대해 처리
  - 숫자는 후위표기식에서 바로 사용되므로 출력 리스트에 추가
  - 연산자가 스택에 있는 연산자보다 우선순위가 낮거나 같으면, 스택에 있는 연산자를 출력 리스트로 옮김. 그러고 나서 현재 연산자를 스택에 추가
  - 여는 괄호 (인 경우 스택에 추가
  - · 닫는 괄호 )인 경우 스택에서 여는 괄호가 나올 때까지 연산자를 출력 리스트로 옮김
- 단계 3: 수식이 끝나면, 스택에 남아있는 모든 연산자를 출력 리스트로 옮김

#### 예시: 3 + 5 \* (2 - 8)

#### 예시







#### 테스트 프로그램



```
str = input("입력(후위표기): ") # 후위표기식 입력

expr = str.split() # 토큰 리스트로 변환

print("토큰분리(expr): ", expr)

root = buildETree(expr) ( 후위표기식을 수식트리로 만들고 루트를 반환

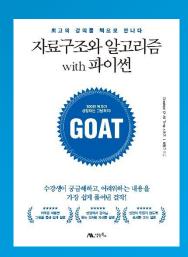
print('\n 전위순회: ', end=''); preorder(root)

print('\n 중위순회: ', end=''); inorder(root)

print('\n후위순회: ', end=''); postorder(root)

print('\n계산 결과 : ', evaluate(root)) # 수식 트리 계산
```

# 일 실행 결과 입력(후위표기): 1 3 + 4 2 / \* 토큰분리(expr): ['1', '3', '+', '4', '2', '/', '\*'] 전위 순회: ( \* ( + ( 1.0 ) ( 3.0 ) ) ( / ( 4.0 ) ( 2.0 ) ) ) + 중위 순회: 1.0 + 3.0 \* 4.0 / 2.0 후위 순회: 1.0 3.0 + 4.0 2.0 / \* 계산 결과 : 8.0 계산 결과 : 8.0



CHAPTER 5

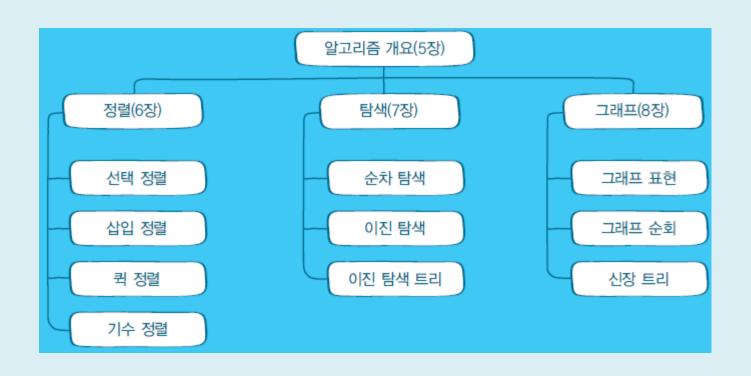
알고리즘 개요

## 5장. 알고리즘 개요



05-1 알고리즘이란?

