π ve H Hiyerarşileri

Tanım Dili : 1. Dereceden Mantık , Set Teorisi , ZFC

07/01/2026

1. Fonksiyon $f^a(b)$ Tanımı

$$f^1(a) := \omega_a,$$

$$f^{b+1}(a) := \underbrace{\omega_{\omega_{\cdots_\omega}}}_{b \text{ kat}}(a),$$

$$f^\lambda(a) := \sup\{f^b(a) \mid 1 \leq b < \lambda\}, \quad \lambda \text{ limit ordinal.}$$

Özellikler:

- $f^a(b)$ artandır: $b_1 < b_2 \implies f^a(b_1) < f^a(b_2)$
- Sabit nokta: $\pi_0 = \sup\{f(x) \mid x \leq \omega_1\}$ ve $\omega_{\pi_0} = \pi_0$
- Limit özellikleri: $f^\lambda(a) = \sup_{b<\lambda} f^b(a)$
- Tanımlanabilirlik: Her $f^a(b)$ ZFC içinde tanımlanabilir bir ordinaldir

2. π Dizileri

$$\pi_0 := \sup\{f(x) \mid x \leq \omega_1\},$$

$$\pi_1 := \sup\{\text{ordinal sayılar tanımlanabilir} \leq \pi_0 \text{ sembollerle}\},$$

$$\pi_2 := \sup\{\text{ordinal sayılar tanımlanabilir} \leq \pi_1 \text{ sembollerle}\},$$

$$\pi_{n+1} := \sup\{\text{ordinal sayılar tanımlanabilir} \leq \pi_n \text{ sembollerle}\},$$

$$\pi_\lambda := \sup\{\pi_n \mid n < \lambda\}, \quad \lambda \text{ limit ordinal.}$$

Özellikler:

- Diziler artandır: $m < n \implies \pi_m < \pi_n$
- Limitler: $\pi_\lambda = \sup_{\alpha<\lambda} \pi_\alpha$
- Her π_n bir ordinaldir ve ZFC içinde set olarak tanımlanabilir
- Sabit noktalar: $\omega_{\pi_n} = \pi_n$

3. H_a Koleksiyonu

$$H_a := \{\pi_n \mid 0 \leq n < \omega_a\}, \quad 0 \leq a \leq \omega_1$$

Özellikler:

- $|H_a| = \aleph_a$
- $H_a \subsetneq H_b$ eğer $a < b$
- $\sup H_a = \pi_{\omega_a}$
- Limitler: $H_\lambda = \bigcup_{a<\lambda} H_a$

4. İki Boyutlu Hiyerarşi H_y^x

Pozitif tam sayılar $x \in \mathbb{N}^+$ ve ordinal y için:

$$(H^1)_y := H_y,$$

$$(H^{x+1})_y := \{(H^x)_n \mid 0 \leq n < \omega_y\},$$

$$(H^\lambda)_y := \bigcup_{m<\lambda} (H^m)_y, \quad \lambda \text{ limit } .$$

Özellikler:

- $|(H^x)_y| = \aleph_y$
- Her $(H^x)_y$ settir ve ZFC uyumludur
- Hiyerarşi: $(H^x)_y \subseteq (H^{x+1})_y$
- Limit aşamalarında union kullanılır
- Her ordinal π_n uygun bir H_a veya $(H^x)_y$ setinin elemanıdır

5. Tüm Koleksiyon HH

$$HH := \{H_a \mid 0 \leq a \leq \omega_1\} = \{HH \setminus \{H_a\} \mid 0 \leq a \leq \omega_1\}$$

Özellikler:

- Her eleman settir
- HH, hiyerarşik büyüme mantığını yansıtır
- Limit ve successor aşamaları ZFC uyumludur

6. Örnekler

- $H_0^1 = \{\pi_0, \pi_1, \pi_2, \dots\}$, $|H_0^1| = \aleph_0$
- $H_0^2 = \{H_0^1, H_1^1, H_2^1, \dots\}$, $|H_0^2| = \aleph_0$
- Genel olarak: $|(H^x)_y| = \aleph_y$ ve tüm ordinals π_n hiyerarşide yer alır