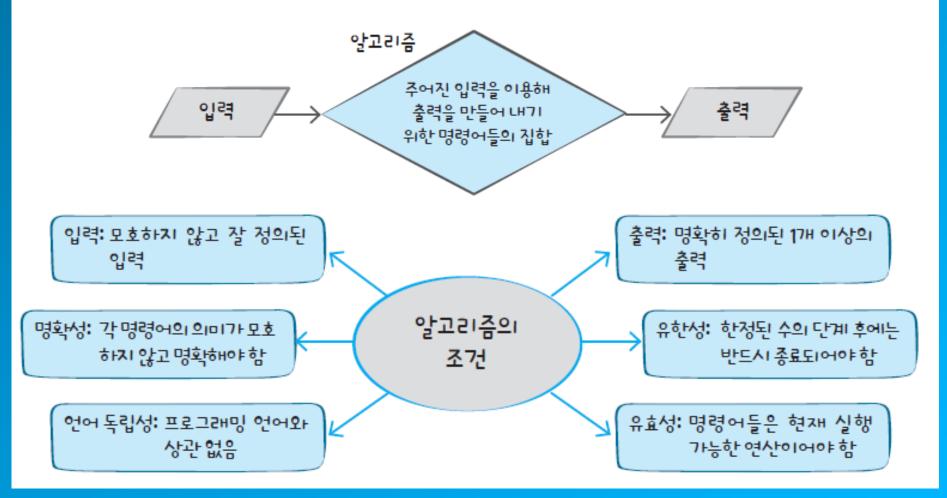
05-2 알고리즘의 성능 분석



## 5.1 알고리즘이란?



- 알고리즘 (algorithm)
  - 주어진 문제를 해결하기 위한 단계적인 절차



#### 알고리즘의 기술 방법



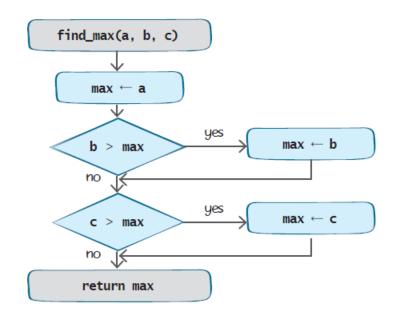


#### (1) 자연어 표현

#### $find_max(a, b, c)$

a를 최댓값을 저장하는 변수 max에 복사합니다. 만약 b가 max보다 크면 b를 max에 복사합니다. 만약 c가 max보다 크면 c를 max에 복사합니다. max를 반환합니다.

#### (2) 흐름도 표현



#### 알고리즘의 기술 방법



#### (3) 유사 코드 표현

#### (4) 파이썬 표현

#### 바로 실행할 수 있음!

#### 5.2 알고리즘의 성능 분석



- 성능의 기준
  - 연산량 : 알고리즘이 얼마나 적은 연산을 수행하는가?
  - 메모리 사용량 : 얼마나 적은 메모리 공간을 사용하는가?
- 시간 효율성 분석 방법
  - 실행 시간 측정 방법
  - 복잡도 분석

#### 실행 시간 측정 방법



• time 모듈을 이용한 실행시간 측정 예

```
      01: import time
      # time 모듈 불러오기

      02: start = time.time()
      # 현재 시각을 start에 저장(시작 시각)

      03: testAlgorithm(input)
      # 실행시간을 측정하려는 알고리즘 호출

      ...
      ...

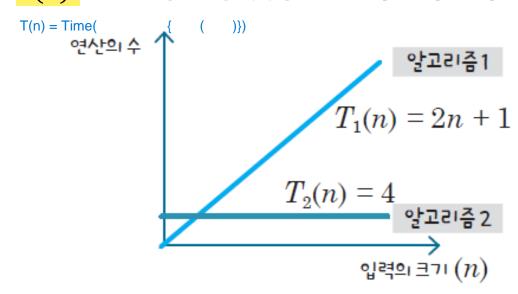
      05: end = time.time()
      # 현재 시각을 end에 저장(종료 시각)

      06: print("실행시간 = ", end-start)
      # 실제 실행시간(종료-시작)을 출력
```

- 문제점
  - 구현해야 함
  - 같은 조건의 HW, SW 환경과 언어로 비교해야 함
  - 실험된 입력에 대해서만 실행 시간을 주장 가능

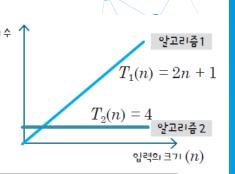
## 복잡도 분석(Complexity Analysis) 방법

- 알고리즘의 성능 평가 > 알고리즘의 복잡도 분석
  - 알고리즘을 구현하지 않고
  - 알고리즘의 시간복잡도(Time Complexity)
  - 알고리즘의 <mark>공간 복잡도</mark>(Space Complexity)
- 알고리즘의 복잡도 표기 : 복잡도 함수 T(n)
  - 말고리즘에서 얼마나 많은 연산이 실행되는지를 계산
  - T(n): 연산의 실행 횟수를 입력크기 n에 대한 함수로  $\pi$ 기



#### 예: 알고리즘의 복잡도 함수 계산

- 1부터 n까지 합을 구하는 두 가지 알고리즘
  - 알고리즘 1: 반복문 이용



```
01: calc_sum1( n )
02: sum ← 0 # 1회 수행
03: for i ← 1 to n then# n회 수행(반복 제어부)
04: sum ← sum + i # n회 수행(반복문 내부)
05: return sum # 1회 수행
```

- 알고리즘 2: 합 공식 이용

## 알고리즘의 복잡도의 점근적 표기



• 어느 알고리즘이 효율적일까?

알고리즘A

알고리즘 B

문제: n7H의 숫자를 오름차순으로 정렬하라.



$$T(n) = 65536n + 200000$$

65536n + 2000000

$$n^2 + 2n$$
  $T(n) = n^2 + 2n$ 

n(입력의 크기)	<b>알고리즘 A</b> 65536n + 2000000			비교	알고리즘 B $n^2+2n$		
1		2,065,536		>			3
10		2,655,360		>			120
100		8,553,600		>			10,200
1,000		67,536,000		>			1,002,000
10,000		657,360,000		> (r		수록 엄청난 U 필요함	100,020,000
100,000		6,555,600,000		<			,000,200,000
1,000,000		65,538,000,000		<		1,000	,002,000,000
10,000,000		655,362,000,000		<		100,000	,020,000,000
100,000,000		6,553,602,000,000		<		10,000,000	,200,000,000
1,000,000,000		65,536,002,000,000	J	<		1,000,000,002	000,000,000

#### 알고리즘 복잡도의 표현 방법 : 점근적 표기

- 점근적 표기(asymptotic notation):
  - 여러 항을 갖는 복잡도 함수를 최고차항만을 계수 없이 취해 단 순하게 표현하는 방법
  - U력의 크기 n의 증가에 따라 연산량이 얼마나 빨리 증가하는가?
  - 증가속도를 표현
  - 상한/하한/ 동일 등급의 개념 적용
    - 빅오(0) 예: 0(n)
    - 빅오메가(Ω)
      - 예: Ω(n)
    - 빅세타(Θ)
      - 예시: Θ(n)

n(입력의 크기)	<b>알고리즘 A</b> 65536n + 2000000	비교	알고리즘 B $n^2+2n$
1T(n) = 6	55536n + 200000	2T(n	$n) = n^2 + 2n$
1T(n) = 2 1T(n) = 6	T(n) n 5536n 2T(n) = n	2	T(n)

## 빅오(big-O) 표기법

$$3n^{2} + 4n \in O(n^{2})$$

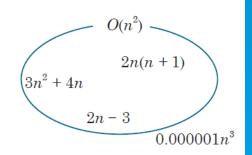
$$2n - 3 \in O(n^{2})$$

$$2n(n + 1) \in O(n^{2})$$

$$3n^{2} + 4n \notin O(n)$$

$$0.000001n^{3} \notin O(n^{2})$$

$$1000^{n} \in O(n!)$$



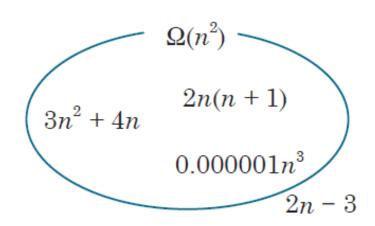
- O(g(n))
  - 증가속도가 g(n)과 **같거나 낮은** 모든 복잡도 함수(T(n))를 포함하는 집합  $T(n) = O(g(n)) \rightarrow \{T(n) <= G(n)\}$  G(n) = upper bound
  - 처리 시간의 상한(upper bound)
  - 이 알고리즘은 어떤 경우에도 g(n)에 비례하는 시간 안에는 반 드시 완료된다는 의미
  - g(n)보다 더 빨리 처리될 수는 있지만 절대로 g(n)보다 더 걸릴 수는 없음
- 시간복잡도를 정확히 분석하기 어려운 경우는 상한을 구해 빅오 표 기법 사용
  - 최악의 상황을 고려한 해결책을 찾기 때문에 빅오 표기법을 주로 사용
- 예시:  $T(n) = 2n + 1 \Rightarrow T(n) \in O(n^2) => T(n) 은 O(n^2)$ 에 속한다.

### 빅오메가(big-omega) 표기법



- $\Omega(g(n))$ 
  - 증가속도가 g(n)과 **같거나 높은** 모든 복잡도 함수를 포함하는 집합
  - 처리 시간의 하한(Lower Bound)
  - $-\Omega(g(n))$ 은 아무리 빨리 처리하더라도 g(n)에 비례하는 시간 이 상은 반드시 걸린다
- 예시:  $T(n) = 2n^3 + 3n \Rightarrow T(n) \in \Omega(n^2) \Rightarrow T(n) \stackrel{\sim}{=} \Omega(n^2)$ 에 속한다.

$$2n^{3} + 3n \in \Omega(n^{2})$$
$$2n(n+1) \in \Omega(n^{2})$$
$$100000n + 8 \notin \Omega(n^{2})$$

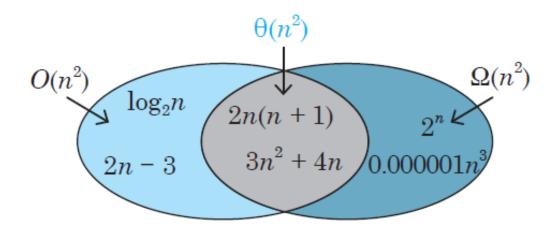


## 빅세타(big-theta) 표기법



- $\Theta(g(n))$ 
  - 증가속도가 g(n)과 **같은** 모든 복잡도 함수를 포함하는 집합
  - 처리 시간이 상한인 동시에 하한
- 시간 복잡을 정확히 계산할 수 있으면 빅세타 표기법을 사용

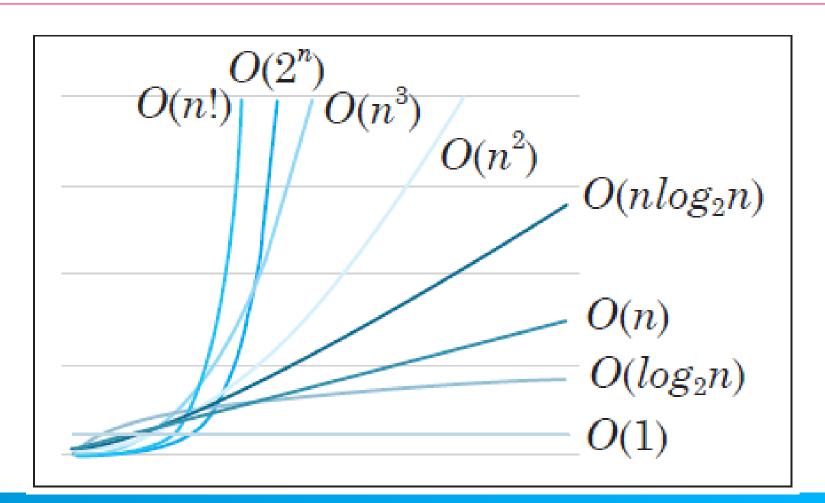
$$3n^{2} + 4n \in \Theta(n^{2})$$
$$2n - 3 \notin \Theta(n^{2})$$
$$0.000001n^{3} \notin \Theta(n^{2})$$



X

# 박오 표기: n이 증가함에 따라 시간복잡도 함수의 증가속도

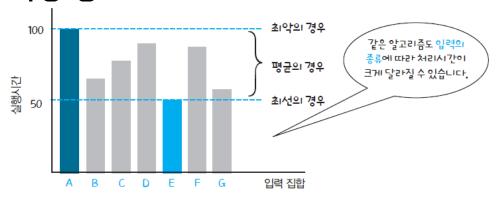
$$O(1) \le O(\log n) \le O(n) \le O(n\log n) \le O(n^2) \le O(n^3) \le O(2^n) \le O(3^n) \le O(n!)$$



## 최선, 최악, 평균적인 효율성



- 최선의 경우(best case)
  - 실행 시간이 가장 적은 경우. 알고리즘 분석에는 큰 의미가 없음
- 평균적인 경우(average case)
  - '평균' : 모든 데이터가 균일하게 탐색 되는 상황을 이미
    - 만일 숫자가 key로 사용될 가능성이 1/n로 동일
  - 알고리즘의 모든 입력을 고려하고 각 입력이 발생할 확률을 고려한 평균 실행 시간. 정확히 계산이 어려움
- 최악의 경우(worst case)
  - 입력의 구성이 알고리즘의 실행시간을 많이 요구하는 경우. 알고리즘 분석하는데 가장 중요



## 예: 리스트에서 최댓값을 찾는 알고리즘

```
01:
    def find_max( A ):
                              # 입력의 크기
02:
        n = len(A)
                             # max 초기화
03:
       max = A[0]
                           # 반복 제어부
04: for i in range(n):
           <u>if A[i] > max :</u> # 반복문 내부 -> n번 반복(가장 많이 처리)
05:
06:
               max = A[i]
07:
                              # 결과 반화
        return max
```

- 입력의 크기 n : 리스트의 크기
- T(n): n이 증가함에 따라 비례하는 수의 연산은?
  - 가장 많이 처리되는 부분: 5행

```
-T(n) = n 		 ( )
```

- 입력의 구성에 따라 알고리즘의 실행 시간에 따른 효율성 차이
  - 순차탐색(linear search)
  - 리스트의 크기가 같다면 내용에 상관없이 효율성에 차이가 없음
  - 최선의 경우, 평균적인 경우, 최악의 경우 동일
  - O(n),  $\Omega(n)$ , O(n)

#### 예: 리스트에서 어떤 값을 찾는 알고리즘

```
01: def find_key( A, key ):
02: n = len(A) # 입력의 크기
03: for i in range(n): # 반복 제어부
04:  if A[i] == key: # 탐색 성공 --> 인덱스 반환
05:  return i
06: return -1 # 탐색 실패 --> -1 반환
```

- 입력의 크기 n : 리스트의 크기
- 순차탐색(linear search)
  - 가장 많이 처리되는 부분: 4행
  - U력의 구성에 따라 탐색 횟수가 달라짐
  - 복잡도 함수의 효율성 차이 → 있음
    - 최선의 경우:  $T(n) = 1 \Rightarrow O(1)$  32
      - $\text{ key } \leftarrow A[0]$
    - 최악의 경우:  $T(n) = n \Rightarrow O(n)$  29
      - Key >= A[n-1] 또는 리스트에 존재하지 않는 경우

32

14

23

• 평균의 경우: 
$$T(n) = \frac{1+2+...+n}{n} = \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n} = \frac{\frac{(10+1)/2}{2} = 5.57 + O(n)}{2}$$

26